



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Вашковьяк М.А.

О компланарном
интегрируемом случае
двукратно-осредненной
задачи Хилла с учетом
сжатия центрального тела

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Вашковьяк М.А. О компланарном интегрируемом случае двукратно-осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центрального тела // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 20. 32 с.
doi:[10.20948/prepr-2017-20](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-20)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-20>

Публикации по материалам препринта

М.А. Вашковьяк, О компланарном интегрируемом случае двукратно-осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центрального тела. Это препринт Произведения, принятого для публикации в «Астрономическом вестнике» @ 2018 г. М.А.Вашковьяк.
(M.A. Vashkov'yak, On coplanar integrable case of double-averaged Hill's problem taking into account the oblateness of central body. This a preprint of the Work accepted for publication in "Solar System Research" © Pleiades Publishing, Inc., 2018)
URL: <http://pleiades.online/>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.А. Вашковьяк

**О компланарном интегрируемом случае
двукратно-осредненной задачи Хилла
с учетом сжатия центрального тела**

Москва — 2017

Вашковьяк М.А.

О компланарном интегрируемом случае двукратно-осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центрального тела

Рассматривается двукратно-осредненная задача Хилла с учетом сжатия центральной планеты в случае, когда ее экваториальная плоскость совпадает с плоскостью орбитального движения относительно возмущающего тела. Качественное исследование этого так называемого компланарного интегрируемого случая было начато И. Козаи и продолжено М.Л. Лидовым и М.В. Ярской. Однако в силу сложности интегралов строгого аналитического решения задачи получить не удастся. В настоящей работе получены некоторые количественные характеристики эволюции и предложено приближенное конструктивно-аналитическое решение эволюционной системы в виде явных зависимостей элементов спутниковой орбиты от времени. Оценка методической точности для ряда орбит лунных спутников получена путем сравнения с численным решением эволюционной системы.

Ключевые слова: спутниковые орбиты, вековые возмущения.

Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak

On coplanar integrable case of double-averaged Hill's problem taking into account the oblateness of central body

Double-averaged Hill's problem taking into account the oblateness of central planet is considering in the case, when its equatorial plane coincides with the plane of orbital motion relatively perturbing body. A qualitative investigation of this so named coplanar integrable case was begun by Y. Kozai and was prolonged by M.L. Lidov and M.V. Yarskaya. However, it is not possible to get strict analytical solution of this problem because the integrals are complicated. In present work some quantitative evolution's characteristics are got and approximate constructive-analytical solution of the evolutionary system is offered as obvious dependences of satellite orbital elements versus time. The estimation of methodical accuracy is got by comparing to the numerical solution of the evolutionary system for row lunar satellite orbits.

Key words: satellite orbits, secular perturbations.

1. Введение и постановка задачи

В настоящей работе рассматривается один из известных интегрируемых в квадратурах случаев двукратно-осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Его качественно-геометрическое исследование с компьютерным построением семейств фазовых траекторий выполнено в работе (Kozai, 1963) в применении к задаче об эволюции орбит искусственных спутников Луны. Для более широкого допустимого диапазона значений параметров задачи исследование (этого и других интегрируемых случаев) продолжено и развито в работах (Лидов, Ярская, 1974; Lidov, 1974). В данной публикации мы будем неоднократно обращаться к вышеуказанным работам и существенно их использовать.

Несмотря на то что рассматриваемая задача интегрируема в квадратурах, ввиду сложности не удастся выполнить их обращение и получить строгое аналитическое решение даже в известных специальных функциях.

В данной работе, наряду с вычислением некоторых количественных характеристик эволюции, предложен метод построения приближенного конструктивно-аналитического решения эволюционной системы дифференциальных уравнений, описывающих изменение средних элементов спутниковой орбиты со временем. Метод, уже использованный в работе (Вашковьяк, 2017), предусматривает аппроксимацию иррациональной части подынтегральной функции, приводящую к эллиптическим интегралам, обращение которых позволяет получить решение в эллиптических функциях. Для оценки методической точности используется сравнение с численным решением как модельной, так и более полной (неинтегрируемой) эволюционной системы, в которой учитывается наклон орбиты возмущающей точки к экваториальной плоскости центрального тела и прецессия этой орбиты. Сравнительные расчеты выполнены для ряда орбит лунных спутников, возмущаемых притяжением Земли и в меньшей степени – Солнца.

Основу исследования рассматриваемого интегрируемого случая составляют эволюционные уравнения в элементах спутниковой орбиты, осредненные по всем быстрым переменным – средним долготам спутника и возмущающих тел. Эти уравнения приведены в работе (Лидов, Ярская, 1974). С использованием незначительно измененных элементов и независимой переменной эволюционная система принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\tau} &= 10e \sin^2 i \sqrt{1-e^2} \sin 2\omega, & \frac{di}{d\tau} &= -10e^2 \sin i \cos i (1-e^2)^{-1/2} \sin 2\omega, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= 2(1-e^2)^{-1/2} \left[e^2 - 1 + 5\cos^2 i + 5(\sin^2 i - e^2) \cos 2\omega \right] + 4\gamma (1-e^2)^{-2} (5\cos^2 i - 1), & (1) \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= 2\cos i \left[(1-e^2)^{-1/2} (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2) - 4\gamma (1-e^2)^{-2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь i , ω , Ω – обозначения угловых экваториальных элементов кеплеровской спутниковой орбиты, а постоянный параметр γ и безразмерная независимая переменная τ даются формулами

$$\gamma = -\frac{3}{16\beta} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 c_{20}, \quad \tau = \beta n (t - t_0), \quad \beta = \frac{3a^3}{16\mu} \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{a_j^3 (1 - e_j^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

В формулах (2) введены следующие обозначения: μ, μ_j – произведения гравитационной постоянной на массы соответственно центральной планеты и j -й из J возмущающих точек; a_0, a, a_j, e_j – соответственно: средний экваториальный радиус планеты, большая полуось орбиты спутника ($a = \text{const}$ в осредненной модели задачи), большая полуось орбиты j -й возмущающей точки и эксцентриситет этой орбиты; c_{20} – коэффициент при второй зональной гармонике гравитационного поля планеты; $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ – среднее движение спутника; t_0 и t – начальный и текущий момент времени соответственно. Эволюционные уравнения (1) взяты из работы (Вашковьяк, 2017), в которой построено их конструктивно-аналитическое решение для специального случая задачи – полярных орбит $\left(i = 90^\circ, \Omega = \Omega_0, \frac{di}{d\tau} = \frac{d\Omega}{d\tau} = 0 \right)$ – и приведены методические примеры его использования.

Для общего случая, когда $i \neq 90^\circ$ и $\Omega \neq \text{const}$, первые интегралы эволюционной системы (1) имеют вид (Лидов, Ярская, 1974):

$$(1 - e^2) \cos^2 i = c_1, \quad e^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega \right) + \frac{2}{5} \gamma (1 - e^2)^{-3/2} \left(\cos^2 i - \frac{1}{3} \right) = c_2. \quad (3)$$

С использованием этих интегралов долгота восходящего узла Ω , не входящая в правые части уравнений (1), может быть найдена по нижеследующей формуле с помощью вычисления интеграла с переменным верхним пределом

$$\Omega(\tau) = \Omega_0 - 4 \text{sign}(\cos i_0) \sqrt{c_1} \left\{ \tau + \int_0^\tau \psi(v) dv \right\},$$

$$\psi(v) = \frac{2e^2(v) - 5c_2 + \frac{4}{3} \gamma [1 - e^2(v)]^{-3/2}}{1 - c_1 - e^2(v)} \quad (4)$$

после нахождения зависимости $e^2(v)$. Исключение наклона i позволяет свести эволюционную систему к двум уравнениям для $z = e^2$ и ω

$$\frac{dz}{d\tau} = 20z(1-z)^{-1/2} (1 - c_1 - z) \sin 2\omega,$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = 4(1-z)^{-3/2} \left\{ 2(1-z)^2 - 5 \left[(1-z)^2 - c_1 \right] \sin^2 \omega + \gamma (1-z)^{-3/2} (z - 1 + 5c_1) \right\}. \quad (5)$$

Дальнейшее исключение ω из первого уравнения (5) с помощью интеграла

$$c_2 = z \left(\frac{2}{5} - \frac{1-c_1-z}{1-z} \sin^2 \omega \right) + \frac{2}{5} \gamma (1-z)^{-3/2} \left(\frac{c_1}{1-z} - \frac{1}{3} \right) \quad (6)$$

приводит к рассмотрению лишь одного уравнения для квадрата эксцентриситета z при различных допустимых значениях постоянных c_1 и c_2 .

Таким образом, задача нахождения общего решения эволюционной системы (1), зависящего от четырех произвольных постоянных $z_0 = e_0^2$, i_0 , ω_0 , Ω_0 , сводится прежде всего к обращению квадратуры

$$\tau = \frac{\text{sign}(\sin 2\omega)}{8\sqrt{6}} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta, \gamma, c_1, c_2)}}. \quad (7)$$

Здесь функции

$$\begin{aligned} f(z, \gamma, c_1, c_2) &= f_1(z, \gamma, c_1, c_2) f_2(z, \gamma, c_1, c_2), \\ f_1(z, \gamma, c_1, c_2) &= 5c_2 / 3 + 2\gamma(1-z-3c_1)(1-z)^{-3/2} / 9 + [1-5(c_1+c_2)/3]z - z^2, \\ f_2(z, \gamma, c_1, c_2) &= z - 5c_2 / 2 - \gamma(1-z-3c_1)(1-z)^{-5/2} / 3, \end{aligned} \quad (8)$$

кроме аргумента z , зависят еще от трех констант: параметра задачи γ и постоянных интегрирования c_1 , c_2 .

После обращения квадратуры (7) зависимости от времени наклонения i и аргумента широты перицентра ω определяются из интегралов (3), причем, в силу симметрии, достаточно получить зависимость $\omega(\tau)$ лишь для сегмента $0 \leq \omega \leq 90^\circ$. Для полного решения задачи, кроме того, необходимо нахождение зависимости $\Omega(\tau)$ путем вычисления интеграла в формуле (4).

Целью данной работы является построение на основе качественных особенностей орбитальной эволюции приближенного конструктивно-аналитического решения эволюционной системы в кеплеровских элементах с их произвольными начальными значениями для случая положительных значений параметра γ или $c_{20} < 0$ (соответствующего большинству из известных астрономических объектов – сжатых у полюсов реально существующих планет и их спутников). Кроме того, будут получены и количественные характеристики эволюции некоторых специальных лунных спутниковых орбит.

2. Качественные особенности эволюции спутниковых орбит

Результаты исследования рассматриваемого интегрируемого случая содержатся в уже упоминавшихся работах (Kozai, 1963; Лидов, Ярская, 1974; Lidov, 1974), где приведены эволюционные уравнения, выражения для первых интегралов, выявлены условия существования особых точек, описаны их типы и приведена качественная картина поведения интегральных кривых. Для большей связности дальнейшего изложения и облегчения восприятия в этом и следующем разделе будет воспроизведен ряд качественных результатов этих работ, а также несколько аналогов формул и графических изображений, независимо полученных здесь в несколько других переменных и параметрах, которые уже использовались в наших прежних статьях.

Постоянные c_1 и c_2 в формулах (3) определяются начальными значениями $z_0 = e_0^2$, i_0 , ω_0 и, конечно, параметром γ

$$c_1 = (1 - z_0) \cos^2 i_0, \quad c_2 = z_0 \left(\frac{2}{5} - \frac{1 - c_1 - z_0}{1 - z_0} \sin^2 \omega_0 \right) + \frac{2}{5} \gamma (1 - z_0)^{-3/2} \left(\frac{c_1}{1 - z_0} - \frac{1}{3} \right), \quad (9)$$

причем во второй из этих формул имевшаяся зависимость c_2 от i_0 заменена согласно интегралу c_1 .

