



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 17 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Павловский В.Е., Савицкий А.В.**

Исследование обратной  
задачи для вычисления  
управляющих воздействий  
для квадрокоптера

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Павловский В.Е., Савицкий А.В.  
Исследование обратной задачи для вычисления управляющих воздействий для квадрокоптера  
// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 17. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2017-17](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-17)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-17>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**В.Е.Павловский, А.В.Савицкий**

**Исследование обратной задачи  
для вычисления управляющих  
воздействий для квадрокоптера**

**Москва — 2017**

УДК 623.746-519

*Павловский В.Е., Савицкий А.В.*

**Исследование обратной задачи для вычисления управляющих воздействий для квадрокоптера**

Предметом исследования данной работы является решение обратной задачи динамики для беспилотного летательного аппарата – квадрокоптера. За основу была выбрана описанная ранее система дифференциальных уравнений, описывающая движение робота. Исходя из ограниченности управляющих воздействий, были получены ограничения на возможные ускорения системы. Аналитически были изучены такие фигуры высшего пилотажа, как полет по вертикальной окружности, «горка», полёт по винтовой линии и другие. Описан алгоритм численного моделирования. С его помощью были получены графики движения квадрокоптера и управляющих воздействий для каждой траектории. Показано, что решением обратной задачи динамики можно находить управляющие воздействия для сложных траекторий, в том числе для фигур высшего пилотажа.

**Ключевые слова:** квадрокоптер, обратная задача, алгоритм управления, полет по окружности.

*Vladimir E. Pavlovsky, Alexander V. Savitsky*

**The solving of inverse problem for the computation of control action for quadrocopter**

This article is deals with a solution of the inverse problem of dynamics for an unmanned aerial vehicle - quadrocopter. This article is based on the system of differential equations describing the motion of the robot which was published previously. Taking into account the limited control actions, we got the limits limits on the possible acceleration of the system. In this work we studied analytically such aerobatics as flight in a circle, slide, flying in a vertical spiral and others. Besides a numerical simulation algorithm was described. Using this algorithm we obtained the graphics of quadrocopters motion and control actions for each trajectory. It is shown that using the solution of inverse dynamics problem we can find the control for complex trajectory, including aerobatics.

**Key words:** quadrotor, inverse problem, algorithm of control, flight in a circle.

## **Введение. Состояние проблемы**

На протяжении последних лет среди летающих роботов наибольший интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения вызывают мультироторные роботы. Развитие технологий постоянно открывает новые возможности для беспилотных летательных аппаратов и позволяет переходить к более сложным задачам на автономном уровне. С каждым годом значительно возрастает количество областей, в которых используются БПЛА, однако наиболее востребованными отраслями на сегодняшний день являются аэрофотосъемка и мониторинг:

- профессиональная кино- и фотосъемка;
- картография и топографическая съемка;
- исследование климата и экологический мониторинг;
- точное сельское хозяйство (картирование земель для целей точного земледелия, мониторинг угодий, анализ вегетативного индекса и внесение веществ);
- мониторинг транспортного потока;
- борьба с пожарами и стихийными бедствиями;
- исследование целостности и состояния зданий и сооружений, в т.ч. инфраструктурных объектов;
- поиск полезных ископаемых и др.;
- любительская фото- и видеосъемка.

Также активно развиваются такие сферы применения, как транспортировка грузов, связь (использование БПЛА как платформ для ретрансляции сигналов), помощь в операциях по поддержанию правопорядка, поиск и спасение, охрана периметров, обработка сельскохозяйственных угодий путем внесения биопрепаратов и пестицидов и многие другие. При этом существует ряд технологических барьеров, которые сдерживают темпы развития индустрии БПЛА. Часть из них связана с материаловедческими и конструкционными вопросами: силовые и энергетические установки с высокой удельной мощностью и емкостью соответственно, мощные процессоры, высокоточная система датчиков и сенсоров. Ниже приведен ряд других барьеров, связанных с программно-алгоритмическим блоком:

- задачи оптимального управления;
- возможность адаптации к непрогнозируемым внешним воздействиям;
- системы машинного зрения для распознавания целевых объектов и обнаружения препятствий;
- обработка больших данных и оптимизация вычислений и др.

В данной работе рассмотрен алгоритм синтеза управления, основанный на решении обратной задачи динамики для наиболее распространенного летательного робота - квадрокоптера.

В настоящее время уже разработано и испытано множество различных методов управления квадрокоптером. Одним из них является использование нейросетевого контроллера, описанного в работе [1], при этом построенная в ней теоретико-механическая модель будет взята за основу исследования в настоящей публикации.

Другим методом синтеза управляющих воздействия является метод построения динамической обратной связи. На его основе в работе [2] для такой базовой траектории, как взлёт-посадка, решается задача стабилизации системы вблизи желаемой траектории.

Также встречаются работы с исследованием плоских движений квадрокоптера. В частности, в работе [3] показано, что движение робота в горизонтальной плоскости является управляемым, и с помощью метода линеаризации с обратной связью построено программное управление движением.

Стоит отметить, что мультироторные летательные роботы являются системами с дефицитом управляющих воздействий, так как имеют шесть степеней свободы и максимум четыре управления. Кроме того, управляющие воздействия имеют естественные ограничения, связанные с возможностями несущих винтов. В связи с этим в отдельный класс задач стоит выделить изучение допустимых пространственных траекторий квадрокоптера и синтез управлений в имеющихся ограничениях. В работе [4] предложен метод разбиения требуемой траектории на отдельные участки таким образом, чтобы возможно было построить алгоритм движения по каждому из участков и алгоритм управления на каждом эшелоне.

Целью настоящей работы является исследование обратной задачи динамики квадрокоптера, изучение движения робота в вертикальной и горизонтальной плоскостях, построение таких фигур высшего пилотажа, как полет по вертикальной окружности, «горка», полет по винтовой линии и др. Также в настоящей работе получены ограничения на пространство возможных траекторий общей задачи.

