



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 12 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бондарев А.Е., Кувшинников А.Е.**

Сравнительный анализ  
точности солверов пакета  
OpenFOAM для задачи  
невязкого обтекания конуса

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бондарев А.Е., Кувшинников А.Е. Сравнительный анализ точности солверов пакета OpenFOAM для задачи невязкого обтекания конуса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 12. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2017-12](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-12)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-12>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.Е. Бондарев, А.Е. Кувшинников**

**Сравнительный анализ точности солверов  
пакета OpenFOAM  
для задачи невязкого обтекания конуса**

**Москва – 2017**

*Бондарев А.Е., Кувшинников А.Е.*

## **Сравнительный анализ точности солверов пакета OpenFOAM для задачи невязкого обтекания конуса**

Работа представляет численные результаты сравнения точности работы различных солверов программного пакета OpenFOAM на примере известной задачи невязкого обтекания конуса под нулевым углом атаки. Проводится сравнение результатов, полученных с помощью различных солверов OpenFOAM, с известным численным решением данной задачи для различных углов полураствора конуса. Приведены результаты расчетов, проведенных для ряда расчетных сеток.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, уравнения Эйлера, обтекание конуса, солверы OpenFOAM

*Alexander Evgenyevich Bondarev, Artyom Evgenyevich Kuvshinnikov*

## **Comparative analysis of OpenFOAM solvers accuracy for inviscid flow around a cone**

The paper presents the numerical results of comparing the accuracy of different OpenFOAM solvers for well-known problem of inviscid flow around a cone at zero angle of attack. The results for different types of solvers are compared with the previously known numerical solutions of the problem for different cone angles. The results for grid variations are presented also.

**Key words:** mathematical simulation, Euler equations, flow around a cone, OpenFOAM solvers

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-01-00553. Авторы выражают благодарность В.Т. Жукову, О.Б. Феодоритовой, Н.Д. Новиковой за советы и замечания, а также М.В. Крапошину за предоставленную версию солвера.

## **Оглавление**

Введение .....	3
1. Постановка задачи.....	5
2. Солверы OpenFOAM.....	6
3. Организация расчетов и полученные результаты.....	7
3.1. Построение сетки, начальные и граничные условия.....	7
3.2. Расчет осесимметричного течения .....	8
Заключение.....	15
Библиографический список.....	15

## Введение

В последние годы наблюдается довольно частая ситуация, когда необходимо рассчитать обтекание удлиненных тел вращения (УТВ) для конкретного изделия в конкретных условиях. Подобного рода расчеты, как правило, проводятся в практических целях с учетом всех технологических особенностей изделия. Естественно, для подобных расчетов возникает желание применить какой-либо из универсальных коммерческих или открытых программных CFD-комплексов, получивших широкое распространение в последнее время. Однако при попытках применения к конкретному классу изделий подобных комплексов возникают трудности.

Используемые в подобных комплексах каталоги математических моделей и конечно-разностных схем несовершенны. Приемлемость многих моделей для решения сложных задач и определение границ их применимости составляют предмет отдельного исследования. В существенной степени это относится к задачам обтекания УТВ и реализации методов моделирования турбулентности для них. Для конкретного класса УТВ требуется провести большое количество методических расчетов, чтобы показать, что для этого класса выбранный численный метод адекватно описывает вязкое обтекание и выбранная модель турбулентности пригодна. Этими методическими исследованиями часто пренебрегают. Настраивая в используемом программном комплексе параметры численного метода и модели турбулентности, теоретически можно добиться относительного совпадения с экспериментом, однако без проведения методических исследований нет никаких гарантий того, что подобного совпадения удастся достичь при вариации параметров обтекания или геометрических параметров изделия.

В этой ситуации, очевидно, требуется вычислительная технология, которая была бы своего рода эталоном для решения задач обтекания УТВ и помогала регулировать настраиваемые параметры как численных методов, так и моделей турбулентности в различных программных пакетах. В этом качестве было решено воссоздать на уровне современных высокопроизводительных вычислительных средств вычислительную технологию, разработанную ранее в ИПМ им. М.В. Келдыша А.Е. Бондаревым и В.А. Черкашиным под руководством А.В. Забродина. Данная вычислительная технология позволяла в конце 80-х – начале 90-х годов надежно проводить массовые промышленные расчеты УТВ практического назначения. Погрешность коэффициентов аэродинамического сопротивления не превышала 2-3 процентов по сравнению с экспериментальными результатами. Суть данной технологии заключалась в том, что коэффициент аэродинамического сопротивления УТВ  $C_x$ , необходимый для расчетов баллистики исследуемого объекта, рассматривался как сумма трех составляющих:  $C_p$  – сопротивления УТВ при невязком обтекании,  $C_f$  – коэффициента сопротивления трения и  $C_d$  – донного сопротивления. Подобный подход был широко распространен в задачах

массового промышленного анализа аэродинамических свойств УТВ и показывал себя весьма эффективным [1].