В плоскости (ω, z) или (ω, e) для фиксированных значений γ и c_1 эволюция орбит описывается семейством фазовых траекторий, отвечающих различным значениям постоянной интеграла c_2 . Качественная структура таких семейств существенно зависит от того, какой области плоскости (γ, c_1) принадлежит точка с конкретными значениями указанных параметров задачи. Границами этих областей служат некоторые кривые линии $c_1^{(m)}$, которые для $m = 1, 2, 3, 4$ определяются числом и расположением особых стационарных точек (или состояний равновесия) системы (5), а также расположением сепаратрис (интегральных кривых, проходящих через седловые особые точки):

$$c_1^{(1)} = c_1^{(1)}(\gamma) = \frac{1}{7} \left(\frac{\gamma}{7} \right)^{2/5}, \quad c_1^{(2)} = c_1^{(2)}(\gamma) = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{\gamma} \right), \quad c_1^{(3)} = c_1^{(3)}(\gamma) = \frac{3 + \gamma}{5(1 + \gamma)}, \quad (10)$$

а для зависимости $c_1^{(4)}$ от γ может быть получено ее y -параметрическое представление:

$$c_1^{(4)}(y) = \frac{y^2(2y^5 - 5y^2 + 3)}{3(2y^7 - 7y^2 + 5)}, \quad \gamma^{(4)}(y) = \frac{3y^3(2y^7 - 7y^2 + 5)}{3y^5 - 5y^3 + 2}, \quad (11)$$

причем $0 \leq y \leq 1$, $c_1^{(4)}(0) = \gamma^{(4)}(0) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 1} c_1^{(4)}(y) = 1/7$, $\lim_{y \rightarrow 1} \gamma^{(4)}(y) = 7$.

Границами рассматриваемой прямоугольной области фазовой плоскости (ω, e) служат прямые линии: $\omega = 0$, $\omega = 90^\circ$, $e = 0$, $e = (1 - c_1)^{1/2}$, а особые точки (ω, e^*) , соответствующие $\sin 2\omega = 0$ и $d\omega/d\tau = 0$, принадлежат вертикальным границам этой области, где $de/d\tau = 0$.

2.1. Стационарные решения системы (5)

При $\omega = 0$ или 90° из второго уравнения (5) следуют условия для нахождения стационарного значения квадрата эксцентриситета $z^* = e^{*2}$ или алгебраические уравнения относительно величины $\eta = (1 - z^*)^{1/2}$.

При $\omega = 0$ имеем уравнение

$$\eta^7 - \frac{\gamma}{2}(\eta^2 - 5c_1) = 0. \quad (12)$$

Исследование этого уравнения с применением теоремы Декарта показывает, что оно может иметь либо один, либо два положительных корня, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \eta < 1, \quad (13)$$

в зависимости от значений γ и c_1 .

Два корня из диапазона (13) существуют лишь при выполнении неравенств

$$0 < \gamma < 2, \quad 0 \leq c_1 \leq c_1^{(1)}(\gamma) \quad (14)$$

и
$$2 < \gamma < 7, \quad c_1^{(2)}(\gamma) \leq c_1 \leq c_1^{(1)}(\gamma). \quad (15)$$

При выполнении неравенств

$$\gamma > 2, \quad 0 \leq c_1 \leq c_1^{(2)}(\gamma) \quad (16)$$

такой корень один, а при

$$\gamma < 2 \text{ и } c_1 \geq c_1^{(1)}(\gamma) \quad (17)$$

корней из диапазона (13) не существует вовсе. В областях плоскости параметров (γ, c_1) , определяемых неравенствами (14)-(17), численным способом могут быть получены значения корней η уравнения (12), а затем найдены и стационарные значения эксцентриситета $e^* = (1 - \eta^2)^{1/2}$.

При $\omega = 90^\circ$ имеем уравнение

$$3\eta^7 - 5c_1\eta^3 + \gamma\eta^2 - 5c_1\gamma = 0. \quad (18)$$

Исследование уравнения (18) показывает, что оно может иметь либо один, либо три положительных корня, удовлетворяющих неравенствам (13) в зависимости от значений γ и c_1 . Один корень существует при любом γ и при выполнении неравенств

$$0 \leq c_1 \leq c_1^{(3)}(\gamma), \quad (19)$$

а условия существования трех корней в дальнейшем будут описаны особо.

Замечание: Уравнения (10)-(12), (18), неравенства (14)-(17) в других обозначениях приведены в работе (Kozai, 1963), в которой

$$\alpha^{(K)} = c_1^{1/2}, \quad \gamma^{(K)} = 0.5\gamma, \quad (20)$$

а также в работе (Лидов, Ярская, 1974), где

$$\alpha^{(L)} = c_1^{1/4}, \quad \gamma^{(L)} = -0.4\gamma c_1^{-5/4}. \quad (21)$$

На рис. 1 в плоскости используемых здесь параметров (γ, c_1) показаны зависимости (10), (11) которые для $m = 1, 2, 3, 4$ являются аналогами соответствующих кривых $\gamma_5^{(L)}(\alpha)$, $\gamma_1^{(L)}(\alpha)$, $\gamma_2^{(L)}(\alpha)$ и $\gamma_8^{(L)}$. Они являются границами областей 1 – 5 (обозначенных на этом рисунке в кружках) с различной качественной структурой семейств траекторий в фазовой плоскости (ω, e) . Здесь и далее используется нумерация областей плоскости $(\alpha^{(L)}, \gamma^{(L)})$, введенная в работе (Лидов, Ярская, 1974).

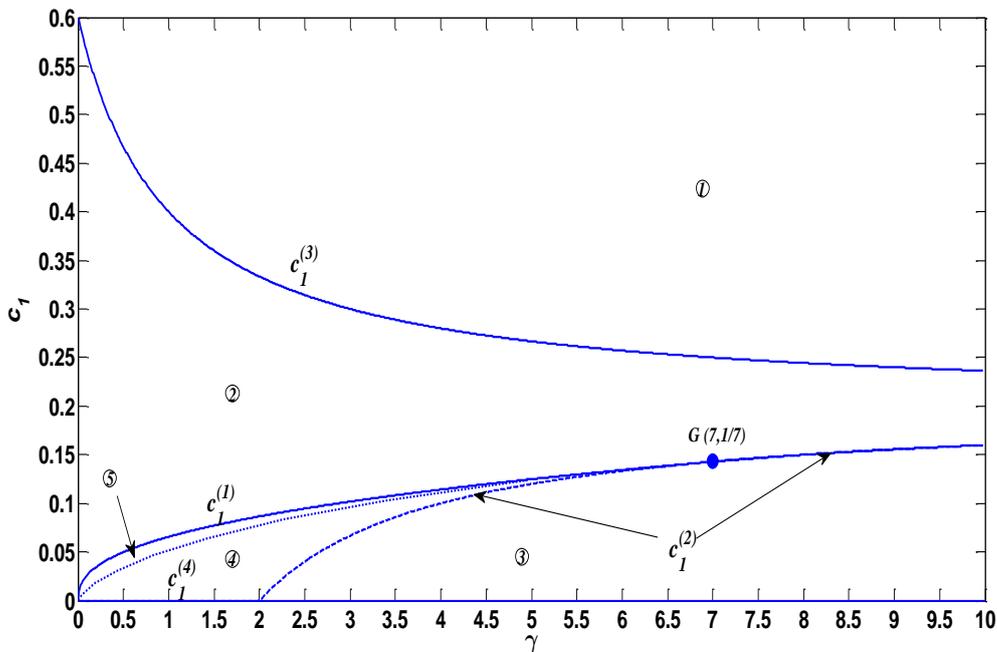


Рис. 1. Области 1 – 5 с различной качественной структурой семейств фазовых траекторий и граничные кривые $c_1^{(m)}(\gamma)$ для $m = 1, 2, 3, 4$

Самая верхняя сплошная кривая $c_1^{(3)}(\gamma)$ при $\gamma \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к горизонтальной прямой $c_1 = 0.2$. Самая нижняя кривая $c_1^{(2)}(\gamma)$ для $2 < \gamma < 7$ показана штриховой линией, а для $\gamma > 7$ – сплошной, асимптотически приближающейся к той же прямой $c_1 = 0.2$. Сплошная кривая $c_1^{(1)}(\gamma)$ и пунктирная кривая $c_1^{(4)}(\gamma)$, исходящие из начала координат, оканчиваются в точке G с координатами $(\gamma = 7, c_1 = 1/7)$ и касаются в этой точке кривой $c_1^{(2)}(\gamma)$. Отметим, что рис.1, естественно, качественно подобен рисунку 2 работы (Kozai, 1963), изображенному с использованием обозначений (20).

Возвращаясь к уравнению (18), укажем, что, как следует из анализа, выполненного в работе (Лидов, Ярская, 1974), три корня этого уравнения из диапазона (13) и, следовательно, три особые точки существуют лишь в небольшой области значений параметров $\alpha^{(L)}, \gamma^{(L)}$. На рис. 3 указанной работы она ограничена отрезком прямой $\alpha^{(L)} = 0$ и кривыми $\gamma_6'^{(L)}, \gamma_6''^{(L)}$. В плоскости же используемых здесь параметров (γ, c_1) границы этой области определяются у-параметрическими зависимостями

$$c_1^{(5,6)}(y) = y^2(1 + 21y^2 \pm \sqrt{d})/30, \quad \gamma^{(5,6)}(y) = y^3(1 - 21y^2 \pm \sqrt{d})/4, \quad (22)$$

где $d = 1 - 138y^2 + 441y^4$, а в точке излома $y^2 = 3^{-1} \cdot 7^{-2}$. Графическое построение этих границ показывает, что данная область, где существуют три положительных корня, имеет вид очень узкой «косы», которая по форме и ориентации похожа на область 5. Однако расстояние от начала координат $(\gamma = 0, c_1 = 0)$ до наиболее удаленной точки этой области с координатами $(\gamma = 2 \cdot 3^{3/2} \cdot 7^{-4}, c_1 = 3^{-2} \cdot 7^{-3})$ составляет всего примерно $3 \cdot 10^{-4}$. В работе (Kozai, 1963) диапазон очень малых значений γ не рассматривался. Это оправдано тем, что область с границами, описываемыми уравнениями (22), может представлять лишь формально-теоретический интерес, поскольку методическая погрешность осредненной модельной задачи имеет порядок, заведомо превосходящий величину 10^{-4} . В принятом далее естественном масштабе параметров (γ, c_1) на рис. 1 эта область, естественно, неразличима. Тем не менее, нелинейное преобразование (21) («растягивающее» окрестность начала координат), предложенное в работе (Лидов, Ярская, 1974), позволило ее авторам обнаружить эту микроскопическую по размерам область, рассмотрев ее как бы через «увеличительное стекло». Более того, в указанной работе были выявлены и составляющие эту область три специфические подобласти (отмеченные в ней номерами 6 ÷ 8), которые, впрочем, здесь рассматриваться не будут ввиду их очень малого размера и значимости.

Во всех областях, где существуют стационарные особые точки (т.е., кроме области I), экстремальные значения эксцентриситета $e^* = (1 - \eta^2)^{1/2}$ могут быть найдены решением алгебраических уравнений (12) и (18) для

фиксированных значений γ и c_1 . Для приближенного нахождения координат равновесных точек, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, в данной работе построены семейства изолиний $e^* = \text{const}$ в плоскости этих параметров. Изолинии с нанесенными на них значениями e^* показаны на рис. 2 и 3 для $\omega = 0$ и $\omega = 90^\circ$ соответственно.

