ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 135 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А.

Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А. Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 135. 32 с. doi:10.20948/prepr-2017-135
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-135

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П. А. Бахвалов

Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности

Москва — 2017

Бахвалов П. А.

Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности

Рассматривается решение линеаризованных уравнений Навье – Стокса с учётом теплопроводности, задающее звуковую волну в бесконечном прямом круглом цилиндрическом канале. На стенках цилиндра ставятся условия прилипания и постоянной температуры. Описываются детали процедуры численного вычисления физических величин в произвольной точке области.

Ключевые слова: акустика, линеаризованные уравнения Навье – Стокса

Pavel Alexeevich Bakhvalov

Sound wave in an infinite circular cylinder in the presence of viscosity and heat conductivity

In an infinite circular cylinder we consider exact solutions of the linearized Navier – Stokes equations for a heat conducting gas. No-slip conditions and constant temperature are imposed on the cylinder walls. We describe details of program implementation.

Key words: acoustics, linearized Navier – Stokes equations

Оглавление

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о распространении волн малой амплитуды в бесконечном прямом круглом цилиндрическом канале с жёсткими изотермическими стенками. Такие волны описываются линеаризованной системой уравнений Навье – Стокса. Впервые эта задача с учётом вязкости и теплопроводности была рассмотрена Кирхгоффом в [1], где приводится её решение в случае поршневой моды (то есть при нулевом азимутальном волновом числе). Решение ищется в виде суммы двух компонент – с потенциальным и соленоидальным полями скоростей, а коэффициенты их линейной комбинации выбираются исходя из граничных условий. Позже данная задача рассматривалась во многих известных монографиях, например [2] (§361) или [3] (гл. XIX).

Работы [1–3] посвящены описанию физических процессов, и точное решение дифференциальных уравнений являлось для этого средством. В частности, было оценено влияние диссипативных процессов на скорость распространения волны и теплообмен со стенками канала. Вычисление же пульсаций физических величин в какой-либо конкретной точке пространства не имело большого смысла. Но, помимо объяснения физических явлений, точные решения уравнений механики сплошной среды нужны для верификации и оценки точности численных методов. И в этом случае как раз становится необходимым достаточно точное программное вычисление решения в заданном наборе точек, например в узлах расчётной сетки.

Большинство задач вычислительной аэроакустики связаны с моделированием высокорейнольдсовых течений. В пристеночной области образуется пограничный слой, характеризуемый сильной анизотропией течения, и для его эффективного моделирования в этой области, как правило, используется анизотропная сетка. К тому же обтекаемая поверхность часто является криволинейной. Однако для анализа численных алгоритмов задачи с точными решениями, отражающие особенности вычислительной аэроакустики, в настоящее время не используются.

Отсутствие подходящих точных решений вынуждает прибегать к различным методикам для обхода этой проблемы. Например, в [4] в силу отмечаемого авторами недостатка точных решений сходимость численной схемы исследуется на задаче типа “manufactured solution”. Этот подход заключается в том, что в качестве решения берётся произвольное искусственно заданное гладкое поле, а возникающая невязка вставляется в уравнения как источник. Но чаще всего анализ точности ограничивается только задачами без анизотропии в решении, а затем работоспособность разностной схемы демонстрируется на той или иной сложной задаче, что, как правило, исключает возможность количественной оценки точности численных методов. Валидация относительно эксперементальных данных также не даёт такой оценки.

Предлагаемая задача – звуковая гармоника в цилиндрическом канале при наличии вязкости и теплопроводности – частично решает проблему отсутствия анизотропных точных решений для анализа разностных схем, предназначенных для решения задач вычистительной аэроакустики. В этом решении коэффициенты вязости и теплопроводности могут меняться в широком диапазоне. Возможны как сильно вязкие решения, где частота колебаний становится чисто мнимой, так и слабо вязкие, где вязкие эффекты сосредоточены в пристеночной области. Также возможен предельный переход при отсутствии теплопроводности ($\mathrm{Pr} = \infty$).

В настоящей работе точное решение рассматриваемой задачи выводится и представляется в виде, удобном для его программной реализации. В частности, избегаются выражения, значение которых очень велико и поэтому не представимо в ЭВМ в виде поддерживаемых аппаратным образом чисел с плавающей точкой. Таковыми выражениями, например, являются $\exp(z)$ при больших $\mathrm{Re}(z)$ или функция Бесселя комплексного аргумента $J_\nu(z)$ при больших $|\mathrm{Im}\, z|$. Допустимыми являются выражения вида $J_\nu(\alpha r)/J_\nu(\alpha R)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, при $r < R$, если знаменатель отделён от нуля. Также введём функцию $Y_\nu(z)$, определяемую равенствами

$$Y_\nu(z) = \frac{zJ'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = \nu - \frac{zJ_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}. \tag{1}$$

При больших αR и z соответственно эти функции предлагается не вычислять напрямую их определения, а заменять асимптотиками. Более подробно о них будет сказано в соответствующем разделе.

Уравнения Навье – Стокса

Уравнения Навье – Стокса для вязкого теплопроводного идеального газа имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j(\rho u_j) = 0;$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla_j(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) = \nabla_j T_{ij};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u_k u_k}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}\right) + \nabla_j\left(\left(\frac{\rho u_k u_k}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1}\right) u_j\right) =$$

$$= \nabla_i(T_{ij} u_j) + \nabla\left(\frac{\mu\gamma}{\mathrm{Pr}}\nabla\left(\frac{p}{(\gamma-1)\rho}\right)\right);$$

$$T_{ij} = \mu\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_k u_k\right).$$

Здесь искомые переменные: ρ – плотность, $\boldsymbol{u}$ – скорость, p – давление. Параметры уравнений: μ – коэффициент динамической вязкости, Pr – число Прандтля, γ – показатель адиабаты – могут быть гладкими функциями решения. δ_{ij} – символ Кронекера. Здесь и всюду далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Линеаризуем эти уравнения на фоновом поле $\bar{\rho} = 1$, $\bar{\boldsymbol{u}} = 0$, $\bar{p} = 1/\gamma$. Штрихами обозначим пульсации соответствующих переменных.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla_j u_j = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla_i p' = \mu \left(\triangle u_i + \frac{1}{3} \nabla_i (\nabla_j u_j) \right), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{\gamma - 1} \nabla_j u_j = \frac{\mu}{\mathrm{Pr}(\gamma - 1)} \triangle (\gamma p' - \rho').$$

Коэффициенты μ, Pr, γ в этих уравнениях, если в исходной системе они и зависели от решения, определяются по фоновому полю и поэтому постоянны во времени и пространстве.

Домножим последнее уравнение на $(\gamma - 1)$ и вычтем из него (2):

$$\frac{\partial (p' - \rho')}{\partial t} = \frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \triangle (\gamma p' - \rho'). \tag{4}$$

Уравнение (4) можно считать уравнением для энтропии, т. к. пульсация энтропии равна $\gamma(p' - \rho')$.

Вывод выражения для гармоники

Общие соображения

Рассмотрим систему (2)–(4) в цилиндрической области $t \in \mathbb{R}$, $r < R$, $0 < \phi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. При $r = R$ зададим условия прилипания и нулевой пульсации температуры:

$$\boldsymbol{u}|_{r=R} = 0, \quad (\gamma p' - \rho')|_{r=R} = 0.$$

При отсутствии теплопроводности, то есть когда число Прандтля равно бесконечности, граничные условия на пульсацию температуры не требуются.

Будем искать непрерывное (в т. ч. ограниченное в начале координат) решение, в котором плотность, давление и цилиндрические компоненты скорости зависят от t, z и ϕ как $\exp(i\omega t + ikz + i\nu\phi)$, где $\omega \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Введём

$$\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r}) = \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r}) e^{i\omega t}, \quad p'(t, \boldsymbol{r}) = \tilde{p}(\boldsymbol{r}) e^{i\omega t}, \quad \rho'(t, \boldsymbol{r}) = \tilde{\rho}(\boldsymbol{r}) e^{i\omega t}.$$

Тогда система (2)–(4) примет вид

$$i\omega\tilde{\rho} + \nabla_j \tilde{u}_j = 0, \tag{5}$$

$$i\omega\tilde{u}_i + \nabla_i \tilde{p} = \mu\left(\triangle\tilde{u}_i + \frac{1}{3}\nabla_i(\nabla_j\tilde{u}_j)\right), \tag{6}$$

$$i\omega(\tilde{p} - \tilde{\rho}) = \frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\triangle(\gamma\tilde{p} - \tilde{\rho}). \tag{7}$$

Поскольку изменение знака действительной части ω равносильно комплексному сопряжению всей системы уравнений (5)–(7), всюду далее будем считать $\mathrm{Re}\,\omega \geqslant 0$. Мнимая часть частоты всегда неотрицательна: $\mathrm{Im}\,\omega \geqslant 0$. Противное означало бы наличие экспоненциально растущих звуковых мод, что в условиях однородного фонового поля является нефизичным.

По теореме Гельмгольца гладкое векторное поле $\boldsymbol{u}$ представимо в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^S + \boldsymbol{u}^\Pi$, причём $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}^S = 0$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}^\Pi = 0$. Поэтому и решение (5)–(7) представимо в виде суммы двух частных решений, в одном из которых поле скоростей бездивергентное, а во втором – безвихревое. Граничным условиям на стенке канала должна удовлетворять только их сумма.

Отсутствие стационарного решения

Покажем, что при $\mu \neq 0$ и $\mathrm{Pr} \neq \infty$ не существует нетривиального стационарного $(\omega = 0)$ решения системы (5)–(7), периодического по z. Действительно, из (5) имеем $\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = 0$. Из (6), отбросив производную по времени, получаем

$$\nabla_i\tilde{p} = \mu\nabla_j\nabla_j\tilde{u}_i. \tag{8}$$

Домножим (8) на $\tilde{u}_i$ и проинтегрируем по периоду, т. е. по области $r < R$, $0 < \phi < 2\pi$, $0 < z < 2\pi/k$ (при $k = 0$ интервал по z любой). Имеем

$$\int \tilde{u}_i\nabla_i\tilde{p}dV = \mu\int \tilde{u}_i\nabla_j\nabla_j\tilde{u}_i dV.$$

Интегрируя обе части уравнения по частям, получаем

$$\oint \tilde{u}_i n_i\tilde{p}dS - \int \tilde{p}\nabla_i\tilde{u}_i dV = \mu\oint n_j\tilde{u}_i\nabla_j\tilde{u}_i dS - \mu\int(\nabla_j\tilde{u}_i)(\nabla_j\tilde{u}_i)dV.$$

В обоих поверхностных интегралах интегрирование по боковой поверхности цилиндра даёт 0, так как на боковой поверхности должно выполняться граничное условие $\tilde{\boldsymbol{u}} = 0$. На крышках цилиндра в силу периодичности решения поля скоростей и давления совпадают, а поскольку нормаль на обеих крышках выбирается внешняя по отношению к области интегрирования, то интегралы по крышкам сокращаются друг с другом. Далее, второе слагаемое равно 0, так как содержит в себе $\nabla_i \tilde{u}_i$ в качестве сомножителя. Таким образом,

$$\mu \int (\nabla_j \tilde{u}_i)(\nabla_j \tilde{u}_i) dV = 0,$$

то есть при $\mu \neq 0$ все 9 компонент тензора скоростей деформации тождественно равны 0. Отсюда $\boldsymbol{u} = 0$. Из (8) получаем $\tilde{p} = const$. Наконец, из уравнения (7) в силу принципа максимума для оператора Лапласа получаем $\tilde{\rho} = \gamma \tilde{p}$.

