ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 129 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лапик М.А., Туляков Д.Н.

Распределение нулей многочленов Эрмита вблизи нуля и гауссовские унитарные ансамбли

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лапик М.А., Туляков Д.Н. Распределение нулей многочленов Эрмита вблизи нуля и гауссовские унитарные ансамбли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 129. 11 с. doi:**10.20948/prepr-2017-129**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-129**

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.А. Лапик, Д.Н. Туляков

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА И ГАУССОВСКИЕ УНИТАРНЫЕ АНСАМБЛИ

Москва, 2017

М.А. Лапик, Д.Н. Туляков E-mail: mashalapik@gmail.com
Распределение нулей многочленов Эрмита вблизи нуля и гауссовские унитарные ансамбли[1]

Аннотация. В работе рассмотрена классическая теорема универсальности ядра Кристоффеля–Дарбу для многочленов Эрмита. Будет приведена формулировка и доказательство этого классического результата для расширяющихся областей в окрестности нуля.

Стр. 11, библ. назв. 8

Ключевые слова: ядра Кристоффеля–Дарбу, универсальность.

M.A. Lapik, D.N. Tulyakov E-mail: mashalapik@gmail.com
Zero distribution of Scaled Hermite Polynomials near zero and Gauss unitary ensembles.

Abstract. We will consider classical universality theorem for Christoffel–Darboux kernels of Hermite Polynomials for growing neighborhoods of zero.

Pages 11, Bibl. 8

Key words: Christoffel–Darboux kernels, universality.

Содержание

[1]Исследование выполнено за счет гранта РФФИ 17-01-00614-а

1 Введение

1.1 Гауссовские унитарные ансамбли

В этом разделе мы вспомним основные определения и введем нужные обозначения, доказательства же можно найти, например, в [1].

Рассмотрим $\mathcal{H}_n$ – пространство Эрмитовых матриц $\mathbf{M} = (M_{kl})$ размера $n \times n$ с вероятностной мерой

$$dP_n(\mathbf{M}) = \frac{1}{Z_n} e^{-nTr\ V(\mathbf{M})} d\mathbf{M}, \quad d\mathbf{M} = \prod_{k=1}^{n} M_{kk} \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{l=k+1}^{n} Re(M_{kl}) Im(M_{kl}), \tag{1}$$

где Z_n– нормировочная константа, равная $\int e^{-nTr\ V(\mathbf{M})} d\mathbf{M}$. Ансамбль случайных матриц $\{\mathcal{H}_n, P_n\}$ с так определенной мерой и $V(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^2$ называют *гауссовским унитарным ансамблем.*

Мера (1) инвариантна относительно унитарных преобразований матриц и зависит только от собственных значений. Мы будем в дальнейшем использовать обозначения

$$dP_n(\mathbf{M}) = dP_n(\overline{\lambda}) = P(\lambda_1, ..., \lambda_n)\, d\overline{\lambda} = P(\lambda_1, ..., \lambda_n\,) d\lambda_1 ... d\lambda_n.$$

Запишем меру (1) в детерминантной форме по формуле Вейля:

$$d\,P(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \frac{c_n}{Z_n} e^{-n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2} \Delta(\overline{\lambda})^2 \prod_{j=1}^{n} d\,\lambda_j,$$

где $\Delta(\overline{\lambda})$ – определитель Вандермонда, $c_n = \dfrac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{n} j!}$. Используя свойства определителя, можно записать для произвольных ортонормированных многочленов $Q_k(x) := q_{k,k} x^k + \cdots$

$$P(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \frac{c_n}{Z_n \prod_{k=0}^{n-1} q_{k,k}} det \begin{bmatrix} K_n(\lambda_1, \lambda_1) & \cdots & K_n(\lambda_1, \lambda_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_n(\lambda_n, \lambda_1) & \cdots & K_n(\lambda_n, \lambda_n) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где K_n это ядро Кристоффеля–Дарбу для многочленов Q_k, определяемое формулой

$$K_n(x, y) = e^{\frac{-n(x^2+y^2)}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(x) Q_k(y). \tag{3}$$

Определим m-точечную корреляционную функцию

$$R_m(\lambda_1, ..., \lambda_m) = \frac{n!}{(n-m)!} \int \cdots \int P(\lambda_1, ..., \lambda_n) d\lambda_{m+1} ... d\lambda_n.$$

