



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 34 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Решение алгебраического  
уравнения алгоритмами  
степенной геометрии

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А.Д. Решение алгебраического уравнения алгоритмами степенной геометрии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 34. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2017-34](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-34)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-34>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.КЕЛДЫША  
Российской академии наук**

**А. Д. Брюно**

**Решение алгебраического уравнения  
алгоритмами степенной геометрии**

**Москва — 2017**

УДК 517.55

**Александр Дмитриевич Брюно**

Решение алгебраического уравнения алгоритмами степенной геометрии. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2017.

Для нахождения глобальных приближённых решений алгебраического уравнения с  $n$  неизвестными при  $n = 1$  предлагается ломаная Адамара, а при  $n = 2$  — многогранник Адамара. Найденные решения переводятся в координатное подпространство: для  $n = 1$  — сдвигом, а для  $n = 2$  — заменой координат, использующей униформизацию кривой. Затем излагаются алгоритмы локального решения алгебраического уравнения вблизи особой (критической) точки для  $n = 2$  и  $n = 3$  для получения асимптотических разложений одномерных и двумерных ветвей. С помощью многоугольника Ньютона (при  $n = 2$ ), многогранника Ньютона (при  $n = 3$ ) и степенных преобразований эта задача сводится к ситуациям, аналогичным теореме о неявной функции. В частности, при локальном анализе решений одного уравнения от трёх неизвестных приходим к задаче об униформизации плоской алгебраической кривой и преобразовании её в координатную ось. После этого вблизи этой оси можно получить асимптотическое разложение куска изучаемой поверхности. Приведены примеры таких вычислений.

**Ключевые слова:** выпуклый многогранник, грань, алгебраическое уравнение, униформизация.

**Alexander Dmitrievich Bruno**

Solving the polynomial equations by algorithms of power geometry

New methods for computation of solutions of an algebraic equation of three variables near a critical point are proposed. These methods are: Newton polyhedron, power transformations, new versions of the implicit function theorem and uniformization of a planar algebraic curve. We begin from a survey of the new methods of computation of solutions of an algebraic equation of one and of two variables by means of the Hadamard polygon and Hadamard polyhedron. That approach works for differential equations (ordinary and partial) as well.

**Key words:** convex polyhedron, face, algebraic equation, uniformization.

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

© А. Д. Брюно, 2017

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2017

## Введение

Несмотря на большой рост и усложнение математики, некоторые основные её задачи остаются нерешёнными. К таким задачам относится решение алгебраического уравнения с одним или несколькими неизвестными.

Пусть задан многочлен  $f(X)$  с вещественными или комплексными коэффициентами, где  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Требуется найти решение уравнения

$$f(X) = 0 \quad (1)$$

для  $X \in \mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{C}^n$  в виде либо функций  $X = \Phi(\Xi)$  от параметров  $\Xi$ , либо набора асимптотических разложений по параметрам

$$X = \Phi_0(\Xi) + \Phi_1(\Xi) + \dots \quad (2)$$

При этом множество решений уравнения (1) образует алгебраическое многообразие  $\mathcal{F}$  и может состоять из нескольких компонент (ветвей) разных размерностей в вещественном случае. Для каждой компоненты надо найти своё разложение (2).

Здесь опишем алгоритмы решения этой задачи и их компьютерную реализацию. Изложение проведём по возрастанию размерности  $n$  этой задачи.