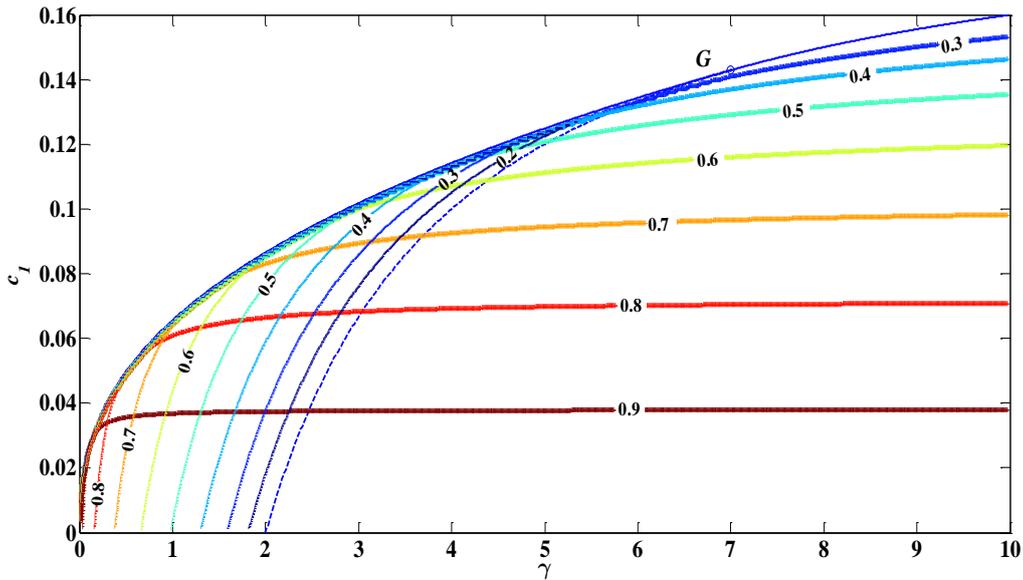


Рис. 2. Равновесные значения e^* при $\omega = 0$
(тонкие линии – устойчивые точки, жирные – неустойчивые)

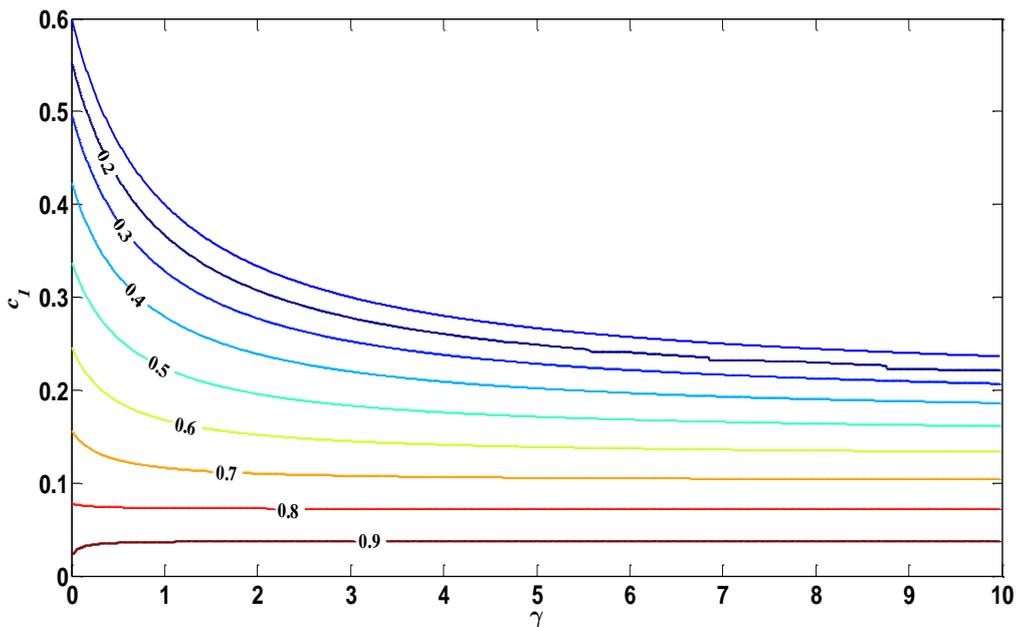


Рис. 3. Равновесные значения e^* при $\omega = 90^\circ$ для устойчивых точек

Более простым путем (без привлечения интеграла c_1) связь между равновесными значениями e^* , i^* и параметра γ может быть получена из условий $d\omega/d\tau=0$ при $\omega = 0$ и 90° . В работе (Вашковьяк, 1996) были построены графические зависимости – изолинии $i^* = \text{const}$ в плоскости (e^*, γ) и найдены условия устойчивости равновесных точек в линейном приближении. Другой подход к определению равновесных или «замороженных» орбит с использованием осредненных векторных уравнений возмущенного движения предложен в статье (Circi et al., 2017). В этой работе, в частности, найдены значения кеплеровских элементов ряда почти круговых и эллиптических орбит ИСЛ с $\omega_0 = 0, 180^\circ$.

2.2. Типичные структуры семейств интегральных кривых и диапазоны изменения эксцентриситета

В данном разделе описывается фазовый портрет задачи в плоскости кеплеровских элементов, в отличие от переменных $[2\omega, \eta^2 = 1 - e^2]$ и $[\omega, x = c_1^{-1/4} (1 - e^2)^{1/2}]$, используемых, соответственно, в работах (Kozai, 1963) и (Лидов, Ярская, 1974). Для каждой из занумерованных областей **1 – 5** приводятся типичные структуры семейств интегральных кривых. Эти кривые построены в фазовой плоскости (ω, e) , вместо (ω, x) , для выбранного фиксированного значения $\gamma = 3$ и различных значений c_1 . Стрелки на траекториях для различных постоянных интеграла c_2 показывают направление движения фазовых точек.

Качественный анализ эволюционной системы (5) показывает, что эксцентриситет спутниковой орбиты изменяется в ограниченных пределах

$$0 \leq e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \leq \sqrt{1 - c_1}, \quad (23)$$

а его экстремальные значения при любых γ и c_1 могут быть найдены численно как корни двух уравнений относительно величины $z = e^2$. Они следуют из формулы (6) при $\omega = 0$ и $\omega = 90^\circ$.

$$\text{При } \omega = 0 \text{ имеем } g_1(z) = z + \gamma \left[c_1 (1 - z)^{-5/2} - \frac{1}{3} (1 - z)^{-3/2} \right] - \frac{5}{2} c_2 = 0, \quad (24)$$

а при $\omega = 90^\circ$

$$g_2(z) = z - \frac{5}{3} c_1 z (1 - z)^{-1} - \frac{2}{3} \gamma \left[c_1 (1 - z)^{-5/2} - \frac{1}{3} (1 - z)^{-3/2} \right] + \frac{5}{3} c_2 = 0. \quad (25)$$

К сожалению, поскольку эти уравнения содержат более двух параметров (кроме γ и c_1 , присутствует и c_2), нет возможности построить семейства изолиний, аналогичные семействам $e^* = \text{const}$. Поэтому мы ограничимся менее

наглядным табличным представлением результатов лишь для выбранного, но достаточно типичного и информативного значения одного из параметров $\gamma = 3$. В последних строках нижеследующих таблиц 1 – 5 для различных c_1 , принадлежащих соответствующим областям рис. 1, и заданных начальных значений $e_0 = e_{\min}$ приводятся максимальные значения эксцентриситета $e_{\max} = z^{1/2}$. Они получены с помощью численного решения уравнений (24), (25), в которых постоянная c_2 определяется второй из формул (9) при $z_0 = e_0^2$. Кроме того, в таблицах приведены два начальных значения аргумента перицентра $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 = 90^\circ$ вместе с указанием о характере его изменения (C – циркуляция, L – либрация).

Область 1. Эта область отличается простейшей структурой семейства, отсутствием особых точек в фазовой плоскости и циркуляционным изменением (монотонным возрастанием) аргумента перицентра. На рис. 4 такое семейство показано для c_1 , почти равного, но все же чуть большего, чем $c_1^{(3)}(\gamma = 3)$. Именно поэтому как бы угадывается появление особой точки в его правом нижнем углу при незначительном уменьшении c_1 . Таким образом, кривая $c_1^{(3)}(\gamma)$ на рис. 1 отделяет область 1, в которой не существует ни одной стационарной точки фазовой плоскости (ω, e) , от остальных областей 2 – 5, где такие особые точки существуют. В данной области для большинства значений постоянной c_1 монотонное увеличение аргумента перицентра ω происходит с почти постоянной скоростью в силу того, что экстремальные значения эксцентриситета близки между собой и $e_{\max} \approx e_0$. И лишь вблизи границы этой области, где $c_1 \approx c_1^{(3)}$ и разность $e_{\max} - e_{\min}$ достаточно заметна (табл. 1), увеличение ω неравномерно по времени.

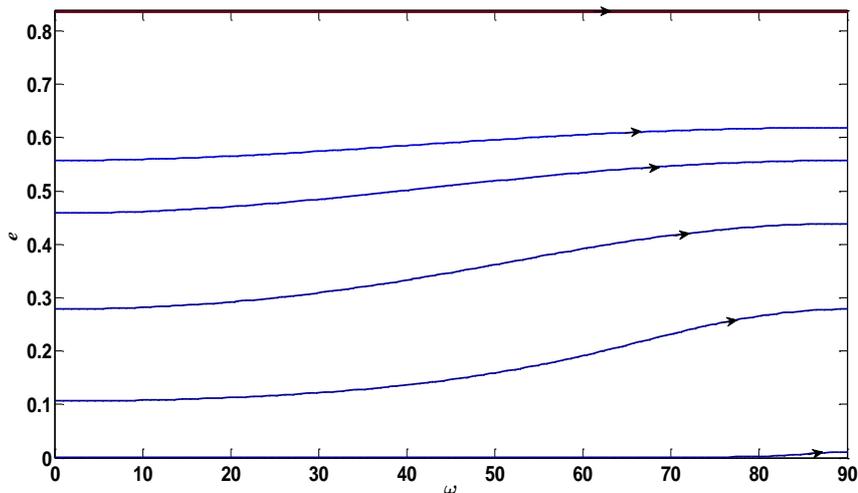


Рис. 4. Типичное семейство фазовых траекторий для области 1, ω - в градусах, $c_1 = 0.301 > c_1^{(3)}$

Экстремальные значения эксцентриситета для $c_1 = 0.301$

ω_0 , град	0	0	0	0	0	0	0	0
Изменение ω	C							
$e_0 = e_{\min}$	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800
e_{\max}	0.270	0.376	0.454	0.521	0.583	0.647	0.718	0.802

Область 2. Для данной области, так же как и для областей 3 – 5, на правой границе рассматриваемого прямоугольника ($\omega = 90^\circ$) существует единственная особая точка типа центр, а кроме нее, на нижней границе есть особая точка типа седло. Соответствующая структура показана на рис. 5 для области 2 ($c_1 = 0.11$). При дальнейшем уменьшении c_1 седловая точка перемещается в левый нижний угол. В данной области существование особых точек и сепаратрисы приводит к возможности сильного возрастания эксцентриситета даже изначально почти круговых орбит при любом значении ω_0 , а значения e_{\max} для $\gamma = 3$ оказываются близкими к 0.8 (табл. 2). В рассматриваемом компланарном случае эволюционной задачи этот известный эффект Лидова-Козаи (Лидов, 1961; Козаи, 1962) проявляется так же, как и при отсутствии сжатия в двукратно-осредненной задаче Хилла ($\gamma = 0$). Максимально возможное на сепаратрисе значение эксцентриситета e_s может быть найдено из очевидного условия равенства постоянной c_2 при $e = 0$ и в точке ($\omega = 90^\circ$, $e = e_s$). Оно представляет собой уравнение, аналогичное (18) и решаемое численно. В плоскости параметров задачи семейство изолиний $e_s(\gamma, c_1) = \text{const}$ будет иметь вид, очень похожий на рис. 3. Для данной области следует еще отметить возможность немонотонного увеличения аргумента перицентра в зоне его циркуляции при небольших начальных значениях эксцентриситета.