Эта функция имеет детерминантную форму, а именно

$$R_m(\lambda_1, ..., \lambda_m) = det \left[K(\lambda_j, \lambda_k) \right]_{j,k=1}^m .$$

Собственные значения удовлетворяют детерминантному точечному процессу, т.е. ожидаемое число собственных значений на отрезке (a_1, b_1) равно $\int_{a_1}^{b_1} R_1(\lambda) d\,\lambda$, а ожидаемое число несовпадающих наборов $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ внутри m-мерного прямоугольника $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m)$ равно $\int_I R_m(\lambda_1, ..., \lambda_m) d\,\lambda_1 ... d\,\lambda_m$. Таким образом, для решения нашей задачи нам потребуется изучить некоторые предельные, при размере матрицы n, стремящемся к бесконечности, свойства ядра Кристоффеля–Дарбу для многочленов Эрмита.

1.2 Глобальный и локальный режимы. Универсальность

В дальнейшем мы будем рассматривать ортонормированные многочлены Эрмита со сжатием (см. [2]) $\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_k(x\sqrt{n})}{\sqrt{2^k k!}}$ относительно веса e^{-nx^2}. Известно [2], что нули классических многочленов Эрмита принадлежат отрезку $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, тем самым, после такого сжатия x можно считать принадлежащим компакту. Тогда, по формуле Кристоффеля–Дарбу, ядро (3) имеет для $x \neq y$ следующий вид:

$$K_{n+1}(x, y) = e^{\frac{-n(x^2+y^2)}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{n}}{2^k k! \sqrt{\pi}} H_k(x\sqrt{n}) H_k(y\sqrt{n}) =$$
$$= e^{\frac{-n(x^2+y^2)}{2}} \frac{H_{n+1}(x\sqrt{n}) H_n(y\sqrt{n}) - H_n(x\sqrt{n}) H_{n+1}(y\sqrt{n})}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}(x-y)}. \tag{4}$$

При $x = y$ мы понимаем эту формула в следующем смысле:

$$K_{n+1}(x, x) = e^{-nx^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{n} H_k^2(x\sqrt{n})}{2^k k! \sqrt{\pi}} =$$
$$= e^{-nx^2} \frac{H'_{n+1}(x\sqrt{n}) H_n(x\sqrt{n}) - H'_n(x\sqrt{n}) H_{n+1}(x)}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}. \tag{5}$$

Есть две классические теоремы, описывающие распределение собственных значений унитарных матричных ансамблей: так называемые глобальный и локальный режимы распределения.

Теорема 1. *Существует предельная мера распределения собственных значений*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}K_n(x,x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{2-x^2}=:\kappa(x).$$

То есть, для $x^*\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ среднее расстояние между соседними собственными значениями "вблизи"x^* аппроксимативно равно

$$(n\kappa(x^*))^{-1}=\frac{\pi}{n\sqrt{2-x^{*2}}}.$$

Следовательно, масштабированные сдвинутые собственные значения

$$n\kappa(x^*)(\lambda_j-x^*),\quad j=1,...,n,$$

имеют ожидаемое расстояние вблизи нуля, равное единице. Следующая предельная теорема описывает локальные свойства воспроизводящего ядра.

Теорема 2. *Для любого* $x^*\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, *и* $K\Subset\mathbb{R}$

$$\sup_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in K\Subset\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n\kappa(x^*)}K_n\left(x^*+\frac{\widetilde{x}}{n\kappa(x^*)},x^*+\frac{\widetilde{y}}{n\kappa(x^*)}\right)-\frac{\sin\pi(\widetilde{x}-\widetilde{y})}{\pi(\widetilde{x}-\widetilde{y})}\right|=o(1)$$

Поскольку это предельное свойство верно (см. [4]) для любого x^* и, вообще говоря, для любого аналитического поля V, то его называют универсальностью. В этой работе будет рассмотрена более общая формулировка этой теоремы для $x^*=0$.

Доказательство гипотезы об универсальности предельного поведения ансамблей матричных случайных величин впервые было получено в работе Л.Пастура и М. Щербины [3] с ограничениями на гладкость поля V, а позднее П. Дейфтом с соавторами [4] (только для аналитических полей V). А.И. Аптекаревым, П. Блехером и А. Куэларсом в [5] с помощью векторных задач равновесия логарифмического потенциала получена предельная теорема распределения собственных значений гауссовых случайных матриц с внешним источником, используемая в описании броуновских мостов. Так же задачи с внешним источником изучались в [6], [7], [8].