## **1. Ограничения на пространство возможных движений**

### **1.1. Описание модели**

Теоретическая механическая модель квадрокоптера, взятая за основу в данной работе, предварительно описана в [1], представляет собой твердое тело

с шестью степенями свободы  $q = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$ . Пусть  $\{Oxyz\}$  - правая инерциальная система координат, причем  $Oz$  соответствует вертикальному направлению. Положение центра масс тела определяется вектором  $\xi = (x, y, z)$ . Ориентация робота задается с помощью углов Крылова  $v = (\varphi, \psi, \theta)$ . Система имеет четыре управления, соответствующие угловым скоростям четырех винтов. Для дальнейших исследований за основу взята следующая система дифференциальных уравнений Лагранжа:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x} = k_1(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_4)(\cos\varphi\sin\psi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta), \\ M\ddot{y} = k_1(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_4)(\sin\varphi\sin\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta), \\ M\ddot{z} = -Mg + k_1(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_4)\cos\psi\cos\theta, \\ \ddot{\varphi}(A\sin^2\psi + A\cos^2\psi\sin^2\theta + D\cos^2\psi\cos^2\theta) + \ddot{\psi}\cos\theta\sin\theta(A - D) - A\ddot{\theta}\sin\psi + \\ + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin 2\psi\cos^2\theta(A - D) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta\cos^2\psi(A - D) + \dot{\psi}^2\sin\psi\cos\theta\sin\theta(D - A) + \\ + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\psi(-2A\sin^2\theta - D\cos 2\theta) = -I_3^c(\ddot{\gamma}_1 - \ddot{\gamma}_2 + \ddot{\gamma}_3 - \ddot{\gamma}_4)\cos\psi\cos\theta + \\ + I_3^c(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4)(\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\psi\sin\theta) + k_1l\frac{\sin\theta}{\cos\psi}(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1) - \\ + k_2\frac{\cos\theta}{\cos\psi}(-\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2), \\ \ddot{\varphi}\cos\psi\sin\theta\cos\theta(A - D) + \ddot{\psi}(A\cos^2\theta + D\sin^2\theta) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\psi(2A\cos^2\theta - D\cos 2\theta) + \\ + \dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi\cos^2\theta(D - A) + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin 2\theta(D - A) = I_3^c\sin\theta(\ddot{\gamma}_1 - \ddot{\gamma}_2 + \ddot{\gamma}_3 - \ddot{\gamma}_4) + \\ + I_3^c\cos\theta(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4)(\dot{\theta} - \dot{\varphi}\sin\psi) + \cos\theta k_1l(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1) - \sin\theta k_2(-\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2), \\ - A\ddot{\varphi}\sin\psi + A\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi(D\cos 2\theta - 2A\cos^2\theta) + \dot{\varphi}^2\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta(D - A) + \\ + \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta(A - D) = I_3^c(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4)(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\psi}\cos\theta) + k_1l(\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_4) + \\ + tg\psi[lk_1\sin\theta(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1) + \cos\theta k_2(-\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2)], \end{array} \right.$$

где используются следующие обозначения:

$\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$  и  $\dot{\gamma}_4$  - угловые скорости несущих винтов, которые являются управлениями,

$k_1$  - коэффициент подъемной силы,

$k_2$  - коэффициент момента сопротивления, который создается вращением несущего винта,

$l$  - длина «луча» квадрокоптера,

$M$  - масса квадрокоптера,

$I_1^a$  - момент инерции квадрокоптера относительно оси, направленной по одному из «лучей»,

$I_3^a$  - момент инерции квадрокоптера относительно оси, перпендикулярной его плоскости,

$I_1^c$  - момент инерции диска несущего винта относительно оси, направленной по одному из «лучей»,

$I_3^c$  - момент инерции диска несущего винта относительно оси, перпендикулярной его плоскости,

$$D = I_3^a + 4I_3^c, \quad A = I_1^a + 4I_1^c.$$

Введем новые переменные функций управления  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ , вместо  $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3, \dot{\gamma}_4)$ :

$$\Gamma_1 = (\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1)lk_1,$$

$$\Gamma_2 = (\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_4)lk_1,$$

$$\Gamma_3 = (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_4)I_3^c,$$

$$F = (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_4) \frac{k_1}{M},$$

Стоит отметить, что данная замена является линейной с матрицей перехода  $\Lambda$ , имеющей следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -k_1l & 0 & k_1l & 0 \\ 0 & k_1l & 0 & -k_1l \\ I_3^c & -I_3^c & I_3^c & -I_3^c \\ \frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} \end{pmatrix}$$

В связи с тем, что  $\det(\Lambda) = \text{const} \neq 0$ , замена является невырожденной. Таким образом, дальнейшее исследование обратной задачи будем проводить для переменных  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ .

Также введем дополнительное обозначение для суммарного момента сопротивления:  $-S = (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 - \dot{\gamma}_3^2 + \dot{\gamma}_4^2)k_2$ . Отметим, что  $S$  однозначно выражается через переменные  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ :

$$S(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F) = \frac{k_2}{2k_1} \left( -\frac{F\Gamma_3 M}{I_3^c} + \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2}{k_1 l^2} \right).$$

В результате получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}
M\ddot{x} = F(\cos\varphi\sin\psi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta), \\
M\ddot{y} = F(\sin\varphi\sin\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta), \\
M\ddot{z} = -Mg + F\cos\psi\cos\theta, \\
\ddot{\varphi}(A\sin^2\psi + A\cos^2\psi\sin^2\theta + D\cos^2\psi\cos^2\theta) + \ddot{\psi}\cos\theta\sin\theta(A - D) - A\ddot{\theta}\sin\psi + \\
+ \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin 2\psi\cos^2\theta(A - D) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin 2\theta\cos^2\psi(A - D) + \dot{\psi}^2\sin\psi\cos\theta\sin\theta(D - A) + \\
+ \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\psi(-2A\sin^2\theta - D\cos 2\theta) = -\Gamma_3\cos\psi\cos\theta + \\
+ \Gamma_3(\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\psi\sin\theta) + \frac{\sin\theta}{\cos\psi}\Gamma_1 + S\frac{\cos\theta}{\cos\psi}, \\
\ddot{\varphi}\cos\psi\sin\theta\cos\theta(A - D) + \ddot{\psi}(A\cos^2\theta + D\sin^2\theta) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\psi(2A\cos^2\theta - D\cos 2\theta) + \\
+ \dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi\cos^2\theta(D - A) + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin 2\theta(D - A) = \dot{\Gamma}_3\sin\theta + \\
+ \Gamma_3\cos\theta(\dot{\theta} - \dot{\varphi}\sin\psi) + \cos\theta\Gamma_1 - \sin\theta S, \\
-A\ddot{\varphi}\sin\psi + A\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi(D\cos 2\theta - 2A\cos^2\theta) + \dot{\varphi}^2\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta(D - A) + \\
+ \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta(A - D) = \Gamma_3(-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\psi}\cos\theta) + \Gamma_2 + \\
+ \operatorname{tg}\psi[\sin\theta\Gamma_1 + \cos\theta S].
\end{cases}$$

## 1.2. Ограничения на пространство возможных траекторий для общей задачи

Заметим, что исходная система состоит из шести дифференциальных уравнений второго порядка и имеет шесть неизвестных функций координат  $q = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$  и четыре функции управления  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ . Таким образом в конфигурационном пространстве достижима не любая траектория. Однако обратная задача может быть решена частично: например, можно найти функции управления  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$  для заданной кривой движения  $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$  и при дополнительном соотношении на  $\varphi, \psi, \theta$ . При этом функции  $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3, \dot{\gamma}_4)$ , как было отмечено выше, находятся однозначно.

