



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Родин А.С.

Решение задачи контакта
двух упругих тел методом
Шварца при использовании
сеток с существенно
отличающимися шагами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Родин А.С. Решение задачи контакта двух упругих тел методом Шварца при использовании сеток с существенно отличающимися шагами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 120. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2017-120](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-120)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-120>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.С. Родин

**Решение задачи
контакта двух упругих тел
методом Шварца
при использовании сеток
с существенно
отличающимися шагами**

Москва — 2017

Родин А.С.

Решение задачи контакта двух упругих тел методом Шварца при использовании сеток с существенно отличающимися шагами

Приведена достаточно общая постановка задачи механического контактного взаимодействия двух упругих тел. Дано описание различных вариантов реализации метода Шварца, предназначенных для численного решения контактной задачи, представлены результаты решения ряда тестовых задач. Особое внимание уделено расчетам, для которых в контактирующих телах применяются сетки с большим отношением шагов.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, метод Шварца, метод конечных элементов, базисные функции

Aleksandr Sergeevich Rodin

Solution of problem of two elastic bodies contact by means of Schwartz method for meshes with rather different steps

Sufficiently common problem definition of mechanical contact interaction of system of elastic bodies is given. The description of various options of realization of Schwarz method intended for the numerical solution of a contact task is given. Results of calculations for a number of test problems are given. Special attention is paid to calculations in which we use meshes with rather different steps.

Key words: contact interaction, Schwartz method, finite element method, basic functions

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 15-01-03073 и 16-31-00302.

Оглавление

1. Постановка задачи контактного взаимодействия упругих тел.....	3
2. Применение альтернирующего метода Шварца для численного решения контактной задачи	4
3. Результаты численных расчетов	11
3.1 Первая тестовая задача	12
3.2. Вторая тестовая задача	18
3.3. Третья тестовая задача.....	24
Заключение.....	27
Список литературы.....	27

1. Постановка задачи контактного взаимодействия упругих тел

Рассмотрим в двумерном пространстве R^2 с декартовой системой координат Ox_1x_2 два тела A и B , занимающих область $G = G_A \cup G_B$, ограниченную кусочно-гладкой границей $\partial G = \partial G_A \cup \partial G_B$ (рис. 1).

Математическая формулировка квазистатической задачи МДТТ в рассматриваемой постановке включает следующие соотношения (для каждого тела $G_\alpha, \alpha \in \{A, B\}, i, j = \overline{1, 2}$) [1]:

уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}) + Q_i^\alpha(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in G_\alpha, \quad (1)$$

граничные условия (кинематические и силовые)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{S_1^\alpha} = \mathbf{u}_0^\alpha(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_1^\alpha \subset \partial G_\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j|_{S_2^\alpha} = p_i^\alpha(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha, \quad (3)$$

соотношения Коши для компонент тензора деформации ($i, j = \overline{1, 2}, \varepsilon_{33} = 0$)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

определяющие уравнения (в данном случае закон Гука) для компонент тензора напряжений ($i, j = \overline{1, 2}, \sigma_{33} = 0$)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещения точки, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$; $\mathbf{u}_0^\alpha(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещения точки, расположенной на поверхности S_1^α ; $\mathbf{Q}^\alpha(\mathbf{x}, t) = Q_i^\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$ – вектор массовых сил ($\mathbf{x} \in G_\alpha$); $\mathbf{p}^\alpha(\mathbf{x}, t) = p_i^\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$ – вектор внешней нагрузки, действующей на поверхности S_2^α ($\mathbf{x} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha$); C_{ijkl} – компоненты тензора коэффициентов упругости.

При решении контактной задачи на поверхностях контакта тел $S_k = S_k^A = S_k^B$ (см. рис. 1) дополнительно должны быть выполнены условия контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям [2, 3].

Для случая, когда тела могут двигаться относительно друг друга в касательном направлении, условие сопряжения по перемещениям (кинематическое условие) задается формулой

$$u_n^A(\mathbf{x}, t) - u_n^B(\mathbf{x}, t) = \delta_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_k, \quad (4)$$

а по напряжениям (силовое условие)

$$\sigma_n^A(\mathbf{x}, t) = \sigma_n^B(\mathbf{x}, t) \leq 0, \mathbf{x} \in S_k. \quad (5)$$

Здесь u_n^A, u_n^B – проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали \mathbf{n}_A к границе тела A , δ_n – начальное расстояние (зазор) по нормали между граничными точками тел A и B , σ_n^A, σ_n^B – проекции

векторов напряжений σ^A и σ^B на направления внешних нормалей n_A и n_B соответственно. Для различных участков поверхности тела выполнены условия: $S_1^\alpha \cup S_2^\alpha \cup S_k^\alpha = \partial G_\alpha$, $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_2^\alpha) = 0$, $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$, $\text{mes}(S_2^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$, $\alpha \in \{A, B\}$.

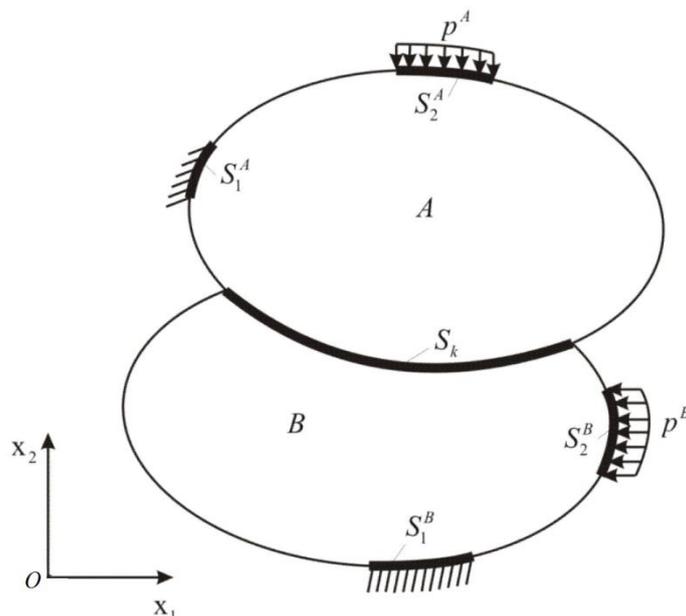


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух тел

Для учета сил трения на контактных поверхностях обычно используют закон Амонтона–Кулона, который связывает касательные контактные напряжения с нормальными.

Если считать, что на контактных поверхностях выполнены условия прилипания (т.е. два тела деформируются как одно целое), то условия сопряжения по перемещениям и напряжениям принимают следующий вид:

$$\mathbf{u}^A(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^B(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_k, \quad (6)$$

$$\sigma^A(\mathbf{x}, t) = \sigma^B(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_k. \quad (7)$$

Данная работа посвящена решению задач без учета сил трения, используются либо условия прилипания, либо условия скольжения без трения. Начальный зазор между телами всегда равен нулю.

Совокупность соотношений (1)–(7) составляет математическую формулировку контактной задачи МДТТ. Предполагается, что все функции, входящие в данную формулировку, обладают достаточной гладкостью.

2. Применение альтернирующего метода Шварца для численного решения контактной задачи

Аналитические решения контактных задач получены для весьма ограниченного числа видов контактного взаимодействия и форм контактирующих поверхностей. В подавляющем большинстве практически важных ситуаций необходимо применять численные методы, среди которых

для решения задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) лидирующее положение занимает метод конечных элементов (МКЭ) [4–11]. Процедура его применения описана во многих руководствах. В частности, использованный для данной задачи вариант МКЭ описан в [3, 8, 12]. В результате применения МКЭ задача МДТТ (1)–(7) сводится к решению следующего линейного матричного уравнения [2, 4]:

$$[K]\{U\} = \{R\}. \quad (8)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $[K]$ – глобальная матрица жесткости, $\{U\}$ – глобальный вектор перемещений, $\{R\}$ – глобальный вектор нагрузки.

При решении контактных задач используют различные итерационные методы, например, метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа, комбинированный метод штрафов и Лагранжа, метод псевдосреды, альтернирующий метод Шварца и другие [3, 12, 13]. В данной работе рассматривается применение метода Шварца (одного из вариантов метода декомпозиции – см. по этому поводу [14, стр. 412] и [15] для общего случая).

Суть данного метода состоит в следующем: на первом шаге на контактных поверхностях тел задается начальное приближение для компонент вектора перемещений (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия). После решения данной задачи кинематическое условие (4) или (6) на контактной поверхности будет выполнено, но вычисленные контактные давления на противоположных контактных поверхностях, принадлежащих взаимодействующим телам, оказываются различными (нарушено условие (5) или (7)). На следующем шаге с помощью специальным образом выполненной коррекции добиваются равенства контактных напряжений, но полученные перемещения не удовлетворяют условию (4) или (6). Далее на очередной итерации снова используют скорректированные кинематические условия (совмещают контактирующие поверхности). Чередование силовых и кинематических итераций выполняется до достижения сходимости, когда и кинематические условия, и силовые на контакте (4) и (5) (или (6) и (7)) выполнены с заданной точностью. Более подробно данный метод описан в [3, 12, 16, 17].

Таким образом, альтернирующий метод Шварца является итерационным методом, и его суть в рамках конечно-элементной технологии состоит в следующем. На четных итерациях выполняется коррекция компонент векторов перемещений контактных узлов $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ тел A и B (см. рис. 1). Для тела A корректирующие выражения имеют вид

$$\{U_k\}_{(A),m}^{2n} = \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \alpha_{(A),m}^{2n-1} \left(\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1} - \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

при задании некоторого начального перемещения, здесь $\alpha_{(A),m}^{2n-1}$ – итерационный параметр, m ($1 \leq m \leq M_A$) – номер текущего узла, лежащего на контактной

поверхности S_k^A тела A , M_A – количество контактных узлов на поверхности S_k^A , $\{U\}_{(B),s}^{2n-1}$ – вектор перемещения сходственной точки s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B .

Для вычисления итерационного параметра $\alpha_{(A),m}^{2n-1}$ применяется формула

$$\alpha_{(A),m}^{2n-1} = \frac{\left| \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} \right|}{\left| \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} \right| + \left| \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1} \right|}. \quad (10)$$

Аналогичные соотношения используются для коррекции компонент векторов перемещений контактных узлов тела B . Далее выполняется решение двух подобных задач теории упругости, в которых векторы $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ выполняют роль дополнительных кинематических граничных условий.

Для метода Шварца на нечетных итерациях вектор глобальной нагрузки состоит из суммы 2 частей: вектора $\{R_{nk}\}$, который описывает воздействие на тело всех сил, кроме контактных (на четных итерациях $\{R\} = \{R_{nk}\}$), и вектора узловых контактных сил $\{R_k\}$, у которого отличны от нуля только те компоненты, которые соответствуют узлам, находящимся на контактной поверхности.