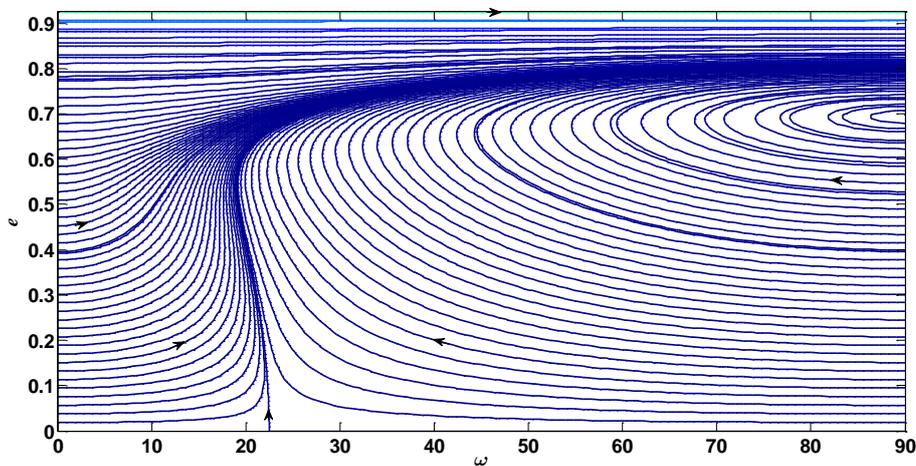
Рис. 5. То же самое, что и на рис. 4, но для области 2, $c_1^{(1)} < c_1 = 0.11 < c_1^{(3)}$

Табл. 2

Экстремальные значения эксцентриситета для $c_1 = 0.11$

ω_0 , град	0	0	0	0	90	90	90	90
Изменение ω	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>L</i>	<i>L</i>	<i>L</i>
$e_0 = e_{\min}$	0.050	0.300	0.500	0.800	0.050	0.300	0.400	0.600
e_{\max}	0.810	0.811	0.812	0.838	0.809	0.801	0.792	0.752

Область 3. Эта область отличается тем, что седловая точка расположена на левой границе прямоугольника ($\omega = 0$). Соответствующая структура показана на рис. 6 для области **3** ($c_1 = 0.06$). Здесь при умеренных значениях эксцентриситета в силу появления второй ветви сепаратрисы (отличной от $e_0 = 0$) направление изменения аргумента перицентра в циркуляционном движении изменилось на противоположное по сравнению с рис. 4. В данной области отчетливо проявляется эффект совместного действия двух рассматриваемых возмущающих факторов, а точнее – стабилизирующего влияния сжатия планеты на орбитальную эволюцию (в частности, на поведение эксцентриситета). Если бы оно гипотетически отсутствовало ($\gamma = 0$), то в двукратно-осредненной задаче Хилла при данном достаточно малом значении постоянной c_1 эволюция спутниковой орбиты приводила к сильному возрастанию эксцентриситета вплоть до значений, близких к единице. С принятым значением $\gamma = 3$ в области больших начальных эксцентриситетов (порядка 0.9) фазовые траектории на рис. 6 почти горизонтальны, а при небольших e_0 минимум эксцентриситета отвечает $\omega = 90^\circ$ (табл. 3).

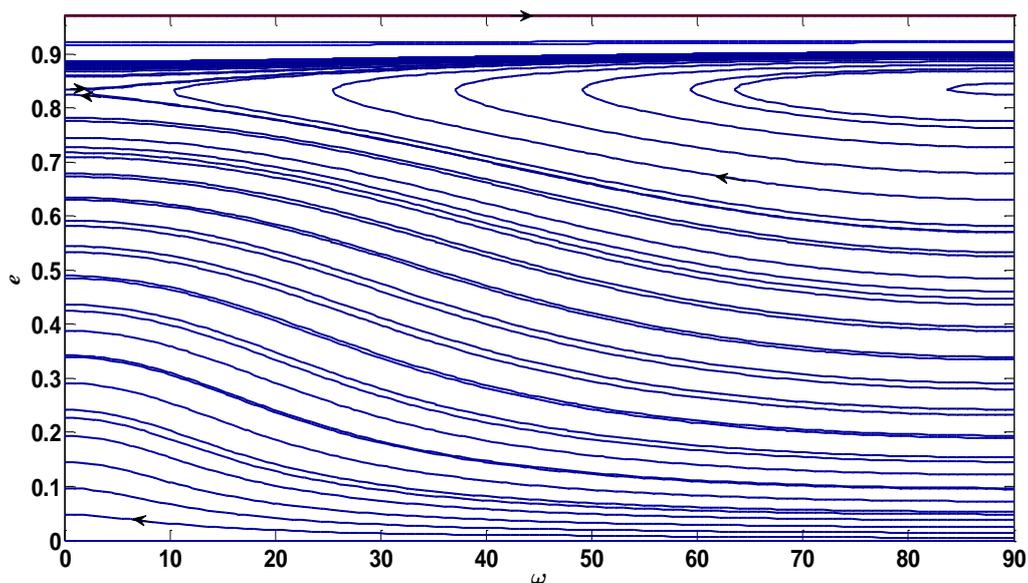
Рис. 6. То же самое, что и на рис. 4, но для области **3**, $c_1 = 0.06 > c_1^{(2)}$

Табл. 3

Экстремальные значения эксцентриситета для $c_1 = 0.06$

ω_0 , град	90	90	90	90	90	90	0	0
Изменение ω	<i>L</i>	<i>L</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
$e_0 = e_{\min}$	0.600	0.700	0.800	0.050	0.200	0.500	0.850	0.900
e_{\max}	0.893	0.884	0.860	0.232	0.497	0.756	0.895	0.910

Область 4. Для этой области характерно существование дополнительных особых точек: седловой – на нижней границе прямоугольника, и типа центра – на левой вертикальной границе. Соответствующая структура показана на рис. 7 для области **4** ($c_1 = 0.07$). В отличие от области **3**, здесь существуют траектории с либрационным изменением аргумента перицентра и в окрестности $\omega_0 = 0$ (третий числовой столбец табл. 4).

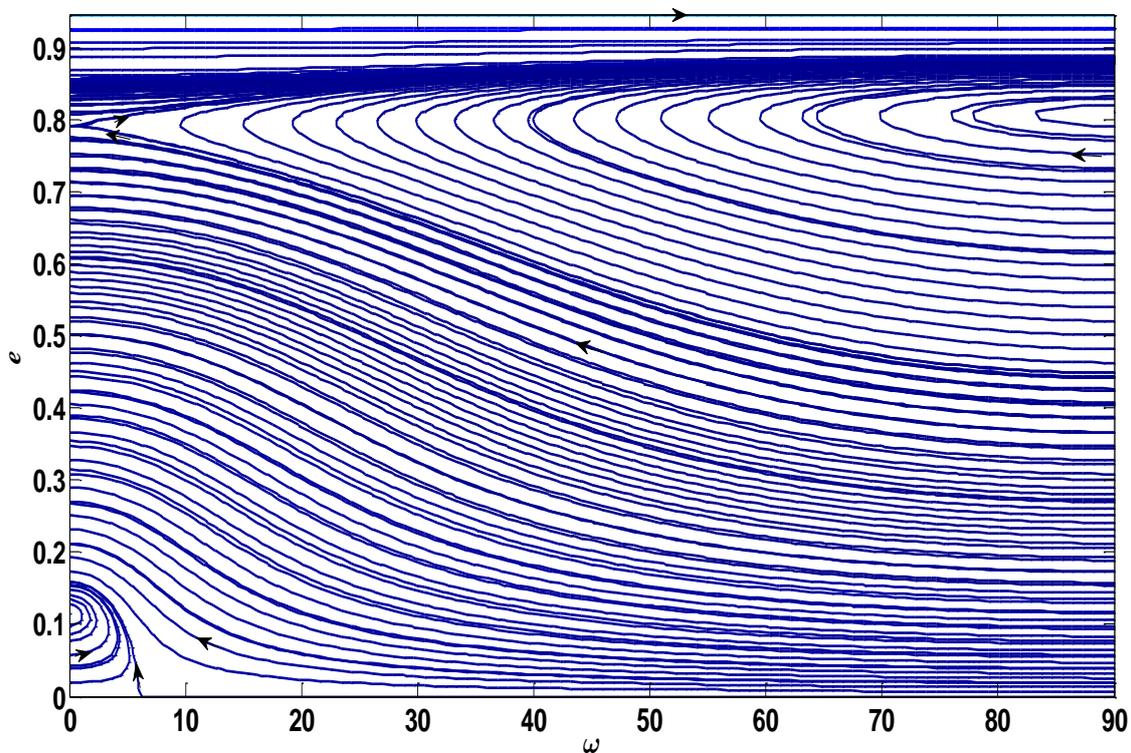


Рис. 7. То же самое, что и на рис. 4, но для области **4**, $c_1^{(2)}(3) < c_1 = 0.07 < c_1^{(4)}$

Экстремальные значения эксцентриситета для $c_1 = 0.07$

ω_0 , град	90	90	0	90	90	90	0	0
Изменение ω	<i>L</i>	<i>L</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
$e_0 = e_{\min}$	0.600	0.700	0.050	0.050	0.200	0.400	0.850	0.900
e_{\max}	0.869	0.856	0.152	0.296	0.534	0.725	0.884	0.907

Область 5. Эта область характеризуется особенностью, возникающей после слияния двух ветвей различных сепаратрис, ограничивающих области либрационного изменения ω и e . Соответствующая структура показана на рис. 8 для области 5 ($c_1 = 0.1$), а экстремальные значения эксцентриситета приведены в табл. 5.

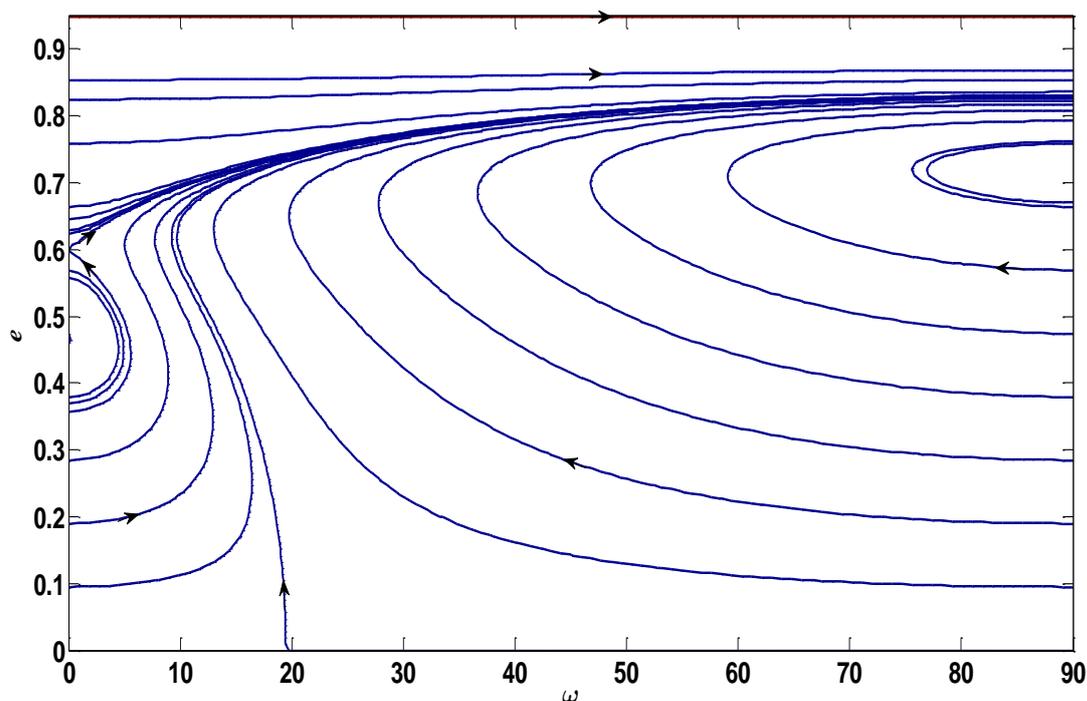


Рис. 8. То же самое, что и на рис. 4, но для области 5, $c_1^{(4)} < c_1 = 0.1 < c_1^{(1)}$

Так же как и в области 3, существует возможность немонотонного изменения аргумента перицентра в области его циркуляции, но равновесное значение эксцентриситета при $\omega_0 = 0$ заметно отличается от нуля. При этом, в отличие от области 4, соответствующие либрационные траектории отграничиваются сепаратрисой, пересекающей только левую вертикальную границу прямоугольника. Как и в области 2, появляется возможность сильного возрастания эксцентриситета изначально почти круговых орбит для любых значений аргумента перицентра.