Автор выражает глубокую благодарность А.И. Аптекареву за полезные обсуждения в процессе работы над этой задачей.

2 Другая формулировка свойства универсальности. Формулировка основного результата

В данной работе предлагается обсудить следующую задачу. Можно ли в классической формулировке заменить фиксированный компакт K на компакт $K(n)$, то есть растущий при увеличении n? Какова максимальная скорость роста? Основным результатом работы является следующая теорема для $x^* = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\kappa := \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

$$\sup_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in[-m(n),m(n)]} \left| \frac{1}{n\kappa} K_n\left(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa}, \frac{\widetilde{y}}{n\kappa}\right) - \frac{\sin \pi(\widetilde{x}-\widetilde{y})}{\pi(\widetilde{x}-\widetilde{y})} \right| = o(1). \tag{6}$$

При $x^* = 0$ *для* $m = o(n^{\frac{2}{3}})$ *верно (6). При* $m = O(n^{\frac{2}{3}})$ *(6) не имеет места.*

Можно предложить следующую интерпретацию этой теоремы, которая отвечает на вопрос: как, с помощью линейных растяжений κ масштабированных многочленов Эрмита добиться того, чтобы классическая теорема 2 (то есть чтобы $2m(n)$ нулей попадали бы вблизи целых чисел) была верна на максимально большом компакте $[-m(n), m(n)]$?

3 Доказательства

3.1 Метод перевала. Асимптотика многочленов Эрмита

В этой секции мы опишем нахождение асимптотики многочленов Эрмита методом перевала. Нам понадобится интегральное представление этих полиномов (см. [2])

$$H_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{2zw-w^2}}{w^{n+1}} dw, \tag{7}$$

где интегрирование ведется по контуру, который охватывает точку 0. Корни этих полиномов лежат на отрезке $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$. "Сожмем" их в $\sqrt{n}$ раз, иными словами сделаем замену переменных

$$z = x\sqrt{n}, \quad w = t\sqrt{n}. \tag{8}$$

Получим для H_n и H_{n+1} выражения

$$H_n(x\sqrt{n}) = \frac{n!}{2n^{n/2}\pi i} \int_\gamma \left[\frac{e^{2xt-t^2}}{t}\right]^n \frac{dt}{t} = \frac{n!}{2n^{n/2}\pi i} \int_\gamma \frac{e^{n(2xt-t^2-\ln t)}dt}{t}, \tag{9}$$

$$H_{n+1}(x\sqrt{n}) = \frac{(n+1)!}{2n^{(n+1)/2}\pi i}\int_\gamma \left[\frac{e^{2xt-t^2}}{t}\right]^n \frac{dt}{t^2} = \frac{(n+1)!}{2n^{(n+1)/2}\pi i}\int_\gamma \frac{e^{n(2xt-t^2-\ln t)}dt}{t^2}. \tag{10}$$

Мы будем искать асимптотику этих полиномов методом перевала. Поскольку нам понадобятся два члена в асимптотической формуле, мы будем вынуждены применить метод перевала дважды.

Функция $p(t) := 2xt - t^2 - \ln t$ имеет две сопряженные (при $|x| < \sqrt{2}$) седловые точки, такие, что $p'(t) = 2x - 2t - t^{-1} = 0$:

$$T_\pm = \frac{x \pm \sqrt{x^2-2}}{2}. \tag{11}$$

Модифицируем замкнутый контур γ так, чтобы он проходил через точку $T_- = \dfrac{x - i\sqrt{2-x^2}}{2}$ к $+\infty$ вдоль действительной прямой "снизу" и возвращался из $+\infty$ "сверху" вдоль действительной прямой к точке $T_+ = \dfrac{x + i\sqrt{2-x^2}}{2}$ и аналогично проходил через $-\infty$. Часть контура γ в нижней полуплоскости будем обозначать γ_-, в верхней – γ_+.