Таким образом, стационарное поле при $\mu \neq 0$ не может быть не чем иным, как одинаковой по всей области добавкой к давлению и плотности. В нетеплопроводном случае стационарным решением является любое энтропийное возмущение: $\tilde{\boldsymbol{u}} = 0$, $\tilde{p} = const$, $\tilde{\rho}$ любое. В невязком случае стационарным решением (5)–(7) является любая функция $\tilde{\boldsymbol{u}} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\Psi}$, удовлетворяющая граничным условиям. При этом $\tilde{p} = const$, $\tilde{\rho}$ любое.

Далее мы будем исключать случай $\omega = 0$ из рассмотрения.

Случай отсутствия зависимости от ϕ и z

Рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда ρ, p, u_r и u_ϕ зависят только от r и t, а $u_z = 0$ и теплопроводность отсутствует.

В полярных координатах оператор Лапласа записывается в виде

$$(\triangle \boldsymbol{f})_r = \triangle f_r - \frac{1}{r^2} f_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}, \quad (\triangle \boldsymbol{f})_\phi = \triangle f_\phi - \frac{1}{r^2} f_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial f_r}{\partial \phi}.$$

Для получения решения перепишем линеаризованные уравнения Навье – Стокса (5)–(7) в полярных координатах:

$$i\omega \tilde{p} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tilde{u}_r) = 0; \tag{9}$$

$$i\omega \tilde{u}_r + \frac{dp'}{dr} = \frac{4}{3} \mu \left[\frac{d^2 \tilde{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{u}_r}{dr} - \frac{1}{r^2} \tilde{u}_r \right]; \tag{10}$$

$$i\omega \tilde{u}_\phi = \mu \left[\frac{d^2 \tilde{u}_\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{u}\phi}{dr} - \frac{1}{r^2} \tilde{u}_\phi \right]. \tag{11}$$

Видно, что уравнения для акустической ($u_\phi = 0$) и вихревой ($p = u_r = 0$) компонент решения расщепляются. Начнём с поиска решения (11). Положим $\tilde{u}_\phi(0) = \tilde{u}_\phi(R) = 0$, что соответствует ограниченности решения на оси цилиндра и условию прилипания на его границе. Уравнение (11) переписывается в виде

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{u}_\phi}{dr^2} + r \frac{d\tilde{u}_\phi}{dr} + \left(\left(-\frac{i\omega}{\mu} \right) r^2 - 1 \right) \tilde{u}_\phi = 0.$$

Его решением, ограниченным в нуле, является функция

$$\tilde{u}_\phi(r) = J_1\left(\left(-\frac{i\omega}{\mu}\right)^{1/2} r\right),$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя индекса 1. Чтобы удовлетворить граничному условию при $r = R$, нужно положить $(-i\omega/\mu)^{1/2}R = \lambda_m$, где λ_m – m-й нуль функции $J_1(x)$. Таким образом, решением поставленной задачи являются функции вида

$$u_\phi(r,t) = J_1\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right) e^{i\omega_m t}, \quad \omega_m = i\frac{\lambda_m^2}{R^2}\mu. \tag{12}$$

Теперь получим решение с нетривиальными компонентами радиальной скорости и давления. Выражая давление из (9) и подставляя в (10), получаем

$$i\omega\tilde{u}_r - \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tilde{u}_r)\right) = \frac{4}{3}\mu\left[\frac{d^2\tilde{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{u}_r}{dr} - \frac{1}{r^2}\tilde{u}_r\right].$$

Или, упрощая,

$$i\omega\tilde{u}_r = \left(\frac{4}{3}\mu + \frac{1}{i\omega}\right)\left[\frac{d^2\tilde{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{u}_r}{dr} - \frac{1}{r^2}u_r\right].$$

Приводя к каноническому виду, получаем

$$r^2\frac{d^2\tilde{u}_r}{dr^2} + r\frac{d\tilde{u}_r}{dr} - \tilde{u}_r + r^2\tilde{u}_r\frac{\omega^2}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega} = 0.$$

Таким образом, решение уравнения для радиальной скорости будет иметь вид

$$u_r(r,t) = J_1\left(r\omega\left(1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\right)^{-1/2}\right)e^{i\omega t}.$$

При $r = R$ должно выполняться $u_r = 0$. Отсюда получаем уравнение на ω:

$$R\omega\left(1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\right)^{-1/2} = \lambda_m,$$

где λ_m – m-й нуль функции Бесселя индекса 1. Это уравнение относительно ω является квадратным. Его решение записывается в виде

$$\omega_m^\pm = \frac{2}{3}i\frac{\mu\lambda_m^2}{R^2} \pm \left(\frac{\lambda_m^2}{R^2} - \left(\frac{2\mu\lambda_m^2}{3R^2}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Таким образом, решение задачи для скорости записывается в виде

$$u_r(r,t) = J_1\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right) \exp\left(i\omega_m^{\pm} t\right), \tag{14}$$

где $\omega_m^{\pm}$ задаётся формулой (13). Выражение для давления можно получить подстановкой (14) в уравнение неразрывности (9):

$$p(r,t) = -\frac{1}{i\omega_m^{\pm}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) J_1\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right) \exp\left(i\omega_m^{\pm} t\right) = -\frac{\lambda_m}{i\omega_m^{\pm} R} J_0\left(\lambda_m \frac{r}{R}\right) \exp\left(i\omega_m^{\pm} t\right).$$

Особо отметим, что аксиально симметричное решение при отсутствии зависимости от z не содержит больших градиентов около границы, что вполне естественно, так как решение невязкой задачи удовлетворяет граничному условию для вязкой.

Поскольку $\operatorname{Im}\omega_m^{\pm} > 0$, действительная часть в показателе экспоненты отрицательная, что определяет затухание волн со временем. В пределе при $\mu \to 0$ выполняется $\omega_m^{\pm} \to \pm\lambda_m/R$. При $0 < \mu < (3R)/(2\lambda_m)$ уравнение (13) даёт два решения для частоты, отличающиеся знаком действительной части; при этом выполняется $|\omega_m^{\pm}| = \lambda_m/R$.

При $\mu > (3R)/(2\lambda_m)$ с профилем давления $J_0(\lambda_m r/R)$ существуют два линейно независимых решения с чисто мнимыми частотами, что соответствует экспоненциальному затуханию без колебаний. Один из корней (пусть для определённости это ω_m^{+}) стремится к $+i\infty$ (скорость затухания растёт с увеличением вязкости), тогда как $\omega_m^{-} \to 0$. Кажущийся парадокс снимается тем, что давление, соответствующее этой моде, стремится к бесконечности. Таким образом, при разложении начальных данных по модам коэффицент при этой моде будет стремиться к 0 при $\mu \to \infty$.

Соленоидальное поле

Вернёмся к общему случаю линеаризованных уравнений Навье – Стокса (5)–(7) при $\omega \neq 0$. Будем искать их решение с нулевой дивергенцией скоростей. При подстановке $\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = 0$ при $\omega \neq 0$ уравнения (5)–(7) приводятся к виду

$$\tilde{\rho} = 0, \quad i\omega\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\tilde{p} = \mu\triangle\tilde{\boldsymbol{u}}, \quad i\omega\tilde{p} = \frac{\gamma\mu}{\mathrm{Pr}}\triangle\tilde{p}.$$

Взяв от второго уравнения дивергенцию, получаем $\triangle\tilde{p} = 0$. Подставляя в третье уравнение, получаем $\tilde{p} = 0$. Таким образом, пульсации плотности и давления равны нулю, а скорость подчиняется системе

$$\triangle\tilde{\boldsymbol{u}} - \frac{i\omega}{\mu}\tilde{\boldsymbol{u}} = 0, \quad \operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = 0. \tag{15}$$

Таким образом, соленоидальные поля скоростей, удовлетворяющие (5)–(7), не зависят от коэффициента теплопроводности, а в невязком случае отличного от нуля поля скоростей, соответствующего $\omega \neq 0$, не существует.

Из (15) следует, что $\tilde{\boldsymbol{u}} = \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\Psi}}$, причём $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\left(\triangle \hat{\boldsymbol{\Psi}} - \frac{i\omega}{\mu}\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\triangle \hat{\boldsymbol{\Psi}} - \frac{i\omega}{\mu}\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \nabla f, \tag{16}$$

где f – некоторая функция. Поскольку у уравнения (16) есть частное решение вида $\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \nabla g$, где g – решение уравнения $\triangle g - (i\omega/\mu)g = f$, сделаем замену переменной $\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \nabla g + \boldsymbol{\Psi}$. Тогда $\tilde{\boldsymbol{u}} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}$, причём $\boldsymbol{\Psi}$ удовлетворяет уравнению

$$\triangle \boldsymbol{\Psi} - \frac{i\omega}{\mu}\boldsymbol{\Psi} = 0. \tag{17}$$

Векторное уравнение (17) представляет собой систему из трёх независимых друг от друга уравнений для каждой из декартовых компонент Ψ_m, $m = \{x, y, z\}$. В цилиндрических координатах оператор ротора записывается в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_z & \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{d}{dz} & \frac{d}{dr} & \frac{d}{d\phi} \\ \Psi_z & \Psi_r & r\Psi_\phi \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Поэтому, чтобы цилиндрические компоненты скорости u_r, u_ϕ и u_z зависели от z и ϕ как $e^{ikz}e^{i\nu\phi}$, достаточно добиться того, чтобы этой же зависимостью обладали и цилиндрические компоненты $\boldsymbol{\Psi}$.