### Краткое содержание работы

Сначала напоминает алгоритм выделения значений наибольших скалярных произведений на множестве точек в  $\mathbb{R}^n$  (§ 1). Затем излагаются алгоритмы глобального решения алгебраического уравнения для  $n = 1$  (корни многочлена) и  $n = 2$  (униформизация кривой) (§ 2 и 3 соответственно). Для нахождения приближённых решений при  $n = 1$  предлагается ломаная Адамара, а при  $n = 2$  — многогранник Адамара. Найденные решения переводятся в координатное подпространство: для  $n = 1$  — сдвигом, а для  $n = 2$  — заменой координат, использующей униформизацию кривой. Затем излагаются алгоритмы локального решения алгебраического уравнения вблизи особой (критической) точки для  $n = 2$  и  $n = 3$  (§§ 4 и 6 соответственно). Цель — получение асимптотических разложений одномерных и двумерных ветвей. С помощью многоугольника Ньютона (при  $n = 2$ ), многогранника Ньютона (при  $n = 3$ ) и степенных преобразований эта задача сводится к ситуациям, аналогичным теореме о неявной функции (§ 5). В частности, при локальном анализе решений одного уравнения от трёх неизвестных приходим к задаче об униформизации плоской алгебраической кривой и преобразовании её в координатную ось. После этого вблизи этой оси можно получить асимптотическое разложение куска изучаемой поверхности. Приведены примеры таких вычислений.

## 1. Многогранник и нормальные конусы

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  задано несколько точек  $\{Q_1, \dots, Q_k\} = \mathbf{S}$ . Их выпуклая оболочка

$$\Gamma(\mathbf{S}) = \left\{ Q = \sum_{i=1}^k \mu_i Q_i, \mu_i \geq 0, \sum \mu_i = 1 \right\}$$

является многогранником. Его граница  $\partial\Gamma$  состоит из вершин  $\Gamma_j^{(0)}$ , рёбер  $\Gamma_j^{(1)}$  и граней  $\Gamma_j^{(d)}$  разных размерностей  $d : 1 < d \leq n - 1$ . Если задан вещественный  $n$ -вектор  $P = (p_1, \dots, p_n)$ , то максимум и минимум скалярного произведения  $\langle P, Q \rangle = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$  на  $\mathbf{S}$  достигаются на точках  $Q_i$ , лежащих на границе  $\partial\Gamma$ . Выделим для каждой грани  $\Gamma_j^{(d)}$  (включая вершины  $\Gamma_j^{(0)}$  и рёбра  $\Gamma_j^{(1)}$ ) то множество векторов  $P$ , для которых максимум  $\langle P, Q \rangle$  достигается на точках  $Q_i \in \Gamma_j^{(d)}$ . Это будет её *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle \text{ для } Q', Q'' \in \Gamma_j^{(d)}, Q''' \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(d)} \right\}.$$

При этом вектор  $P$  лежит в пространстве  $\mathbb{R}_*^n$ , двойственном пространству  $\mathbb{R}^n$ . Вообще, здесь мы находимся в ситуации аффинной геометрии.

Все векторы нормального конуса  $\mathbf{U}_j^{(d)}$  ортогональны грани  $\Gamma_j^{(d)}$ . В силу однородности нормальных конусов достаточно рассмотреть их пересечения с двумя гиперплоскостями (скажем,  $p_n = \pm 1$ ) и отмечать на них пересечения  $\tilde{\mathbf{U}}_{j\pm}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}_j^{(d)} \cap \{p_n = \pm 1\}$ , которые назовём приведёнными нормальными конусами. Имеются стандартные программы как для вычисления выпуклых оболочек, так и для вычисления их нормальных конусов [1, 2]. В частности, они имеются в системе Maple.

## 2. Глобальный анализ для $n = 1$

Для многочлена

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \tag{3}$$

с вещественными или комплексными коэффициентами  $a_k$  его корни всегда выражаются в радикалах если  $m \leq 4$  (формулы Кардано и Феррари — XVI век).

Согласно Абелю и Галуа (1830) общее уравнение  $f_m(x) = 0$  с  $m > 4$  неразрешимо в радикалах от его коэффициентов. Для уравнения пятой степени Эрмит, Кронекер и Бриоски (1858) показали, что его корни могут быть выражены через тета-функции Якоби [3]. При  $m > 6$  известно, в каких сложных функциях от коэффициентов  $a_k$  оно разрешается [4], но явных формул, пригодных для вычисления, пока нет. Имеются различные способы определения числа вещественных корней на заданном интервале  $x \in [a, b]$  и их приближённых значений.