Часть этой вычислительной технологии уже реализована. Так, например, для определения коэффициента трения реализована вычислительная методика [2,3], основанная на приближенной полуэмпирической модели, объединяющей результаты экспериментальных исследований Л.В. Козлова [4,5] и метод эффективной длины, предложенный В.С. Авдеевским [6,7]. Данная методика предназначена для определения коэффициента трения и оценки характерных толщин пограничного слоя на УТВ и реализована в виде библиотеки C++.

Для расчета аэродинамических характеристик УТВ при невязком обтекании было предложено использовать программный пакет OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation CFD Toolbox) [8]. Это свободно распространяемый программный продукт, написанный на языке C++. OpenFOAM активно используется в промышленности и в науке, в частности Volkswagen использовал его для моделирования обтекания кузова автомобиля, а страховая компания FM Global исследовала возникновение и распространение пожара в зданиях.

Однако OpenFOAM содержит в себе ряд солверов [9-12], обладающих различными вычислительными свойствами. Следовательно, необходимо проведение методических расчетов, позволяющих оценивать эффективность данных солверов для применения на практике. Данная работа представляет сравнительный анализ точности работы солверов OpenFOAM на задаче невязкого обтекания конусов с различными углами полураствора под нулевым углом атаки. В качестве точного решения традиционно использовались табличные решения [14]. Решения, представленные в [14], получены с помощью конечно-разностных методов для обтекания гладких тел потоком невязкого газа в широком диапазоне чисел Маха и углов полураствора конуса с вариацией угла атаки. Решения представлены в виде таблиц, обладают высокой точностью и на протяжении многих лет используются в качестве точного решения при анализе вычислительных свойств того или иного численного метода.

Изначально сравнение проводилось для четырех солверов [9-12], однако в процессе работы разработчики ИСП РАН предложили присоединить к данному анализу еще один солвер [13], что свидетельствует о востребованности данного исследования и его полезности как для специалистов CFD, так и для разработчиков программного обеспечения для проведения аэродинамических расчетов.

Следует отметить, что подобные сравнения солверов проводились в работах [15-17]. Однако эти сравнения проводились на других примерах и не дают четких рекомендаций по выбору солвера для рассматриваемого класса задач.

## 1. Постановка задачи

Постановка задачи представлена в полном соответствии с работой [14], где рассматриваются результаты невязкого обтекания конусов с различными углами полураствора на различных числах Маха.

Исследуется обтекание УТВ равномерным сверхзвуковым потоком идеального газа под нулевым углом атаки  $\alpha = 0^\circ$  при числе Маха  $M_\infty = 2$ . Исследуемое тело является конусом с углом полураствора  $\beta = 10^\circ - 25^\circ$  с шагом  $5^\circ$ . Условия набегающего потока на входе обозначаются индексом «1», а на выходе — индексом  $\xi$ , так как решение является автомодельным и зависит от безразмерной переменной. Схема течения представлена на рис. 1.

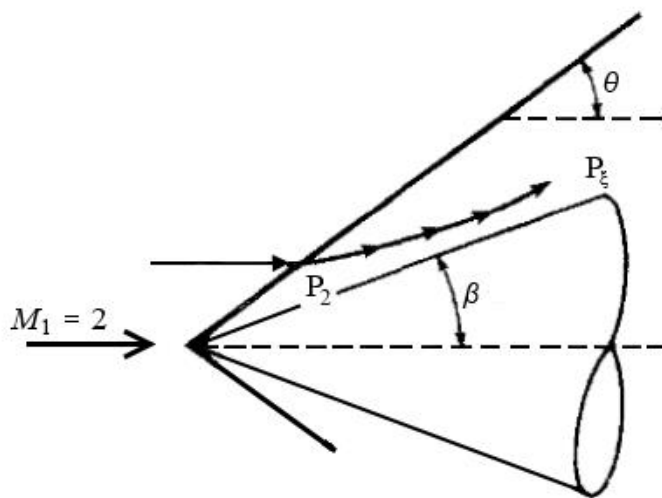


Рис. 1. Схема течения

Для расчета течений газа используются уравнения газовой динамики без вязких членов. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) &= -\nabla p, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{u}$  — вектор скорости с компонентами  $(u, v, w)$ ,  $E = e + |\vec{u}|^2 / 2$  — удельная полная энергия газа,  $e$  — удельная внутренняя энергия газа,  $H = e + p / \rho$  — удельная полная энтальпия.

Система уравнений (1) дополняется уравнением состояния идеального газа  $p = \rho(R/M)T$ ,  $M$  — молярная масса вещества,  $R$  — универсальная газовая постоянная.

## 2. Солверы OpenFOAM

Для сравнения из программного пакета OpenFOAM были выбраны 5 солверов.

А) rhoCentralFoam — основан на центрально-противопотоковой схеме, которая является комбинацией центрально-разностной и противопотоковой схем [2,3]. Суть центрально-противопотоковых схем состоит в специальном выборе контрольного объема, содержащего области двух типов: вокруг граничных точек – первый тип; вокруг центральной точки – второй тип. Границы контрольных объемов первого типа определяются при помощи локальных скоростей распространения возмущений. Преимущество указанных схем состоит в том, что, применяя соответствующую технику уменьшения численной вязкости, можно добиться хорошей разрешимости и для разрывных решений – ударных волн в газовой динамике – и для решений, где основную роль играют вязкие явления.