Кроме того, перепишем первые три уравнения Лагранжа в следующем виде:

$$\begin{cases}
\ddot{x} = Fa_{13} \\
\ddot{y} = Fa_{23} \\
\ddot{z} + g = Fa_{33},
\end{cases} \quad (1)$$

где  $a_{13} = \cos\varphi\sin\psi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta, a_{23} = \sin\varphi\sin\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta, a_{33} = \cos\psi\cos\theta$ .

Так как компоненты  $a_{i3}$  являются элементами третьего столбца матрицы углов



Крылова, то выполнено соотношение:  $a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$ . Используя это соотношение, возведем в квадрат первые три уравнения Лагранжа и сложим их. В результате имеем:

$$F^2 = \ddot{f}_1^2(t) + \ddot{f}_2^2(t) + (\ddot{f}_3(t) + g)^2.$$

Таким образом, достижимы только такие движения, для которых выполнено данное соотношение. Также результирующее ускорение ограничено суммарной силой тяги четырех винтов.

### 1.3. Постановка задачи

Целью настоящей работы является построение алгоритма нахождения управляющих воздействий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ , позволяющих реализовать движение по заданной траектории  $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ . В частности, необходимо решить обратную задачу динамики для движения по некоторым фигурам высшего пилотажа.

## 2. Решение обратной задачи

### 2.1. Общий случай

Далее опишем решение обратной задачи для общего случая. Из-за дефицита управляющих воздействий в конфигурационном пространстве достижима не любая траектория. Имея шесть уравнений и десять неизвестных (четыре управляющих воздействия и шесть координат), в общем случае необходимо минимум четыре соотношения для разрешения системы. С другой стороны, в подсистему из первых трех уравнений входит управляющее воздействие  $F$  и шесть обобщенных координат. Поэтому при задании любых четырех координат остается три уравнения и три неизвестных, что в общем случае делает подсистему разрешимой.

Предположим, необходимо найти функции управления  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$  для некоторого заданного закона движения  $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ . Для начала рассмотрим первые три уравнения Лагранжа общей системы:

$$\begin{cases} \ddot{x} = F(\cos\varphi \sin\psi \cos\theta + \sin\varphi \sin\theta), \\ \ddot{y} = F(\sin\varphi \sin\psi \cos\theta - \cos\varphi \sin\theta), \\ \ddot{z} + g = F\cos\psi \cos\theta. \end{cases} \quad (2)$$

Слева от знака равенства стоят заданные функции времени, отсюда находим управляющее воздействие  $F$ :

$$F = \sqrt{\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t) + (\dot{f}_3(t) + g)^2}$$

В результате остается два независимых уравнения на углы и оставшиеся три последних уравнения общей системы дифференциальных уравнений. Но система является неразрешимой, так как неизвестных на одну больше: три угла и три оставшиеся три управления. Таким образом, необходимо добавить еще одно вспомогательное соотношение на углы. После этого из первых двух уравнений выражаются оставшиеся два угла. В результате чего остается три уравнения на три неизвестных.

Стоит отметить, что последнее уравнение не является дифференциальным и из него явно можно выразить  $\Gamma_2$  через  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  и углы, которые представляют из себя уже найденные функции времени. Кроме того, первые оставшиеся два уравнения являются дифференциальными только относительно  $\Gamma_3$ . Поэтому при рассмотрении некоторых движений решение обратной задачи будет сводиться к решению одного дифференциального и двух полиномиальных уравнений.

Далее будут рассмотрены некоторые траектории.

## 2.2. Движение квадрокоптера в вертикальной плоскости.

### Движение по окружности

Для нахождения закона движения в вертикальной плоскости без ограничения общности будем считать, что  $x \equiv 0$ . Кроме того, как было показано в разделе 2.1, предположим, что  $\varphi \equiv 0$ . Тогда из первого уравнения общей системы дифференциальных уравнений следует, что  $\psi \equiv 0$ . В результате имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -F \sin \theta, \\ \ddot{z} + g = F \cos \theta, \\ -\dot{\Gamma}_3 \cos \theta + \Gamma_3 \dot{\theta} \sin \theta + \Gamma_1 \sin \theta - S \cos \theta = 0, \\ \dot{\Gamma}_3 \sin \theta + \Gamma_3 \dot{\theta} \cos \theta + \Gamma_1 \cos \theta + S \sin \theta = 0, \\ A\ddot{\theta} = \Gamma_2. \end{cases} \quad (3)$$

Третье и четвертое уравнения этой системы можно преобразовать, поочередно умножая их на  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ . В итоге имеем:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -F \sin \theta, \\ \ddot{z} + g = F \cos \theta, \\ \Gamma_3 \dot{\theta} + \Gamma_1 = 0, \\ \dot{\Gamma}_3 + S(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, F) = 0, \\ A\ddot{\theta} = \Gamma_2. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, из первых двух уравнений (4) находим  $\theta$  и  $F$ , а выражения для  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  из третьего и пятого уравнений (4) соответственно подставляем в четвертое уравнение (4) и получаем следующее дифференциальное уравнение на  $\Gamma_3$ :

$$\dot{\Gamma}_3 + \frac{k_2}{2k_1} \left( -\frac{F\Gamma_3 M}{I_3^c} + \frac{(A\ddot{\theta})^2 - (\Gamma_3\dot{\theta})^2}{k_1 l^2} \right) = 0$$

Данное уравнение позволяет найти все управляющее воздействие  $\Gamma_3$ , и, следовательно, оставшиеся две функции управления  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

Далее для верификации найденных функций управления подставим полученные управления в исходную систему и решим прямую задачу динамики. Ввиду сложности рассматриваемых систем в данной работе было задействовано численное моделирование с помощью программы MATLAB R2013a. Суть проверки заключается в решении задачи Коши из 12 уравнений первого порядка для определенных начальных условий и найденных функций управления  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$ .

Рассмотрим случай движения по горизонтальной окружности, радиусом  $R$ . Запишем закон движения следующим образом:

$$\begin{cases} y = R - R \cos \alpha, \\ z = R \sin \alpha, \end{cases}$$

где  $\alpha = \alpha_0 \sin^2(\omega t)$ ,  $\alpha_0$  и  $\omega$  - параметры скорости движения по окружности. Параметр  $\alpha$  выбран таким образом, чтобы в начальный момент времени были выполнены следующие условия:

$$y(0) = 0,$$

$$z(0) = 0,$$

$$\dot{y}(0) = 0,$$

$$\dot{z}(0) = 0,$$

$$y(T_{\max}) = 0,$$

$$z(T_{\max}) = 0,$$

$$\dot{y}(T_{\max}) = 0,$$

$$\dot{z}(T_{\max}) = 0.$$

Пусть  $\alpha_0 = 2\pi$ ,  $R = 10$  м и  $\omega = \frac{\pi}{2T_{\max}}$ ,  $T_{\max} = 18$  с – время одного полного оборота. С помощью численного интегрирования находим функции  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$  (рис. 1).