Вычисление компонент векторов узловых сил $\{R_k\}_{(A)}$ и $\{R_k\}_{(B)}$, возникающих в контактных узлах тел A и B , основывается на предположении, что для любого кинематического ограничения, накладываемого на участок поверхности, существует такая силовая нагрузка, которая оказывает на тело эквивалентное воздействие. Поэтому после проведения четной итерации с номером $2n$, когда в соответствующих узлах контактной границы задаются кинематические условия, можно вычислить значения $\{R_k\}_{(A),m}^{2n}$ и $\{R_k\}_{(B),m}^{2n}$: для этого нужно взять строку глобальной матрицы жесткости $[K]$, соответствующую узлу, расположенному на контактной поверхности, с номером m (обозначим номер этой строки за j), умножить ее на вычисленный вектор глобальных перемещений $\{U\}^{2n}$, а потом вычесть из получившегося числа значение соответствующей компоненты вектора глобальной нагрузки:

$$\{R_k\}_j^{2n} = [K]_j \{U\}^{2n} - \{R_{nk}\}_j^{2n}. \quad (11)$$

После вычисления компонент векторов узловых сил $\{R_k\}_{(A)}$ и $\{R_k\}_{(B)}$ нужно провести их коррекцию для выполнения силовых условий. Для тела A корректирующее выражение имеет вид

$$\{R_k\}_{(A),m}^{2n+1} = \{R_k\}_{(A),m}^{2n} - \alpha_{(A),m}^{2n} \left(\{R_k\}_{(B),s}^{2n} + \{R_k\}_{(A),m}^{2n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Здесь $\alpha_{(A),m}^{2n}$ – итерационный параметр, m ($1 \leq m \leq M_A$) – номер текущего узла, лежащего на контактной поверхности S_k^A тела A , $\{R_k\}_{(B),s}^{2n}$ – вектор контактной узловой силы в сходственной относительно узла m точке s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B . Поскольку нормали к контактным поверхностям в узле тела A и в сходственной точке тела B направлены в противоположные стороны, то компоненты соответствующих векторов узловых сил имеют разные знаки (в отличие от компонент вектора перемещений). Поэтому знаки в формуле (12) отличаются от знаков в формуле (9). Аналогичное соотношение используется для коррекции компонент векторов узловых сил, возникающих в контактных узлах тела B .

Для вычисления итерационного параметра $\alpha_{(A),m}^{2n}$ применяется формула

$$\alpha_{(A),m}^{2n} = \frac{\left| \{R_k\}_{(A),m}^{2n} \right|}{\left| \{R_k\}_{(A),m}^{2n} \right| + \left| \{R_k\}_{(B),s}^{2n} \right|}. \quad (13)$$

Векторы $\{R_k\}_{(A)}^{2n+1}$ и $\{R_k\}_{(B)}^{2n+1}$ используются при формировании глобальных векторов узловой нагрузки $\{R\}_{(A)}$ и $\{R\}_{(B)}$ тел A и B [9, 13]. Затем проводится решение матричного уравнения (8) для каждого из двух рассмотренных тел.

Таким образом, данный алгоритм состоит в реализации итерационного процесса поочередного задания на поверхностях контакта S_k^A и S_k^B векторов перемещений $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$, векторов контактных сил $\{R_k\}_{(A)}$ и $\{R_k\}_{(B)}$, а также в их соответствующей коррекции с тем, чтобы были выполнены либо силовые контактные условия, если в зоне контакта заданы перемещения, либо кинематические, если заданы контактные силы. Сходимость подобного алгоритма рассмотрена в работах [16, 17].

Отметим, что при использовании на контактной границе условия скольжения без трения, задаваемого соотношениями (4)-(5), корректируются только нормальные компоненты вектора перемещения и вектора напряжения. А при использовании на контактной границе условия прилипания, задаваемого соотношениями (6)–(7), корректируются обе компоненты вектора перемещения и вектора напряжения.

Некоторые особенности алгоритма, связанные с постановкой дополнительных кинематических условий на силовых итерациях (чтобы каждое тело имело закрепление), с обобщением изложенного алгоритма на случай контакта нескольких тел, изложены в [18].

Использование соотношений (12) для сеток, у которых узлы на контактных поверхностях двух тел совпадают или находятся вблизи друг от друга, приводит к достаточно хорошим результатам. Но для случая несовпадающих узлов, особенно когда шаги сетки для двух тел существенно отличаются,

непосредственное применение формулы (12) заметно ухудшает сходимость итерационного процесса (при использовании КЭ 2 порядка и выше ситуация становится еще хуже).

Поскольку на самом деле на контактирующих участках поверхностей двух тел действуют не сосредоточенные силы, отнесенные к узлам сетки, а распределенные контактные силы, действующие по всей контактной границе, то (по аналогии с вектором поверхностной нагрузки) для компоненты вектора $\{R_k\}_{(A),m}$, соответствующего узлу с номером m , можно написать следующее выражение:

$$\{R_k\}_{(A),m} = \int_{S_k} N_m^S p_k^A(\mathbf{x}) dS, \quad (14)$$

где N_p^S – базисная функция, заданная на поверхности и соответствующая узлу с номером m , $p_k(\mathbf{x})$ – функция, описывающая контактное давление.

Для упрощения записи здесь и в дальнейшем номер итерации будет опускаться за исключением случаев, когда в выражении участвуют величины с разных итераций.

Очевидно, что при использовании несовпадающих сеток на силовых итерациях нужно корректировать не значения узловых сил $\{R_k\}_{(A)}$ и $\{R_k\}_{(B)}$, на которые оказывают влияние не только давления, но и базисные функции, заданные на рассматриваемых поверхностных элементах, а значения контактных давлений $p_k^{(A)}$ и $p_k^{(B)}$ в соответствующих узлах сетки.

Рассмотрим три различных реализации метода Шварца, которые будут отличаться только соотношениями на силовых итерациях (на кинематических – перемещения вычисляются по формуле (9)).

Первая реализация метода Шварца основана на следующих шагах (для тела B применяются аналогичные формулы).

1) Заменяем неизвестную функцию контактного давления в (14) на аппроксимацию, основанную на использовании базисных функций N^S , относящихся к узлам поверхностной сетки (для КЭ 1 порядка это – кусочно-линейные функции)

$$p_k^A(\mathbf{x}) \approx \sum_{m=1}^{M_A} p_{k,m}^A N_m^S, \quad (15)$$

где M – число узлов, находящихся на рассматриваемой поверхности контакта.

2) После каждой кинематической итерации с номером $2n$ ($n=0,1,2,\dots$) находим значения компонент вектора узловых сил $\{R_k\}_{(A),m}^{2n}$, $m=1,\dots,M_A$.

3) Подставляя (15) в (14), получаем систему из M_A уравнений для M_A неизвестных давлений:

$$\int_{S_k} [N^S]^T [N^S] dS \{p_k\}_{(A)}^{2n} = \{R_k\}_{(A)}^{2n}. \quad (16)$$

Решая (16), находим значения контактных давлений после кинематической итерации. Полученные давления не удовлетворяют силовому условию (5) или (7).

4) Выполняем корректировку полученных давлений по формуле, аналогичной (12):

$$\{p_k\}_{(A),m}^{2n+1} = \{p_k\}_{(A),m}^{2n} - \alpha_{(A),m}^{2n} \left(\{p_k\}_{(B),s}^{2n} + \{p_k\}_{(A),m}^{2n} \right). \quad (17)$$

Итерационный параметр $\alpha_{(A),m}^{2n}$ вычисляется аналогично (13) с заменой $\{R_k\}_{(A),m}^{2n}$ на $\{p_k\}_{(A),m}^{2n}$.

5) Зная скорректированные давления, вычисляем новые значения узловых сил:

$$\{R_k\}_{(A)}^{2n+1} = \int_{S_k} [N^S]^T [N^S] dS \{p_k\}_{(A)}^{2n+1}. \quad (18)$$

6) Учитывая полученный вектор узловых сил в векторе глобальной нагрузки, решаем для каждого тела матричное уравнение (8).

В дальнейшем метод, задаваемый пунктами 1)-6), будем называть «первый метод».

К недостаткам изложенного метода можно отнести тот факт, что для случая, когда сетка как минимум в одном теле окажется слишком грубой для описания контактного давления, суммарная сила, приложенная к контактной поверхности одного тела, может отличаться от суммарной силы, приложенной к контактной поверхности второго тела, что может привести к ухудшению сходимости данного алгоритма.

Чтобы избежать данной ситуации, можно заложить в применяемом алгоритме требование, чтобы суммарные силы, действующие на контактирующих поверхностях, совпадали. Это ограничение можно учесть следующим образом: разобьем контактную поверхность каждого тела на непересекающиеся участки и на силовой итерации будем требовать, чтобы равенство выполнялось не для значений давлений в узлах сетки, а для контактных сил, полученных после интегрирования давления по каждому такому участку для одного тела и для сходственного участка второго тела.

Отметим, что подобный подход позволяет решить проблему с частичным контактом ячеек (когда ячейка сетки не целиком на контактной поверхности, а только частично), поскольку он вместо термина «сходственная точка» использует более универсальное понятие «сходственный участок».

Опишем одну из возможных реализаций приведенного алгоритма (для тела V применяются аналогичные формулы).

1) Заменяем неизвестное контактное давление в (14) на аппроксимацию, основанную на использовании базисных функций χ^S , относящихся к поверхностной сетке, но необязательно совпадающих с базисными функциями N^S :

$$p_k^A(\mathbf{x}) \approx \sum_{m=1}^{L_A} p_{k,m}^A \chi_m^S, \quad (19)$$

где L_A – число введенных базисных функций. Считаем, что контактная поверхность рассматриваемого тела состоит из L_A непересекающихся участков:

$$S_k^A = \bigcup_{j=1}^{L_A} S_{k,j}.$$

2) После каждой кинематической итерации с номером $2n$ ($n=0,1,2,\dots$) находим значения компонент вектора узловых сил $\{R_k\}_{(A),m}^{2n}$, $m=1,\dots,M_A$.

3) Получаем систему из M_A уравнений для L_A неизвестных давлений:

$$\int_{S_k} [N^S]^T [\chi^S] dS \{p_k\}_{(A)}^{2n} = \{R_k\}_{(A)}^{2n}. \quad (20)$$

Решая (20), находим значения контактных давлений после кинематической итерации (если L_A не совпадает с M_A , нужно использовать методы, ориентированные на решение систем с неквадратной матрицей). Полученные давления не удовлетворяют силовому условию (5) или (7).