Рассмотрим вначале z-компоненту (17): $\triangle \Psi_z - (i\omega/\mu)\Psi_z = 0$. Полагая $\Psi_z(z, r, \phi) = e^{ikz}e^{i\nu\phi}\psi_z(r)$, домножая на r^2, имеем

$$r^2\frac{d^2\psi_z(r)}{dr^2} + r\frac{d\psi_z(r)}{dr} + \left[\left(-k^2 - \frac{i\omega}{\mu}\right)r^2 - \nu^2\right]\psi_z(r) = 0.$$

Решением этого уравнения с точностью до множителя является функция Бесселя $\psi_z(r) = J_\nu(\varkappa_s r)$, где $\varkappa_s^2 = -k^2 - i\omega/\mu$. Таким образом,

$$\Psi_z(z, r, \phi) = A_z e^{ikz}e^{i\nu\phi}J_\nu(\varkappa_s r)/J_\nu(\varkappa_s R), \tag{19}$$

$$\varkappa_s = \pm\left(-k^2 - \frac{i\omega}{\mu}\right)^{1/2}, \tag{20}$$

где A_z – произвольная константа. Поскольку $J_\nu(-z) = (-1)^\nu J_\nu(z)$, знак $\varkappa_s$ не важен.

Теперь перейдём к уравнениям на Ψ_x и Ψ_y. Подставляя в (16) $\Psi_x = \Psi_r \cos\phi - \Psi_\phi \sin\phi$, $\Psi_y = \Psi_r \sin\phi + \Psi_\phi \cos\phi$, имеем

$$\left(\triangle - \frac{i\omega}{\mu}\right)(\Psi_r \cos\phi - \Psi_\phi \sin\phi) = 0,$$

$$\left(\triangle - \frac{i\omega}{\mu}\right)(\Psi_r \sin\phi + \Psi_\phi \cos\phi) = 0.$$

Домножим второе уравнение на $\pm i$ и прибавим к первому. Получим

$$\left(\triangle - \frac{i\omega}{\mu}\right)\left((\Psi_r \pm i\Psi_\phi)\, e^{\pm i\phi}\right) = 0.$$

Нас интересуют решения, имеющие вид $\Psi_r(z,r,\phi) = e^{ikz}e^{i\nu\phi}\psi_r(r)$, $\Psi_\phi(z,r,\phi) = e^{ikz}e^{i\nu\phi}\psi_\phi(r)$. Отсюда

$$\left(\triangle - \frac{i\omega}{\mu}\right)\left(e^{ikz}e^{i(\nu\pm 1)\phi}(\psi_r \pm i\psi_\phi)\right) = 0.$$

Зная вид собственных функций оператора Лапласа, соответствующих собственному значению $i\omega/\mu$, можем записать

$$\Psi_r(z,r,\phi) + i\Psi_\phi(z,r,\phi) = 2A^+ e^{ikz}e^{i\nu\phi} J_{\nu+1}(\varkappa_s r)/J_\nu(\varkappa_s R),$$

$$\Psi_r(z,r,\phi) - i\Psi_\phi(z,r,\phi) = 2A^- e^{ikz}e^{i\nu\phi} J_{\nu-1}(\varkappa_s r)/J_\nu(\varkappa_s R),$$

где A^+ и A^- – произвольные константы. Складывая и вычитая, получаем

$$\Psi_r(z,r,\phi) = e^{ikz}e^{i\nu\phi}(A^+ J_{\nu+1}(\varkappa_s r) + A^- J_{\nu-1}(\varkappa_s r))/J_\nu(\varkappa_s R),$$
$$\Psi_\phi(z,r,\phi) = ie^{ikz}e^{i\nu\phi}(-A^+ J_{\nu+1}(\varkappa_s r) + A^- J_{\nu-1}(\varkappa_s r))/J_\nu(\varkappa_s R).$$

Пользуясь равенствами

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = 2\nu J_\nu(z)/z, \quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z) = 2Y_\nu(z)J_\nu(z)/z,$$

где $Y_\nu(z)$ определено формулой (1), получаем

$$\Psi_r(z,r,\phi) = e^{ikz}e^{i\nu\phi}((A^- + A^+)\nu + (A^- - A^+)Y_\nu(\varkappa_s r))\frac{1}{\varkappa_s r}\frac{J_\nu(\varkappa_s r)}{J_\nu(\varkappa_s R)}, \qquad (21)$$

$$\Psi_\phi(z,r,\phi) = ie^{ikz}e^{i\nu\phi}((A^- - A^+)\nu + (A^- + A^+)Y_\nu(\varkappa_s r))\frac{1}{\varkappa_s r}\frac{J_\nu(\varkappa_s r)}{J_\nu(\varkappa_s R)}. \qquad (22)$$

Вычислим производную от $Y_\nu(z)$. Пользуясь равенствами

$$J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z), \quad J'_{\nu+1}(z) = J_\nu(z) - \frac{\nu+1}{z} J_\nu(z),$$

получаем (для краткости опустим аргументы функций)

$$Y'_\nu = -\left(\frac{zJ_{\nu+1}}{J_\nu}\right)' = -\frac{(J_{\nu+1} + zJ_\nu - (\nu+1)J_{\nu+1})J_\nu - (\nu J_\nu - zJ_{\nu+1})J_{\nu+1}}{J_\nu^2} =$$

$$= -z - z\left(\frac{J_{\nu+1}}{J_\nu}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{J_{\nu+1}^2}{J_\nu}\right) = -z - \frac{1}{z}\left(\nu - z\frac{J_{\nu+1}}{J_\nu}\right)^2 + \frac{\nu^2}{z}.$$

Таким образом,

$$Y'_\nu(z) = \frac{1}{z}(-Y_\nu^2(z) + \nu^2 - z^2). \tag{23}$$

Для получения цилиндрических компонент скорости подставим выражения для цилиндрических компонент $\boldsymbol{\Psi}$ (19), (21), (22) в формулу для вычисления ротора (18), используя (23). Опуская выкладки, получаем

$$\tilde{u}_z^S(z,r,\phi) = -i\varkappa_s\alpha\frac{J_\nu(\varkappa_s r)}{J_\nu(\varkappa_s R)}\, e^{ikz+i\nu\phi}, \tag{24}$$

$$\tilde{u}_r^S(z,r,\phi) = \left(-\alpha\frac{k}{\varkappa_s r}(\nu - Y_\nu(\varkappa_s r)) - \beta\frac{i\nu}{r}\right)\frac{J_\nu(\varkappa_s r)}{J_\nu(\varkappa_s R)}\, e^{ikz+i\nu\phi}, \tag{25}$$

$$\tilde{u}_\phi^S(z,r,\phi) = \left(\alpha\frac{ik}{\varkappa_s r}(\nu - Y_\nu(\varkappa_s r)) + \beta\frac{1}{r}Y_\nu(\varkappa_s r)\right)\frac{J_\nu(\varkappa_s r)}{J_\nu(\varkappa_s R)}\, e^{ikz+i\nu\phi}. \tag{26}$$

Здесь $\alpha = A^+ + A^-$ и $\beta = 2ikA^-/\varkappa_s - A_z$ являются произвольными.

Потенциальное поле. Нетеплопроводный случай

Перейдём теперь к нахождению частного решения уравнений (5)–(7) с потенциальным полем скоростей. Вначале рассмотрим случай отсутствия теплопроводности ($\mathrm{Pr} = \infty$), поскольку он более простой. Общий случай будет рассмотрен ниже. Будем предполагать $\omega \neq 0$.

При отсутствии теплопроводности уравнения (5)–(7) сводятся к

$$\tilde{p} = \tilde{\rho},$$

$$i\omega\tilde{p} + \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = 0, \tag{27}$$

$$i\omega\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\tilde{p} = \mu\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{3}\nabla(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}})\right). \tag{28}$$

Применим к уравнению (28) оператор дивергенции:

$$i\omega \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} + \triangle\tilde{p} = \mu\left(\triangle \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{3}\triangle(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}})\right) = \frac{4}{3}\mu\triangle \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}}.$$

Подставляя из (27) $\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = -i\omega\tilde{p}$, получаем уравнение Гельмгольца с комплексным коэффициентом:

$$\triangle\tilde{p} + \frac{\omega^2}{1+\frac{4}{3}i\mu\omega}\tilde{p} = 0. \qquad (29)$$

Подставляя зависимость $\tilde{p} = \breve{p}(r)\exp(ikz + i\nu\phi)$ и домножая на r^2, получаем уравнение Бесселя:

$$r^2\frac{d^2\breve{p}}{dr^2} + r\frac{d\breve{p}}{dr} - \nu^2\breve{p} + \left(\frac{\omega^2}{1+\frac{4}{3}i\mu\omega} - k^2\right)r^2\breve{p} = 0. \qquad (30)$$

Введём обозначение

$$\varkappa = \left(\frac{\omega^2}{1+\frac{4}{3}i\mu\omega} - k^2\right)^{1/2}, \qquad (31)$$

выбор знака корня несущественен. Решением (30) с точностью до произвольного множителя является функция Бесселя. Выберем его равным $1/(J_\nu(\varkappa R))$. Тогда

$$\breve{p}(r) = \frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}, \quad \tilde{p}(z,r,\phi) = \frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}\exp(ikz + i\nu\phi).$$

Получим теперь выражение для скоростей. Поскольку мы ищем потенциальное поле, положим $\tilde{\boldsymbol{u}} = \nabla\Phi$. Подставляя в правую часть (28), получаем

$$i\omega\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\tilde{p} = \frac{4}{3}\mu\nabla\triangle\Phi.$$

Из (27) имеем $\triangle\Phi = \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = -i\omega\tilde{p}$. Поделив на $i\omega$ и подставив выражения для давления, получаем

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = i\omega^{-1}\left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)\nabla\left(\frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}\exp(ikz + i\nu\phi)\right).$$

Таким образом, решение уравнений (5)–(7) с потенциальным полем скоростей при отсутствии теплопроводности имеет вид

$$\tilde{u}_z^{\Pi}(z,r,\phi) = -\frac{k}{\omega}\left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)\frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}e^{i\nu\phi+ikz}, \qquad (32)$$

$$\tilde{u}_r^{\Pi}(z,r,\phi) = \frac{i}{\omega r}\left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)Y_\nu(\varkappa r)\frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}e^{i\nu\phi+ikz}, \qquad (33)$$

$$\tilde{u}_\phi^{\Pi}(z,r,\phi) = -\frac{\nu}{\omega r}\left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)\frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}\,e^{i\nu\phi+ikz}, \tag{34}$$

$$\tilde{\rho}(z,r,\phi) = \tilde{p}(z,r,\phi) = \frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}e^{i\nu\phi+ikz}. \tag{35}$$

Напомним, что $Y_\nu(\varkappa r)J_\nu(\varkappa r) = \varkappa r J_\nu'(\varkappa r)$. Поскольку функция Бесселя и её производная одновременно не обращаются в ноль, выбором ω нельзя добиться того, чтобы потенциальное поле скоростей (32)–(34) одновременно удовлетворяло условиям $u_r|_{r=R} = 0$ и $u_\phi|_{r=R} = u_z|_{r=R} = 0$.