Б) sonicFoam — основан на алгоритме PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operator) [4]. Основная идея метода PISO заключается в том, что для расчета давления используются два разностных уравнения для поправки поля давления, полученных из дискретных аналогов уравнений моментов и неразрывности. Такой подход связан с тем, что скорректированные первой поправкой скорости могут не удовлетворять уравнению неразрывности, поэтому вводится второй корректор, который позволяет вычислить скорости и давления, удовлетворяющие линеаризованным уравнениям количества движения и неразрывности.

В) rhoPimpleFoam — основан на алгоритме PIMPLE, который является комбинацией алгоритмов PISO и SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [18]. К алгоритму PISO добавляется внешний цикл, благодаря которому метод становится итерационным и позволяет считать с числом Куранта, большим 1.

Г) pisoCentralFoam — комбинация центрально-противопотоковой схемы с алгоритмом PISO [5].

Д) pimpleCentralFoam — комбинация центрально-противопотоковой схемы с алгоритмом PIMPLE [13].

Хочется отметить, что расчеты для всех солверов, за исключением солвера pimpleCentralFoam, проводились с помощью программного пакета OpenFOAM версии 2.3.0. Солвер pimpleCentralFoam не поддерживает OpenFOAM версии 2.3.0 и запускался на OpenFOAM версии 3.0.1.

### 3. Организация расчетов и полученные результаты

#### 3.1. Построение сетки, начальные и граничные условия

На рисунке 2 представлена расчетная область. Постановка граничных условий представлена в таблице 1. На верхней границе, обозначенной в таблице «top», задается условие нулевого градиента для газодинамических функций, обозначаемое в таблице «zeroGradient». Такие же условия задаются на правой границе, обозначаемой «outlet». На левой границе, обозначаемой «inlet», заданы параметры набегающего потока: давление  $P = 101325$  Па, температура  $T = 300$  К, скорость  $U = 694.5$  м/с. На границе конуса «cone» для давления и температуры задается условие нулевого градиента, для скорости задается условие «slip», соответствующее условию непротекания для уравнений Эйлера. Для моделирования осесимметричной геометрии в пакете OpenFoam для передней «front» и задней «back» границ используется специальное условие «wedge». Для оси «axis» в пакете OpenFoam также вводится специальное граничное условие «empty». Это условие задается в случаях, когда вычисления в заданном направлении не проводятся.