Опишем новый способ вычисления приближённых значений корней многочлена (3). Для этого на вещественную плоскость  $q_1, q_2$  наносятся точки

$$\check{Q}_k = (k, \ln|a_k|), \quad k = 0, \dots, m,$$

образующие *суперноситель*  $\mathbf{S} = \{\check{Q}_0, \dots, \check{Q}_m\}$ , и строится их выпуклая оболочка

$$\mathbf{H} = \left\{ \check{Q} = \mu_0 \check{Q}_0 + \dots + \mu_m \check{Q}_m, \mu_k \geq 0, \sum_{k=0}^m \mu_k = 1 \right\}.$$

Граница  $\partial\mathbf{H}$  является ломаной линией. Каждому ребру  $\Gamma_j^{(1)}$  и вершине  $\Gamma_j^{(0)}$  этой границы  $\partial\mathbf{H}$  соответствует граничное подмножество  $\mathbf{S}_j^{(d)}$  точек  $\check{Q}_k$ , лежащих на  $\Gamma_j^{(d)}$ , и укороченный многочлен

$$\check{f}_j^{(d)}(x) = \sum a_k x^k \text{ по } \check{Q}_k \in \mathbf{S}_j^{(d)},$$

корни которого являются приближениями к корням исходного многочлена.  $\partial\mathbf{H}$  — это ломанная Адамара (J. Hadamard, 1893) [5], [6, гл. IV, § 2, п. 2.1]. В укороченный многочлен входят те и только те слагаемые  $a_k x^k$ , у которых модуль  $|a_k x^k|$  наибольший при фиксированном  $|x|$ :  $\ln|x| = p_1$ , ибо тогда

$$|a_k x^k| = \exp \langle \check{Q}, (p_1, 1) \rangle,$$

а экспонента — монотонная функция.

**Пример 1.** Рассмотрим многочлен

$$f(x) = 9x - 10x^3 + x^5 = x(1 - x^2)(9 - x^2) \quad (4)$$

с корнями  $x_k^0 = 0, \pm 1, \pm 3$ . Его многоугольник Адамара натянут на три вершины  $(1, \ln 9)$ ,  $(3, \ln 10)$ ,  $(5, 0)$  и показан на рис. 1. Он имеет два ребра  $\Gamma_1^{(1)}$  и  $\Gamma_2^{(2)}$ .

Их приведённые нормальные конусы  $\omega = \tilde{\mathbf{U}}_{1+}^{(1)} = \ln \sqrt{0.9} \approx -0.05268$  и  $\beta = \tilde{\mathbf{U}}_{2+}^{(1)} = \ln \sqrt{10} \approx 1.15129$  показаны на рис. 2.

Рёбрам  $\Gamma_1^{(1)}$  и  $\Gamma_2^{(2)}$  соответствуют укороченные многочлены  $\check{f}_1^{(1)}(x) = 9x - 10x^3$  и  $\check{f}_2^{(1)}(x) = -10x^3 + 9x^5$ , корни которых  $x_1 = 0$ ,  $x_{2,3} = \pm \sqrt{0.9} \approx \pm 0.948683$  и  $x_{4,5} = \pm \sqrt{10} \approx \pm 3.162278$  дают приближённые значения ненулевых корней полного многочлена  $f(x)$ . Для их уточнения можно использовать метод Ньютона, т. е. искать разложение корня  $x^0 = x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots$ . Для первых добавок  $\varepsilon_1$  из уравнения  $f(x) + \varepsilon_1 f'(x) = 0$  получаем значение  $\varepsilon_1 = -f(x)/f'(x)$ . Значения добавок  $\varepsilon_1$  в  $x_k$ ,  $k = 2, \dots, 5$ , и уточнённых значений  $x_k + \varepsilon_k$  показаны в табл. 1.