В решение (32)–(35) коэффициент вязкости μ входит регулярным образом, поэтому подстановка $\mu = 0$ даёт формулы для потенциального поля в невязком случае. При этом корректным является условие непротекания $u_r|_{r=R} = 0$, а задание граничных условий на u_z и u_ϕ не требуется. Собственные значения ω, соответствующие условию $u_r|_{r=R} = 0$, находятся из условия $\varkappa = \lambda_m/R$, где λ_m – m-й нуль производной функции Бесселя индекса ν.

Потенциальное поле. Общий случай

Введём пульсацию внутренней энергии, умноженную на $\gamma(\gamma-1)$: $\tilde{\epsilon} = \gamma\tilde{p}-\tilde{\rho}$, и выразим через неё пульсацию плотности. Тогда уравнения (5)–(7) запишутся в виде

$$i\omega(\gamma\tilde{p}-\tilde{\epsilon}) + \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = 0, \tag{36}$$

$$i\omega\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\tilde{p} = \mu\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{3}\nabla(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}})\right), \tag{37}$$

$$(1-\gamma)i\omega\tilde{p} + i\omega\tilde{\epsilon} = \frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\triangle\tilde{\epsilon}. \tag{38}$$

Будем искать решение с потенциальным полем скоростей. Подставляя $\tilde{\boldsymbol{u}} = \nabla\hat{\Phi}$ в уравнение (37), получаем

$$i\omega\nabla\hat{\Phi} + \nabla\tilde{p} = \frac{4}{3}\mu\nabla\triangle\hat{\Phi}. \tag{39}$$

В уравнении (39) обе части являются градиентом от некоторых функций. Следовательно, эти функции отличаются на константу:

$$i\omega\hat{\Phi} + \tilde{p} + C = \frac{4}{3}\mu\triangle\hat{\Phi}.$$

Введём переменную $\tilde{\Phi} = \hat{\Phi} + C/(i\omega)$. Тогда

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \nabla\tilde{\Phi}, \quad i\omega\tilde{\Phi} + \tilde{p} = \frac{4}{3}\mu\triangle\tilde{\Phi}.$$

Выражая из (36) $\triangle\tilde{\Phi} = \mathrm{div}\nabla\tilde{\Phi} = \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{u}} = -i\omega(\gamma\tilde{p} - \tilde{\epsilon})$ и подставляя в (38), получаем

$$i\omega\tilde{\Phi} + \tilde{p} + \frac{4}{3}\mu i\omega(\gamma\tilde{p} - \tilde{\epsilon}) = 0.$$

Отсюда можно выразить $\tilde{p}$ через $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\epsilon}$:

$$\tilde{p} = \frac{\frac{4}{3}i\mu\omega\tilde{\epsilon} - i\omega\tilde{\Phi}}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}. \tag{40}$$

Уравнения (36), (38) можно переписать в виде

$$i\omega\gamma\tilde{p} - i\omega\tilde{\epsilon} + \triangle\tilde{\Phi} = 0, \tag{41}$$

$$i\omega(\gamma - 1)\tilde{p} - i\omega\tilde{\epsilon} + \frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\triangle\tilde{\epsilon} = 0. \tag{42}$$

Подставляя (40) в (41) и (42), получаем

$$\triangle\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{\epsilon}\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}\\ \tilde{\epsilon}\end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \tag{43}$$

где

$$a = \frac{\omega^2\gamma}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}, \quad b = -\frac{i\omega}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}, \tag{44}$$

$$c = \frac{\mathrm{Pr}}{\mu}\frac{\omega^2(\gamma - 1)}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}, \quad d = -i\omega\frac{\mathrm{Pr}}{\mu}\left(\frac{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}\right). \tag{45}$$

Детерминант этой матрицы равен $\det A = ad - bc = -i\omega^3\mathrm{Pr}/(\mu(1 + 4i\mu\omega\gamma/3))$.

Для решения уравнения (43) нужно найти собственные значения и собственные вектора матрицы A. Собственные значения равны

$$\lambda_\pm = \frac{a + d}{2} \pm \left(\left(\frac{a - d}{2}\right)^2 + bc\right)^{1/2}, \tag{46}$$

а матрицы собственных векторов S и S^{-1} (такие что $A = S^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_+, \lambda_-\}S$) записываются в виде

$$S = \begin{pmatrix}\lambda_+ - d & b\\ c & \lambda_- - a\end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\det S}\begin{pmatrix}\lambda_- - a & -b\\ -c & \lambda_+ - d\end{pmatrix}.$$

Мы не будем подставлять значения коэффициентов a, b, c и d ввиду громоздкости получающихся выражений. Домножая (43) на матрицу S, имеем

$$\triangle((\lambda_+ - d)\tilde{\Phi} + b\tilde{\epsilon}) + \lambda_+((\lambda_+ - d)\tilde{\Phi} + b\tilde{\epsilon}) = 0,$$
$$\triangle(c\tilde{\Phi} + (\lambda_- - a)\tilde{\epsilon}) + \lambda_-(c\tilde{\Phi} + (\lambda_- - a)\tilde{\epsilon}) = 0.$$

Рассмотрим теперь уравнение вида $\triangle\tilde{z}+\lambda\tilde{z}=0$, где $\tilde{z}$ – некоторая функция. Подставляя зависимость $\tilde{z}=\breve{z}(r)\exp(ikz+i\nu\phi)$ и домножая на r^2, получаем уравнение Бесселя:

$$r^2\frac{d^2\breve{z}}{dr^2}+r\frac{d\breve{z}}{dr}+((\lambda-k^2)r^2-\nu^2)\breve{z}=0.$$

Его решением, ограниченным в нуле, с точностью до множителя является функция Бесселя: $\breve{z}(r)=J_\nu(\sqrt{\lambda-k^2}r)/J_\nu(\sqrt{\lambda-k^2}R)$. Введём обозначение

$$\varkappa_\pm=\sqrt{\lambda_\pm-k^2}. \tag{47}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}(\lambda_+-d)\tilde{\Phi}+b\tilde{\epsilon}&=\hat{A}_+\frac{J_\nu(\varkappa_+r)}{J_\nu(\varkappa_+R)}\exp(ikz+i\nu\phi),\\ c\tilde{\Phi}+(\lambda_--a)\tilde{\epsilon}&=\hat{A}_-\frac{J_\nu(\varkappa_-r)}{J_\nu(\varkappa_-R)}\exp(ikz+i\nu\phi),\end{aligned}$$

где $\hat{A}_\pm$ – произвольные. Домножая на S^{-1} и вводя $A_\pm=\hat{A}_\pm/\det S$, получаем

$$\tilde{\Phi}=\left((\lambda_--a)A_+\frac{J_\nu(\varkappa_+r)}{J_\nu(\varkappa_+R)}-bA_-\frac{J_\nu(\varkappa_-r)}{J_\nu(\varkappa_-R)}\right)\exp(ikz+i\nu\phi);$$

$$\tilde{\epsilon}=\left(-cA_+\frac{J_\nu(\varkappa_+r)}{J_\nu(\varkappa_+R)}+(\lambda_+-d)A_-\frac{J_\nu(\varkappa_-r)}{J_\nu(\varkappa_-R)}\right)\exp(ikz+i\nu\phi).$$

Давление выражается через $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\epsilon}$ формулой (40).

При $r=R$ решение должно удовлетворять изотермическому граничному условию $\tilde{\epsilon}=0$. Поскольку прибавление к решению вихревой моды не меняет поля внутренней энергии, требуется, чтобы выполнялось $cA_+=(\lambda_+-d)A_-$. Чтобы при $\mathrm{Pr}\to\infty$ решение совпадало с рассмотренным выше нетеплопроводным случаем, положим $A_-=i(\gamma-1)/(\lambda_+-d)$ и $A_+=i(\gamma-1)/c$. Имеем

$$\tilde{\Phi}(z,r,\phi)=(\gamma-1)\left(-\frac{\lambda_--a}{c}\frac{J_\nu(\varkappa_+r)}{J_\nu(\varkappa_+R)}+\frac{b}{\lambda_+-d}\frac{J_\nu(\varkappa_-r)}{J_\nu(\varkappa_-R)}\right)e^{ikz+i\nu\phi}; \tag{48}$$

$$\tilde{\epsilon}(z,r,\phi)=(\gamma-1)\left(\frac{J_\nu(\varkappa_+r)}{J_\nu(\varkappa_+R)}-\frac{J_\nu(\varkappa_-r)}{J_\nu(\varkappa_-R)}\right)e^{ikz+i\nu\phi}. \tag{49}$$

Для определения скоростей воспользуемся формулой $\tilde{\boldsymbol{u}}=\nabla\tilde{\Phi}$. Таким образом, решение уравнения (36)–(37) с потенциальным полем скоростей, удовлетворяющее условию нулевой пульсации внутренней энергии на стенке (обозначим его индексом П), выражается формулами

$$\tilde{u}_z^{\Pi}(z,r,\phi) = ik\,\tilde{\Phi}(z,r,\phi), \tag{50}$$

$$\tilde{u}_r^{\Pi}(z,r,\phi) = \frac{\gamma-1}{r}\left(-\frac{\lambda_- - a}{c}Y_\nu(\varkappa_+ r)\frac{J_\nu(\varkappa_+ r)}{J_\nu(\varkappa_+ R)} + \right.$$
$$\left. + \frac{b}{\lambda_+ - d}Y_\nu(\varkappa_- r)\frac{J_\nu(\varkappa_- r)}{J_\nu(\varkappa_- R)}\right)\, e^{i\nu\phi + ikz}, \tag{51}$$

$$\tilde{u}_\phi^{\Pi}(z,r,\phi) = \frac{i\nu}{r}\,\tilde{\Phi}(z,r,\phi), \tag{52}$$

$$\tilde{p}(z,r,\phi) = \frac{i\omega}{1+\frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}\left(-\tilde{\Phi}(z,r,\phi) + \frac{4}{3}\mu\,\tilde{\epsilon}(z,r,\phi)\right), \tag{53}$$

$$\tilde{\rho}(z,r,\phi) = \gamma\tilde{p}(z,r,\phi) - \tilde{\epsilon}(z,r,\phi). \tag{54}$$

Рассмотрим предельный переход при Pr $\to\infty$ при фиксированном μ. Ниже будет показано, что при этом одно из значений $\varkappa_\pm$ (пусть это $\varkappa_+$) стремится к $\varkappa$, а другое неограниченно растёт как $\sqrt{\text{Pr}}$. Тогда в (48) второе слагаемое стремится к 0. Подставляя значения a, c и d и отбрасывая члены порядка $1/\text{Pr}$, получаем

$$\tilde{\Phi}(z,r,\phi) \approx \frac{i}{\omega}\left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)\frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}\exp(ikz+i\nu\phi),$$

$$\tilde{\epsilon}(z,r,\phi) \approx (\gamma-1)\frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}\exp(ikz+i\nu\phi).$$

Отсюда получаются выражения для плотности и давления, осевой и азимутальной компонент скорости. Аналогично получается выражение для радиальной компоненты скорости. Формулы (50)–(54) вырождаются в (32)–(35).