Экстремальные значения эксцентриситета для $c_1 = 0.1$

ω_0 , град	90	90	90	0	0	0	0	0
Изменение ω	L	L	L	L	C	C	C	C
$e_0 = e_{\min}$	0.050	0.300	0.600	0.400	0.050	0.350	0.750	0.850
e_{\max}	0.829	0.823	0.786	0.534	0.829	0.830	0.835	0.867

Интересно заметить, что структуры, качественно подобные показанным на рис. 7 и 8, но с угловой фазовой переменной, отличной от аргумента перицентра, существуют и в другой осредненной задаче. Это плоская задача о вековой эволюции орбиты спутника-баллона при совместном влиянии земного сжатия и солнечного светового давления без учета эффекта земной тени и в модельном предположении о нулевом угле между плоскостями эклиптики и земного экватора (Krivov et al.).

3. Конструктивно-аналитическое решение эволюционной системы

В данной работе предлагается приближенный способ решения эволюционной системы (5). Методические особенности этого способа для случая $c_1 = 0$ описаны в работе (Вашковьяк, 2017). Здесь в общем случае задачи для связности изложения будет повторен ряд формул и некоторые вычислительные детали метода.

Для реального движения функция f в подынтегральном выражении (7) должна быть положительной. Как показывает качественный анализ системы, переменная z изменяется в ограниченных пределах $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$. Функция $f(z, \gamma, c_1, c_2)$ представляется в виде произведения некоторой функции $g(z, \gamma, c_1, c_2)$ на так называемое «ядро» $(z - z_{\min})(z_{\max} - z)$

$$f(z, \gamma, c_1, c_2) = g(z, \gamma, c_1, c_2)(z - z_{\min})(z_{\max} - z). \quad (26)$$

При заданных значениях аргумента z и параметров γ, c_1, c_2 функция $g(z, \gamma, c_1, c_2)$ может быть вычислена по известным строгим выражениям (8) и численно найденным экстремальным значениям z_{\min}, z_{\max} . Далее для приведения интеграла (7) к эллиптическому виду применяется аппроксимация функции $g(z)$ квадратичным полиномом

$$P(z) = p_1 z^2 + p_2 z + p_3 = p_1 (z - z_1)(z - z_2) \approx g(z). \quad (27)$$

Его коэффициенты p_1, p_2, p_3 находятся способом наименьших квадратов на отрезке $0 \leq z \leq z_{\max}$, а корни z_1, z_2 определяются простейшими формулами

$$z_1 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 + \sqrt{D}), \quad z_2 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 - \sqrt{D}), \quad D = p_2^2 - 4p_1p_3, \quad (28)$$

причем в реальном движении $P(z) > 0$.

Полином четвертой степени

$$Q(z) = P(z)(z - z_{\min})(z_{\max} - z) \approx f(z) \quad (29)$$

будет аппроксимирующим для функции $f(z)$ и представим в следующем виде

$$Q(z) = p_1(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z_4 - z), \quad (30)$$

где $z_3 = z_{\min}$, $z_4 = z_{\max}$.

Таким образом, при фиксированных значениях параметров задачи γ, c_1 и c_2 искомое аналитическое решение для его построения (конструирования) требует проведения ряда предварительных вычислений, как экстремальных значений эксцентриситета, так и коэффициентов аппроксимирующего полинома. После этого обращением квадратуры (7) находится общее решение задачи в виде зависимостей элементов e и ω от времени. Это обращение выполняется по-разному для $D > 0$ и $D < 0$, т.е. для различных областей значений параметров γ, c_1 и c_2 . Далее приводятся формулы для нахождения $e(\tau), i(\tau), \omega(\tau), \Omega(\tau)$ и некоторых промежуточных величин, полученные с использованием справочного руководства (Градштейн, Рыжик, 1962).

3.1. Зависимость эксцентриситета от времени для $D > 0$

Для корректности использования предлагаемого метода корни аппроксимирующего полинома $P(z)$ должны находиться вне отрезка $z_3 \leq z \leq z_4$, т.е. в рассматриваемом случае, когда все четыре корня полинома $P(z)$ действительны, они вместе с переменной z должны удовлетворять одному из неравенств:

$$z_2 < z_1 < z_3 \leq z \leq z_4 \quad \text{или} \quad z_3 \leq z \leq z_4 < z_2 < z_1 \quad \text{при} \quad p_1 > 0 \quad (31)$$

$$z_1 < z_3 \leq z \leq z_4 < z_2 \quad \text{при} \quad p_1 < 0, \quad (32)$$

а экстремальные значения z определяются очевидными формулами $z_3 = e_{\min}^2$, $z_4 = e_{\max}^2$. Отметим, что во всех приводимых далее численных примерах условия (31), (32) оказываются выполненными.

Зависимость эксцентриситета от τ определяется формулами

$$e^2(\tau) = \frac{z_1(z_4 - z_3)\operatorname{sn}^2 u - z_3(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_3)\operatorname{sn}^2 u - z_4 + z_1}, \quad k^2 = \frac{(z_4 - z_3)(z_1 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)},$$

$$u = 4\sqrt{6p_1(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}\tau + \operatorname{sign}(\sin 2\omega_0)F(\varphi_0, k^2),$$

$$\sin^2 \varphi_0 = \frac{(z_4 - z_1)(z_0 - z_3)}{(z_4 - z_3)(z_0 - z_1)}, \quad z_0 = e_0^2, \quad (33)$$

где $\operatorname{sn} u$ и $F(\varphi_0, k^2)$ – соответственно, эллиптический синус Якоби и неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k .

В диапазоне изменения переменной z модуль k остается меньшим единицы. Он обращается в нуль при $z_1 = z_2$ ($D = 0$) или при $z_3 = z_4$ (областью возможного изменения z является лишь равновесная точка $z = z^*$). Предельное движение по сепаратрисе реализуется при $z_1 = z_3$, когда k обращается в единицу. Выполненные детальные расчеты показали, что условия (31), (32) могут нарушаться при $c_1 < c_1^{(3)}$ для траекторий, расположенных вблизи сепаратрис. Поэтому корректное применение метода ограничивается интегральными кривыми, расположенными не слишком близко к этим (предельным) траекториям.

Зависимость от времени эксцентриситета является периодической функцией u (или переменных τ и t). В соответствующих переменных периоды изменения эксцентриситета определяются формулами

$$T_u = 2\mathbf{K}(k^2), \quad T_\tau = \frac{T_u}{4\sqrt{6p_1(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}}, \quad (34)$$

где $\mathbf{K}(k^2)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем k .

3.2. Зависимость эксцентриситета от времени для $D < 0$

В этом случае полином $P(z)$ имеет два действительных корня (z_3, z_4) и два комплексно-сопряженных

$$z_1 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 + j\sqrt{-D}), \quad z_2 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 - j\sqrt{-D}), \quad (j = \sqrt{-1}). \quad (35)$$

Зависимость эксцентриситета от τ определяется формулами

$$e^2(\tau) = \frac{pz_3 + qz_4 + (pz_3 - qz_4)\operatorname{cnu}}{p + q + (p - q)\operatorname{cnu}}, \quad \sigma^2 = \frac{(z_4 - z_3)^2 - (p - q)^2}{4pq},$$

$$u = 8\sqrt{6p_1pq}\tau + \operatorname{sign}(\sin 2\omega_0)F(\varphi_0, \sigma^2), \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{p(z_0 - z_3)}{q(z_4 - z_0)}, \quad (36)$$

$$p = \sqrt{(m_1 - z_4)^2 + m_2^2}, \quad q = \sqrt{(m_1 - z_3)^2 + m_2^2}, \quad m_1 = -\frac{p_2}{2p_1}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{-D}}{2p_1}.$$

Здесь cnu и $F(\varphi_0, \sigma^2)$ – соответственно, эллиптический косинус Якоби и неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем σ . В диапазоне изменения переменной z σ остается меньше единицы и обращается в нуль при $z_3 = z_4$ (при этом $p = q$). Зависимость от времени эксцентриситета также является периодической функцией u (или переменных τ и t). В соответствующих переменных периоды изменения эксцентриситета определяются формулами

$$T_u = 4\mathbf{K}(\sigma^2), \quad T_\tau = \frac{T_u}{8\sqrt{6p_1pq}}, \quad (37)$$

где $\mathbf{K}(\sigma^2)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем σ .

Укажем, что как при $D < 0$, так и при $D > 0$ период по времени дается формулой

$$T_t = \frac{T_\tau}{n\beta}. \quad (38)$$

3.3. Зависимости от времени наклонения, аргумента перицентра и долготы восходящего узла

Изменение со временем наклонения орбиты $i(\tau)$ и аргумента ее перицентра $\omega(\tau)$ определяется интегралами (3) и следующими выражениями

$$i(\tau) = \arccos \left(\operatorname{sign}(\cos i_0) \sqrt{\frac{c_1}{1 - e^2}} \right),$$

$$\omega(\tau) = \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{2(1 - e^2)}{5e^2(1 - c_1 - e^2)} \left\{ e^2 + \gamma(1 - e^2)^{-3/2} \left(\frac{c_1}{1 - e^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{5}{2}c_2 \right\}}, \quad (39)$$

в которых зависимость e^2 от τ определяется первыми из формул (33), (36), а текущее значение аргумента перицентра выбирается с использованием величины периода T_τ .

Зависимость $\Omega(\tau)$ дается формулами (4), в которые также следует подставить выражение для $e^2(\tau)$. В периодической подынтегральной функции $\psi(\nu) = \psi(\nu + T_\tau)$ зависимость e^2 от переменной интегрирования определяется формулами (33), (36). Заметим, что при $\gamma = 0$ квадратура (4) может быть выражена с помощью различных специальных функций (Вашковьяк, 1999; Kinoshita & Nakai, 1999). В общем же случае необходимым и полезным оказывается способ приближенного вычисления интеграла. В предположении циркуляционного изменения долготы узла и вводя обозначение

$$N = E(\tau / T_\tau) \quad (40)$$

как целой части отношения τ к T_τ можно получить следующую приближенную зависимость

$$\Omega(\tau) = \Omega_0 - 4\sqrt{c_1} \operatorname{sign}(\cos i_0) \left\{ \tau + N \int_0^{T_\tau} \psi(\nu) d\nu + \int_{NT_\tau}^{\tau} \psi(\nu) d\nu \right\}. \quad (41)$$

Здесь вычисление определенных интегралов производится лишь в небольших конечных пределах, меньших или равных периоду T_τ . Поэтому использование численного метода, в частности метода Гаусса, обеспечивает приемлемую для решения эволюционной задачи точность на интервалах времени, существенно превосходящих период колебаний эксцентриситета.

Предложенное приближенное решение эволюционной системы по сути является конструктивно-аналитическим или численно-аналитическим, поскольку оно требует предварительного нахождения экстремальных значений эксцентриситета эволюционирующей орбиты, а также предусматривает использование численного метода для нахождения интеграла в формуле (4).