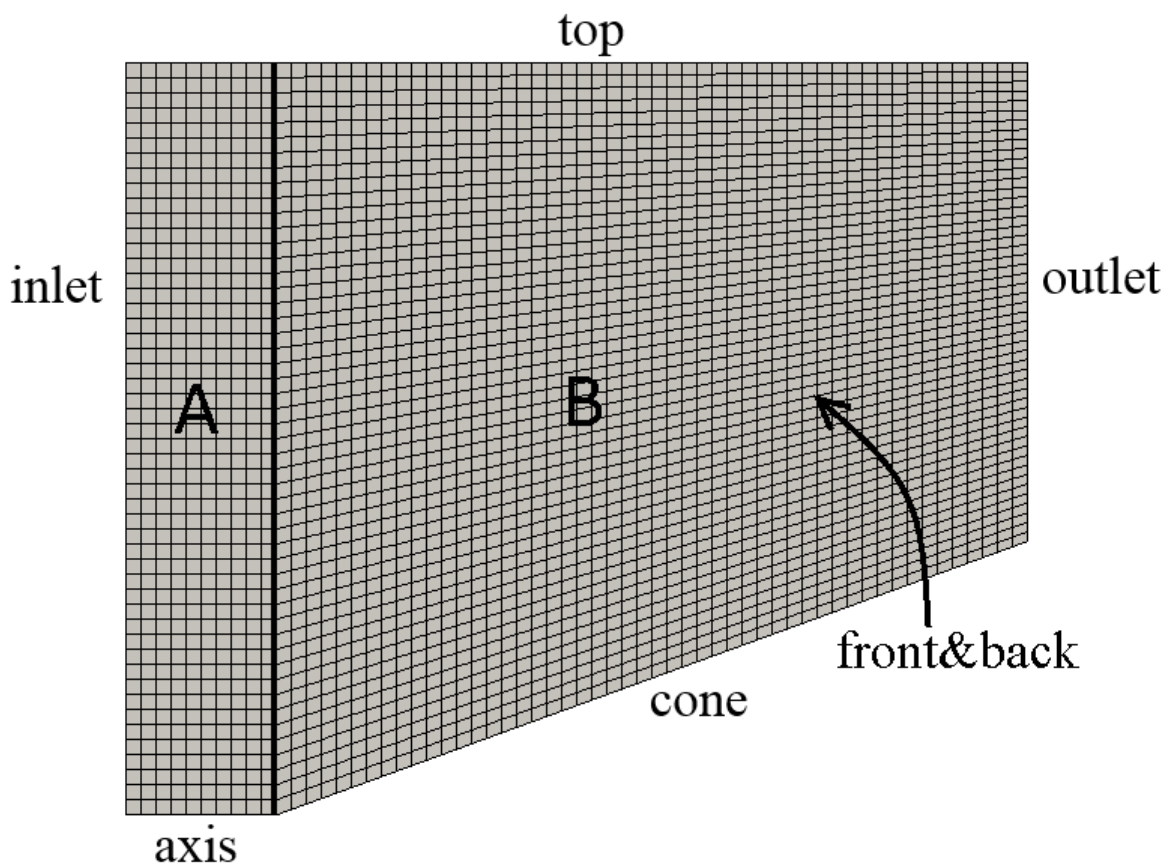


Рис. 2. Расчетная область



Таблица 1

**Граничные условия**

Грань	P	T	U
inlet	101325	300	694.5
outlet	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
axis	empty	empty	empty
top	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
cone	zeroGradient	zeroGradient	slip
front&back	wedge	wedge	wedge

Для оценки влияния сеточного разбиения на точность расчетов расчеты были проведены на трех сетках, обозначенных как *coarse*, *fine*, *finest*. Число ячеек: *coarse* — 3000, *fine* — 12000, *finest* — 48000.

Таблица 2

**Сеточные разбиения в расчетной области**

	A	B
coarse	10x50	50x50
fine	20x100	100x100
finest	40x200	200x200

Начальные условия соответствуют граничным на грани *inlet*, то есть в качестве начальных условий используются параметры набегающего потока: давление  $P = 101325$  Па, температура  $T = 300$  К, скорость  $U = 694.5$  м/с. Также задавались значения молярной массы  $M = 28.96$  и удельной теплоемкости при постоянном давлении  $C_p = 1004$ .

**3.2. Расчет осесимметричного течения**

На рисунках 3 и 4 представлены поля установившегося течения для давления и плотности при использовании солвера *rhoCentralFoam*. Эти рисунки свидетельствуют о том, что в результате установления получена качественная картина течения, соответствующая известным решениям [14].