Решение

Решение складывается из решения с потенциальным полем скоростей и двух решений с соленоидальным полем скоростей. Обозначим для краткости

$$\kappa = \frac{J_\nu(\varkappa r)}{J_\nu(\varkappa R)}, \quad \kappa_s = \frac{J_\nu(\varkappa_s r)}{J_\nu(\varkappa_s R)}. \tag{55}$$

Полученные выше решения с соленоидальными полями скоростей имеют нулевые компоненты давления и плотности, поэтому итоговое решение для давления и плотности выражаются формулами (53) и (54). Решение для скоростей записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_z(z,r,\phi) \\ \tilde{u}_r(z,r,\phi) \\ \tilde{u}_\phi(z,r,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_z^{\Pi}(z,r,\phi) \\ \tilde{u}_r^{\Pi}(z,r,\phi) \\ \tilde{u}_\phi^{\Pi}(z,r,\phi) \end{pmatrix} +$$

$$\left[\alpha \begin{pmatrix} -i\varkappa_s \\ -k(\varkappa_s r)^{-1}(\nu - Y_\nu(\varkappa_s r)) \\ ik(\varkappa_s r)^{-1}(\nu - Y_\nu(\varkappa_s r)) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -i\nu r^{-1} \\ r^{-1} Y_\nu(\varkappa_s r) \end{pmatrix} \right] \kappa_s e^{ikz+i\phi\nu}. \qquad (56)$$

Условие $\epsilon = 0$ на границе, задаваемое при наличии теплопроводности, удовлетворяется по построению решения (50)–(54). За счёт выбора весов α и β и частоты ω необходимо удовлетворить трём условиям при $r = R$: $u_r = 0$, $u_z = 0$ и $u_\phi = 0$. Мы поступим следующим образом: вначале определим α и β, а собственные частоты ω, при которых одновременно выполняются все три граничных условия, мы определим позже.

Условие $u_z|_{r=R} = 0$ даёт

$$\alpha = -\frac{i}{\varkappa_s}\tilde{u}_z^{\Pi}(0,R,0) = -\frac{k}{\varkappa_s}(\gamma - 1)\left(\frac{\lambda_- - a}{c} - \frac{b}{\lambda_+ - d}\right). \qquad (57)$$

Условие $(iu_r + u_\phi)|_{r=R} = 0$ даёт

$$\beta = -\frac{iR\tilde{u}_r^{\Pi}(0,R,0) + R\tilde{u}_\phi^{\Pi}(0,R,0)}{\nu + Y_\nu(\varkappa_s R)},$$

$$\beta = \frac{i(\gamma-1)}{Y_\nu(\varkappa_s R) + \nu}\left(\frac{\lambda_- - a}{c}(Y_\nu(\varkappa_+ R) + \nu) - \frac{b}{\lambda_+ - d}(Y_\nu(\varkappa_- R) + \nu)\right). \qquad (58)$$

Отметим, что полученные выражения не меняются при переобозначении корней, то есть при замене λ_+ на λ_- и обратно.

Таким образом, решение выражается формулами (20), (44)–(58).

При отсутствии теплопроводности формулы (57)–(58) для коэффициентов α и β упрощаются:

$$\alpha = \frac{ik}{\varkappa_s \omega}\left(1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\right), \quad \beta = \frac{1}{\omega}\left(1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\right)\frac{Y_\nu(\varkappa R) + \nu}{Y_\nu(\varkappa_s R) + \nu}.$$

Выражения для ρ', p', u_r, u_z и u_ϕ приобретают вид

$$\rho'(z,r,\phi,t) = p'(z,r,\phi,t) = \kappa e^{i\nu\phi + ikz + i\omega t},$$

$$u_z(z,r,\phi,t) = -\frac{k}{\omega}\left(1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\right)(\kappa - \kappa_s)\, e^{i\nu\phi + ikz + i\omega t},$$

$$u_r(z,r,\phi,t) = \left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)\left[\frac{i}{\omega r}Y_\nu(\varkappa r)\kappa - \frac{ik^2}{\varkappa_s^2 r\omega}\left(\nu - Y_\nu(\varkappa_s r)\right)\kappa_s - \right.$$
$$\left. -\frac{i\nu}{r\omega}\frac{Y_\nu(\varkappa R)+\nu}{Y_\nu(\varkappa_s R)+\nu}\kappa_s\right] e^{i\nu\phi+ikz+i\omega t},$$

$$u_\phi(z,r,\phi,t) = \left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)\left[-\frac{\nu}{r\omega}\kappa - \frac{k^2}{\varkappa_s^2 r\omega}(\nu - Y_\nu(\varkappa_s r))\kappa_s + \right.$$
$$\left. +\frac{Y_\nu(\varkappa_s r)}{r\omega}\frac{Y_\nu(\varkappa R)+\nu}{Y_\nu(\varkappa_s R)+\nu}\kappa_s\right] e^{i\nu\phi+ikz+i\omega t}. \tag{59}$$

Здесь κ и κ_s определены формулой (55), $Y_\nu(z)$ – формулой (1), $\varkappa$ – формулой (31), а $\varkappa_s$ – формулой (20).

Нахождение частоты

После того как решение, удовлетворяющее трём (при отсутствии теплопроводности – двум) граничным условиям приведено, осталось найти ω, при котором удовлетворится последнее граничное условие. В качестве третьего граничного условия выберем, например, $u_\phi = 0$.

Начнём рассмотрение с нетеплопроводного случая. Подставляя $r = R$ в (59), имеем

$$\frac{1}{R\omega}\left(1+\frac{4}{3}i\mu\omega\right)\left[-\nu - \frac{k^2}{\varkappa_s^2}(\nu - Y_\nu(\varkappa_s R)) + Y_\nu(\varkappa_s R)\frac{Y_\nu(\varkappa R)+\nu}{Y_\nu(\varkappa_s R)+\nu}\right] = 0.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая общий множитель, получаем

$$Y_\nu(\varkappa R)Y_\nu(\varkappa_s R) - \nu^2 + \frac{k^2}{\varkappa_s^2}\left((Y_\nu(\varkappa_s R))^2 - \nu^2\right) = 0. \tag{60}$$

Отметим, что в случае $\nu = k = 0$ с учётом равенства $J_0'(z) = -J_1(z)$ уравнение распадается на совокупность $J_1(\varkappa R) = 0$ или $J_1(\varkappa_s R) = 0$. Решениями уравнения $J_1(\varkappa R) = 0$ являются частоты (13), а поле скоростей содержит только безвихревую компоненту (14). Решениями уравнения $J_1(\varkappa_s R) = 0$ являются частоты $\omega_m = i\mu\lambda_m^2$, и в решении присутствует только азимутальная скорость, определяемая формулой (12).

При наличии теплопроводности получаем уравнение

$$\frac{i}{\gamma-1}\left(\frac{\lambda_- - a}{c} - \frac{b}{\lambda_+ - d}\right)\left(-\frac{\nu}{R} - \frac{k^2}{\varkappa_s^2 R}(\nu - Y_\nu(\varkappa_s R))\right) +$$
$$+\frac{i}{\gamma-1}\frac{Y_\nu(\varkappa_s R)}{R(Y_\nu(\varkappa_s R)+\nu)}\left(\frac{\lambda_- - a}{c}(Y_\nu(\varkappa_+ R)+\nu) - \frac{b}{\lambda_+ - d}(Y_\nu(\varkappa_- R)+\nu)\right) = 0.$$

Домножая на $-iR(Y_\nu(\varkappa_s R)+\nu)(\gamma-1)$, приводим его к виду

$$\left(\frac{\lambda_- - a}{c} - \frac{b}{\lambda_+ - d}\right)\left(\frac{k^2}{\varkappa_s^2}(Y_\nu^2(\varkappa_s R)-\nu^2)-\nu^2\right)+$$
$$+Y_\nu(\varkappa_s R)\left(\frac{\lambda_- - a}{c}Y_\nu(\varkappa_+ R) - \frac{b}{\lambda_+ - d}Y_\nu(\varkappa_- R)\right)=0. \qquad (61)$$

В пределе при Pr $\to\infty$ имеем $\varkappa_-\to\infty$, $\varkappa_+\to\varkappa$, и уравнение (61) превращается в (60).

Уравнение (60) или (61) решается численно, методом Ньютона.

Численная реализация

Регуляризация собственных значений при малой теплопроводности

Рассмотрим выражение (46) для вычисления собственных значений матрицы A (43):

$$\lambda_\pm = \frac{a+d}{2} \pm \left(\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc\right)^{1/2}. \qquad (62)$$

Предположим, что коэффициент теплопроводности достаточно малый (Pr$/\mu \gg 1$). Из (44) и (45) видно, что коэффициенты a и b имеют порядок $O(1)$, а коэффициенты c и d – порядок $O(\mathrm{Pr}/\mu)$. Оба слагаемых в формуле (62) имеют порядок $O(\mathrm{Pr}/\mu)$, тогда как при выборе одного из знаков $\lambda_\pm$ имеет порядок $O(1)$. Таким образом, численное вычисление по формуле (46) может порождать большую арифметическую ошибку.