4. Численные примеры корректного использования метода решения модельной интегрируемой задачи

В данном разделе проводится сопоставление результатов, полученных предлагаемым методом и методом численного интегрирования эволюционной системы (1). В качестве численных примеров рассмотрена эволюция ряда лунных спутниковых орбит под действием вековых возмущений, вызванных

притяжением Земли и Солнца, движущихся по круговым селеноцентрическим орбитам. Кроме того, предполагается, что плоскости экватора Луны, ее орбиты и эклиптики совпадают между собой, т.е. все представленные в данном разделе результаты относятся к модельной интегрируемой задаче.

На нижеследующих рисунках 9 – 13 показано изменение со временем кеплеровских элементов на интервалах 20 и 100 лет. Четыре фрагмента каждого рисунка отвечают зависимостям от времени эксцентриситета e , наклона i , аргумента перицентра $\omega \equiv (\text{omega})$ и долготы восходящего узла $\Omega \equiv (\text{OMEGA})$. Горизонтальные линии самых верхних фрагментов рисунков соответствуют критическому эксцентриситету. Сплошные кривые соответствуют численному интегрированию, а визуально совпадающие с ними штриховые – предлагаемому методу. На рис. 9 – 13 кривые разных типов оказываются графически неразличимыми. Это служит подтверждением как корректности полученных формул, так и хорошей степени аппроксимации функции f в подынтегральном выражении (7).

В каждой из областей **1 – 5** плоскости параметров (γ, c_1) для примеров выбраны типичные фазовые траектории с конкретными значениями постоянных c_1 и c_2 (или начальных элементов e_0, i_0, ω_0). Начальное значение Ω_0 , которое в интегрируемом случае задачи никак не влияет на изменение остальных элементов, принято равным 360° . Большая полуось орбит ИСЛ для областей **1 – 4** принята равной 2695 км ($\gamma = 3.017, e_{\text{crit}} = 0.355$), а для области **5** – равной 2436 км ($\gamma = 5.000, e_{\text{crit}} = 0.286$). В табл. 6 приведены используемые в расчетах начальные элементы, постоянные c_1, c_2 , а также тип изменения аргумента перицентра.

Табл. 6

Постоянные параметры и начальные элементы тестовых орбит ИСЛ

Область (1-5)	1	2	3	4	5
a , км	2695	2695	2695	2695	2436
c_1	0.301	0.250	0.060	0.070	0.124
e_0	0.300	0.300	0.080	0.050	0.266
i_0 , град	54.9	58.4	75.8	74.6	68.6
ω_0 , град	270	270	270	180	180
c_2	-0.0278	-0.111	-0.336	-0.318	-0.418
Изменение ω	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>L</i>

На рис. 9 показаны зависимости элементов от времени для варианта начальных данных, отвечающих области **1** ($c_1 > c_1^{(3)}, D < 0$).

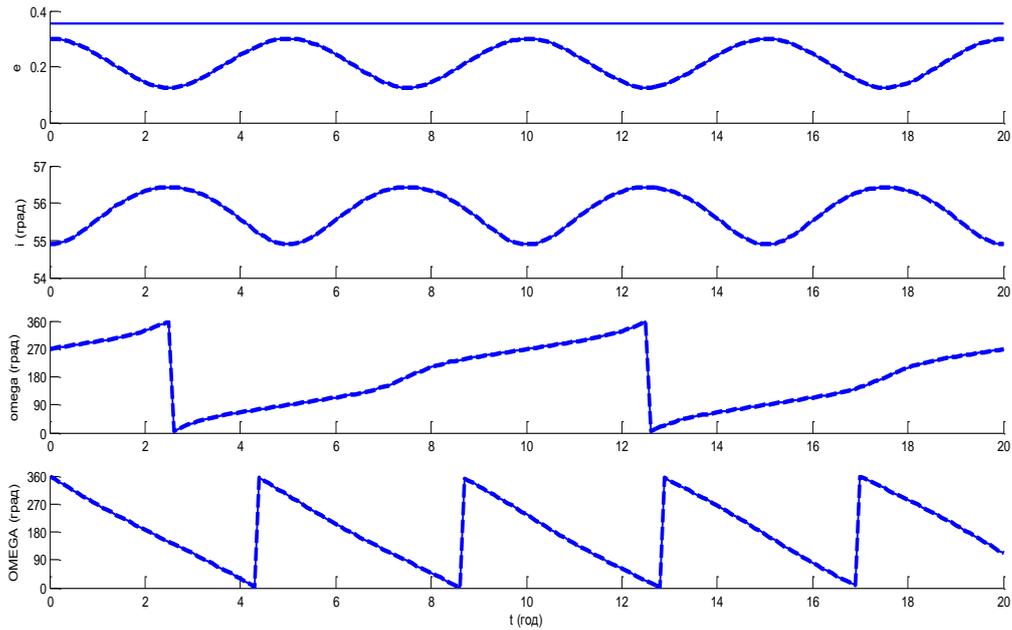


Рис. 9. Зависимости элементов от времени для значений параметров задачи из области **1**

Период циркуляции аргумента перицентра составляет примерно 10 лет и вдвое превышает одинаковые периоды изменения эксцентриситета и наклона. Обратное движение долготы узла происходит с периодом, равным 4.4 года.

На рис. 10 показаны зависимости элементов от времени для варианта начальных данных, отвечающих области **2** ($c_1^{(1)} < c_1 < c_1^{(3)}$, $D > 0$).

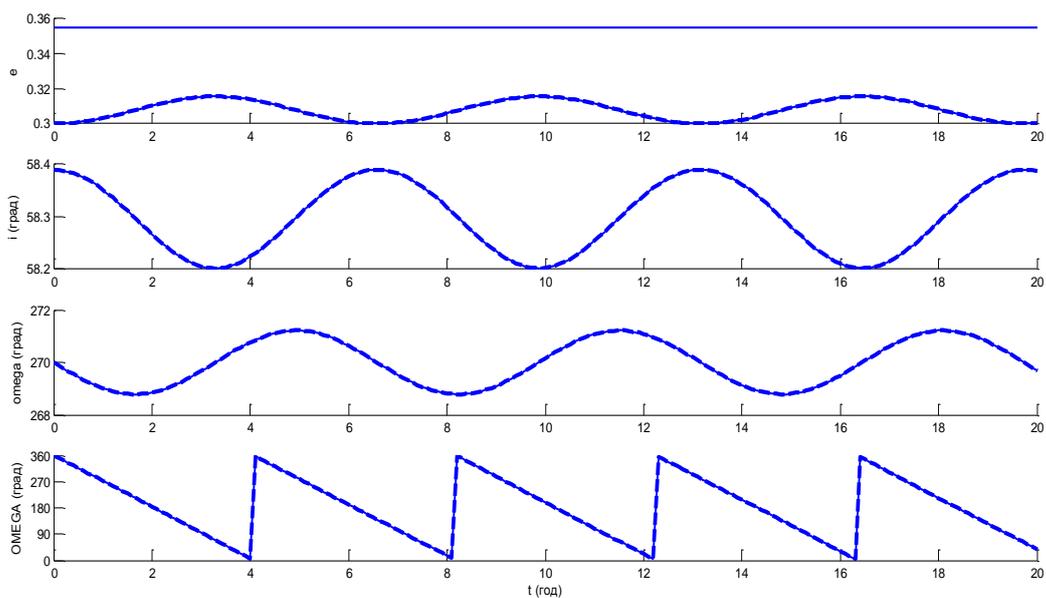


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но для области **2**

Амплитуда либрации аргумента перицентра относительно 270° составляет примерно 1° , а период либрации, равный 6.6 года, совпадает с периодами изменения эксцентриситета и наклона. Период изменения долготы узла на 360° составляет 4.1 года. Отметим, что в этом и следующих вариантах начальных данных дискриминант D положителен, т.е. в методе используются формулы, отличные от предыдущего варианта.

На рис. 11 показаны зависимости элементов от времени для варианта начальных данных, отвечающих области **3** ($0 < c_1 = 0.06 < c_1^{(2)}, D > 0$).

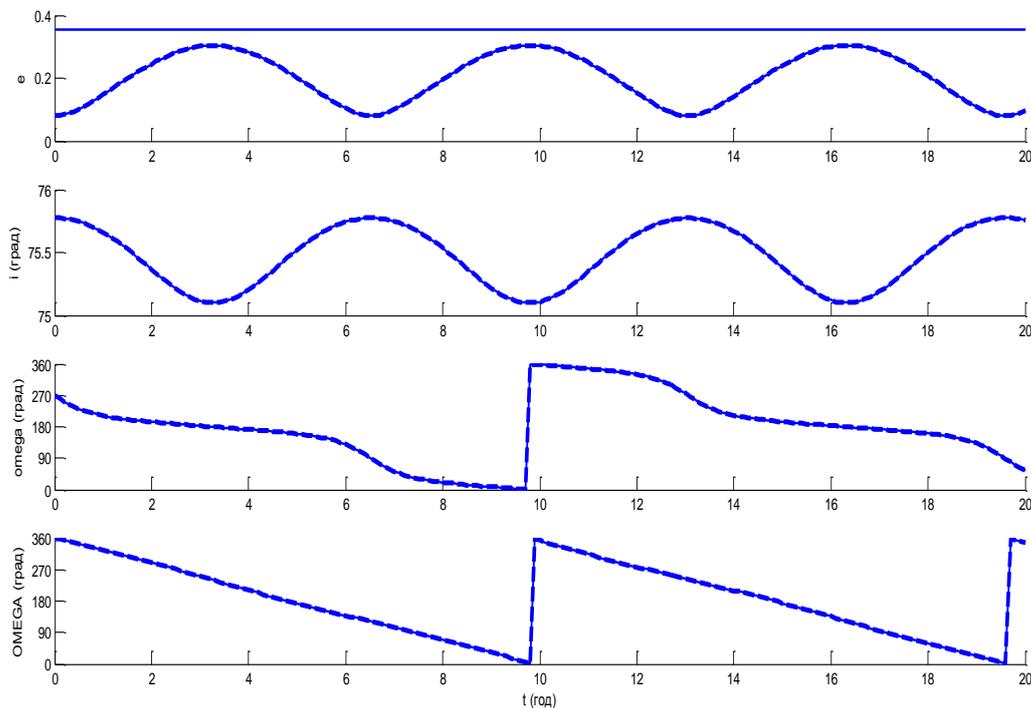


Рис. 11. То же, что и на рис. 9, но для области **3**

Период циркуляции аргумента перицентра составляет примерно 13.2 года и вдвое превышает период изменения эксцентриситета и наклона. Обратное движение долготы узла происходит с периодом, примерно равным 9.9 года. Заметим, что в области **3** изменение аргумента перицентра может происходить в противоположном направлении по сравнению с областью **1**, т.е. приводить к его уменьшению, которое и видно на рисунке 11.

На рис. 12 зависимости элементов от времени для варианта начальных данных, отвечающих области **4** ($c_1^{(2)} < c_1 = 0.07 < c_1^{(4)}, D > 0$), приведены на интервале времени в 100 лет. Это связано с существенно *большим* (примерно 35-летним) периодом изменения элементов e , i , ω . В данном примере амплитуда либрации аргумента перицентра относительно начального

значения 180° составляет примерно 4° , изменение долготы узла происходит примерно с 10-летним периодом.