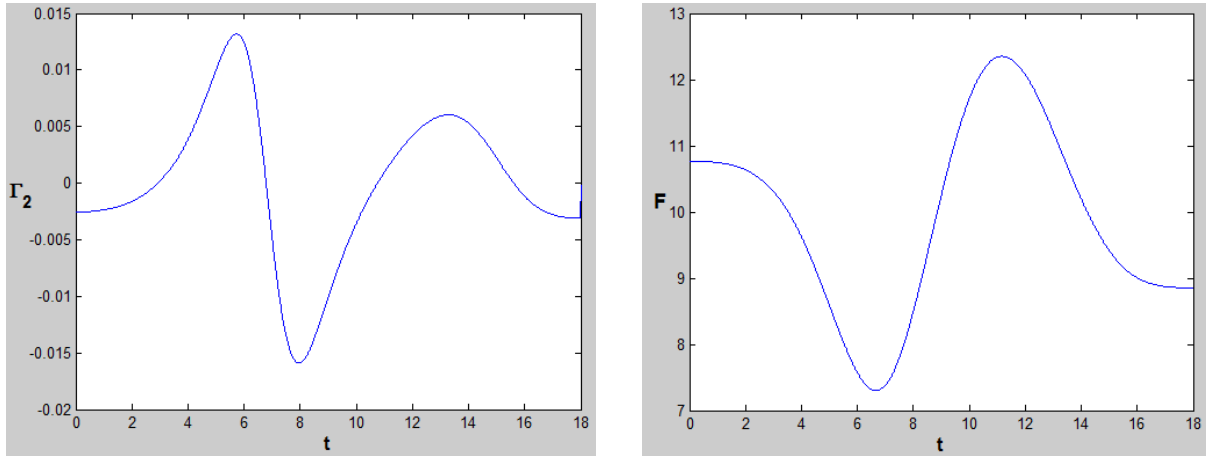


Рис.1. Функции управления  $\Gamma_2$  и  $F$  для полёта квадрокоптера по окружности в плоскости  $Oyz$ .

На рисунках 2 и 3 показана траектория движения, которой соответствует найденные функции управлений, причём на рисунке 3 схематично изображен квадрокоптер, летящий по вертикальной окружности, и график найденной координаты  $\theta(t)$ .

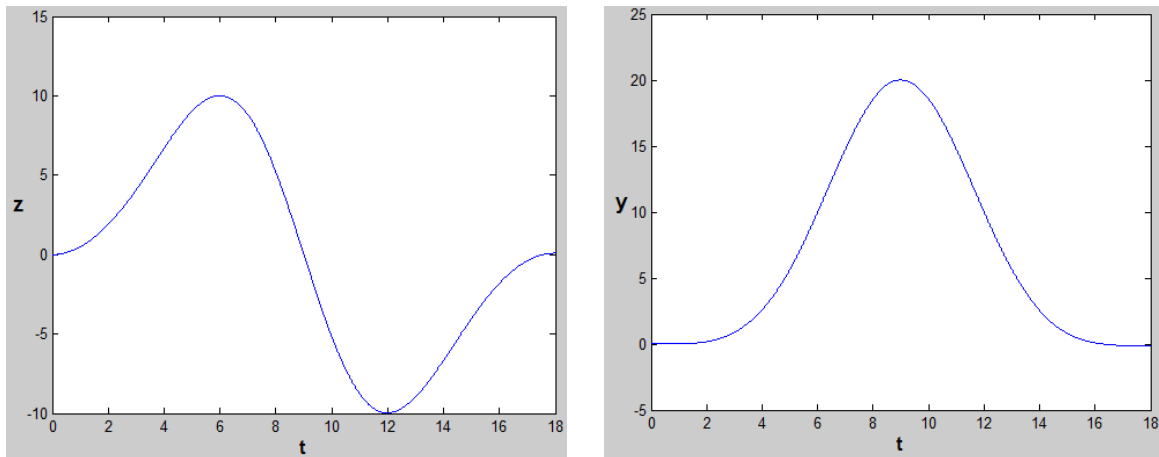


Рис.2. Функции  $z(t)$  и  $y(t)$  для полёта квадрокоптера по окружности в плоскости  $Oyz$ .

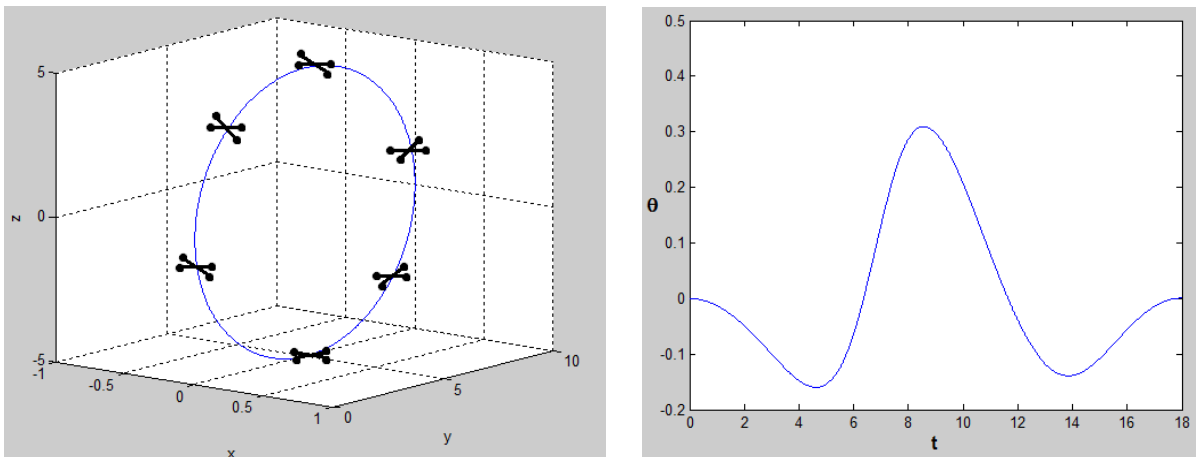


Рис.3. Функции  $z(x, y)$  и  $\theta(t)$  для полёта квадрокоптера по окружности в плоскости  $Oyz$ .

Из полученной на рисунке 3 функции для угла крена получаем, что  $\theta(T_{\max})=0$ . Таким образом, совершив полет по вертикальной окружности, квадрокоптер вернулся в начальное положение.

### 2.3. Движение квадрокоптера в вертикальной плоскости. «Горка»

Аналогично рассмотрим такую фигуру высшего пилотажа, как прохождение горки с высотой  $z_m$ . Запишем закон движения следующим образом:

$$\begin{cases} y = \alpha, \\ z = z_m \sin^2 \alpha, \end{cases}$$

где параметр  $\alpha$  выбран таким же образом, как и в предыдущем случае. Аналогично для этого случая с помощью численного интегрирования находим  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, F$  (рис. 4).