□

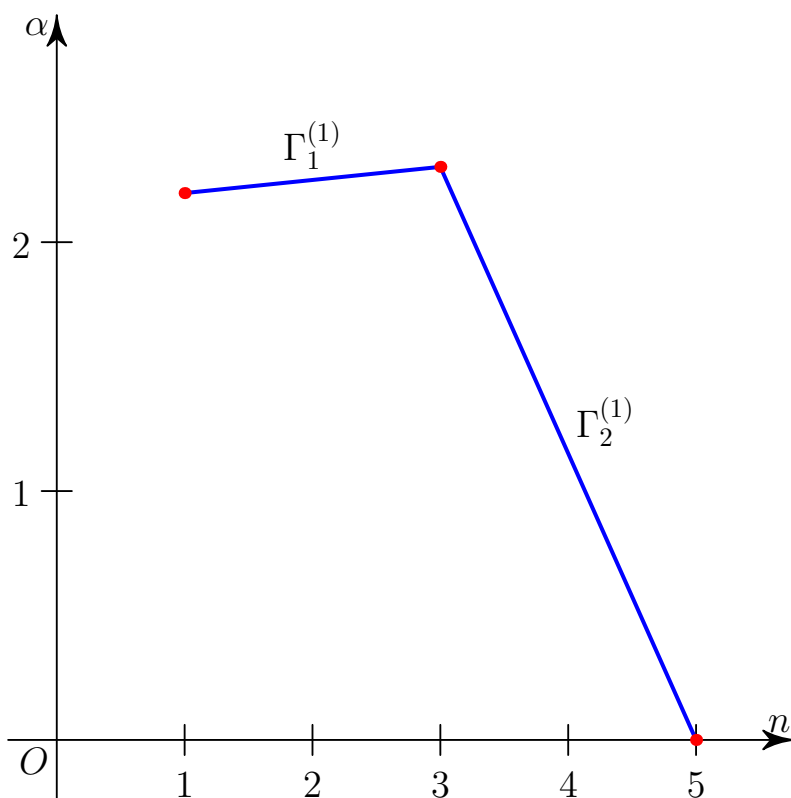


Рис. 1. Ломаная Адамара многочлена (4) примера 1.

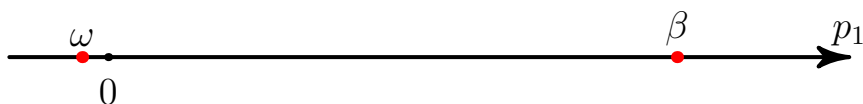


Рис. 2. Приведённые нормальные конусы ломаной Адамара рис. 1.

Таблица 1. Поправки к корням

$k$	2	3	4	5
$x_k$	0.948683	-0.948683	3.162278	-3.162278
$\varepsilon_1$	0.055085	-0.055085	-0.136175	0.136175
$x_k + \varepsilon_k$	1.003768	-1.003768	3.026103	-3.026103
$x_k^0$	1	-1	3	-3

**Пример 2.** Рассмотрим многочлен

$$f(x) = -x - \frac{5}{6}x^3 + x^5. \quad (5)$$

Его точные корни суть

$$x^0 = 0, \quad \pm i\sqrt{2/3} \approx \pm 0.81648i, \quad \pm\sqrt{3/2} \approx \pm 1.2247. \quad (6)$$

Его суперноситель  $\check{S}$  и многоугольник Адамара  $\check{H}$  показаны на рис. 3. Он натянут на 2 вершины  $(1, 0)$ ,  $(5, 0)$ .