Регуляризовать эту операцию можно следующим образом. Предположим без ограничения общности, что $\mathrm{Re}\,\omega > 0$. Выберем знак квадратного корня в (62) таким образом, чтобы он имел неотрицательную действительную часть. Тогда в регуляризации нуждается выражение для λ_+. Перепишем (62) в виде

$$\lambda_+ = \frac{a+d}{2} - \frac{d}{2}\left(1+\frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d} + 4\frac{bc}{d^2}\right)^{1/2}.$$

Положим $m=(a^2-2ad+4bc)/d^2$. Поскольку Pr$/\mu \gg 1$, то $|m|\ll 1$. Тогда

$$\lambda_+ = \frac{a+d}{2} - \frac{d}{2}(1+m)^{1/2} = \frac{a}{2} - \frac{dm}{4} - \frac{d}{2}\sum_{k=2}^{\infty} C_{1/2}^k m^k, \qquad (63)$$

где

$$C_{1/2}^k = \frac{(1/2)\times\ldots\times(1/2-(k-1))}{k!}.$$

Ряд является сходящимся, поскольку $|m| < 1$. Вычисление произведения очень маленького числа (m) на очень большое (d) не приводит к трудностям.

В формуле (63) оценим старшие члены:

$$\lambda_+ = \frac{a}{2} - \frac{dm}{4} + O\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\right) = \frac{a}{2} - \frac{a^2 - 2ad + 4bc}{4d} + O\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\right) = \frac{a^2}{4d} + \frac{ad - bc}{d} + O\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\right).$$

Член $a^2/4d$ имеет порядок μ/Pr и может быть отброшен. Подставляя выражения коэффициентов (44)–(45), получаем $ad - bc = -i\omega^3\mathrm{Pr}/(\mu(1 + 4i\mu\omega\gamma/3))$, и

$$\lambda_+ = \frac{ad - bc}{d} + O\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\right) = \frac{i}{\omega}\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\frac{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega}(-i\omega^3)\frac{\mathrm{Pr}}{\mu}\frac{1}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma} + O\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\right).$$

Упрощая,

$$\lambda_+ = \frac{\omega^2}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega} + O\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\right). \tag{64}$$

Если теперь подставить полученную оценку в определение $\varkappa_+ = \sqrt{\lambda_+ - k^2}$, то получим, что предельное значение $\varkappa_+$ в точности совпадает со значением (31), полученным в нетеплопроводном случае.

К решению уравнения для частоты

Частота ω находится из уравнения (61), которое в нетеплопроводном случае сводится к (60). Несмотря на то что уравнение (60) кажется существенно проще, его решение сталкивается с теми же трудностями, что и (61). Поэтому в этом разделе будем говорить о решении (61).

При любом наборе параметров уравнение (61), по всей видимости, имеет счётное число корней, соответствующих разным радиальным волновым модам (параметрами мы считаем осевое (k) и азимутальное (ν) волновые числа, радиус цилиндра R и коэффициенты уравнения μ, γ, Pr). Однако для старших мод частота ω является чисто мнимой. Качественно поведение ω можно наблюдать на описанном выше примере поршневой моды при отсутствии теплопроводности, где значения корней ω_m выражаются явно формулой (13).

Уравнение (61) решается методом Ньютона:

$$\omega^{k+1} = \omega^k - \frac{F(\omega^k)}{F'(\omega^k)}. \tag{65}$$

Здесь F – функция, стоящая в левой части уравнения (61). Поскольку уравнение (61) имеет множество корней, метод Ньютона может сойтись к любому из них, в зависимости от начального приближения. Кроме того, ньютоновский процесс может оказаться расходящимся. Чтобы снизить вероятность столкнуться с этими ситуациями, был реализован следующий алгоритм. В качестве начального приближения полагается точное значение ω_m для невязкой задачи:

$$\omega_m|_{\mu=0} = \left(\frac{\lambda_m^2}{R^2} + k^2\right)^{1/2}. \tag{66}$$

Корень выбирается таким образом, чтобы выполнялось $\operatorname{Re}\omega_m > 0$. Далее вязкость постепенно увеличивается с некоторым шагом $\Delta\mu$. Для каждого значения коэффициента вязкости значение ω находится ньютоновским итерационным процессом, после чего используется в качестве начального приближения для итерационного процесса при большей вязкости.

Универсального способа для выбора $\Delta\mu$ подобрать не удалось. Мы автоматически уменьшали $\Delta\mu$, если возникала одна из следующих ситуаций:

- немонотонность ньютоновского процесса;
- возникновение в ходе итерационного процесса $\operatorname{Re}\omega < 0$;
- невыполнение условия

$$\left| -(\omega(\mu+\Delta\mu) - \omega(\mu)) \left.\frac{\partial F/\partial\omega}{\partial F/\partial\mu}\right|_{\mu+\Delta\mu} - 1 \right| < \grave{\epsilon}(\Delta\mu)^{-1/2},$$

где $\grave{\epsilon}$ выбрано равным 10^{-4}. Данный метод позволил получить приведённую ниже таблицу значений ω, однако очевидно, что он не является универсальным. Предлагаемый метод заведомо перестаёт работать, когда частота ω становится чисто мнимой. Отслеживание перехода корней уравнения на мнимую ось представляет отдельную задачу, выходящую за пределы настоящей работы.

Помимо этого, как видно на примере поршневой моды, предлагаемый подход не позволяет найти все решения уравнения (61), так как в невязком пределе не все решения имеют частоту вида (66).

Асимптотика функции Бесселя и связанных с ней

Чтобы найти асимптотику функций $J_\nu(\varkappa_s r)/J_\nu(\varkappa_s R)$, $J_\nu(\varkappa_\pm r)/J_\nu(\varkappa_\pm R)$ и $Y_\nu(\varkappa_s r)$, $Y_\nu(\varkappa_\pm r)$ при $\mu \to 0$, рассмотрим функции $J_\nu(y)/J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$.

При больших $|z|$ функция Бесселя имеет асимптотическое разложение (см. [5], §10.17 или [6])

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k}^{(\nu)}}{z^{2k}} -$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{2k+1}^{(\nu)}}{z^{2k+1}},$$

где
$$a_0^{(\nu)} = 1, \quad a_k^{(\nu)} = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\dots(4\nu^2 - (2k-1)^2)}{k!\, 8^k}.$$

Положим $\alpha = -\nu\pi/2 - \pi/4$. Представим косинусы и синусы в виде суммы комплексных экспонент:
$$\cos(z+\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+\alpha)} + e^{-i(z+\alpha)}\right), \tag{67}$$
$$\sin(z+\alpha) = -\frac{i}{2}\left(e^{i(z+\alpha)} - e^{-i(z+\alpha)}\right). \tag{68}$$
Если $\operatorname{Im} z < 0$, первое слагаемое в (67) и (68) экспоненциально растёт с $|z|$, а второе – экспоненциально убывает. Если $\operatorname{Im} z > 0$, наоборот. Обозначим $s = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)$. Пренебрегая экспоненциально убывающим слагаемым, имеем
$$\cos(z+\alpha) \approx \frac{1}{2}e^{-is(z+\alpha)}, \quad \sin(z+\alpha) \approx \frac{is}{2}e^{-is(z+\alpha)}.$$

Таким образом,
$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^{-is(z+\alpha)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_{2k}^{(\nu)}}{z^{2k}} - is\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_{2k+1}^{(\nu)}}{z^{2k+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-is(z+\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}(-is)^k\frac{a_k^{(\nu)}}{z^{k+1/2}}. \tag{69}$$

Полученный ряд есть разложение функции Ханкеля (умноженной на 1/2), экспоненциально растущей с радиусом.

Из (69) напрямую получаем первую из требуемых асимптотик
$$\frac{J_\nu(y)}{J_\nu(z)} \approx \exp\left(-is(y-z)\right)\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(\nu)}(-is)^k y^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(\nu)}(-is)^k z^{-k}}. \tag{70}$$

Далее нам понадобится асимптотика производной от функции Бесселя. Получим её дифференцированием (69):
$$J_\nu'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-is(z+\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}(-is)^k\frac{a_k^{(\nu)}}{z^{k+1/2}}\left(-is - \frac{k+1/2}{z}\right).$$

Разбивая эту сумму на две и заменяя во второй сумме k на $k-1$, получаем
$$J_\nu'(z) \approx -is\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-is(z+\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(\nu)}(-is)^k z^{-k-1/2}, \tag{71}$$

где

$$b_0^{(\nu)} = 1, \quad b_k^{(\nu)} = a_k^{(\nu)} + a_{k-1}^{(\nu)}(k - 1/2) =$$

$$= \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\dots(4\nu^2 - (2k-3)^2)(4\nu^2 + 4k^2 - 1)}{k!\, 8^k}.$$

Асимптотика функции $Y_\nu(z) = zJ'_\nu(z)/J_\nu(z)$ получается из (69) и (71):

$$Y_\nu(z) = \frac{zJ'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \approx -isz \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^{(\nu)} (-is)^k z^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(\nu)} (-is)^k z^{-k}}. \tag{72}$$

Производная от функции $Y_\nu(z)$ определяется по формуле (23). При $z \to 0$ выполняется $Y_\nu(z) \to \nu$, $Y'_\nu(z) \to 0$.

Регуляризация при $r = 0$

Рассмотрим поведение решения при $r = 0$. Пользуясь выражением

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu,$$

можно видеть, что выражения для радиальной и азимутальной компонент скоростей (51), (52), (56) содержат неопределённости вида 0/0. Поскольку они устранимые, теоретически они не вызывают затруднений, однако при численной реализации их необходимо раскрыть. Дополнительную сложность представляет то, что на оси цилиндра формально не определён угол ϕ и, как следствие, при произвольных ограниченных значениях u_r и u_ϕ решение имеет особенность.

При $\nu = 0$ справедливо $u_x|_{r=0} = u_y|_{r=0} = 0$, а оставшиеся переменные вычисляются по обычным формулам, не имеющим особенностей. Определение ϕ не требуется, так как оно входит только в выражение $e^{i\nu\phi}$, которое в точности равно 1.

При $\nu > 1$ выполняется $p|_{r=0} = \rho|_{r=0} = \boldsymbol{u}|_{r=0} = 0$.