Разложим около каждой седловой точки функцию

$$p(t) = p(T_\pm) + c_2^\pm (t-T_\pm)^2 + c_3^\pm (t-T_\pm)^3 + \cdots$$

Функции $\varphi_\pm$ определяются выражением $p(t) = p(T_\pm) - \varphi_\pm^2(t)$, точнее

$$\varphi_\pm(t) = \sqrt{-c_2^\pm}(t-T_\pm) + \cdots,$$

где ветвь корня выбираем так, что

$$\sqrt{-c_2^\pm} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2-x^2}}{2}\left[\left(\sqrt{\sqrt{2}-x} + \sqrt{\sqrt{2}+x}\right) \pm i\left(\sqrt{\sqrt{2}+x} - \sqrt{\sqrt{2}-x}\right)\right].$$

Ветвь корня выбрана так, что при обходе вдоль контура γ функция φ ведет себя на бесконечность как t.

Заметим, что $\varphi_\pm$ голоморфны в окрестности $T_\pm$ соответственно и

$$\varphi_\pm'(T_\pm) = \sqrt{-c_2^\pm} \neq 0.$$

Используя введенные обозначения в (9) и (10), имеем

$$H_n(x\sqrt{n}) = \frac{n!}{2n^{n/2}\pi i}\left[e^{np(T_+)}\int_{\gamma_+}\frac{e^{-n\varphi_+^2(t)}dt}{t} + e^{np(T_-)}\int_{\gamma_-}\frac{e^{-n\varphi_-^2(t)}dt}{t}\right], \tag{12}$$

$$H_{n+1}(x\sqrt{n}) = \frac{(n+1)!}{2n^{(n+1)/2}\pi i}\left[e^{np(T_+)}\int_{\gamma_+}\frac{e^{-n\varphi_+^2(t)}dt}{t^2} + e^{np(T_-)}\int_{\gamma_-}\frac{e^{-n\varphi_-^2(t)}dt}{t^2}\right]. \tag{13}$$

Найдем асимптотику интеграла вида $\int_{\gamma_\pm} f_0(t)e^{-n\varphi_\pm^2(t)}dt$, где f_0 – это некоторая голоморфная в окрестности γ функция. Ведем $a_j^\pm = a_j^\pm(f_0)$, $b_j^\pm = b_j^\pm(f_0)$, $f_j^\pm = f_{j,f_0}^\pm$ и $g_j^\pm = g_{j,f_0}^\pm$, $j = 0, 1, \ldots$ (в случаях, где это не приводит к недоразумению, зависимость от f_0 мы будем опускать) по формулам

$$\begin{aligned} &f_j^\pm(t) = a_j^\pm\varphi'_\pm(t) + b_j^\pm\varphi_\pm(t)\varphi'_\pm(t) + g_j^\pm(t)\varphi_\pm(t)\varphi'_\pm(t) \quad j = 0, 1, \ldots \\ &f_{j+1}^\pm(t) = \frac{d}{dt}g_j^\pm(t), \quad g_j^\pm(T_\pm) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда

$$a_j^\pm = \frac{f_j^\pm(T_\pm)}{\varphi'_\pm(T_\pm)},\ b_j = \lim_{t\to T_\pm}\frac{f_j^\pm(t) - a_j^\pm\varphi'_\pm(t)}{\varphi_\pm(t)\varphi'_\pm(t)},\ f_{j+1}^\pm(t) = \left(\frac{f_j^\pm(t) - a_j^\pm\varphi'_\pm(t)}{\varphi_\pm(t)\varphi'_\pm(t)}\right)_t'.$$

Интегрированием по частям получим для $j = 0, 1, \ldots$

$$\int_{\gamma_\pm}(a_j^\pm + b_j^\pm\varphi_\pm(t) + g_j^\pm(t)\varphi_\pm(t))e^{-n\varphi_\pm^2(t)}d\varphi_\pm =$$

$$= \mp a_j^\pm\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{2n}\int_{\gamma_\pm} f_{j+1}e^{-n\varphi_\pm^2}dt + o(\frac{1}{n^2}),$$

где плюсу будет соответствовать контур γ_+, а минусу – контур γ_-. Тогда

$$\int_{\gamma_\pm} f_0(t)e^{-n\varphi_\pm^2(t)}dt = \mp\sqrt{\frac{\pi}{n}}\left[a_0^\pm + \frac{1}{2n}a_1^\pm\right] + o(\frac{1}{n^2}).$$