4) Вычисляем контактные силы, соответствующие каждому участку $S_{k,j}$:

$$\{P_k\}_{(A),j}^{2n} = \sum_i \int_{S_{k,j}} \chi_i^S dS \{p_k\}_{(A),i}^{2n}. \quad (21)$$

5) Выполняем корректировку полученных контактных сил по формуле, аналогичной (12):

$$\{P_k\}_{(A),j}^{2n+1} = \{P_k\}_{(A),j}^{2n} - \alpha_{(A),j}^{2n} \left(\{P_k\}_{(B),s}^{2n} + \{P_k\}_{(A),j}^{2n} \right). \quad (22)$$

Здесь $\{P_k\}_{(B),s}^{2n}$ – контактная сила, вычисленная по участку поверхности тела B , который соответствует рассматриваемому участку $S_{k,j}$ тела A .

Итерационный параметр $\alpha_{(A),m}^{2n}$ вычисляется аналогично (13) с заменой $\{R_k\}_{(A),m}^{2n}$ на $\{P_k\}_{(A),m}^{2n}$.

6) Зная вычисленные контактные силы, находим контактные давления. Для этого нужно решить систему уравнений:

$$\sum_i \int_{S_{k,j}} \chi_i^S dS \{p_k\}_{(A),i}^{2n+1} = \{P_k\}_{(A),j}^{2n+1}, \quad j=1,\dots,L_A. \quad (23)$$

7) Зная скорректированные давления, вычисляем новые значения узловых сил:

$$\{R_k\}_{(A)}^{2n+1} = \int_{S_k} [N^S]^T [\chi^S] dS \{p_k\}_{(A)}^{2n+1}. \quad (24)$$

8) Учитывая полученный вектор узловых сил в векторе глобальной нагрузки, решаем для каждого тела матричное уравнение (8).

В качестве одного из возможных выборов базисных функций χ^s можно указать кусочно-постоянные на поверхностных элементах функции. Тогда L_A – это количество поверхностных элементов, находящихся в контакте (L_A отличается от M_A – количества узлов, находящихся в контакте).

Для дальнейшего применения в данной работе рассмотрен случай, когда $L_A = M_A$. В качестве непересекающихся участков контактной поверхности $S_{k,j}$ выбраны ячейки Дирихле, соответствующие узлам поверхностной сетки (если оба элемента, к которым относится рассматриваемый узел, находятся в контакте, то ячейка Дирихле представляет собой объединение соответствующих половин поверхностных элементов).

В дальнейшем метод, задаваемый пунктами 1)-8), в котором в качестве базисных функций χ^s выбраны кусочно-постоянные на ячейках Дирихле функции, будем называть «второй метод».

Метод, задаваемый пунктами 1)-8), в котором в качестве базисных функций χ^s выбраны стандартные функции N^s , будем называть «третий метод».

3. Результаты численных расчетов

Далее будут приведены результаты расчетов с использованием трех описанных методов.

В качестве условий на контактной поверхности, если это не оговорено особо, использовано условие прилипания, поэтому решение рассмотренной контактной задачи должно совпадать с решением задачи, в которой рассмотренная конструкция является единым телом. Поэтому для оценки точности полученных результатов представляется целесообразным провести сравнение с расчетами, соответствующими случаю единого тела при такой же нагрузке.

Во всех расчетах применялись КЭ 1 порядка. Все значения приведены в безразмерном виде. Тела сделаны из одинакового материала, который имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70000$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

В дальнейшем для обозначения координатных осей (а также компонент вектора перемещений и тензора напряжений) будут использованы более привычные символы $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$.

Выбранное начальное приближение может оказывать влияние на скорость сходимости метода Шварца. Но для рассматриваемых в данной работе задач это влияние является достаточно ограниченным, поэтому во всех расчетах в качестве начального приближения выбирались следующие значения перемещения на всей поверхности контакта: $u_x=0$, $u_y=10^{-4}$. Более подробно проблема выбора начальных приближений рассмотрена в [18].

3.1 Первая тестовая задача

Рассмотрим следующую постановку задачи (рис. 2): имеются два тела одинаковой ширины (размер по оси x) b , высота (размер по оси y) первого тела равна 4, высота второго равна 2. С левой и правой сторон тела закреплены по оси x ($u_x = 0$), а нижнее тело снизу закреплено по оси y ($u_y = 0$). На верхнее тело действует распределенная нагрузка, задаваемая формулой $p(x) = p_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$, где $p_0 = 10$, $l = 3$.

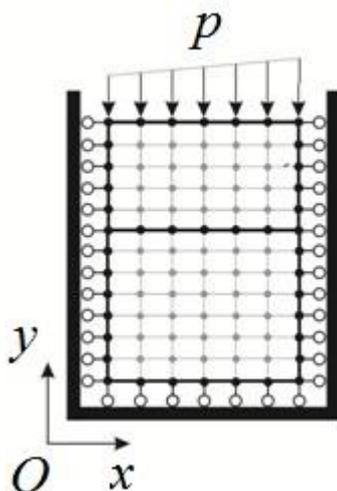


Рис. 2. Схема расчетной области для первой задачи

Рассмотренная задача для единого тела не имеет аналитического решения. Но для численного решения известно, что при измельчении сетки значения напряжений в центрах ячеек, расположенных вдоль верхней границы тела, должны стремиться к соответствующим значениям поверхностной нагрузки. Для проверки данного факта проведены три расчета (для единого тела), в которых шаг сетки брался равным 0.25, 0.125 и 0.06125. Равномерная норма разности (максимальная абсолютная ошибка) вектора значений напряжения σ_{yy} в центрах ячеек сетки, примыкающих к верхней границе, и вектора значений давления, вычисленного по аналитической формуле для соответствующих координат x , составила следующие величины: для первого расчета – 0.858, для второго расчета – 0.235, для третьего расчета – 0.0599. Видно, что имеет место квадратичная сходимость полученных напряжений к известным значениям давления. На рис. 3 приведены графики напряжения σ_{yy} (полученного численно) и давления (из аналитической формулы) для сетки с шагом 0.125.

В дальнейшем для оценки точности полученного решения контактной задачи рассматривались следующие величины: напряжения (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}), полученные вблизи контактной границы (в слое ячеек ниже поверхности контакта (для первого тела) и в слое ячеек выше поверхности контакта (для второго тела), а также перемещения (u_x , u_y) в узлах, расположенных на контактной границе (для обоих тел). Данные величины сравнивались с

соответствующими величинами, полученными в расчете для единого тела (для аналогичного сечения).

В первую очередь представляли интерес результаты, полученные с помощью описанных выше методов, при использовании в обоих телах равномерных сеток с одинаковым шагом. В подобных расчетах сетка для случая единого тела и сетка для случая двух тел являются по сути идентичными (во втором случае имеются пары совпадающих узлов на контактной поверхности).

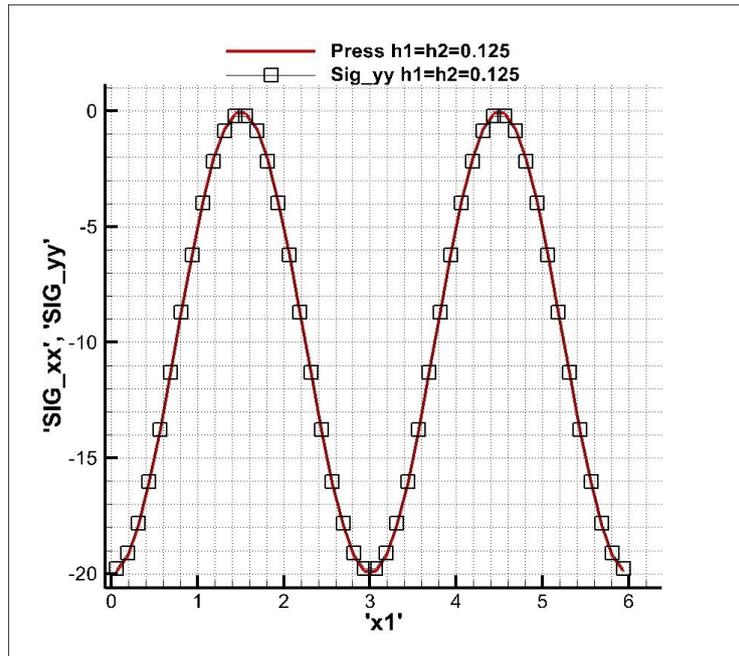


Рис. 3. Графики распределения напряжения (вблизи верхней границы) и давления на поверхности в расчете для единого тела

В таблице 1 представлены максимальные относительные ошибки численного решения контактной задачи (по сравнению со случаем единого тела) при использовании трех указанных методов для сетки с шагом $h = 0.25$ после 50 итераций. Поскольку нумерация итераций начинается с нуля, то это соответствует 49 итерации, по итогам которой на контактных поверхностях выполнены силовые условия. Рассмотрены величины, относящиеся к первому (нижнему) телу. Для второго (верхнего) тела получены ошибки такого же порядка.

Таблица 1

Ошибки для расчетов с шагом сетки $h = 0.25$ после 50 итераций

Метод	Ошибка u_x	Ошибка u_y	Ошибка σ_{xx}	Ошибка σ_{yy}	Ошибка σ_{xy}
1 метод	$3.109 \cdot 10^{-5}$	$7.550 \cdot 10^{-6}$	$1.895 \cdot 10^{-5}$	$8.299 \cdot 10^{-6}$	$3.803 \cdot 10^{-4}$
2 метод	$3.106 \cdot 10^{-5}$	$7.555 \cdot 10^{-6}$	$1.895 \cdot 10^{-5}$	$8.305 \cdot 10^{-6}$	$3.803 \cdot 10^{-4}$
3 метод	$3.106 \cdot 10^{-5}$	$7.555 \cdot 10^{-6}$	$1.895 \cdot 10^{-5}$	$8.304 \cdot 10^{-6}$	$3.803 \cdot 10^{-4}$

Из таблицы 1 видно, что для сеток с одинаковым шагом все 3 использованные метода дают практически идентичные результаты.