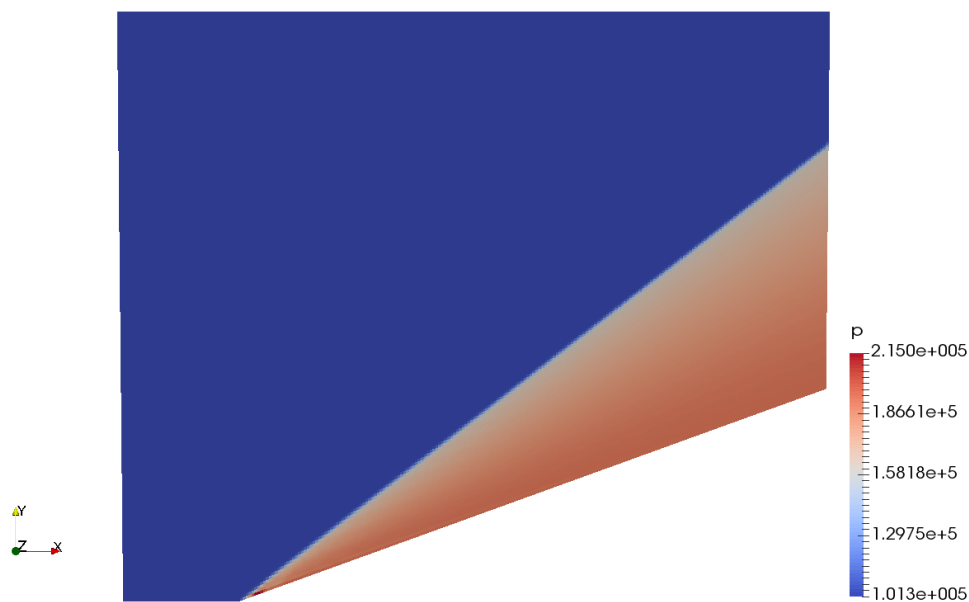


Рис. 3. Поле давления для установившегося течения

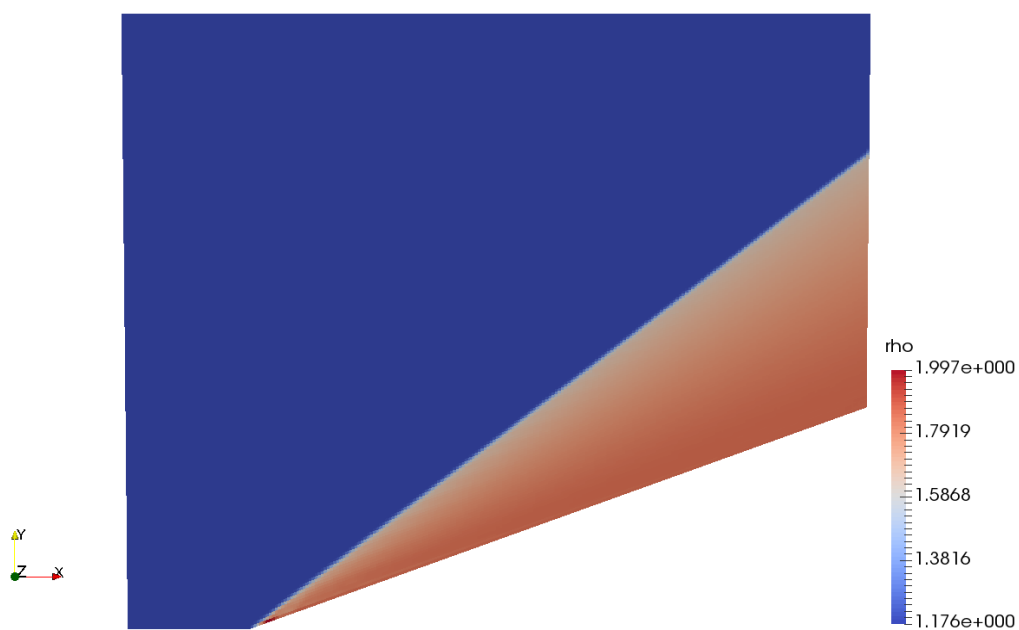


Рис. 4. Поле плотности для установившегося течения

В таблицах (3) – (6) приведены значения для максимальной и средней относительных погрешностей в процентах  $|y_{exact} - y|/|y_{exact}|*100$  на вертикальной прямой при  $x = 3.51$  для угла полураствора  $\beta = 10^\circ - 25^\circ$  с шагом  $5^\circ$ . Жирным выделены минимальные значения.

Таблица 3

**Максимальная и средняя относительная погрешность  
для угла полураствора  $\beta = 10^\circ$**

	1 rhoCentral Foam	2 pisoCentral Foam	3 sonicFoam	4 rhoPimple Foam	5 pimpleCentral Foam
$U_x$	0.20	<b>0.15</b>	0.17	<b>0.15</b>	0.16
	0.07	<b>0.06</b>	0.09	0.09	0.07
$U_y$	8.68	8.49	8.13	<b>6.74</b>	9.75
	2.35	<b>2.29</b>	3.64	3.27	3.0
$p$	<b>0.57</b>	0.72	0.69	0.61	0.8
	<b>0.22</b>	<b>0.22</b>	0.28	0.25	0.27
$\rho$	0.41	0.51	0.45	<b>0.37</b>	0.58
	0.16	<b>0.15</b>	0.18	0.16	0.18

Таблица 4

**Максимальная и средняя относительная погрешность  
для угла полураствора  $\beta = 15^\circ$**

	1 rhoCentral Foam	2 pisoCentral Foam	3 sonicFoam	4 rhoPimple Foam	5 pimpleCentral Foam
$U_x$	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>	0.51	0.47	0.33
	0.12	<b>0.10</b>	0.25	0.25	0.16
$U_y$	5.31	<b>4.30</b>	8.97	7.97	7.14
	1.79	<b>1.55</b>	3.64	3.39	2.72
$p$	0.97	<b>0.88</b>	1.79	1.57	1.39
	0.32	<b>0.29</b>	0.63	0.57	0.49
$\rho$	0.68	<b>0.58</b>	1.19	0.99	1.02
	0.23	<b>0.20</b>	0.40	0.34	0.34

Таблица 5

**Максимальная и средняя относительная погрешность  
для угла полураствора  $\beta = 20^\circ$**

	1 rhoCentral Foam	2 pisoCentral Foam	3 sonicFoam	4 rhoPimple Foam	5 pimpleCentral Foam
$U_x$	<b>0.32</b> 0.18	0.34 <b>0.16</b>	0.42 0.19	0.880 0.24	0.45 0.20
$U_y$	2.82 1.29	<b>2.65</b> 1.27	3.33 <b>1.23</b>	7.30 1.41	3.24 1.63
$p$	1.10 0.34	<b>1.00</b> 0.31	1.58 <b>0.30</b>	3.89 0.38	1.28 0.38
$\rho$	0.76 0.26	<b>0.69</b> <b>0.23</b>	1.50 0.24	3.44 0.30	0.87 0.26

Таблица 6

**Максимальная и средняя относительная погрешность  
для угла полураствора  $\beta = 25^\circ$**

	1 rhoCentral Foam	2 pisoCentral Foam	3 sonicFoam	4 rhoPimple Foam	5 pimpleCentral Foam
$U_x$	0.47 0.21	0.45 0.19	1.21 0.42	0.81 0.45	<b>0.33</b> <b>0.17</b>
$U_y$	2.83 0.96	2.09 0.98	5.86 1.81	3.67 1.67	<b>1.75</b> <b>0.83</b>
$p$	<b>0.92</b> 0.34	1.43 0.33	2.83 0.54	1.41 0.46	1.03 <b>0.26</b>
$\rho$	<b>0.60</b> 0.25	1.17 0.24	1.96 0.36	0.80 0.29	0.82 <b>0.18</b>

Рисунок 5 представляет диаграмму значений максимальной и средней относительной погрешности давления для угла полураствора  $\beta = 10^\circ$  для всех солверов. Нумерация солверов соответствует таблицам.