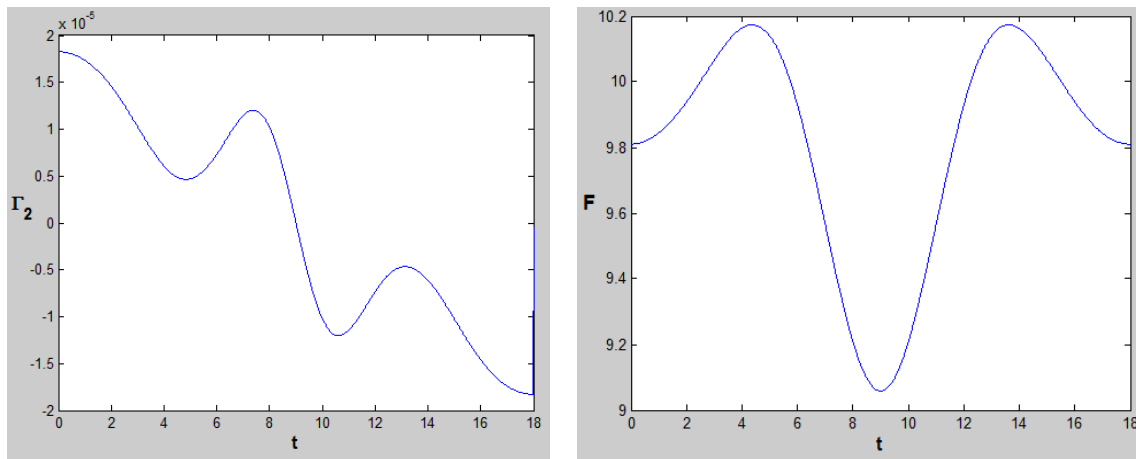


Рис.4. Функции управления  $\Gamma_2$  и  $F$  для маневра «горка».

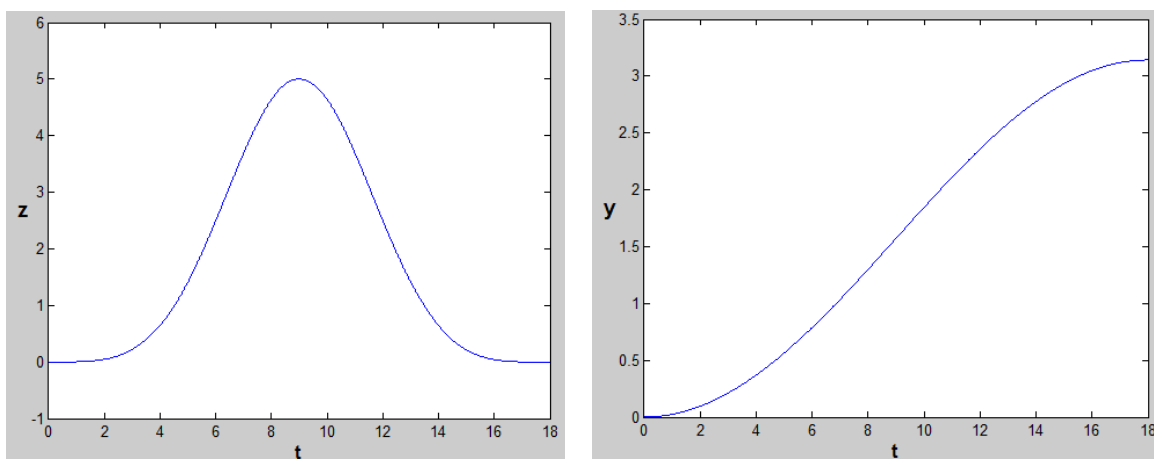


Рис.5. Функции  $z(t)$  и  $y(t)$  для маневра «горка».

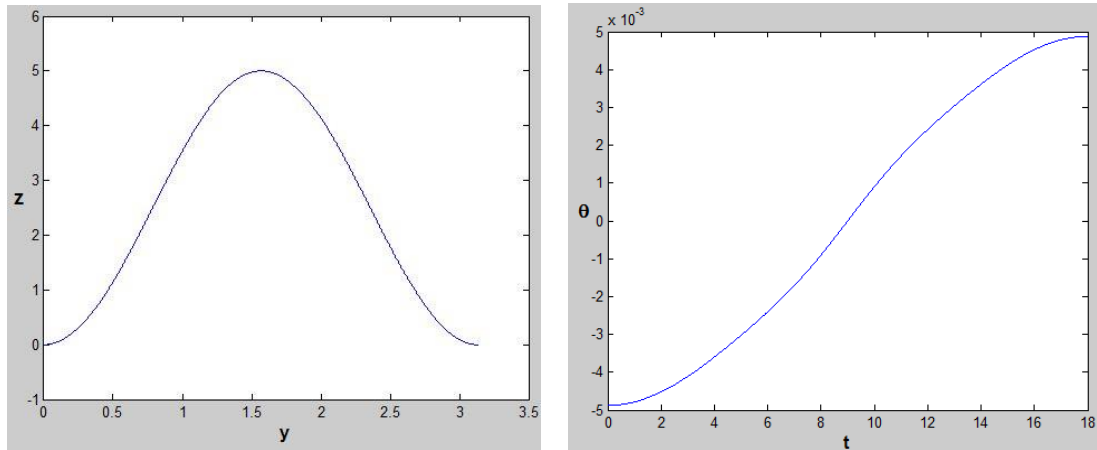


Рис.6. Функции  $z(y)$  и  $\theta(t)$  для маневра «горка».

Отметим, что параметры горки выбраны следующим образом: высота  $z_m = 5$  м, ширина  $\alpha_0 = \pi$  м.

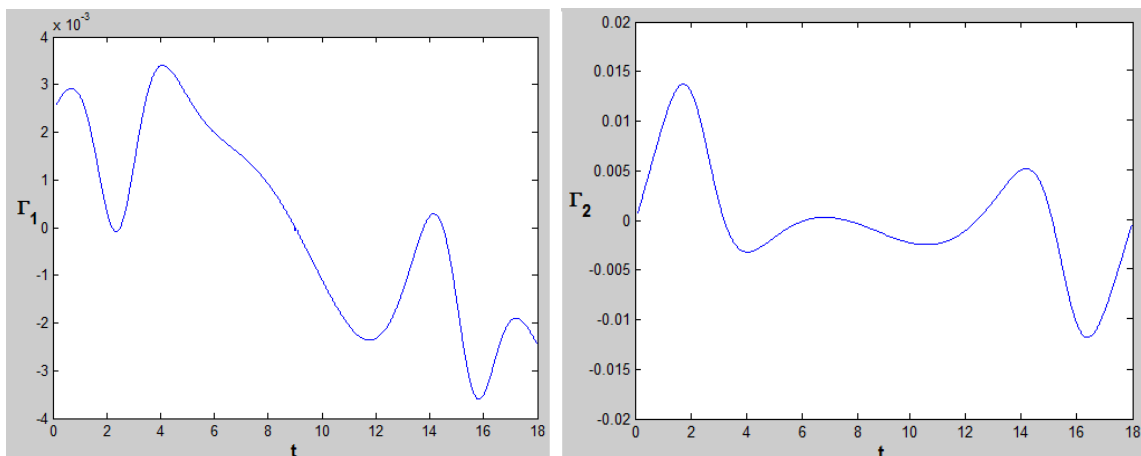
## 2.4. Движение квадрокоптера в горизонтальной плоскости.