Рассмотрим более подробно, как меняются ошибки полученного решения (для расчета с шагом сетки $h = 0.25$) для различного количества проведенных итераций на примере первого метода. Соответствующие данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Ошибки после различного количества итераций

Кол-во итер.	Номер тела	Ошибка u_x	Ошибка u_y	Ошибка σ_{xx}	Ошибка σ_{yy}	Ошибка σ_{xy}
10	1	$4.88 \cdot 10^{-3}$	$9.55 \cdot 10^{-2}$	$1.05 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^{-1}$	$2.53 \cdot 10^{-3}$
	2	$5.22 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-1}$	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$1.04 \cdot 10^{-1}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$
20	1	$3.98 \cdot 10^{-5}$	$8.82 \cdot 10^{-3}$	$9.87 \cdot 10^{-3}$	$9.23 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-4}$
	2	$5.63 \cdot 10^{-5}$	$1.31 \cdot 10^{-2}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$	$9.54 \cdot 10^{-3}$	$1.45 \cdot 10^{-4}$
30	1	$3.05 \cdot 10^{-5}$	$8.39 \cdot 10^{-4}$	$9.41 \cdot 10^{-4}$	$8.78 \cdot 10^{-4}$	$3.80 \cdot 10^{-4}$
	2	$3.11 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$9.07 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$
40	1	$3.11 \cdot 10^{-5}$	$7.99 \cdot 10^{-5}$	$8.97 \cdot 10^{-5}$	$8.39 \cdot 10^{-5}$	$3.80 \cdot 10^{-4}$
	2	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^{-4}$	$8.67 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$
50	1	$3.11 \cdot 10^{-5}$	$7.55 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-5}$	$8.29 \cdot 10^{-6}$	$3.80 \cdot 10^{-4}$
	2	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$1.13 \cdot 10^{-5}$	$3.34 \cdot 10^{-5}$	$8.65 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$
60	1	$3.11 \cdot 10^{-5}$	$7.28 \cdot 10^{-7}$	$2.67 \cdot 10^{-5}$	$1.65 \cdot 10^{-6}$	$3.80 \cdot 10^{-4}$
	2	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$	$2.52 \cdot 10^{-5}$	$2.39 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$
70	1	$3.11 \cdot 10^{-5}$	$5.81 \cdot 10^{-7}$	$2.74 \cdot 10^{-5}$	$2.13 \cdot 10^{-6}$	$3.80 \cdot 10^{-4}$
	2	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$5.48 \cdot 10^{-7}$	$2.44 \cdot 10^{-5}$	$1.79 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$
80	1	$3.11 \cdot 10^{-5}$	$6.42 \cdot 10^{-7}$	$2.75 \cdot 10^{-5}$	$2.19 \cdot 10^{-6}$	$3.80 \cdot 10^{-4}$
	2	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$6.40 \cdot 10^{-7}$	$2.43 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$

Из данных таблицы 2 видно, что ошибки перемещения u_x и касательного напряжения σ_{xy} стабилизируются на одном уровне после 20 итераций. Для перемещения u_y и компонент напряжения σ_{xx} и σ_{yy} до достижения 50 итераций соответствующие ошибки убывают с приблизительно одинаковой скоростью (в 10 раз за 10 итераций). Ошибки σ_{xx} и σ_{yy} стабилизируются на уровне $2 \cdot 10^{-5}$ после 60 итераций, а ошибка u_y стабилизируется на уровне $6 \cdot 10^{-7}$ после 70 итераций.

Для расчета, в котором шаг сетки в обоих телах равен 0.125, получены похожие результаты.

Теперь рассмотрим результаты, полученные при применении данных методов в расчетах, в которых в двух телах используются равномерные сетки с заметно отличающимися шагами.

В таблице 3 представлены максимальные относительные ошибки численного решения контактной задачи при использовании трех методов. В

нижнем теле использована сетка с шагом $h_1 = 0.25$, а в верхнем теле – более мелкая сетка с шагом $h_2 = 0.125$, т.е. шаги сеток отличаются в 2 раза. Результаты получены после 50 итераций. Сравнение проводилось с расчетом для единого тела с шагом сетки $h = 0.125$. Рассмотрены величины, относящиеся ко второму (верхнему) телу, а также перемещения, относящиеся к контактной границе первого тела (номер тела обозначен цифрой в скобках).

Таблица 3

Ошибки для расчета с сетками $h_1 = 0.25, h_2 = 0.125$

Метод	$u_x(1)$	$u_y(1)$	$u_x(2)$	$u_y(2)$	$\sigma_{xx}(2)$	$\sigma_{yy}(2)$	$\sigma_{xy}(2)$
1	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-2}$
2	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$
3	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-2}$

В таблице 4 представлены максимальные относительные ошибки численного решения контактной задачи для расчета, в котором (наоборот) в нижнем теле использована более мелкая сетка с шагом $h_1 = 0.125$, а в верхнем теле – более грубая сетка с шагом $h_2 = 0.25$, (шаги сеток отличаются в 2 раза). Результаты получены после 50 итераций. Сравнение проводилось с расчетом для единого тела с шагом сетки $h = 0.125$. Рассмотрены величины, относящиеся к первому (нижнему) телу, а также перемещения, относящиеся к контактной границе верхнего тела (номер тела обозначен цифрой в скобках).

Таблица 4

Ошибки для расчета с сетками $h_1 = 0.125, h_2 = 0.25$

Метод	$u_x(2)$	$u_y(2)$	$u_x(1)$	$u_y(1)$	$\sigma_{xx}(1)$	$\sigma_{yy}(1)$	$\sigma_{xy}(1)$
1	$1.0 \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-2}$
3	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$9.3 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$

Как видно из таблиц 3-4, для сеток, у которых шаги отличаются в 2 раза, результаты, полученные разными методами, начинают отличаться друг от друга. Наиболее существенным отличием по сравнению с расчетами, в которых у сеток одинаковый шаг (таблица 1), является то, что по итогам силовой итерации (даже после проведения 50 итераций) несовпадение перемещений на контактных поверхностях двух тел стало заметно больше. Если раньше относительная ошибка перемещений (при сравнении величин на поверхностях первого и второго тела) составляла величину порядка 10^{-5} , то теперь для u_x – это величина порядка 10^{-2} , а для u_y – порядка 10^{-3} . Ошибки, полученные в расчете, в котором сетка в верхнем теле в 2 раза крупнее сетки в нижнем теле, заметно больше, чем в расчете с обратным отношением сеток. В то же время в целом ошибки остаются на приемлемом уровне, а графики величин,

полученных разными методами, по-прежнему достаточно близки друг к другу и к графикам, соответствующим случаю одного тела.

В таблице 5 представлены максимальные относительные ошибки численного решения для случая, когда в нижнем теле использована сетка с шагом $h_1 = 0.375$, а в верхнем теле – сетка с шагом $h_2 = 0.125$, т.е. шаги сеток отличаются в 3 раза. Результаты получены после 50 итераций. Сравнение проводилось с расчетом для единого тела с шагом сетки $h = 0.125$. Рассмотрены величины, относящиеся к верхнему телу, а также перемещения, относящиеся к контактной границе нижнего тела (номер тела обозначен цифрой в скобках).

Таблица 5

Ошибки для расчета с сетками $h_1 = 0.375$, $h_2 = 0.125$

Метод	u_x (1)	u_y (1)	u_x (2)	u_y (2)	σ_{xx} (2)	σ_{yy} (2)	σ_{xy} (2)
1	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$8.2 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-2}$
2	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-1}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$	$7.0 \cdot 10^{-3}$	$9.5 \cdot 10^{-2}$
3	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-2}$

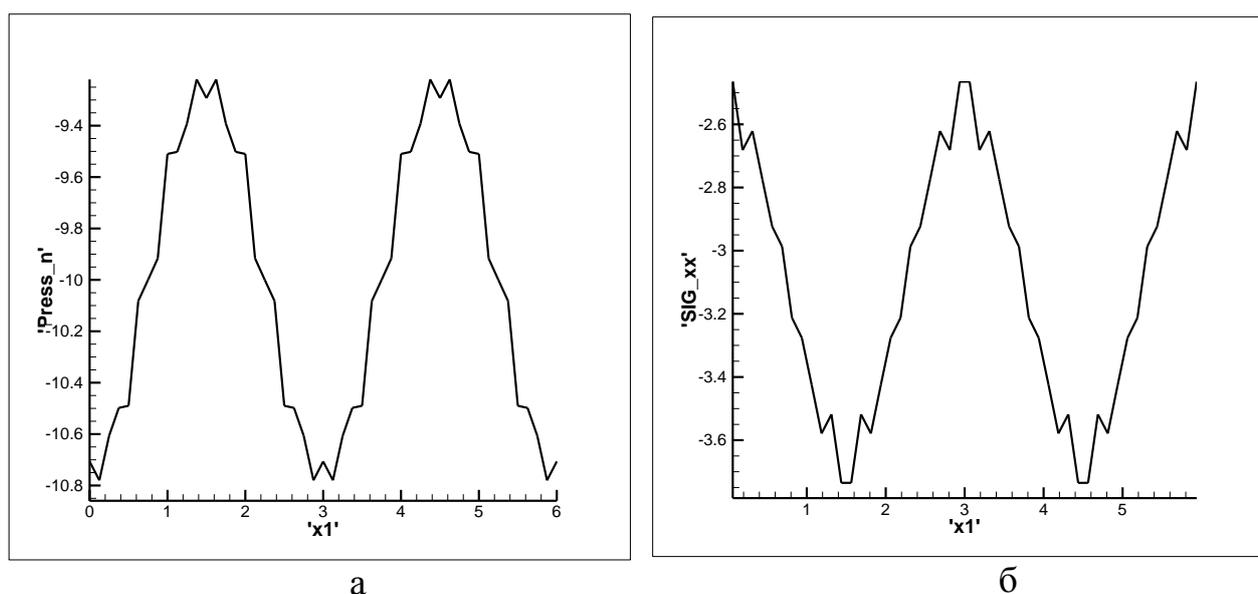


Рис. 4. Результаты, полученные вторым методом для верхнего тела:
 а – распределение нормального контактного давления;
 б – распределение σ_{xx} вблизи контактной границы

Сравнение данных, приведенных в таблицах 5 и 3, показывает, что увеличение отношения шагов сеток приводит к дальнейшему увеличению ошибок, в частности ошибка σ_{xx} ошибка выросла в 2 раза, а σ_{yy} – в 3 раза. Для второго метода (с использованием кусочно-постоянных функций) сетка в нижнем теле оказывается слишком грубой, поэтому на графиках величин, относящихся к верхнему телу, наблюдаются осцилляции. На рис. 4 показаны распределения нормального контактного давления (4,а) и компоненты σ_{xx}

вблизи контактной границы (4,б). На графиках величин, относящихся к нижнему телу, осцилляции отсутствуют, но итоговые ошибки, полученные во втором методе, существенно больше, чем ошибки в двух других методов. Можно сделать вывод, что для поставленной задачи при использовании сеток с большим отношением шагов применение второго метода становится неэффективным.