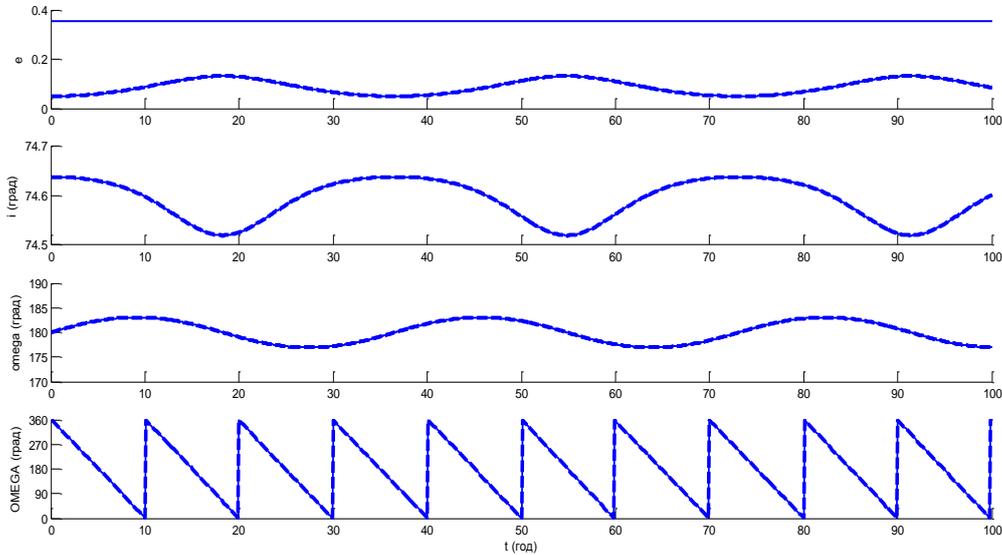


Рис. 12. То же, что и на рис. 9, но для области 4

На рис. 13 зависимости элементов от времени для варианта начальных данных, отвечающих области 5 ($c_1^{(4)} < c_1 < c_1^{(1)}$, $D > 0$), приведены на том же интервале времени в 100 лет.

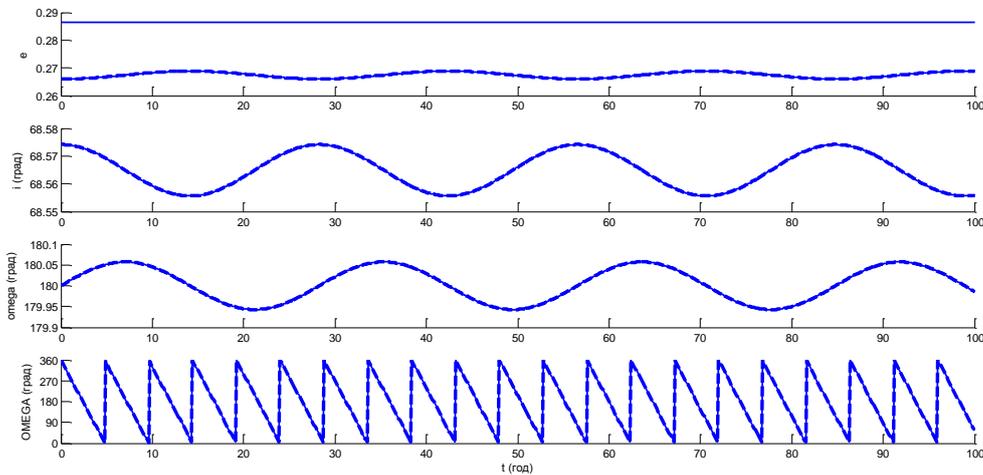


Рис. 13. То же самое, что и на рис. 9, но для области 5

Периоды изменения аргумента перигентра и долготы узла составляют примерно 28 и 5 лет, соответственно. Амплитуда либрации аргумента перигентра относительно значения 180° составляет сотые доли градуса. Это типичный пример квазиравновесной орбиты, которая обладает лишь заметной прецессией узла.

Все вышеприведенные примеры свидетельствуют о возможности построения в компланарном интегрируемом случае приближенного конструктивно-аналитического решения двукратно-осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Качественный анализ этого интегрируемого случая оказывается полезным при выборе начальных элементов орбит, обладающих специальными свойствами. Предложенное решение может быть использовано для множества начальных орбитальных элементов, исключаящую некоторую окрестность сепаратрис семейств интегральных кривых. В таких, иногда достаточно широких, окрестностях эксцентриситет значительно отклоняется от равновесного значения как для ω -либрационных, так и для ω -циркуляционных траекторий, а используемая в методе аппроксимация квадратичным полиномом оказывается некорректной.

5. О некомпланарной модели задачи

Конечно, представляет несомненный интерес рассмотрение более реальной физической модели, учитывающей постоянный угол I между плоскостями экватора центрального тела и орбитой возмущающей точки вместе с вековым изменением долготы ее узла Λ . Для случая обратного движения узла можно принять приближенную линейную зависимость от времени

$$\Lambda = \Lambda_0 - N_p(t - t_0). \quad (42)$$

Здесь $N_p = 2\pi/T_p$, T_p – постоянный период прецессии узла, а Λ_0 – начальное значение долготы восходящего узла орбиты возмущающей точки на экваторе центрального тела при $t = t_0$. В приближенном анализе эволюции орбит ИСЛ естественно принять в качестве наклона сумму углов наклона к эклиптике лунной орбиты и лунного экватора $I = 6^\circ.7$, а солнечными возмущениями, малыми по сравнению с земными, можно пренебречь. Для периода прецессии можно принять приближенное значение $T_p = 18.6$ года.

Эволюционная система, усложненная по сравнению с (1), определяется нижеследующими уравнениями (44)-(47), в правых частях которых введено обозначение для разности долгот узлов орбит спутника и возмущающей точки

$$\bar{\Omega} = \Omega - \Lambda, \quad (43)$$

$$\frac{de}{d\tau} = 10e\sqrt{1-e^2} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 i \sin 2\omega - \\ -\sin 2I \left[\sin i \sin \bar{\Omega} \cos 2\omega + \sin i \cos i \cos \bar{\Omega} \sin 2\omega \right] + \\ + \sin^2 I \left[\cos i \sin 2\bar{\Omega} \cos 2\omega + \left(\cos 2i + (\sin^2 i - 2) \sin^2 \bar{\Omega} \right) \sin 2\omega \right] \end{array} \right\}, \quad (44)$$

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \begin{aligned} & -5e^2 \sin 2i \sin 2\omega + \\ & + \sin 2I \left[(2 + 3e^2 + 5e^2 \cos 2\omega) \cos i \sin \bar{\Omega} + 5e^2 \cos 2i \cos \bar{\Omega} \sin 2\omega \right] + \\ & + \sin^2 I \left[(2 + 3e^2 + 5e^2 \cos 2\omega) \sin i \sin 2\bar{\Omega} + 5e^2 \sin i \cos i (3 + \cos 2\bar{\Omega}) \sin 2\omega \right] \end{aligned} \right\}, \quad (45)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \begin{aligned} & 4\gamma(1-e^2)^{-3/2} (4 - 5\sin^2 i) + 8 + 2e^2 - \\ & - 10\sin^2 i + 10(\sin^2 i - e^2) \cos 2\omega + \\ & + \sin^2 I \left[\begin{aligned} & 3(5\sin^2 i - 4 - e^2) + (5\sin^2 i - 2 - 3e^2) \cos 2\bar{\Omega} + \\ & + 5(3(e^2 - \sin^2 i) - (\sin^2 i - 2 + e^2) \cos 2\bar{\Omega}) \cos 2\omega + \\ & + 5(e^2 - 2) \cos i \sin 2\bar{\Omega} \sin 2\omega \end{aligned} \right] + \\ & + \sin 2I \left[\begin{aligned} & (10\sin 2i \sin^2 \omega + (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2) \operatorname{ctg} i) \cos \bar{\Omega} + \\ & + 5(2\sin^2 i - e^2 - e^2 \sin^2 i) \frac{\sin \bar{\Omega}}{\sin i} \sin 2\omega \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (46)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \begin{aligned} & 2\cos i \left[-4\gamma(1-e^2)^{-3/2} + 5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2 \right] + \\ & + \sin^2 I \left[2\cos i (\sin^2 \bar{\Omega} - 2) (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2) + 5e^2 \sin 2\bar{\Omega} \sin 2\omega \right] + \\ & + \sin 2I \left[(2 + 3e^2 - 5e^2 \cos 2\omega) \frac{\cos 2i}{\sin i} \cos \bar{\Omega} + 5e^2 \operatorname{ctg} i \sin \bar{\Omega} \sin 2\omega \right] \end{aligned} \right\}. \quad (47)$$

Такая более сложная осредненная система уравнений неавтономной эволюционной задачи не имеет первых интегралов. Лишь при гипотетическом отсутствии прецессии орбиты возмущающей точки ($N_p = 0$) существует один первый интеграл $W(e, i, \omega, \Omega) = \text{const}$ (W – двукратно-осредненная возмущающая функция). Ввиду неинтегрируемости эволюционной системы (44)-(47), для ее изучения в общем случае естественно использовать численные методы. Выбор начальных элементов орбит может диктоваться различными возможностями их использования. В частности, интересными представляются лунные спутниковые орбиты, в окрестности равновесных (так называемых «замороженных») орбит, которые даже при действии возмущений сохраняют примерно постоянными значения эксцентриситета, наклона и аргумента перицентра. И лишь долгота узла таких орбит претерпевает вековое изменение.

Замечание: В случаях, когда период прецессии узла существенно меньше периода изменения остальных элементов спутниковой орбиты (рис. 12, 13), возмущающую функцию W и правые части уравнений (44)-(47), в принципе, можно дополнительно осреднить по Ω (как наиболее быстрой из оставшихся переменных). Такое осреднение использовано, в частности, в работе (Abad et al., 2009) при анализе «замороженных» орбит лунных спутников в более полной модели гравитационного поля Луны (с учетом возмущений от нескольких зональных гармоник).

В данном разделе в качестве конкретного примера рассмотрена орбита ИСЛ с большой полуосью $a = 4500$ км ($\gamma = 0.232$). Начальные значения остальных элементов выбираются из условия их относительной близости к равновесным (кроме долготы узла). Для того чтобы апоселений эволюционирующей спутниковой орбиты более продолжительное время находился над высокоширотными областями Луны, примем в качестве начального значения аргумента периселения $\omega_0 = 90^\circ$ (или 270°). Для выбора начальных значений e_0, i_0 в используемой модели возмущающих сил полезным является семейство изолиний $i_0 = \text{const}$, но построенное в плоскости (a, e_0) , согласно соотношению, приведенному в работе (Вашковьяк, 1996)

$$\cos^2 i_0 = 0.2 \left[\gamma(a) + (5 \sin^2 \omega_0 - 2)(1 - e_0^2)^{5/2} \right] \left[\gamma(a) + (1 - e_0^2)^{3/2} \sin^2 \omega_0 \right]^{-1}. \quad (48)$$

На рис. 14 семейство этих изолиний для $\sin^2 \omega_0 = 1$ с нанесенными значениями i_0 (в градусах) показано вместе с жирной кривой критического эксцентриситета. Для принятой большой полуоси это значение $e_{crit} \approx 0.62$.