Сложность представляет только случай $\nu = 1$. На оси выполняется $p|_{r=0} = \rho|_{r=0} = u|_z = 0$, и остаётся вопрос со скоростями в плоскости сечения цилиндра. Формально подставив $r = 0$ в выражения (51) и (52) для радиальной и азимутальной компонент скорости, получим

$$-i\tilde{u}_\phi^\Pi(z,0,\phi) = \tilde{u}_r^\Pi(z,0,\phi) = \frac{\gamma - 1}{2} \left(-\frac{\lambda_- - a}{c} \frac{\varkappa_+}{J_1(\varkappa_+ R)} + \frac{b}{\lambda_+ - d} \frac{\varkappa_-}{J_1(\varkappa_- R)} \right) e^{ikz + i\phi}.$$

Далее, в (56) слагаемое в скобках при α конечно, а $\kappa_s \to 0$ при $r \to 0$. Второе слагаемое формально даёт предельные значения

$$\tilde{u}_\phi^R(z,0,\phi,t) = \beta \frac{\varkappa_s}{2J_1(\varkappa_s R)}\, e^{ikz+i\phi}, \quad \tilde{u}_r^R(z,0,\phi,t) = -i\beta \frac{\varkappa_s}{2J_1(\varkappa_s R)}\, e^{ikz+i\phi}.$$

Вводя обозначение

$$U = \frac{\gamma-1}{2}\left(-\frac{\lambda_- - a}{c}\frac{\varkappa_+}{J_1(\varkappa_+ R)} + \frac{b}{\lambda_+ - d}\frac{\varkappa_-}{J_1(\varkappa_- R)}\right) - i\beta\frac{\varkappa_s}{2J_1(\varkappa_s R)},$$

получаем

$$\tilde{u}_r(z,0,\phi) = Ue^{ikz+i\phi}, \quad \tilde{u}_\phi(z,0,\phi) = iUe^{ikz+i\phi}.$$

Формально выражая декартовы компоненты через радиальную и азимутальную, получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_x = \tilde{u}_r\cos\phi - \tilde{u}_\phi\sin\phi = \tilde{u}_r\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} - \tilde{u}_\phi\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} = \\
= \frac{\tilde{u}_r + i\tilde{u}_\phi}{2}e^{i\phi} + \frac{\tilde{u}_r - i\tilde{u}_\phi}{2}e^{-i\phi} = Ue^{ikz}, \\
\tilde{u}_y = \tilde{u}_r\sin\phi + \tilde{u}_\phi\cos\phi = \tilde{u}_r\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} + \tilde{u}_\phi\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} = \\
= \frac{-i\tilde{u}_r + \tilde{u}_\phi}{2}e^{i\phi} + \frac{i\tilde{u}_r + \tilde{u}_\phi}{2}e^{-i\phi} = iUe^{ikz}.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $l = 1$ решение содержит конечные в начале координат компоненты скоростей u_x и u_y.

О программной реализации на языке C++

Приведённые выше формулы были реализованы на языке C++ в рамках библиотеки точных решений, которая будет опубликована позже.

Функция Бесселя комплексного аргумента целого индекса вычисляется процедурой, взятой из библиотеки PORT [7]. Для достижения дополнительной точности использовался пакет четверной и восьмерной точности QD [8].

Для работы с комплексными числами использовалась стандартная библиотека <complex> языка C++. Однако было обнаружено, что при использовании содержащихся в ней функции exp и sqrt теряется повышенная точность, обеспечиваемая библиотекой QD. Поэтому вместо них экспонента от комплексного числа вычислялась как $e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y$. Квадратный корень вычислялся по формуле $\sqrt{x+iy} = (x^2+y^2)^{1/4}\exp(i/2\,\arg(x+iy))$, где

$$\arg(x+iy)=\begin{cases}\pi/2, & x=0, y>0;\\ -\pi/2, & x=0, y<0;\\ \arctan(y/x), & x>0;\\ \arctan(y/x)+\pi, & x<0, y\geqslant 0;\\ \arctan(y/x)-\pi, & x<0, y<0.\end{cases}$$

Процедура вычисления решения в целом

Теперь, после описания всех деталей, опишем последовательность действий, необходимую для численного вычисления предлагаемого решения в целом. Пусть даны параметры уравнения γ, μ, Pr и определены азимутальное (ν), радиальное (m) и осевое (k) волновые числа.

1. Определить ω при $\mu=0$ по формуле $\omega|_{\mu=0}=(\lambda^2/R^2+k^2)^{1/2}$, где λ – m-й нуль функции $J'_\nu(x)$.
2. Постепенно увеличивая μ от 0 до заданного значения, описанной выше итерационной процедурой определить решение ω уравнения (61).
3. Определить $\varkappa_s$ формулой (20) и $\varkappa_\pm$ формулами (44)–(47), при малой теплопроводности используя приведённую выше регуляризацию.
4. Вычислить $J_\nu(\varkappa_j r)/J_\nu(\varkappa_j R)$ и $Y_\nu(\varkappa_j r)$ для $j=\{+,-,s\}$, для больших $|\mathrm{Im}\,\varkappa_j|$ используя асимптотики (70) и (72).
5. Получить значения $\tilde\rho$, $\tilde u_z$, $\tilde u_r$, $\tilde u_\phi$, $\tilde p$ по формулам (48)–(58).
6. Исходя из $\tilde u_r$, $\tilde u_\phi$ вычислить $\tilde u_x$, $\tilde u_y$, корректно обработав случай $r=0$.

При нахождении частоты нужно использовать те же регуляризации, что и при вычислении решения. Вместо выполнения пп. 1 и 2 можно взять значение ω из приведённой ниже таблицы, если в ней есть подходящее значение.

Оценка частоты при малой вязкости

Оценим влияние вязкости и теплопроводности на частоты звуковых гармоник. Будем считать, что коэффициент теплопроводности либо имеет тот же порядок, что и коэффициент вязкости (Pr ~ 1), либо меньше его (Pr >1). Отметим, что задание ω с точностью $O(\sqrt{\mu})$ является слишком грубой оценкой, чтобы использовать её для верификации численных алгоритмов решения системы уравнений Навье – Стокса.

Частота ω находится из уравнения (61):

$$\left(\frac{\lambda_- - a}{c}-\frac{b}{\lambda_+ - d}\right)\left(\frac{k^2}{\varkappa_s^2}(Y_\nu^2(\varkappa_s R)-\nu^2)-\nu^2\right)+$$
$$+Y_\nu(\varkappa_s R)\left(\frac{\lambda_- - a}{c}Y_\nu(\varkappa_+ R)-\frac{b}{\lambda_+ - d}Y_\nu(\varkappa_- R)\right)=0. \qquad (73)$$

Оценим слагаемые, входящие в это уравнение, при $\mu \to 0$. Собственные значения $\lambda_\pm$ матрицы A будем обозначать таким образом, что $\lambda_+ \sim 1$, а $\lambda_- \sim 1/\mu$. Имеем

$$\varkappa_s = \pm\left(-\frac{i\omega}{\mu}\left(1-\frac{i\mu}{\omega}k^2\right)\right)^{1/2} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^{1/2} + O(1).$$

$$\frac{\lambda_- - a}{c} \approx \frac{d}{c} \approx -\frac{i}{(\gamma-1)\omega} \sim 1,$$

$$\frac{b}{\lambda_+ - d} = -\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + O(\mu^2), \quad \varkappa_+ = \frac{\lambda_m}{R} + O(\mu), \quad \varkappa_- \approx \sqrt{d} \approx \sqrt{-i\omega}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{\mu}}.$$

Подставим выражение для $\varkappa_s$ в асимптотику (72) для функции $Y_\nu(z)$:

$$Y_\nu(\varkappa_s R) \approx -is\varkappa_s R\,\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^{(\nu)}(-is)^k(\varkappa_s R)^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(\nu)}(-is)^k(\varkappa_s R)^{-k}} = -is\varkappa_s R + O(1),$$

отсюда

$$Y_\nu(\varkappa_s R) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega R^2}{\mu}\right)^{1/2} + O(1).$$

Аналогично $Y_\nu(\varkappa_- R) \sim \varkappa_- \sim 1/\sqrt{\mu}$.

Таким образом, выражение в первой строке в (73) при $\mu \to 0$ имеет порядок $O(1)$. Слагаемое $bY_\nu(\varkappa_- R)/(\lambda_+ - d)$ имеет порядок $O(\sqrt{\mu})$. Поэтому, чтобы вся вторая строка в (73) также имела конечный предел при $\mu \to 0$, должно выполняться $Y_\nu(\varkappa_+ R) \sim \sqrt{\mu}$. Следовательно, $\varkappa_+ R$ отличается от нуля производной функции Бесселя индекса ν на величину порядка $\mu^{1/2}$.

Пусть λ_m – m-й нуль производной функции Бесселя индекса ν. Положим тогда

$$\omega_0 = \left(\frac{\lambda_m^2}{R^2} + k^2\right)^{1/2}, \quad \omega = \omega_0 + \mu^{1/2}\Omega + O(\mu).$$

Из (64) имеем $\lambda_+ = \omega^2 + O(\mu)$, откуда $\varkappa_+ = \sqrt{\omega^2 - k^2} + O(\mu)$. Тогда

$$\varkappa_+ = \left(\left(\omega_0 + \mu^{1/2}\Omega\right)^2 - k^2\right)^{1/2} + O(\mu) = \left(\frac{\lambda_m^2}{R^2} + 2\omega_0\mu^{1/2}\Omega\right)^{1/2} + O(\mu) =$$

$$= \frac{\lambda_m}{R} + \mu^{1/2}\Omega\frac{R}{\lambda_m}\omega_0 + O(\mu).$$

Производная функции Бесселя приближается линейной функцией около своего нуля:

$$J'_\nu(\varkappa_+ R) = J'_\nu(\lambda_m) + J''_\nu(\lambda_m)(\varkappa_+ R - \lambda_m) + O(\mu) = J''_\nu(\lambda_m)\mu^{1/2}\Omega\frac{R^2}{\lambda_m}\omega_0 + O(\mu).$$

Теперь подставим полученное выражение в (73), оставляя только члены порядка 1 при $\mu \to 0$ и домножая на $i(\gamma - 1)\omega_0$:

$$-k^2R^2 - \nu^2 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega_0 R^2}{\mu}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{J''_\nu(\lambda_m)\mu^{1/2}\Omega\omega_0 R}{J_\nu(\lambda_m)} - (\gamma - 1)\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\mu^{1/2}}{\mathrm{Pr}^{1/2}}\omega_0^{3/2}R\right) = O(\sqrt{\mu}).$$

Поскольку λ_m есть нуль производной функции Бесселя индекса ν, справедливо равенство $J''_\nu(\lambda_m)/J_\nu(\lambda_m) = (\nu^2/\lambda_m^2) - 1$. Таким образом, получаем оценку

$$\omega = \omega_0 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\lambda_m^2}{\nu^2 - \lambda_m^2}\left(\frac{\nu^2 + k^2R^2}{\omega_0^{3/2}R^2} + (\gamma - 1)\frac{\omega_0^{1/2}}{\mathrm{Pr}^{1/2}}\right)\sqrt{\mu} + O(\mu), \qquad (74)$$

где

$$\omega_0 = \omega|_{\mu=0} = \left(\frac{\lambda_m^2}{R^2} + k^2\right)^{1/2}.$$

Охарактеризуем точность полученной асимптотики посредством указания на диапазон μ, в котором $\operatorname{Im}\omega$ определяется с ошибкой в 1%, 10% и 100%. Мнимая часть выбрана потому, что при $\mu = 0$ она равна нулю. Выберем $k = 5$, $\nu = 1$, $R = 1$, $\gamma = 1.5$, $\mathrm{Pr} = 1$. При $\mu = 1.6 \times 10^{-7}$ ошибка составляет 1%. При $\mu = 1.6 \times 10^{-5}$ ошибка составляет 10%. При $\mu = 1.7 \times 10^{-3}$ ошибка составляет 100%.