### Полёт по окружности

Случай движения квадрокоптера по горизонтальной окружности описывается следующим соотношением:

$$\begin{cases} x = R - R \cos \alpha, \\ y = R \sin \alpha. \end{cases}$$

Аналогичным образом находим управляющие воздействия и оставшиеся два угла (рис. 7-10).



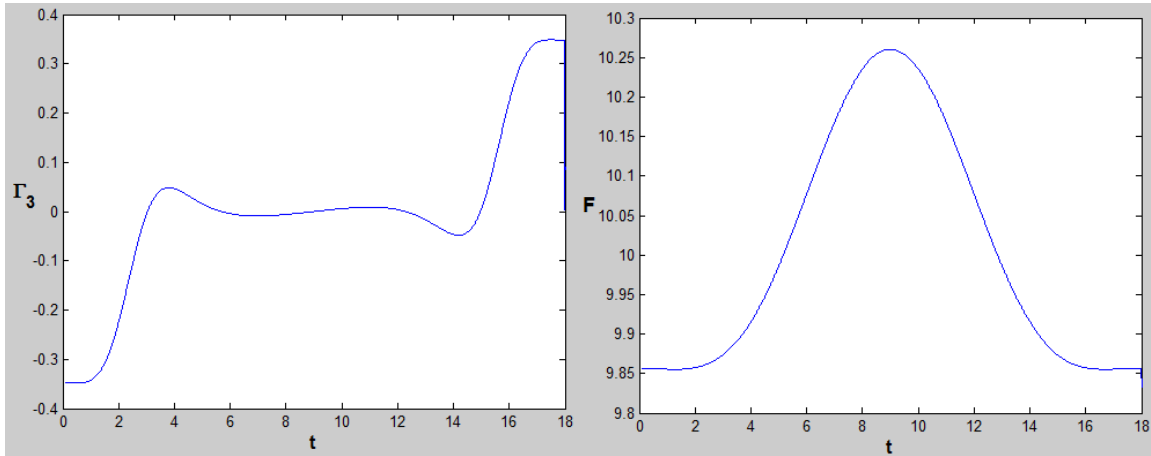


Рис.7. Функции управления  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  и  $F$  для полёта квадрокоптера по горизонтальной окружности.

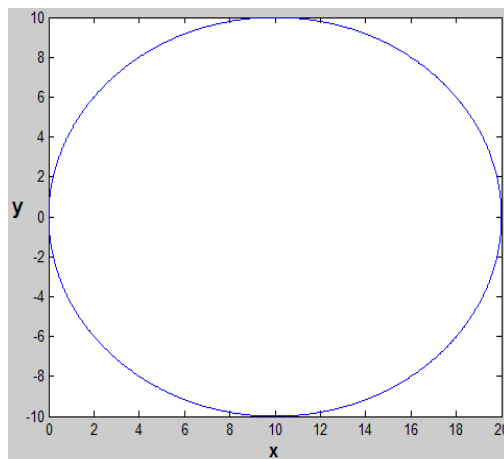


Рис.8. Траектория  $y(x)$  для полёта квадрокоптера по горизонтальной окружности.

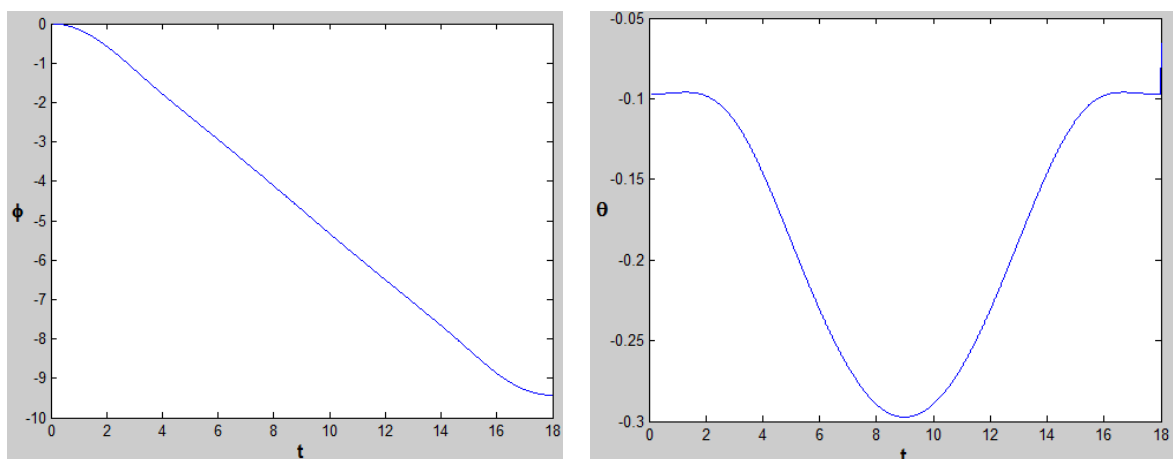


Рис.9. Функции  $\varphi(x)$  и  $\theta(t)$  для полёта квадрокоптера по горизонтальной окружности.

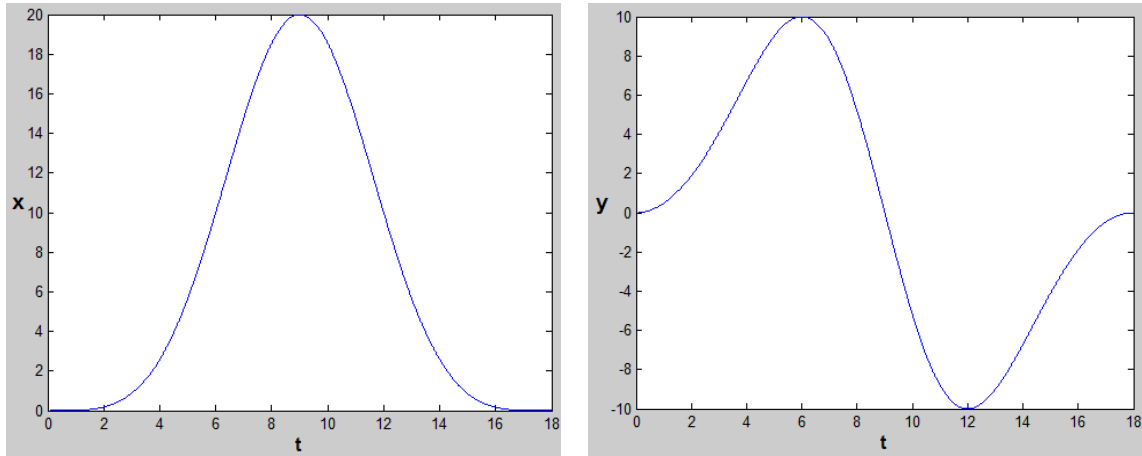


Рис.10. Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  для полёта квадрокоптера по горизонтальной окружности.