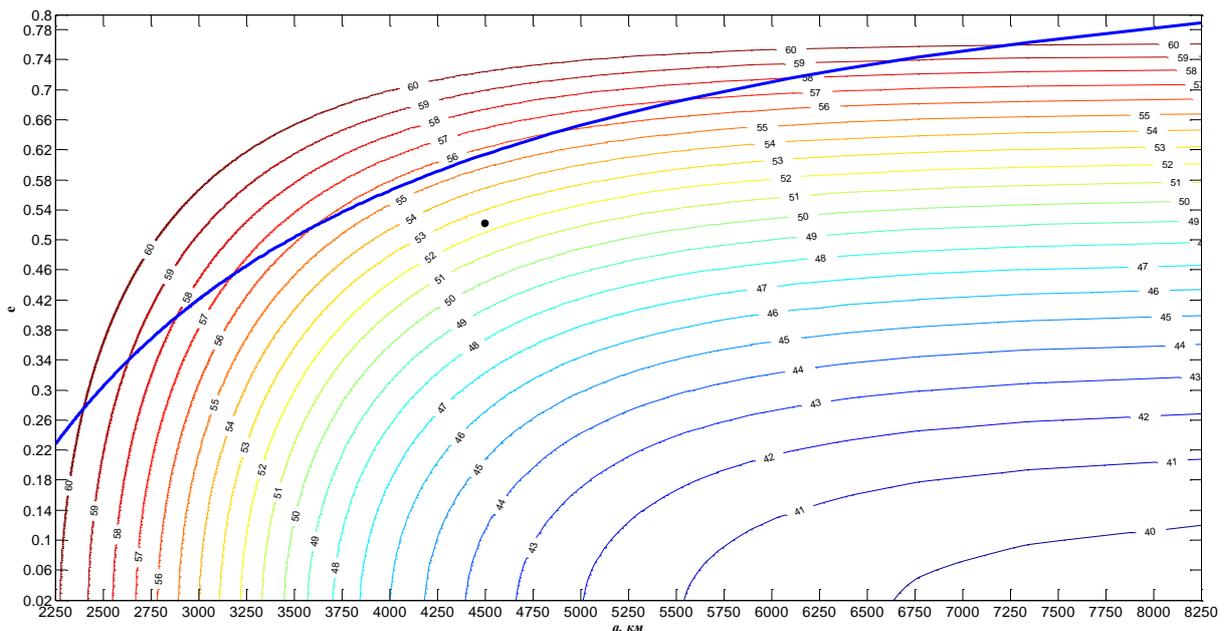


Рис. 14. Изолинии $i_0(a, e_0) = \text{const}$ для $\sin^2 \omega_0 = 1$

Начальное значение эксцентриситета выбрано меньшим этого значения на величину порядка $0.1 \approx I = 6^\circ.7$ и принято равным $e_0 = 0.52$. При таком выборе в процессе эволюции спутниковой орбиты в некомпланарной модели эксцентриситет, вообще говоря, не должен превысить e_{crit} , поскольку «запас» порядка 0.1 рад априори представляется для этого достаточным. В соответствии с формулой (48) начальное наклонение принято равным $i_0 = 52^\circ.5$ ($c_1 = 0.27$), а на рис. 14 выбранные элементы отмечены точкой.

Поскольку в правые части системы (44)-(47) входит лишь разность $\bar{\Omega}$, то решение будет существенно зависеть от ее значения $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 - \Lambda_0$ в начальный момент времени (или различной начальной ориентации орбиты Луны). Как показывают расчеты, выполненные для различных значений $\bar{\Omega}_0$, в примерном диапазоне $117^\circ \leq \bar{\Omega}_0 \leq 243^\circ$ максимальное значение эксцентриситета все-таки превышает критическое значение, несмотря на сделанный «запас». В остальном интервале значений $\bar{\Omega}_0$ $e(t) < e_{crit}$. При этом минимальное отклонение элементов e , i , ω от их равновесных значений достигается при $\bar{\Omega}_0 = 90^\circ$ и 270° .

Изменение со временем элементов орбиты для $\bar{\Omega}_0 = 270^\circ$ и для начальных значений элементов, принятых ранее, показано на рис. 15. Сплошные линии соответствуют численному интегрированию системы уравнений (43)-(47) с указанными значениями I и T_p . Штриховые линии дают аналитическое решение компланарного случая задачи ($I = 0$), которое является практически равновесным и «осредняющим» для $e(t)$, $i(t)$, $\omega(t)$. Амплитуда вынужденных колебаний, происходящих из-за ненулевых значений I и N_p , для указанных трех элементов составляет примерно 0.07 , 8° и 12° соответственно. Период прецессии узла данной спутниковой орбиты составляет примерно 4.4 года, причем методически различные изохронные зависимости $\Omega(t)$ на последнем фрагменте указанного рисунка начинают визуально немного расходиться при $t > 20$ лет. Горизонтальная прямая линия на первом фрагменте рис. 14 соответствует критическому значению эксцентриситета. При этом на всем рассматриваемом интервале времени $e(t) < e_{crit}$, а высота периселения остается больше примерно 85 км, так что реальное время жизни спутника определяется только техническими возможностями его аппаратуры. Расстояние апоселения остается большим 6520 км, а экваториальное наклонение – большим 45° . Такие эволюционные характеристики орбиты спутника обеспечивают условия, при которых апоселений в течение рассмотренного временного интервала не экранируется Луной (по отношению к наблюдателю, гипотетически находящемуся в центре Земли). Поэтому в его широкой окрестности возможна достаточно продолжительная по времени передача информации с Луны на Землю посредством спутниковой связи.

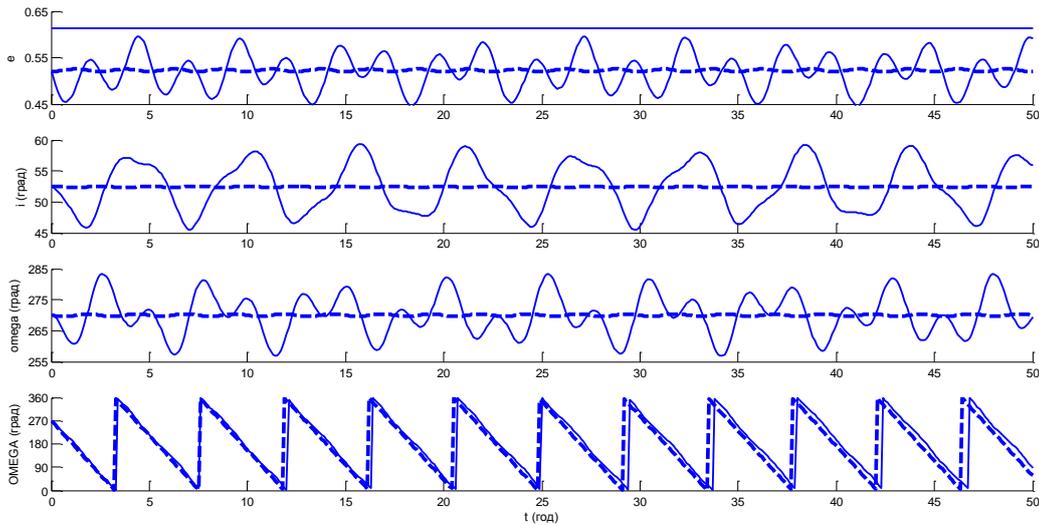


Рис. 15. Зависимости от времени элементов лунной спутниковой орбиты, близкой к равновесной относительно e , i , ω
 $(a = 4500 \text{ км}, e_0 = 0.52, i_0 = 52^\circ.5, \omega_0 = \Omega_0 = 270^\circ)$

6. Заключительные замечания

В данной работе предложен метод построения приближенного конструктивно-аналитического решения интегрируемого в квадратурах так называемого, компланарного случая двукратно-осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Это решение ранее было методически опробовано для частного случая задачи – полярных спутниковых орбит.

В рассмотренном здесь общем случае орбит с произвольным наклоном известные качественные особенности орбитальной эволюции описаны в кеплеровских элементах – приведены типичные семейства фазовых траекторий, а также зависимости от параметров стационарных значений эксцентриситета. Использование метода предусматривает предварительное нахождение экстремальных значений эксцентриситета эволюционирующей орбиты с помощью численного решения строгих уравнений. Получение аналитических зависимостей от времени эксцентриситета, наклона и аргумента перигея сводится к приближенному обращению квадратуры и использованию первых интегралов задачи. При нахождении зависимости от времени долготы узла вычисление необходимого интеграла выполняется с использованием численного метода.

На примере нескольких эволюционирующих орбит ИСЛ продемонстрировано хорошее согласие результатов расчетов, выполненных предложенным методом и методом численного интегрирования модельной системы при гипотетическом совпадении плоскостей лунного экватора и ее

орбиты. Показана возможность выбора (на основе интегрируемой задачи) начальных параметров спутниковой орбиты, обладающей специальными свойствами. Для выбранной квазиравновесной орбиты ИСЛ в более реальной физической модели получена оценка периодических отклонений элементов e , i , ω от их стационарных значений, вызванных отличным от нуля наклоном лунной орбиты и ее прецессией. Орбиты такого типа могут быть полезными для ретрансляционных целей.

Библиографический список

Вашковьяк М.А. О специальных частных решениях двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты // Письма в Астрон. журн. 1996. Т. 22. № 3. С. 231-240. (*Vashkov'yak M. A.* On the Special Particular Solutions of a Double-Averaged Hill's Problem with Allowance for Flattening of the Central Planet // *Astronomy Letters*. 1996. V. 22. No 2. P. 207-216).

Вашковьяк М.А. Об эволюции орбит далеких спутников Урана // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 25. № 7. С. 554-560. (*Vashkov'yak M. A.* Evolution of the Orbits of Distant Satellites of Uranus // *Astronomy Letters*. 1999. V. 25. No 7. P. 476-481).

Вашковьяк М.А. Конструктивно-аналитическое решение задачи о вековой эволюции полярных спутниковых орбит // Астрон. Вест. 2017. Т. 51. № 4 (в печати). (*Vashkov'yak M. A.* Constructive-analytical solution of the problem on secular evolution of polar satellite orbits // *Solar System Research*. 2017. V. 51. No 4 (in press)).

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, переработанное, при участии Ю.В. Геронимуса и М.Ю. Цейтлина. М.: ФМ. 1962. 1100 С.

Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли // 1961. Вып. 8. С. 5-45.

Лидов М.Л., Ярская М.В. Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты // Космические исследования. 1974. Т. 12. № 2. С.155-170. (*Lidov M. L., Yarskaya M. V.* Integrable Cases in the Problem of the Evolution of a Satellite Orbit under the Joint Effect of an Outside Body and of the Noncentrality of the Planetary Field // *Cosmic Research*, 1974. V. 12. No 2. P. 139-152).

Abad A., Elipe A. & Tresaco E. Analytical Model to Find Frozen Orbits for a Lunar Orbiter // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2009. V. 32. No 3. P. 888-898.

Circi C., Condoleo E, and Ortore E. A Vectorial Approach to Determine Frozen Orbital Conditions // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. February.

Kinoshita H. and Nakai H. Analytical Solution of the Kozai Resonance and Its Application // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1999. V.75. P. 125-147.

Kozai Y. Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Eccentricity. // Astron. J. 1962. V. 67. P. 591 - 598.

Kozai Y. Motion of Lunar orbiter // Publ. Astron Soc. Japan. 1963. V. 15. No 3. P. 301-312.

Krivov A.V., Sokolov L.L. & Getino J. Orbital Instability Zones of Space Balloons // In Dynamical and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies (I.M. Wytrzyszczak, J.H. Lieske and R.A. Feldman eds.) P. 361-366. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. 1997.

Lidov M.L. Integrable Cases of Satellite problem with the Third Body and the Oblate Planet // In The Stability of the Solar System and Small Stellar Systems (Y. Kozai Ed.) P.117-124. 1974. IAU.

Оглавление

1. Введение и постановка задачи	3
2. Качественные особенности эволюции спутниковых орбит	6
2.1. Стационарные решения системы (5).....	7
2.2. Типичные структуры семейств интегральных кривых и диапазоны изменения эксцентриситета.....	11
3. Конструктивно-аналитическое решение эволюционной системы.....	17
3.1. Зависимость эксцентриситета от времени для $D > 0$	18
3.2. Зависимость эксцентриситета от времени для $D < 0$	19
3.3. Зависимости от времени наклона, аргумента перигея и долготы восходящего узла	20
4. Численные примеры корректного использования метода решения модельной интегрируемой задачи.....	21
5. О некомпланарной модели задачи	26
6. Заключительные замечания	30
Библиографический список.....	31