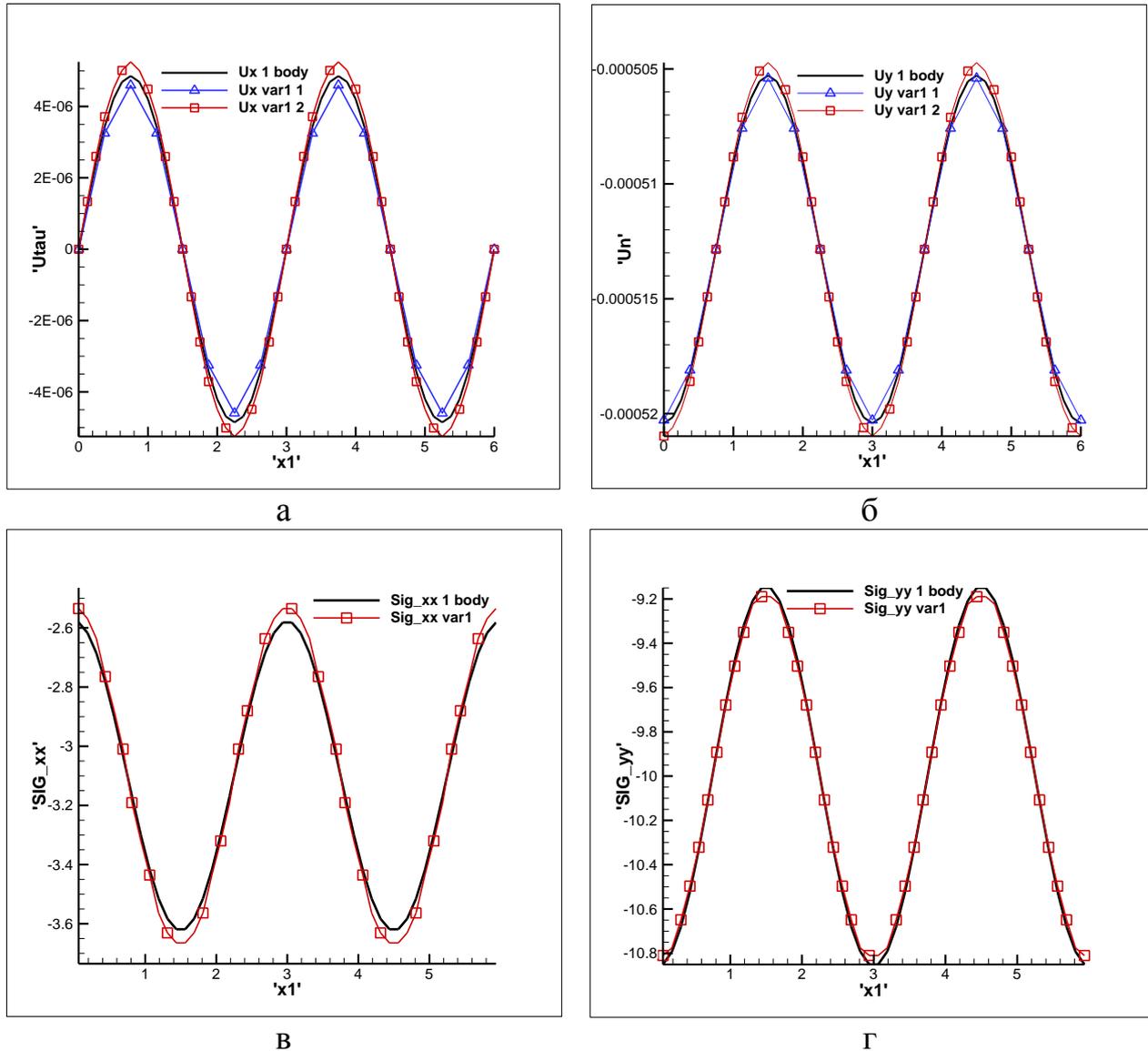


Рис. 5. а – перемещения u_x на поверхностях двух тел; б – перемещения u_y на поверхностях двух тел; в – распределение σ_{xx} для второго тела; г – распределение σ_{yy} для второго тела

Для первого и третьего методов вычисленные величины достаточно близки друг к другу. На рис. 5 показаны графики перемещений на контактных поверхностях обоих тел и напряжений вблизи контактной границы второго тела, полученные при решении контактной задачи первым методом (графики с маркерами: для первого тела – маркер в виде треугольника, для второго тела –

маркер в виде квадрата), а также графики перемещений и напряжений (без маркеров), полученные в расчете с единым телом для соответствующего сечения (шаг сетки $h = 0.125$). Приведенные графики показывают, что, несмотря на различие сеток в нижнем и верхнем теле, результаты решения контактной задачи по-прежнему находятся в хорошем соответствии с результатами для единого тела.

3.2. Вторая тестовая задача

Рассмотрим следующую постановку задачи (рис. 6): второе тело с шириной (размер по оси x) 6 и высотой (размер по оси y) 2 стоит на первом теле с шириной 9 и высотой 4. С левой стороны тела закреплены по оси x ($u_x = 0$), а нижнее тело снизу закреплено по оси y ($u_y = 0$). На верхнее тело действует такая же распределенная нагрузка, как и в предыдущей задаче.

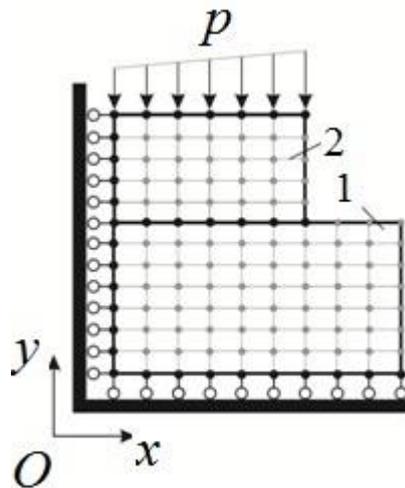


Рис. 6. Схема расчетной области для второй задачи

Далее снова рассмотрим численные результаты, полученные при решении поставленной задачи с применением трех методов на различных сетках.

В таблице 6 представлены максимальные относительные ошибки численного решения контактной задачи (по сравнению с расчетом для единого тела) при использовании трех указанных методов для сетки с шагом $h = 0.25$ после 50 итераций. Рассмотрены величины, относящиеся к первому (нижнему) телу. Для второго (верхнего) тела получены ошибки такого же порядка.

Таблица 6

Ошибки для расчетов с шагом сетки $h = 0.25$ после 50 итераций

Номер метода	Ошибка u_x	Ошибка u_y	Ошибка σ_{xx}	Ошибка σ_{yy}	Ошибка σ_{xy}
1 метод	$1.674 \cdot 10^{-5}$	$1.796 \cdot 10^{-5}$	$1.387 \cdot 10^{-5}$	$2.081 \cdot 10^{-5}$	$4.265 \cdot 10^{-4}$
2 метод	$1.675 \cdot 10^{-5}$	$1.792 \cdot 10^{-5}$	$1.397 \cdot 10^{-5}$	$2.076 \cdot 10^{-5}$	$4.263 \cdot 10^{-4}$
3 метод	$1.692 \cdot 10^{-5}$	$1.790 \cdot 10^{-5}$	$1.438 \cdot 10^{-5}$	$2.074 \cdot 10^{-5}$	$4.261 \cdot 10^{-4}$

Из таблицы 6 видно, что для сеток с одинаковым шагом все 3 использованные метода снова дают практически идентичные результаты.

В таблице 7 представлены относительные ошибки численного решения для случая, когда в нижнем теле использована сетка с шагом $h_1 = 0.25$, а в верхнем теле – сетка с шагом $h_2 = 0.125$, т.е. шаги сеток отличаются в 2 раза. Результаты получены после 50 итераций. Сравнение проводилось с расчетом для единого тела с шагом сетки $h = 0.125$. Рассмотрены величины, относящиеся к верхнему телу, а также перемещения, относящиеся к контактной границе нижнего тела (номер тела обозначен цифрой в скобках).

Таблица 7

Ошибки для расчета с сетками $h_1 = 0.25$, $h_2 = 0.125$

Метод	$u_x(1)$	$u_y(1)$	$u_x(2)$	$u_y(2)$	$\sigma_{xx}(2)$	$\sigma_{yy}(2)$	$\sigma_{xy}(2)$
1	$6.0 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$	3.0E-1
2	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	3.0E-1
3	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	3.1E-1

Для данных сеток результаты, полученные тремя методами, отличаются друг от друга, но визуальными графиками различных величин по-прежнему близки друг другу. По сравнению с расчетами, в которых у сеток одинаковый шаг (таблица 6), наблюдается существенно большее несовпадение перемещений на контактных поверхностях двух тел (после силовой итерации): если раньше относительная ошибка перемещений (при сравнении величин на поверхностях первого и второго тела) составляла величину порядка 10^{-5} , то теперь перемещения отличаются на несколько процентов.

На рис. 7,а показаны графики перемещения u_x на контактных поверхностях обоих тел, для расчета с первым методом (графики с маркерами: для первого тела – маркер в виде квадрата, для второго тела – маркер в виде треугольника) и для расчета с единым телом (шаг сетки $h = 0.125$, график без маркеров). На рис. 7,б–г показаны графики компонент тензора напряжений (σ_{xy} , σ_{xx} и σ_{yy} соответственно) вблизи контактной границы второго тела для расчета первым методом (графики с маркером в форме квадрата) и для расчетов с единым телом (шаг сетки $h = 0.125$ – графики без маркеров, шаг сетки $h = 0.25$ – графики с маркером в форме треугольника).

В рассматриваемой задаче (в отличие от предыдущей) на контактной поверхности есть особая точка – край верхнего тела. В данной точке при измельчении сетки контактное давление будет неограниченно расти. Напряжения, вычисленные в окрестности этой точки, наиболее чувствительны к используемой сетке. Поэтому для случаев, когда в телах строятся сетки с различными шагами, именно в данной области наблюдаются наибольшие расхождения решений. Это наиболее отчетливо видно на рис. 7,в для σ_{xx} . Соответствующий график для контактной задачи почти на всей поверхности достаточно близок к графику, полученному для единого тела с шагом 0.125. Но

при приближении к особой точке график резко сворачивает в сторону графика, полученного в расчете для единого тела с шагом 0.25. Похожая ситуация наблюдается на рис. 7,б для σ_{xy} : значение напряжения вблизи особой точки гораздо ближе к графику для расчета с единым телом с шагом 0.25, чем к графику для расчета с шагом 0.125.

Но в целом, несмотря на различие сеток в нижнем и верхнем теле, результаты решения контактной задачи по-прежнему находятся в хорошем соответствии с результатами для случая одного тела.