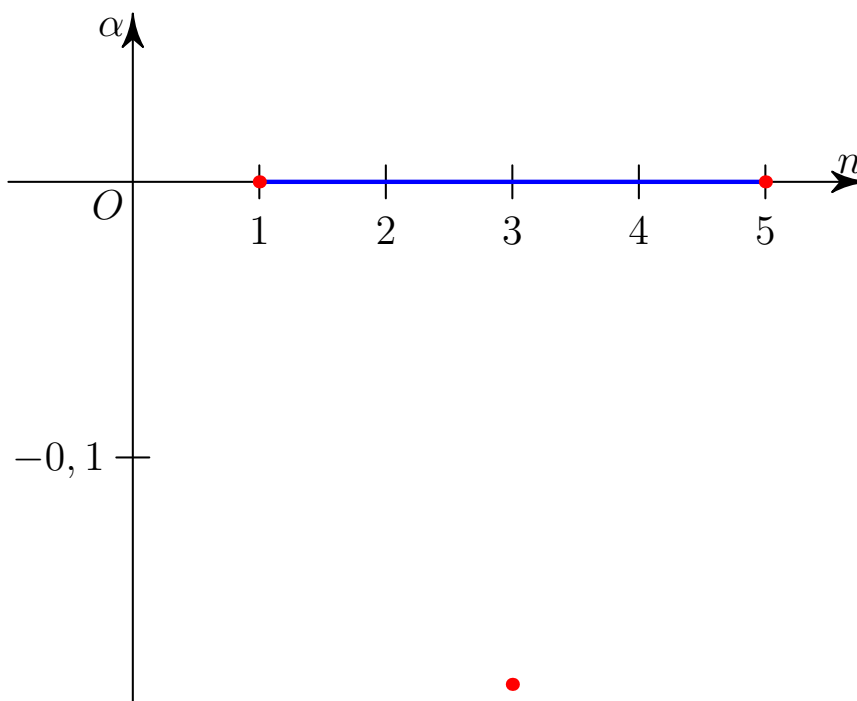


Рис. 3. Суперноситель и ломаная Адамара многочлена (5) примера 2.

Он имеет одно ребро  $1 \leq n \leq 5$ ,  $\omega = 0$  с приведённым нормальным конусом — точкой  $p_1 = p_1^0 = 0$ . Ему соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}(x) = -x + x^5.$$

Его ненулевые корни суть  $x_{2,3} = \pm i$ ,  $x_{4,5} = \pm 1$ . Для них всех  $\ln|x_k| = 0 = p_1^0 = \omega$ . Они дают приближённые значения корней (6) полного многочлена (5). Поправки  $\varepsilon_1 = -f(x_k)/f'(x_k)$  метода Ньютона к ним приведены в табл. 2.  $\square$

Таблица 2. Поправки к корням

$k$	2	3	4	5
$x_k$	$+i$	$-i$	$+1$	$-1$
$\varepsilon_1$	$-0.12821i$	$0.12821i$	$0.555556$	$-0.555556$
$x_k + \varepsilon_k$	$0.871795i$	$-0.871795i$	$1.555556$	$-1.555556$
$x_k^0$	$0.816497i$	$-0.816497i$	$1.224745$	$-1.224745$

**Пример 3.** С помощью ломанной Адамара найдём приближенные значения корней многочлена

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} -4320 - 9336x - 4972x^2 - 3754x^3 - 1426x^4 + 104x^5 + 51x^6 + 3x^7. \quad (7)$$



Значения его коэффициентов  $a_k$  приведены во второй строке таблицы 3. В третьей строке даны значения  $\alpha_k = \ln|a_k|$ . На рис. 4 показаны точки  $\check{Q}_k = (k, \alpha_k)$  и их огибающая — ломаная Адамара  $\partial\mathbf{H}$ .