Введем новые обозначения в (14) для степеней n $a_j^\pm = a_j^\pm\left(\frac{1}{t}\right)$, $b_j^\pm = b_j^\pm\left(\frac{1}{t}\right)$, и $n+1$ $A_j^\pm = a_j^\pm\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $B_j^\pm = b_j^\pm\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $j = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} &H_n(x\sqrt{n}) = \frac{n!}{2n^{n/2}i\sqrt{\pi n}}\times \\ &\times\left[e^{np(T_-)}\left(a_0^- + \frac{1}{2n}a_1^- + o(\frac{1}{n^2})\right) - e^{np(T_+)}\left(a_0^+ + \frac{1}{2n}a_1^+ + o(\frac{1}{n^{3/2}})\right)\right]; \end{aligned} \tag{15}$$

$$H_{n+1}(x\sqrt{n})=\frac{(n+1)!}{2n^{(n+2)/2}i\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\left[e^{np(T_-)}\left(A_0^-+\frac{1}{2n}A_1^-+o(\frac{1}{n^{3/2}})\right)-e^{np(T_+)}\left(A_0^++\frac{1}{2n}A_1^++o(\frac{1}{n^{3/2}})\right)\right]. \tag{16}$$

Легко проверить, что

$$e^{np(T_\pm)}=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{n(x^2+1)}{2}}e^{\pm in\left(\frac{x\sqrt{2-x^2}}{2}-\arccos(\frac{x}{\sqrt{2}})\right)}, \tag{17}$$

где $+,-$ отвечают подстановке в экспоненту T_+ и T_- соответственно. Далее нужно вычислить коэффициенты в (15) и (16) по формулам (14):

$$a_0^\pm=\frac{1}{T_\pm\sqrt{-c_2^\pm}},\ \ A_0^\pm=\frac{1}{T_\pm^2\sqrt{-c_2^\pm}}. \tag{18}$$

Приведем их к тригонометрическому виду:

$$a_0^\pm=\frac{\pm 1}{i}\left(\frac{2}{2-x^2}\right)^{1/4}e^{\pm i\left(-\frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{\sqrt{2}})+\frac{\pi}{4}\right)},\qquad a_1^\pm=a_0^\pm\frac{48T_\pm^4-6T_\pm^2+1}{6(2T_\pm^2-1)^3},$$
$$A_0^\pm=\frac{\pm\sqrt{2}}{i}\left(\frac{2}{2-x^2}\right)^{1/4}e^{\pm i\left(-\frac{3}{2}\arccos(\frac{x}{\sqrt{2}})+\frac{\pi}{4}\right)},\ \ A_1^\pm=A_0^\pm\frac{144T_\pm^4-78T_\pm^2+13}{6(2T_\pm^2-1)^3}. \tag{19}$$

Введем обозначение $\Phi(x)=\left(\frac{n}{2}x\sqrt{2-x^2}-(n+\frac{1}{2})\arccos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$. Объединяя (15)-(19) запишем

$$\begin{gathered}H_n(x\sqrt{n})=n!\left(\frac{2}{n}\right)^{n/2}e^{\frac{n(x^2+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2}{2-x^2}\right)^{1/4}\times\\ \times\sum_{T=T_\pm}\frac{(\cos\pm i\sin)}{2}\left(\Phi(x)\right)\left[1-\frac{1}{12n}\frac{48T^4-6T^2+1}{(1-2T^2)^3}+...\right]\end{gathered} \tag{20}$$

$$H_{n+1}(x\sqrt{n})=(n+1)!\left(\frac{2}{n}\right)^{(n+1)/2}e^{\frac{n(x^2+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2}{2-x^2}\right)^{1/4}\times$$
$$\sum_{T=T_\pm}\frac{(\cos\pm i\sin)}{2}\left(\Phi(x)-\arccos\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left[1-\frac{1}{12n}\frac{144T^4-78T^2+13}{(1-2T^2)^3}+...\right] \tag{21}$$

3.2 Асимптотика ядра Кристоффеля–Дарбу. Случай $x^*=0$

Разложим $\Phi(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa})$, $\Phi(\frac{\widetilde{y}}{n\kappa})$ в ряды Маклорена по $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ соответственно

$$\Phi(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa})-\Phi(\frac{\widetilde{y}}{n\kappa})=\pi(\widetilde{x}-\widetilde{y})\frac{(1+\frac{1}{4n})\sqrt{2}}{\pi\kappa_n}-\frac{\widetilde{x}^3-\widetilde{y}^3}{3\sqrt{2}^3n^2\kappa^3}(1-\frac{1}{4n})+\cdots \tag{22}$$