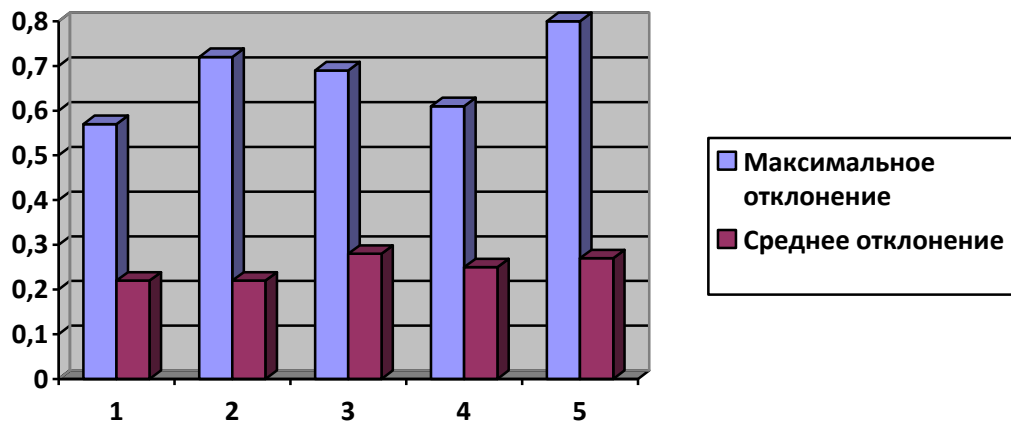


Рис. 5. Максимальная и средняя относительная погрешность давления для угла полураствора  $\beta = 10^\circ$

На рисунках 6, 7 представлено изменение максимальной и средней погрешности давления для всех солверов в зависимости от увеличения угла полураствора конуса.

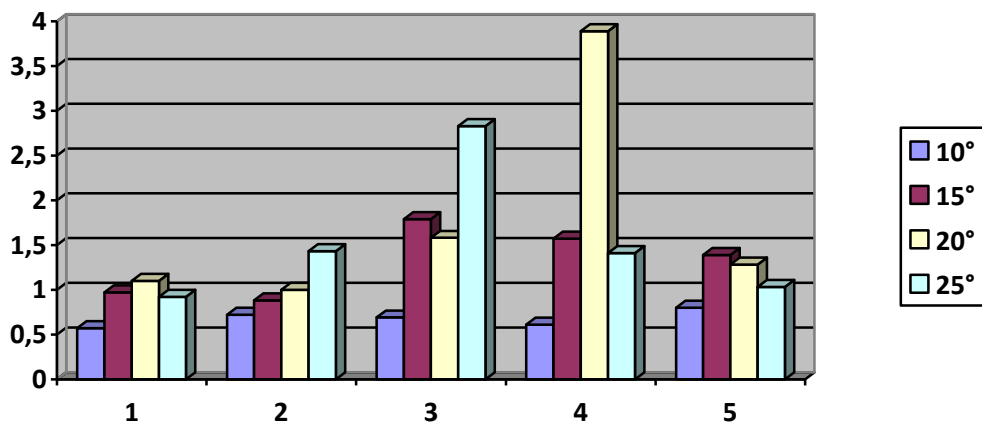


Рис. 6. Максимальная относительная погрешность давления для углов полураствора  $\beta = 10^\circ - 25^\circ$

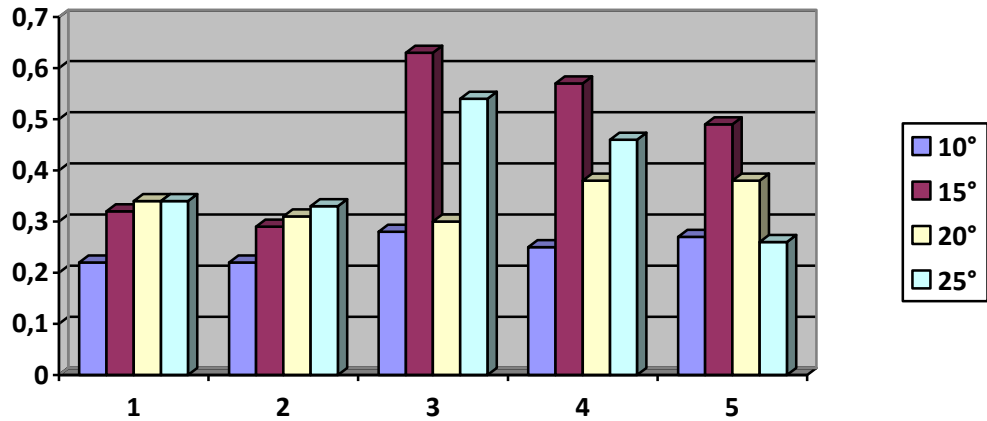


Рис. 7. Средняя относительная погрешность давления для углов полураствора  $\beta = 10^\circ - 25^\circ$

В таблицах (7) – (9) приведены значения аналога нормы  $L_2$ :

$$\sqrt{\sum_m |y_m - y_m^{exact}|^2 V_m} / \sqrt{\sum_m |y_m^{exact}|^2 V_m},$$

где  $y_m$  — это скорость  $U_x$ ,  $U_y$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$  в ячейке,  $V_m$  — объем ячейки. Здесь значения  $y_m^{exact}$  получены интерполированием табличных значений из [14] на ячейки сетки. Следует отметить, что авторы таблиц [14] указывают на допустимость интерполяции по всем параметрам и значениям таблиц.