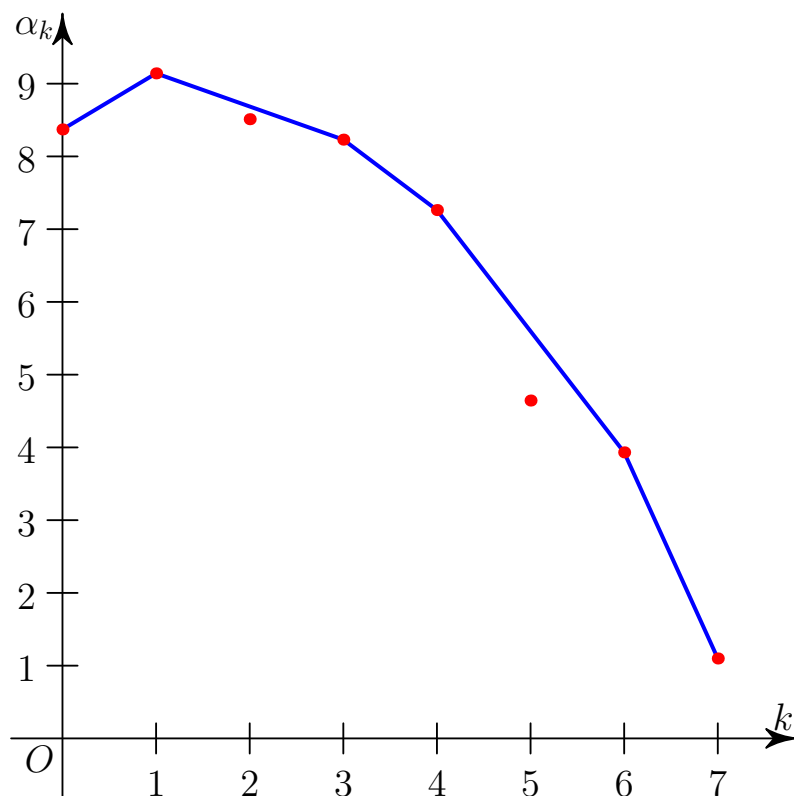


Рис. 4. Ломаная Адамара многочлена (7) примера 3.

Для всех  $k$ , кроме  $k = 2$  и  $k = 5$ , точки  $\check{Q}_k = (k, \alpha_k)$  являются вершинами ломанной  $\partial\mathbf{H}$ . Паре соседних вершин  $(k, \alpha_k)$  и  $(l, \alpha_l)$ ,  $k < l$ , соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}_k(x) = a_k x^k + a_l x^l.$$

Его ненулевые корни обозначим  $x_{k+1}$ , если  $l = k+1$ , или  $x_{k+1}, x_{k+2}$ , если  $l = k+2$ . Их значения приведены в четвёртой строке таблицы 3. В каждой из этих точек вычислены значения  $f(x_k)$  и  $f'(x_k)$ .

Вычисленные по методу Ньютона поправки  $\varepsilon_k = -f(x_k)/f'(x_k)$  к потенциальным приближённым корням  $x_k$  приведены в пятой строке таблицы 3. Для  $k < 6$  модули поправок  $|\varepsilon_k| < 0.5$ , а для  $k = 6$  и  $7$  эти модули больше 1.5. Следовательно, значения  $x_6$  и  $x_7$  требуют уточнения. Они получены из укороченных многочленов, содержащих  $a_4 x^4$ ,  $a_6 x^6$  и  $a_7 x^7$ . Поэтому в качестве приближенного к  $f(x)$  рассмотрим многочлен

$$g = \sum_{k=4}^7 a_k x^k,$$

т. е. многочлен третьей степени

$$h = x^{-4}g = -1426 + 104x + 51x^2 + 3x^3.$$

Для него значение  $x_5 \approx 5.2$  является приближенным корнем. Более точным является значение  $x = 4$ . Деля многочлен  $h$  на  $x - 4$ , получаем многочлен второй степени

$$3x^2 + 63x + 256 \tag{8}$$

и  $-2$  в остатке. Корни  $\tilde{x}_6$  и  $\tilde{x}_7$  многочлена (8) суть  $-10.5 \pm 2.9i$ . Они приведены в шестой строке таблицы 3. Соответствующие поправки  $\tilde{\varepsilon}_k = -f(\tilde{x}_k)/f'(\tilde{x}_k)$  приведены в седьмой строке, при этом оба  $|\tilde{\varepsilon}_k| < 1$ . В восьмой строке приведены уточненные значения  $x_k + \varepsilon_k$  для  $k < 6$  и  $\tilde{x}_k + \tilde{\varepsilon}_k$  для  $k = 6, 7$ . Наконец, в девятой строке приведены точные значения  $x_k^0$  корней. Полученные приближенные значения корней многочлена  $f(x)$  пригодны для уточнения по методу Ньютона.  $\square$