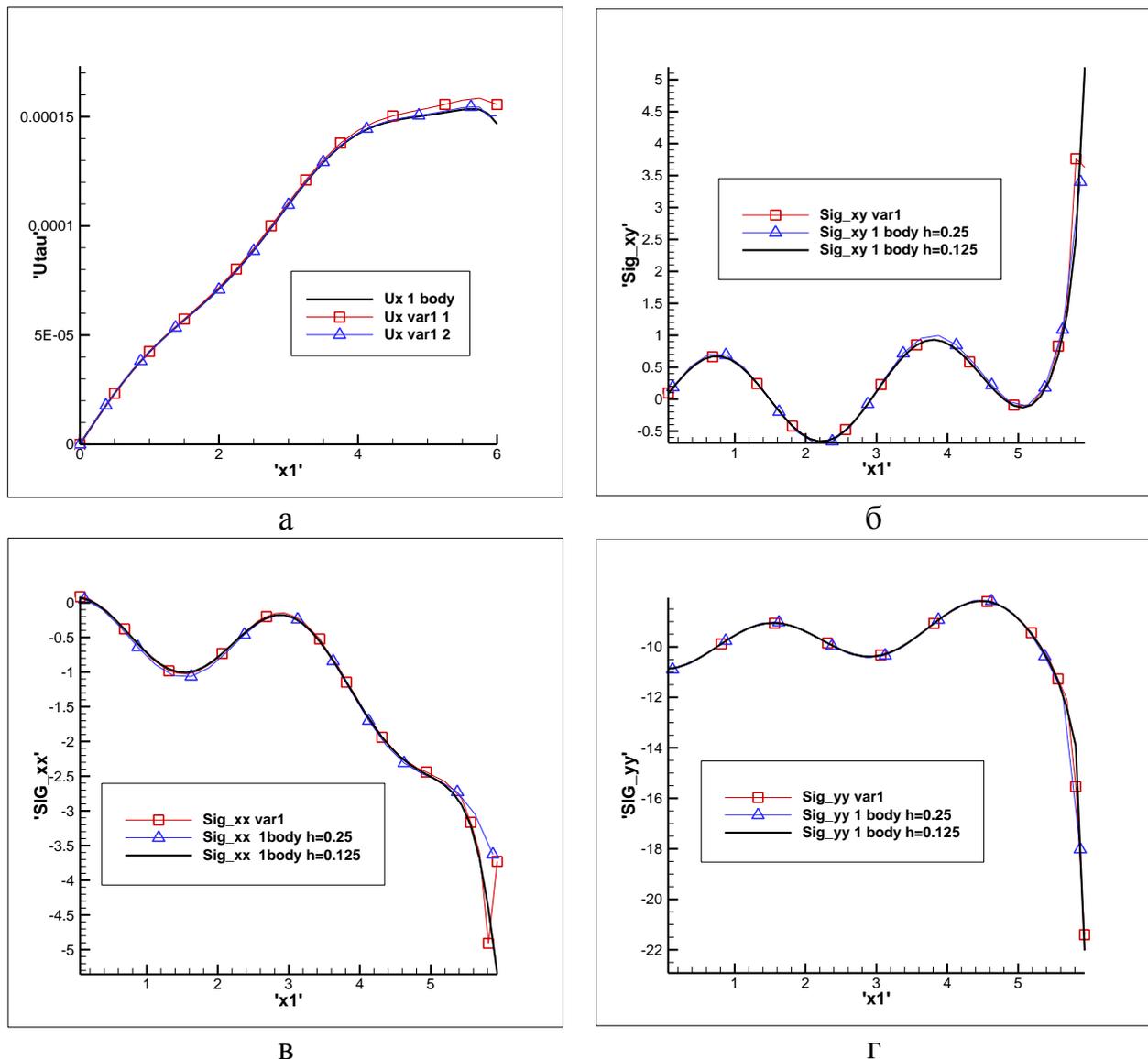


Рис. 7. а – u_x на поверхностях двух тел; б – σ_{xy} для второго тела на поверхностях двух тел; в – σ_{xx} для второго тела; г – σ_{yy} для второго тела

В таблице 8 представлены максимальные относительные ошибки численного решения для случая, когда в нижнем теле использована сетка с шагом $h_1 = 0.125$, а в верхнем теле – сетка с шагом $h_2 = 0.375$, т.е. шаги сеток отличаются в 3 раза. Результаты получены после 50 итераций. Сравнение

проводилось с расчетом для единого тела с шагом сетки $h = 0.125$. Рассмотрены величины, относящиеся к нижнему телу, а также перемещения, относящиеся к контактной границе верхнего тела (номер тела обозначен цифрой в скобках).

Таблица 8

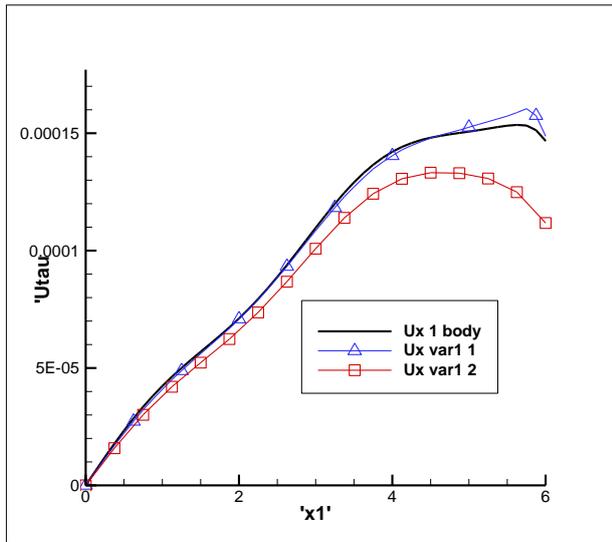
Ошибки для расчета с сетками $h_1 = 0.125$, $h_2 = 0.375$

Метод	$u_x(2)$	$u_y(2)$	$u_x(1)$	$u_y(1)$	$\sigma_{xx}(1)$	$\sigma_{yy}(1)$	$\sigma_{xy}(1)$
1	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$3.8 \cdot 10^{-1}$
2	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$4.9 \cdot 10^{-1}$
3	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-1}$

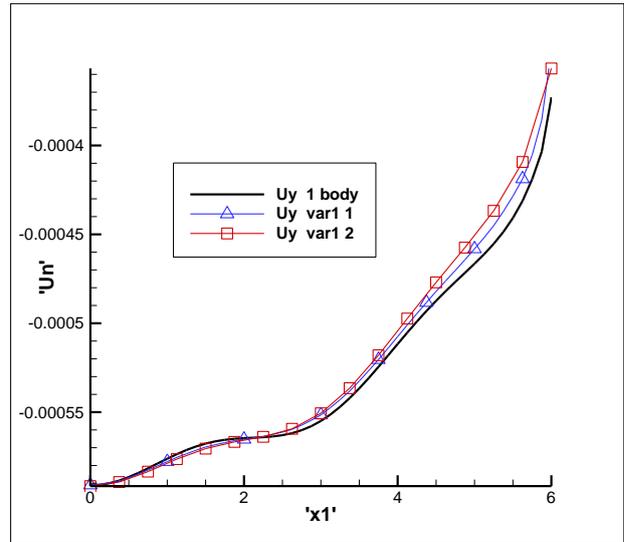
На рис. 8 показаны графики перемещения u_x и u_y на контактных поверхностях обоих тел для расчетов различными методами (графики с маркерами) и для расчета единого тела (шаг сетки $h = 0.125$, графики без маркеров). Из графиков видно, что для первого метода при заданных сетках на рассматриваемой силовой итерации наблюдается очень большое расхождение по перемещениям (для u_x ошибка достигает 25 %, а для u_y – 7 %). При этом дальнейшего уменьшения ошибок не наблюдается: на силовых и на кинематических итерациях получаются два достаточно устойчивых решения, не совпадающих друг с другом. Для решения на силовых итерациях совпадают узловые значения контактных давлений, но имеется упомянутый выше переხлест по перемещениям. Для решения на кинематических итерациях – совпадают перемещения, но сохраняется разрыв по контактным давлениям. Для второго и третьего методов ситуация во многом аналогична: есть сходимость отдельно для кинематических итераций и отдельно для силовых итераций. Но, как видно из таблицы 8 и графиков рис. 8, разрыв перемещений на силовой итерации существенно меньше, чем для первого метода: полученные перемещения на контактных поверхностях гораздо ближе к перемещениям, полученным в расчете для единого тела.

На рис. 9 показаны графики напряжений (σ_{xx} , σ_{yy}) вблизи контактной границы первого тела для расчетов различными контактными методами (графики с маркером) и для расчетов с единым телом (шаг сетки $h = 0.125$, графики без маркеров). Наибольшие расхождения для напряжений получены вблизи особой точки. При этом для второго метода, как и для случая первой задачи (рис. 4), при использовании указанных сеток в контактных давлениях и напряжениях для тела с более мелкой сеткой наблюдаются осцилляции, хотя в среднем полученные графики достаточно близки к графикам, соответствующим одному телу.

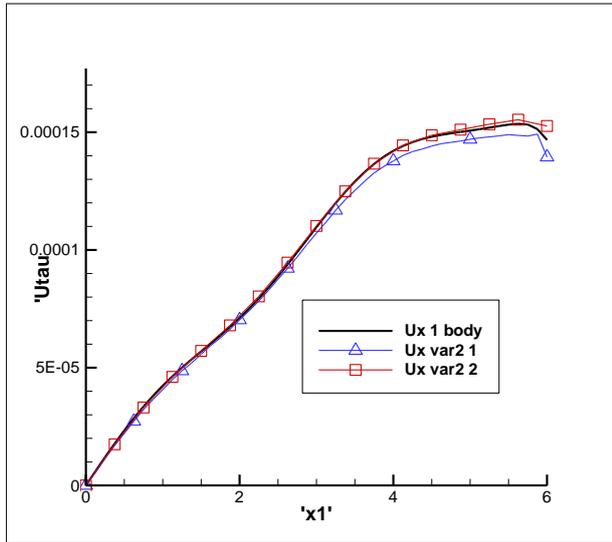
В результате анализа полученных данных можно сделать вывод, что для второй рассмотренной задачи в расчетах с существенно отличающимися сетками лучше всего использовать третий метод.