Таблица 7

**Отклонение от точного решения для сетки coarse**

	1 rhoCentral Foam	2 pisoCentral Foam	3 sonicFoam	4 rhoPimple Foam	5 pimpleCentr al Foam
$U_x$	0.009062	0.008929	<b>0.008366</b>	0.010155	0.008968
$U_y$	<b>0.043725</b>	0.050789	0.050932	0.060268	0.051158
$p$	<b>0.024054</b>	0.027705	0.033429	0.037406	0.027945
$\rho$	<b>0.018327</b>	0.021848	0.028965	0.033199	0.022061

Таблица 8

## Отклонение от точного решения для сетки fine

	1 rhoCentral Foam	2 pisoCentral Foam	3 sonicFoam	4 rhoPimple Foam	5 pimpleCentr al Foam
$U_x$	0.006268	0.006482	<b>0.005809</b>	0.007588	0.006530
$U_y$	<b>0.029656</b>	0.034403	0.033814	0.043562	0.034617
$p$	<b>0.016989</b>	0.019515	0.022465	0.026656	0.019790
$\rho$	<b>0.012834</b>	0.015182	0.019085	0.022994	0.015433

Таблица 9

## Отклонение от точного решения для сетки finest

	1 rhoCentral Foam	2 pisoCentral Foam	3 sonicFoam	4 rhoPimple Foam	5 pimpleCentr al Foam
$U_x$	0.004372	0.004441	<b>0.004057</b>	0.005526	0.004549
$U_y$	<b>0.019862</b>	0.022855	0.023113	0.030994	0.023524
$p$	<b>0.011611</b>	0.013269	0.015143	0.018803	0.013670
$\rho$	<b>0.008715</b>	0.010282	0.012684	0.015810	0.010618

Рисунок 8 представляет диаграмму отклонения от точного решения в аналоге нормы  $L_2$  для давления для всех использованных солверов на наиболее подробной расчетной сетке finest.

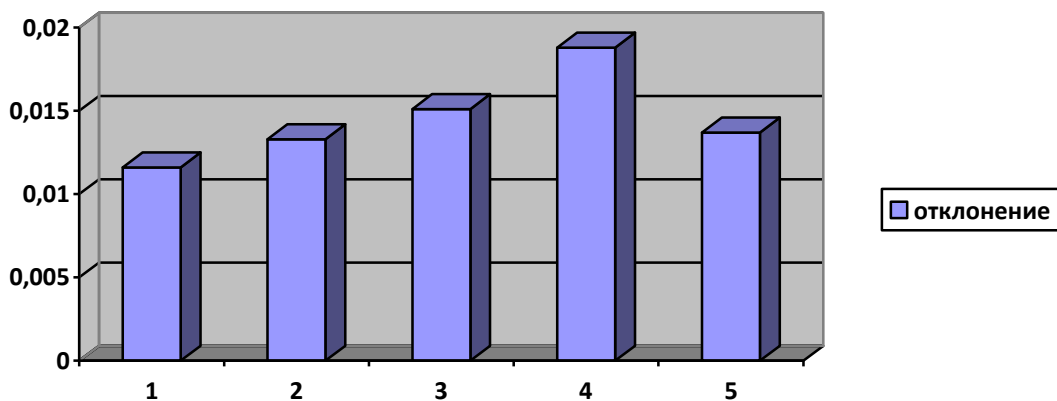


Рис. 8. Отклонение от точного решения для давления на расчетной сетке finest

На рисунке 9 представлено изменение отклонения от точного решения в аналоге нормы  $L_2$  для давления для всех солверов в зависимости от расчетной сетки.