Подставим (20), (21) в выражение для ядра (4), полагая $x = \dfrac{\widetilde{x}}{n\kappa}$, $y = \dfrac{\widetilde{y}}{n\kappa}$, где $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in [-m(n), m(n)]$ для $m = o(n^{\frac{2}{3}})$. Тогда

$$\Phi(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa}) - \Phi(\frac{\widetilde{y}}{n\kappa}) = \pi(\widetilde{x} - \widetilde{y}) + o(1)$$

и

$$\frac{\pi}{n\sqrt{2}} K_n\left(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa}, \frac{\widetilde{y}}{n\kappa}\right) = \frac{\sin\pi(\widetilde{x} - \widetilde{y}) + O\left(\frac{\widetilde{x}-\widetilde{y}}{n}\right)}{\pi(\widetilde{x} - \widetilde{y})}. \tag{23}$$

Мы воспользовались в (23) следующими тригонометрическими преобразованиями для

$$a = \Phi(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa}), \quad b = \Phi(\frac{\widetilde{y}}{n\kappa}), \quad c = -\arccos(\frac{\widetilde{y}}{n\kappa\sqrt{2}}), \quad d = -\arccos(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa\sqrt{2}}):$$

$$\begin{gathered}
\cos a\cos(b+c) - \cos b\cos(a+d) = \\
= \cos a\cos b(\cos c - \cos d) - \cos a\sin b\sin c + \cos b\sin a\sin d \\
+\frac{1}{2}\left[\cos b\sin a - \cos a\sin b\right](\sin d + \sin c) + \\
+\frac{1}{2}\left[\cos b\sin a + \cos a\sin b\right](\sin d - \sin c) = \\
= \sin(a-b)\sin\frac{d+c}{2}\cos\frac{d-c}{2} + \\
+\sin\frac{d-c}{2}\left(2\cos a\cos b\sin\frac{c+d}{2} + \sin(a+b)\cos\frac{d+c}{2}\right).
\end{gathered} \tag{24}$$

При $m = o(n^{\frac{2}{3}})$ выражение (24) ведет себя при $n \to \infty$ как

$$\sin\left(\Phi(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa}) - \Phi(\frac{\widetilde{y}}{n\kappa})\right) + o(1) \approx \sin\pi\left(\widetilde{x} - \widetilde{y}\right),$$

что дает (23). Мы доказали первую часть утверждения 1) теоремы 3.

При $m = O(n^{\frac{2}{3}})$ имеем, что $\Phi(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa}) - \Phi(\frac{\widetilde{y}}{n\kappa}) = \pi(\widetilde{x} - \widetilde{y}) + O(1)$

$$\frac{\pi}{n\sqrt{2}} K_n\left(\frac{\widetilde{x}}{n\kappa}, \frac{\widetilde{y}}{n\kappa}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(2 - \frac{\widetilde{x}^2}{n^2\kappa^2})(2 - \frac{\widetilde{y}^2}{n^2\kappa^2})}} \times$$

$$\times\left[\frac{\sin\left(\Phi(x) - \Phi(y)\right)\left(\sqrt{1 - \frac{\widetilde{x}^2}{2n^2\kappa^2}} + \sqrt{1 - \frac{\widetilde{y}^2}{2n^2\kappa^2}}\right)}{2\pi(\widetilde{x} - \widetilde{y})} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Список литературы

[1] *М.Л. Мета*, Случайные матрицы М.:, Издательство МЦНМО, 2012.

[2] G. Szego, Orthogonal polynomials, AMS, N.-Y. 1959.

[3] *L. Pastur, M. Shcherbina*, Universality of the Local Eigenvalue Statistics for a Class of Unitary Invariant Matrix Ensembles // J.Stat.Phys., 86, (1997), 109−147 .

[4] *P. Deift, T. Kriecherbauer, K.T-R. McLaughlin, S. Venakides and X. Zhou,* Uniform asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory // Commun. Pure Appl. Math. 52 (1999), 1335−1425 .

[5] *A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars,* Large n Limit of Gaussian Random Matrices with External Source, Part II // Commun. Math. Phys. 259, (2005), 367−389.

[6] *А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков,* Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником // ТМФ, 159:1 (2009), 34−57.

[7] *А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков,* Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов // Матем. сб., 202:2 (2011), 3−56.

[8] *А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс*, Аппроксимации Эрмита−Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов// УМН, 66:6(402) (2011), 123-190.