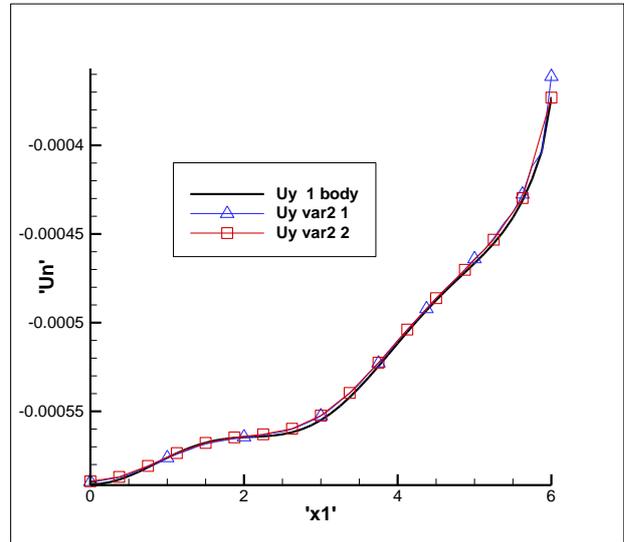
а



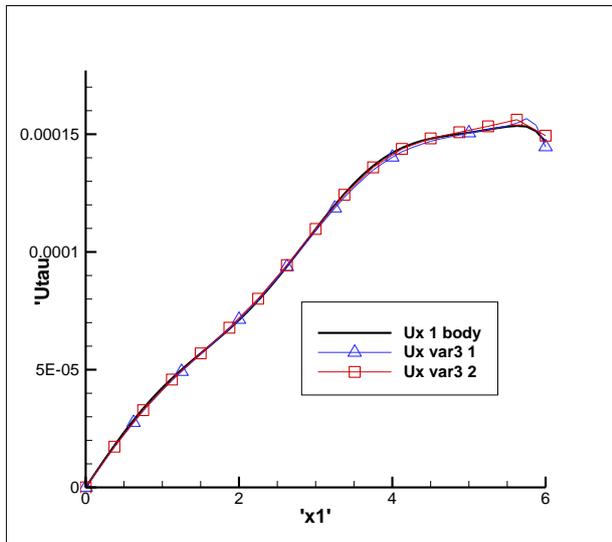
б



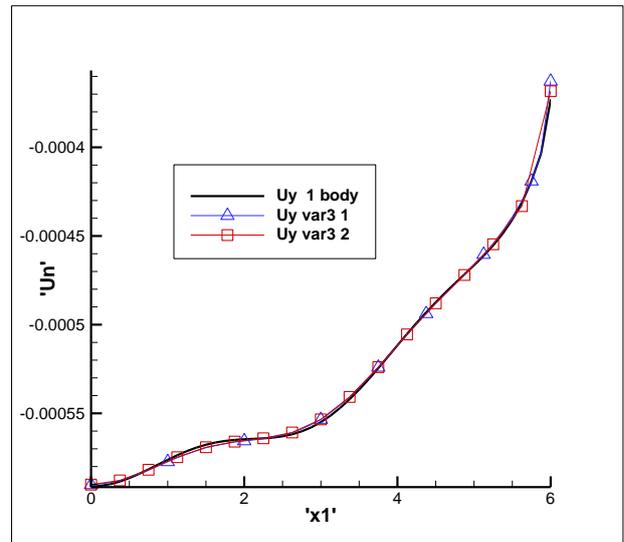
в



г

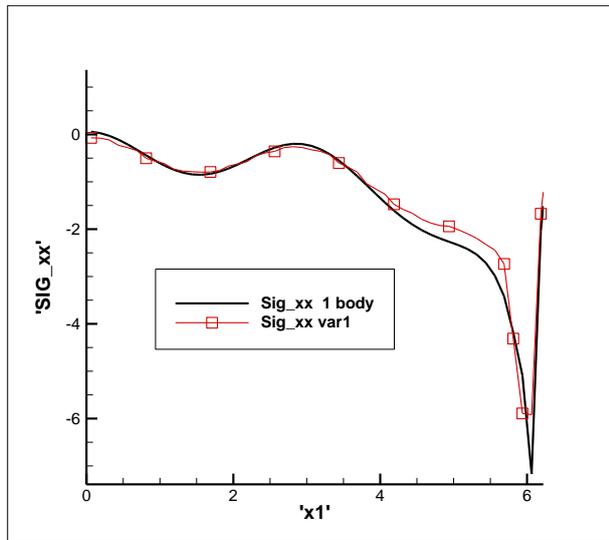


д

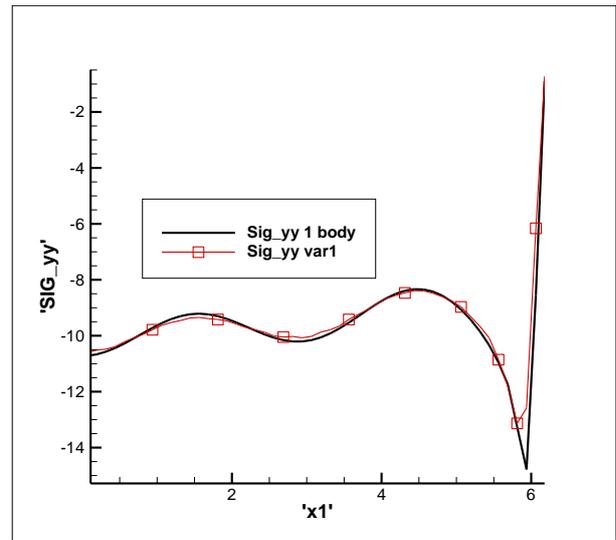


е

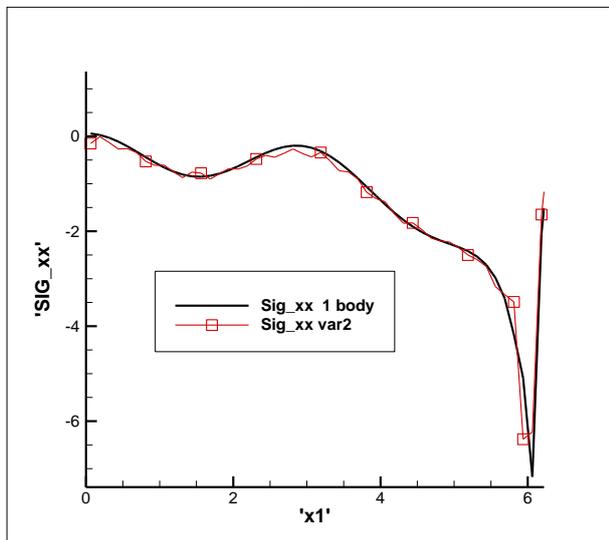
Рис. 8. Компоненты вектора перемещения, полученные тремя методами



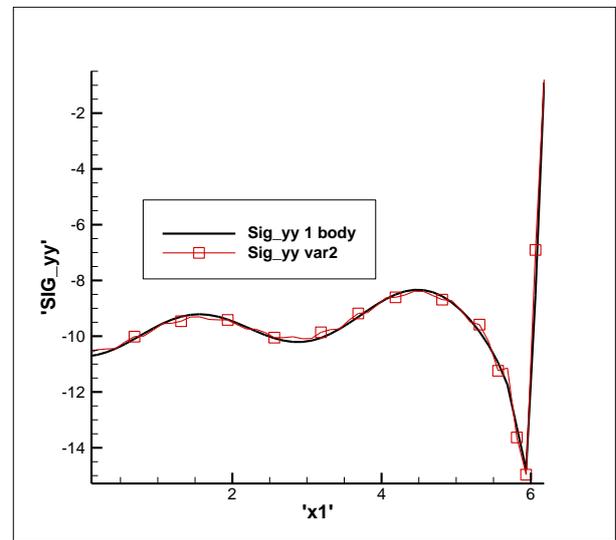
а



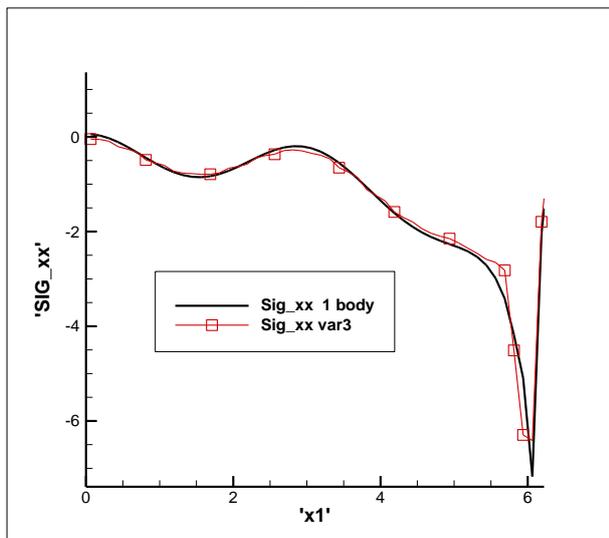
б



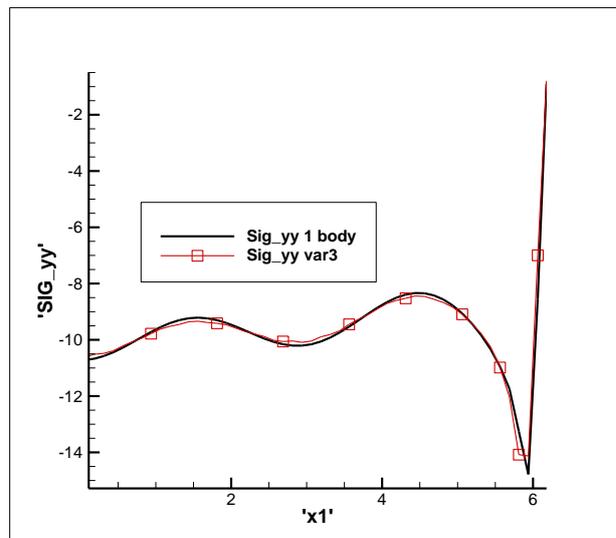
в



г



д



е

Рис. 9. Компоненты тензора напряжений, полученные тремя методами

3.3. Третья тестовая задача

Данная задача полностью аналогична первой тестовой задаче, но на контактной поверхности использовалось условие скольжения без трения.

В такой постановке в общем случае решение, полученное при решении контактной задачи, и решение, полученное для единого тела, будут различны, поскольку касательные перемещения и напряжения на поверхностях разных тел могут отличаться.

Но, если разность касательных величин на контактных границах относительно невелика, полученные нормальные напряжения и перемещения должны быть «близки» к величинам, полученным в расчете для единого тела.

Для сравнения решены 3 контактные задачи: в первой задаче высота обоих тел равна 3, во второй задаче высота нижнего тела равна 4, а высота верхнего – 2, в третьей задаче высота нижнего тела равна 5, а высота верхнего – 1. Шаг сетки во всех телах брался равным 0.125 (контакт узел в узел). Сравнение проводилось для случая одного тела, для которого использовалась идентичная сетка. На рис. 10 приведены 3 пары графиков: в каждой паре один график (с маркером) соответствует напряжению, полученному при решении контактной задачи вблизи контактной поверхности верхнего тела, а второй график (без маркера) соответствует напряжению, полученному в расчете с единым телом (для соответствующего сечения).