## 2.5. Пространственные траектории. Движение квадрокоптера по винтовой линии

Для нахождения закона движения для движения по винтовой линии, заменим в предыдущем разделе закон движения по вертикальной оси на  $z = z_0 \sin^2(\omega_z t)$ , где  $z_0$  и  $\omega_z$  - параметры скорости подъема. В результате получаем законы управления и траекторию, изображенную на рисунках 11-15.

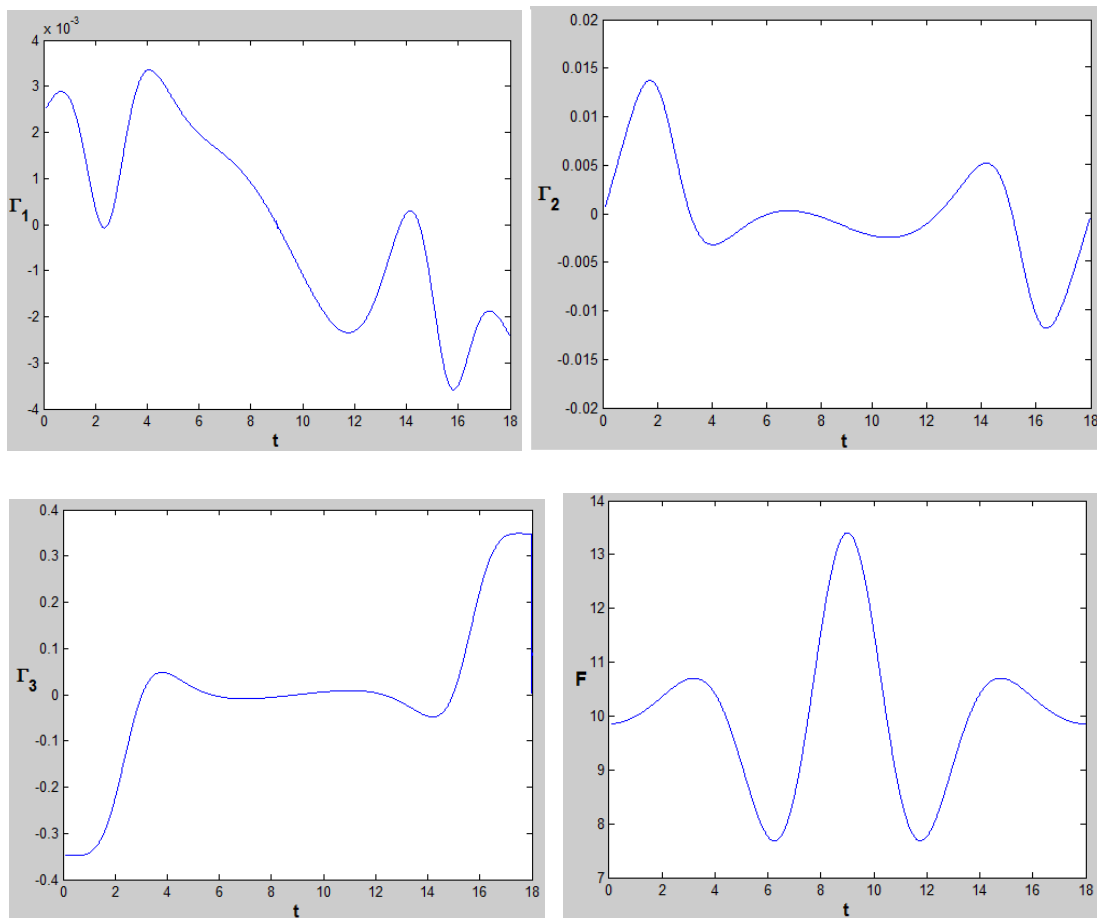


Рис.11. Функции управления  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  и  $F$  для полёта квадрокоптера по винтовой линии.



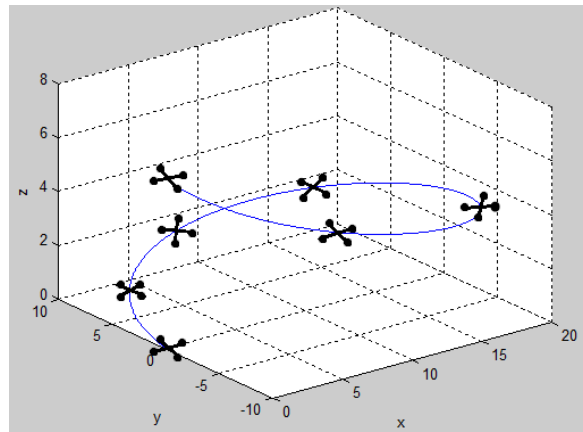


Рис.12. Траектория  $z(x, y)$  для полёта квадрокоптера по винтовой линии.

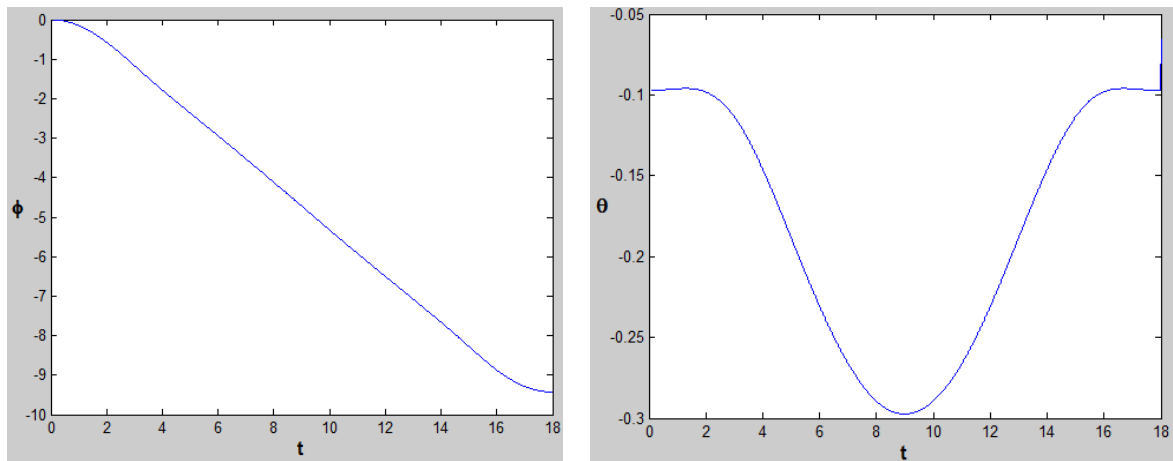


Рис.13. Функции  $\varphi(x)$  и  $\theta(t)$  для полёта квадрокоптера по винтовой линии.