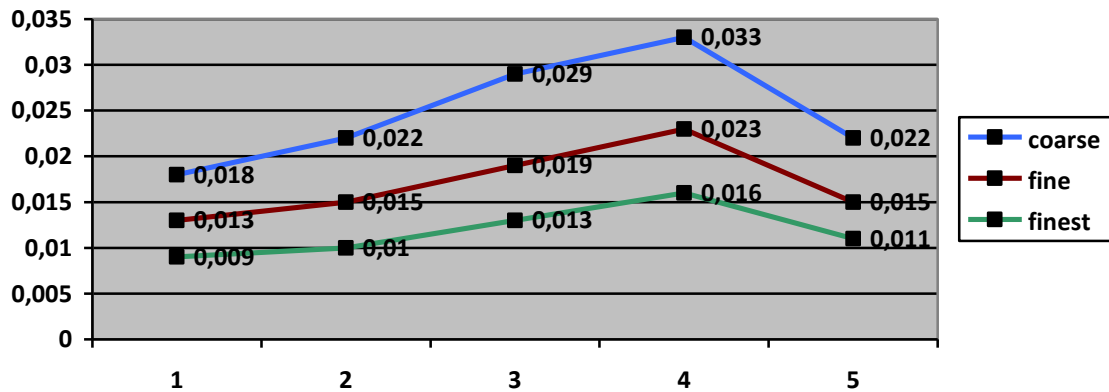


Рис. 9. Изменение отклонения от точного решения для давления в зависимости от расчетной сетки для всех солверов

## Заключение

Для задачи обтекания конуса сверхзвуковым потоком идеального газа под нулевым углом атаки были проведены тестовые расчеты и проведено сравнение пяти солверов программного пакета OpenFoam с точным решением, полученным из таблиц [14]. Можно сделать вывод, что лучшими солверами в данном случае являются rhoCentralFoam и pisoCentralFoam. Солвер rhoCentralFoam обладает минимальной нормой погрешности поля, а солвер pisoCentralFoam обладает минимальным средним и максимальным значением ошибки. Проведенное методическое исследование может служить основой для выбора солвера программного пакета OpenFoam при расчете невязкого сверхзвукового обтекания УТВ, а также может быть полезным для разработчиков программного контента OpenFoam.

## Библиографический список

1. Красильщиков А.П., Гурьяшкин Л.П. Экспериментальные исследования тел вращения в гиперзвуковых потоках.- М.:ФИЗМАТЛИТ. 2007.-208 с.
2. Андреев С.В., Бондарев А.Е., Михайлова Т.Н., Нестеренко Е.А., Рыжова И.Г. Приближенный подход к оценке сопротивления трения на телах вращения в вязком потоке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 102. 12 с.
3. Bondarev A.E., Nesterenko E.A. Approximate method for estimation of friction forces for axisymmetric bodies in viscous flows // "Mathematica Montisnigri", Vol. XXXI. 2014. p. 54-63.
4. Козлов Л.В. Экспериментальное исследование поверхностного трения на плоской пластине в сверхзвуковом потоке при наличии теплообмена // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. №2. С.11-20.



5. Козлов Л.В. Экспериментальное определение закона теплообмена для турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа. М.: Машиностроение. 1965. С. 91-109.
6. Авдудевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. №4. С.3-13.
7. Авдудевский В.С. и др. под ред. проф. Кошкина В.К. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. М.: Оборонгиз. 1960. 390 с.
8. OpenFOAM, URL: <http://www.openfoam.org>.
9. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. // J. Comput. Phys. 2000. Vol. 160. P. 241–282, [doi:10.1006/jcph.2000.6459](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6459).
10. Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows. / Christopher J. Greenshields, Henry G. Wellerr, Luca Gasparini, Jason M. Reese // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2010, Vol. 63. Issue 1. P. 1–21, [doi:10.1002/flid.2069](https://doi.org/10.1002/flid.2069).
11. Issa R. Solution of the implicit discretized fluid flow equations by operator splitting. // J. Comput. Phys. 1986. Vol. 62. Issue 1. P. 40–65, [doi:10.1016/0021-9991\(86\)90099-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9).
12. Kraposhin M., Bovtrikova A., Strijhak S. Adaptation of Kurganov-Tadmor numerical scheme for applying in combination with the PISO method in numerical simulation of flows in a wide range of Mach numbers. // Procedia Computer Science. 2015. Vol. 66, P. 43–52. [doi:10.1016/j.procs.2015.11.007](https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.11.007).
13. United collection of hybrid Central solvers <https://github.com/unicfdlab/hybridCentralSolvers>
14. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом / К. П. Бабенко, Г. П. Воскресенский, А. Н. Любимов, В. В. Русанов. — М.: Наука, 1964.
15. Численное моделирование сверхзвукового обтекания клина с применением свободного открытого программного кода OpenFOAM. / А. Я. Карвацкий, П. В. Пулинец, Т. В. Лазарев, А. Ю. Педченко // Космічна наука і технологія. — 2015 — Т. 21, № 2. — С. 47–52.
16. Gutierrez L. F. M., Tamagno J. P., Elaskar S. A. High speed flow simulation using OpenFOAM. // Mecanica Computacional Vol XXXI, Salta, Argentina, 2012. P. 2939–2959.
17. Lorenzon D., Elaskar S. A. Simulacion de flujos supersonicos bidimensionales y axialmente simetricos con OpenFOAM. // Revista de la Facultad de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, 2015. Vol. 2. no. 2. P. 65–76. URL: <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/FCEFYN/article/view/11061>
18. Patankar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1972. Vol. 15, Issue 10, P. 1787-1806. [doi:10.1016/0017-9310\(72\)90054-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90054-3)