Приложение. Таблица частот

Приведём выборочные значения ω для различиных звуковых мод. Здесь ν – азимутальное волновое число, m – радиальное волновое число. Частоты приводятся для нетеплопроводного ($\mathrm{Pr} = \infty$) и теплопроводного ($\mathrm{Pr} = 1$, $\gamma = 1.4$) случая. Разные таблицы соответствуют разным значениям μ и k. В случаях, когда определить ω не удалось, приводятся критические значения μ^*, при которых ω становится чисто мнимой.

Таблица 1

Частоты для разных волновых чисел. $k = 0$, $\mu = 10^{-5}$

ν	m	Pr $= \infty$	Pr $= 1, \gamma = 1.4$
0	1	3.831705968957 + i 0.000097879804	3.829954994154 + i 0.001874305620
	2	7.015586662142 + i 0.000328123042	7.013217204822 + i 0.002791634940
	3	10.17346811166 + i 0.000689996359	10.17061456786 + i 0.003745566825
2	1	3.051303247764 + i 0.003009351140	3.048566425943 + i 0.005767512863
	2	6.705567831798 + i 0.000865684672	6.703025048654 + i 0.003493703291
	3	9.969171713044 + i 0.000958857924	9.966228466316 + i 0.004095723900
4	1	5.310832507677 + i 0.006954206074	5.306081104567 + i 0.011789961435
	2	9.280842550577 + i 0.002129598375	9.277495220945 + i 0.005643746030
	3	12.68102857653 + i 0.001952479674	12.67749033692 + i 0.005806221327
8	1	9.63213136394 4+ i 0.016074761814	9.623235271021 + i 0.025289854368
	2	14.11154275130 + i 0.005308729662	14.10658996564 + i 0.010653498678
	3	17.77161678196 + i 0.004502693261	17.76688557572 + i 0.009857287232

Таблица 2

Частоты для разных волновых чисел. $k = 10\pi$, $\mu = 10^{-5}$

ν	m	Pr $= \infty$	Pr $= 1, \gamma = 1.4$
0	1	31.63624026204 + i 0.018983990675	31.63103230063 + i 0.025850653258
	2	32.17761707153 + i 0.018965502691	32.17248904675 + i 0.026056555080
	3	33.01046472098 + i 0.018886687031	33.00529644310 + i 0.026175796410
2	1	31.54224425580 + i 0.031048071245	31.53358424134 + i 0.044316021006
	2	32.11030923235 + i 0.020229470107	32.10467504069 + i 0.027811038245
	3	32.94761437219 + i 0.019433463966	32.94223226810 + i 0.026925778826
4	1	31.83411302582 + i 0.038006489722	31.82257939828 + i 0.054108980150
	2	32.74384255746 + i 0.021860111609	32.73750677099 + i 0.030279303528
	3	33.86642288985 + i 0.020278644441	33.86061644823 + i 0.028334828937
8	1	32.82395826700 + i 0.049729451856	32.80760452308 + i 0.070802261967
	2	34.42422388368 + i 0.025073940086	34.41645348598 + i 0.035189635924
	3	36.08176990410 + i 0.022279705433	36.07500962471 + i 0.031611627823

Таблица 3

Частоты для разных волновых чисел. $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$

ν	m	Pr $= \infty$	Pr $= 1$, $\gamma = 1.4$
0	1	3.831693468633 + i 0.009787980428	3.814028759598 + i 0.029715693099
	2	7.015509936875 + i 0.032812304214	6.991409470895 + i 0.065594583785
	3	10.17323414383 + i 0.068999635930	10.14394946762 + i 0.117181088373
2	1	3.024823932659 + i 0.036848360603	2.997215706195 + i 0.066153166831
	2	6.700373515826 + i 0.035654585321	6.674507153025 + i 0.069257133700
	3	9.966256970979 + i 0.069213490028	9.936053684765 + i 0.117428109485
4	1	5.250022646226 + i 0.090339074738	5.201746165557 + i 0.145691745514
	2	9.266523659111 + i 0.072996763590	9.232163548568 + i 0.122459623754
	3	12.67254072682 + i 0.115968799153	12.63588490012 + i 0.181970599207
8	1	9.493156607749 + i 0.230490670081	9.401569366635 + i 0.349508214166
	2	14.07445933397 + i 0.172475629748	14.02258137441 + i 0.259410721633
	3	17.74833875512 + i 0.234290769206	17.69829976004 + i 0.342027010954

Таблица 4

Частоты для разных волновых чисел. $k = 10\pi$, $\mu = 10^{-3}$

ν	m	Pr $= \infty$	Pr $= 1$, $\gamma = 1.4$
0	1	31.52566973739 + i 0.690909805078	31.51476520506 + i 0.880476097609
	2	32.04005461654 + i 0.771986300558	31.98694301608 + i 0.967867544417
	3	32.88291972248 + i 0.824423181086	32.81387722486 + i 1.057369191928
2	1	31.39134151050 + i 1.226569154863	31.30851961458 + i 1.913876639938
	2	31.95699711154 + i 0.770012186441	31.90709376937 + i 0.958137538256
	3	32.81330569591 + i 0.825344433828	32.74167633296 + i 1.055181714256
4	1	31.61007114379 + i 1.274842826067	31.51371369111 + i 1.957572281057
	2	32.57854349610 + i 0.831198226704	32.49769639523 + i 1.045665471363
	3	33.73020478470 + i 0.876275053671	33.65204266442 + i 1.132873153841
8	1	32.48187267191 + i 1.414445618405	32.33264928005 + i 2.121704249865
	2	34.23931982539 + i 0.943239333374	34.13194703029 + i 1.213589132978
	3	35.93697818463 + i 0.992939841359	35.84821941847 + i 1.297042848763

Таблица 5

Частоты для разных волновых чисел. $k = 0$, $\mu = 10^{-1}$

ν	m	Pr $= \infty$	Pr $= 1$, $\gamma = 1.4$
0	1	3.704581627326 + i 0.978798042808	3.409825314788 + i 1.239703830851
	2	6.200966315267 + i 3.281230421446	5.539632351860 + i 4.104128762715
	3	7.475958554613 + i 6.899963593009	6.156488191981 + i 9.378654447118
2	1	2.617383460814 + i 0.981936667664	2.176224563981 + i 1.191083720579
	2	5.905027094070 + i 3.010303145825	5.265510658546 + i 3.686150379979
	3	7.392989423531 + i 6.610589241662	6.106322783824 + i 8.833271501540
4	1	3.887404156626 + i 2.735985834446	2.740878016998 + i 3.054768344892
	2	6.989503986086 + i 5.674722639808	5.875582563241 + i 7.118293857208
	3	6.584060875166 + i 10.56003233994	5.897422196606 + i 16.11462762092
8	1	2.44845941200 + i 1.1417761589925	μ^* = 0.08466703, ω = i 8.474887290
	2	4.37364373030 + i 10.099380728905	5.715414324537 + i 19.33022473827
	3	μ^* = 0.08715449, ω = i 14.80876337	6.613843417205 + i 35.25803171983

Таблица 6

Частоты для разных волновых чисел. $k = 10\pi$, $\mu = 10^{-2}$

ν	m	Pr $= \infty$	Pr $= 1$, $\gamma = 1.4$
0	1	30.80911936850 + i 6.628575316573	30.52621290867 + i 8.681309348971
	2	31.19080763936 + i 6.836135184070	30.88944002740 + i 8.930804553349
	3	31.86825480749 + i 7.205099821000	31.53001416991 + i 9.377008350226
2	1	29.00351311799 + i 11.67200170640	24.33427023444 + i 16.20447608505
	2	31.12747592174 + i 6.801718283414	30.82943810272 + i 8.889417097984
	3	31.80649770128 + i 7.171713408141	31.47222129455 + i 9.336452156546
4	1	29.15834700946 + i 11.82172890177	24.41128988144 + i 16.38335146269
	2	31.60356673905 + i 7.061563621258	31.28161517892 + i 9.203089622648
	3	32.57555756522 + i 7.592525947557	32.19643447703 + i 9.850168207961
8	1	29.76188103604 + i 12.41806789997	24.70155362077 + i 17.09184681213
	2	32.95798608938 + i 7.808747738360	32.56270455135 + i 10.11505705392
	3	34.48805189565 + i 8.655275495454	33.98822215115 + i 11.17215809894

Заключение

В настоящей работе рассмотрено аналитическое решение линеаризованных уравнений Навье – Стокса, описывающих звуковую волну в цилиндрической трубе при наличии вязкости и теплопроводности. Приведён вывод этого решения и описаны детали процедуры его численного вычисления.

Полученное решение может быть использовано для верификации и анализа точности разностных схем для решения уравнений Навье – Стокса в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Прандтля.

Автор благодарит Сурначёва М. Д. за проявленный интерес и многочисленные полезные замечания к настоящей работе, а также Миронова М. А., оказавшего большую помощь на её начальном этапе.

Список литературы

1. Kirchhoff G. Über der Einfluss der Warmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // Annalen der Physik und Chemie. 1868. Vol. 134, no. 6. P. 177–193.

2. Ламб Г. Гидродинамика. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947.

3. Рэлей Дж. В. Теория звука, т. II. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.

4. Tong O., Katz A. High-Order Methods for Three-Dimensional Strand Grids // AIAA 2015-0835. 2015.

5. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. F. W. J. Olver , A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, et al. URL: http://dlmf.nist.gov/.

6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.

7. URL: http://netlib.sandia.gov/port/prop.upd/db1slc.f.

8. *QD – A C++/Fortran-90 double-double and quad-double package*. Yozo Hida, Xiaoye S. Li, David H. Bailey et al. URL: https://github.com/aoki-t/QD.