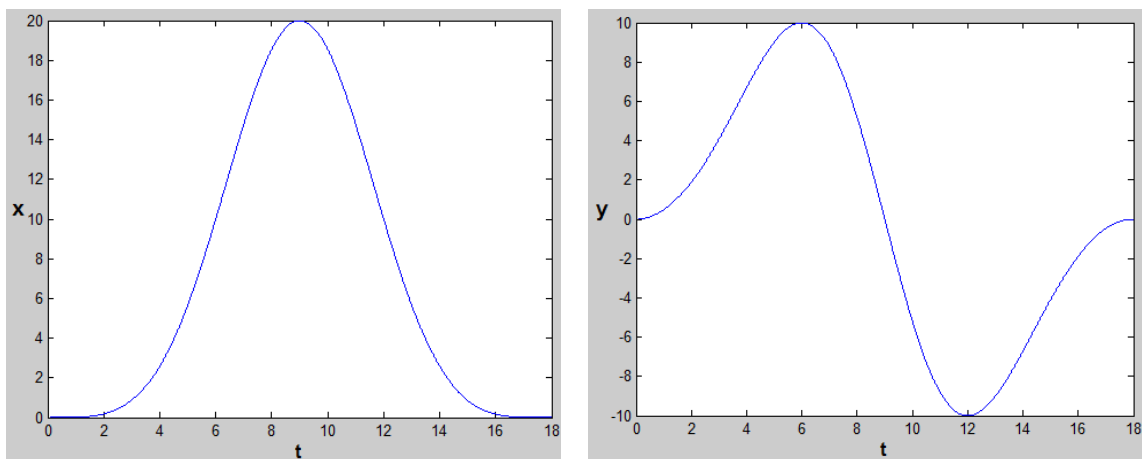


Рис.14. Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  для полёта квадрокоптера по винтовой линии.

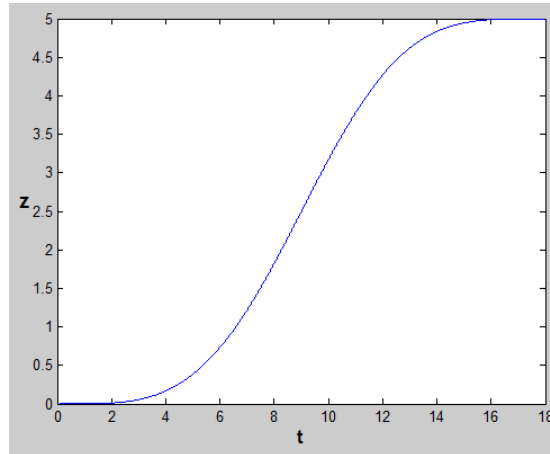


Рис.15. Функция  $z(t)$  для полёта квадрокоптера по винтовой линии.

Таким образом, найдено решение обратной задачи динамики для движения квадрокоптера по некоторым плоским и пространственным траекториям, включая такие фигуры высшего пилотажа, как полет по вертикальной окружности и полёт по винтовой линии.

## Заключение

На основе построенной теоретико-механической модели были получены ограничения на пространство возможных движений квадрокоптера. В настоящей работе предложено решение обратной задачи динамики и представлен алгоритм вычисления управляющих воздействий. Отдельно рассмотрено движение в горизонтальной и вертикальных плоскостях, построены графики управлений для полета по «мёртвой петле», «горке» и другим траекториям.

Также для верификации найденных управлений была решена прямая задача динамики. При этом полученные результаты полностью соответствовали требуемым траекториям. С помощью полученного метода возможно вычислять функции управления для любой достаточно гладкой траектории. Кроме того, исходя из анализа уравнений движения можно сделать вывод о том, что обратная задача динамики может быть решена также в том случае, если заданы 2 координаты и 2 угла, либо 3 координаты и один угол.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 15-07-07483 А.

## Библиографический список

1. Павловский В.Е., Савицкий А.В., Нейросетевой алгоритм управления квадрокоптером на типовых траекториях, журнал «Нелинейный мир», изд. «Радиотехника», Москва, 2015. №6, С. 47-51.
2. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н., Управление четырехвинтовым вертолетом, Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана «Наука и образование», №5, 2012. С. 157-171.
3. Канатников А.Н., Акопян К.Р., Управление плоским движением квадрокоптера, Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2015. №2. С. 23-36.
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б., Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости, Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана «Наука и образование», №3, 2012. С. 1-15.
5. Фантони И., Лозано Р. Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. Москва-Ижевск. ООО "Компьютерная динамика", 2012. 312 стр.
6. Bresciani T., Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter, Department of Automatic Control, Lund University, 2008.
7. Dzul P. A. and Lozano R. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. IEEE Transaction on Control System Technology, July 2004, 12(4). P. 510 – 516.
8. Paul Pounds, Robert Mahony, Peter Corke, Modelling and Control of a Quad-Rotor Robot, Canberra, Australian National University, 2008, 10 p.
9. Dierks T., Jagannathan S., Neural Network Control and Wireless Sensor Network-based Localization of Quadrotor UAV Formations. Aerial Vehicles. 2009. P. 601-620.
10. Munoz R. S. M., Rossi C., Cruz A. B., Modelling and Identification of Flight Dynamics in Mini-Helicopters Using Neural Networks. Aerial Vehicles. 2009. P. 287-312.
11. Lavi B., An Adaptive Neuro PID for Controlling the Altitude of quadcopter Robot. International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics. Poland. Volume: 18th. 2014. P. 662-665.

## Оглавление

Введение. Состояние проблемы .....	3
1. Ограничения на пространство возможных движений .....	4
1.1. Описание модели.....	4
1.2. Ограничения на пространство возможных траекторий для общей задачи .....	7
1.3. Постановка задачи .....	8
2. Решение обратной задачи.....	8
2.1. Общий случай.....	8
2.2. Движение квадрокоптера в вертикальной плоскости. Движение по окружности .....	9
2.3. Движение квадрокоптера в вертикальной плоскости. «Горка» .....	12
2.4. Движение квадрокоптера в горизонтальной плоскости. Полёт по окружности .....	13
2.5. Пространственные траектории. Движение квадрокоптера по винтовой линии .....	15
Заключение.....	17
Библиографический список.....	18
Оглавление .....	19