Расчеты показали, что при использовании однородных сеток с одинаковым шагом при использовании трех указанных методов получаются практически совпадающие (визуально не отличимые) результаты.

Проведенное сравнение показало, что когда высота обоих тел равна 3, то максимальная относительная ошибка вычисления напряжения σ_{yy} в контактной задаче (график с маркером в виде ромба) относительно напряжения в задаче без контакта составляет величину 0.0012. Когда высота первого тела равна 4, то максимальная относительная ошибка для напряжения в контактной задаче (график с маркером в виде треугольника) относительно напряжения в задаче без контакта составляет величину 0.0055. Когда высота первого тела равна 5, то максимальная относительная ошибка для напряжения в контактной задаче (график с маркером в виде квадрата) относительно напряжения в задаче без контакта составляет величину 0.0167. Следует отметить, что в расчетах наблюдается закономерность: чем больше отличаются касательные перемещения на разных контактных поверхностях, тем больше получается итоговая ошибка по сравнению с напряжениями в едином теле.

Таким образом, можно сделать вывод, что напряжения, полученные при решении рассмотренной контактной задачи, хорошо согласуются (и качественно и количественно) с соответствующими напряжениями в задаче для одного тела. Имеющиеся отличия обусловлены наличием проскальзывания узлов, расположенных на контактной поверхности, по направлению касательной.

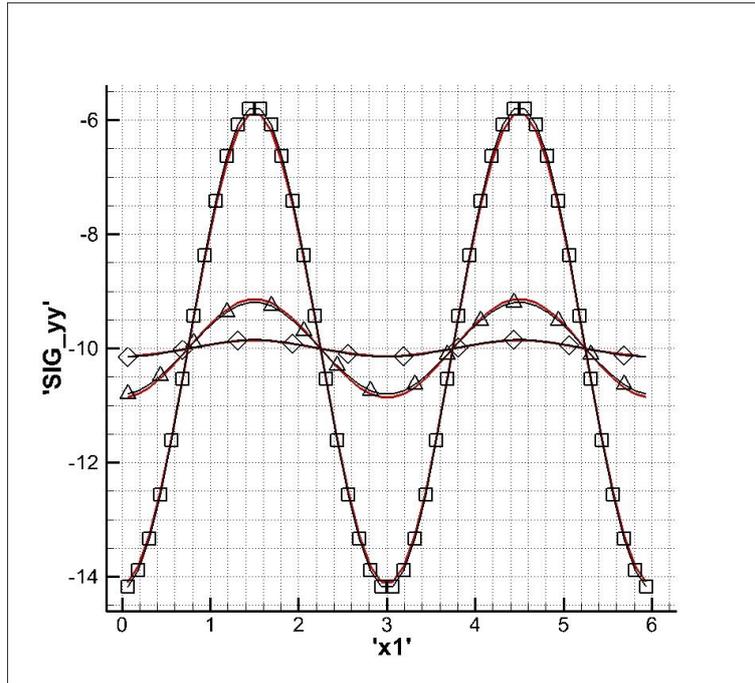


Рис. 10. Распределения нормальных напряжений вблизи контактных поверхностей

На рис. 11–13 показаны перемещения u_x и u_y , а также напряжения σ_{yy} , полученные в расчете, для которого высота первого тела равна 4 (использован третий метод).

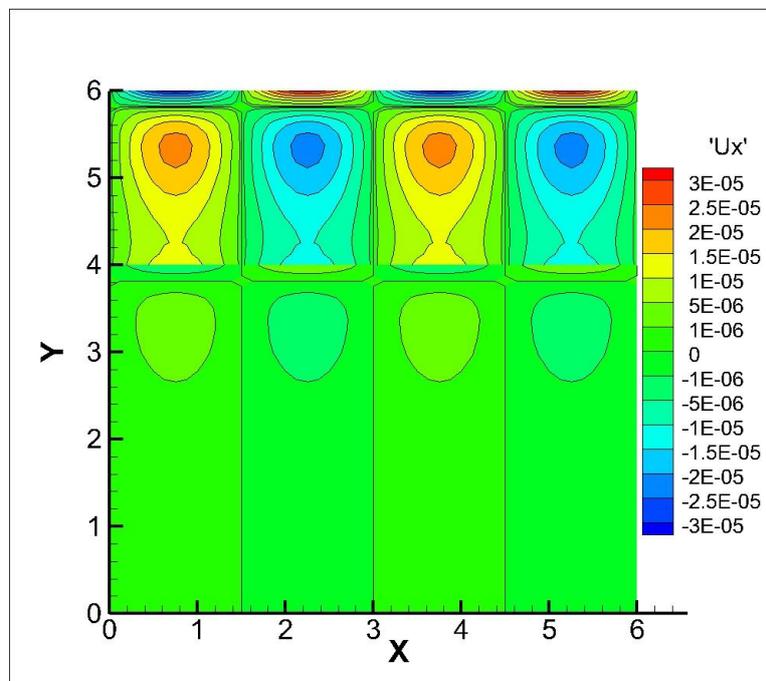


Рис. 11. Распределение перемещений u_x в расчетной области

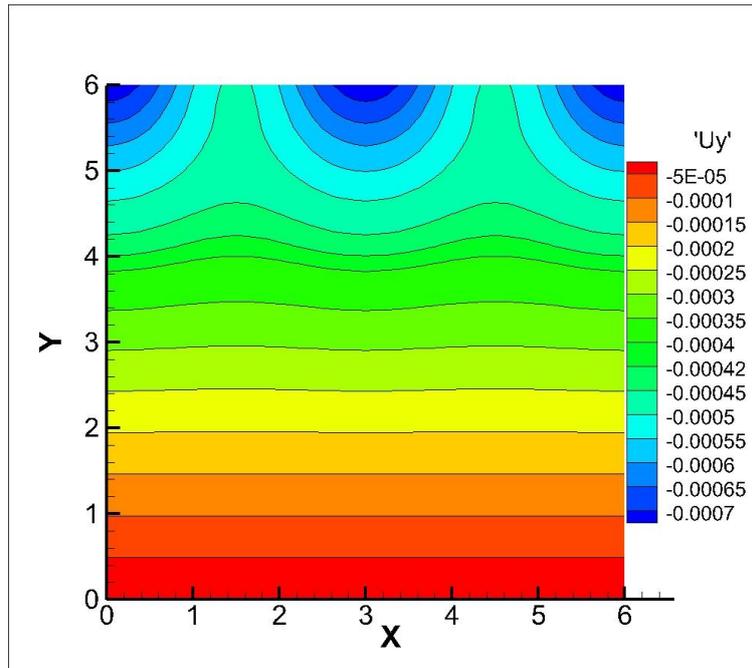


Рис. 12. Распределение перемещений u_y в расчетной области

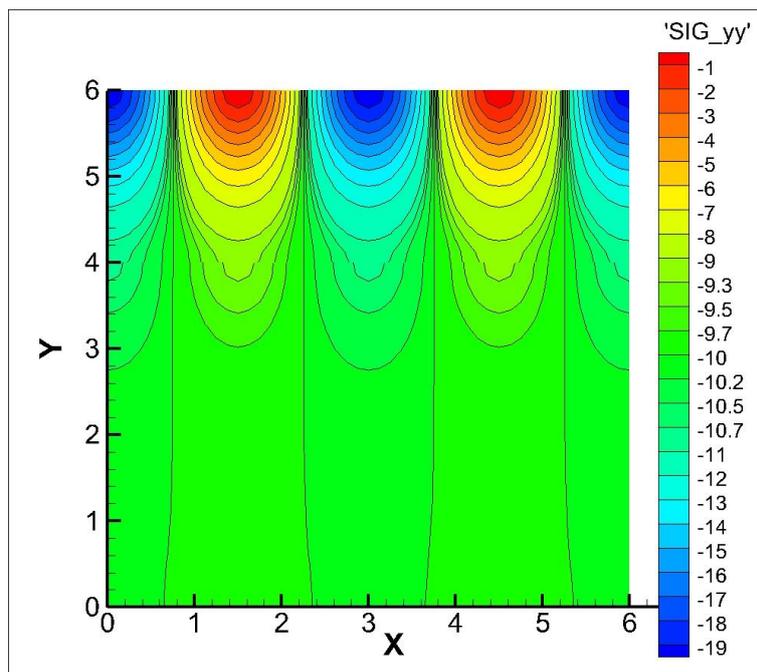


Рис. 13. Распределение напряжений σ_{yy} в расчетной области

Как и в случае с условием прилипания, при использовании сеток с большим отношением шагов применение каждого из трех указанных методов приводит к отличающимся результатам решения контактной задачи.

Заключение

Приведена достаточно общая постановка задачи механического контактного взаимодействия двух упругих тел. Дано описание конечно-элементной реализации итерационного метода Шварца, а также нескольких алгоритмов коррекции напряжений на контактных поверхностях тел на силовой итерации. В качестве контактных условий использованы условия прилипания или условия скольжения без трения. Представлены результаты решения ряда тестовых задач с помощью трех вариантов метода Шварца. Проведено их сравнение с результатами, полученными при решении упругой задачи, в которой вся конструкция рассматривалась как единое целое. По итогам проведенных расчетов можно отметить, что при использовании в телах сеток, совпадающих на контактной поверхности, все три метода дают практически идентичные результаты. При использовании сеток со значительно отличающимися шагами третий метод дает результаты, наиболее близкие к результатам, полученным в расчете с единым телом.

Список литературы

- [1] Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
- [2] Галин Л.А. Развитие теории контактных задач. М.: Наука, 1976. 494 с.
- [3] Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И. Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Математическое моделирование термоупругоупластического контактного взаимодействия системы тел // *Mathematica Montisnigri*. 2014. Т. 30. С. 99 – 114.
- [4] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 540 с.
- [5] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
- [6] Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 351 с.
- [7] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
- [8] Котович А.В., Станкевич И.В. Решение задач теории упругости методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 106 с.
- [9] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
- [10] Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2009. 1024 с.
- [11] Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: Изд. ИВМ и МГ СО РАН, 2007. 371 с.
- [12] Станкевич И.В., Яковлев М.Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца //

Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". Спецвыпуск: Прикладная математика. 2011 г. С. 134 – 141.

[13] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45 – 87.

[14] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.

[15] Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition methods – Algorithms and Theory. Springer Berlin Heidelberg New York, 2005. 450 p.

[16] Цвик Л.Б. Принцип поочередной непрерывности при решении задач теории поля по частям // Докл. АН СССР. 1978. Т.243, Вып. 1. С. 74 – 77.

[17] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980.Т. 16, № 1. С. 13-18.

[18] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел // Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. 2015. Т.55, №8. С. 1429-1443.