Таблица 3

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_k$	-4320	-9336	-4972	-3754	-1426	104	51	3
$\alpha_k$	8.371	9.142	8.511	8.230	7.262	4.644	3.932	1.098
$x_k$		-.4627	1.5777i	-1.5777i	-2.633	5.288	-5.288	-17
$\varepsilon_k$		-.1157	.0439 -.0633i	.0439 +.0633i	.36	-.032	1.82	1.78
$\tilde{x}_k$							-10.5 +2.9i	-10.5 -2.9i
$\tilde{\varepsilon}_k$							0.578 -0.762i	0.578 +0.762i
$x_k + \varepsilon_k$		-.5784	.0439+ 1.514i	.0439+ -1.514i	-2.2725	5.2558	-9.922 +2.138i	-9.922 -2.138i
$x_k^0$		-.5819	.0519+ 1.5148i	.0519- 1.5148i	-2.0984	5.2551	-9.8393 +.931i	-9.8393 -.931i

В целом метод ломанной Адамара состоит в том, что исходный многочлен заменяется набором более простых многочленов, корни которых вычисляются просто и дают такие приближения корней исходного многочлена, которые достаточно хороши для численного уточнения по методу Ньютона.

### 3. Глобальный анализ для $n = 2$

Предположим сначала, что многочлен  $f(X) = f(x_1, x_2)$  не распадается на множители. Тогда его корневое множество  $\mathcal{F}$  — это плоская алгебраическая кривая. Для комплексных значений  $x_1, x_2$  кривая  $\mathcal{F}$  — это двумерная поверхность в четырехмерном пространстве  $\Re x_1, \Im x_1, \Re x_2, \Im x_2$ . Если к этому пространству

добавить бесконечно удалённые точки, то кривая  $\mathcal{F}$  станет топологически эквивалентна сфере с  $g$  ручками,  $g \geq 0$  (Риман, 1840).

- Если  $g = 0$ , то это обычная сфера (поверхность колобка).
- Если  $g = 1$ , то это поверхность тора (бублика).
- Если  $g = 2$ , то это поверхность кренделя и т.д.

Итак, алгебраическая кривая  $\mathcal{F}$  имеет целочисленный топологический инвариант — род  $g \geq 0$ ,  $g \in \mathbb{Z}$ . Рассмотрим ситуации для различных значений  $g$ .

**3.1. Случай  $g = 0$ .** Тогда кривая  $\mathcal{F}$  бирационально эквивалентна прямой, т. е. существует параметризация

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad t = \eta(x_1, x_2),$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \eta$  — рациональные функции от своих аргументов.

**Пример 4.** Для листа Декарта

$$f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0 \tag{9}$$

имеем

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3}, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t = x_2/x_1. \quad \square$$

На вещественной плоскости  $x_1, x_2$  лист Декарта показан на рис. 5.

**3.2. Случай  $g = 1$  [7].** Тогда кривая  $f(X) = 0$  называется *эллиптической*. Посредством бирациональной замены  $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$  она приводится к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_2^2 = 4y_1^3 - g_2y_1 - g_3,$$

где  $g_2$  и  $g_3$  — постоянные (модули).

Униформизацию нормальной формы кривой даёт функция Вейерштрасса  $\wp(t)$ , которая является решением дифференциального уравнения

$$[\wp'(t)]^2 = 4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3,$$

где  $\wp' = d\wp(t)/dt$ ,  $g_2, g_3 = \text{const}$ , и вблизи  $t = 0$

$$\wp(t) = \frac{1}{t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{2k}, \quad b_k = \text{const}.$$

Итак, получаем униформизацию

$$y_1 = \wp(t), \quad y_2 = \wp'(t).$$

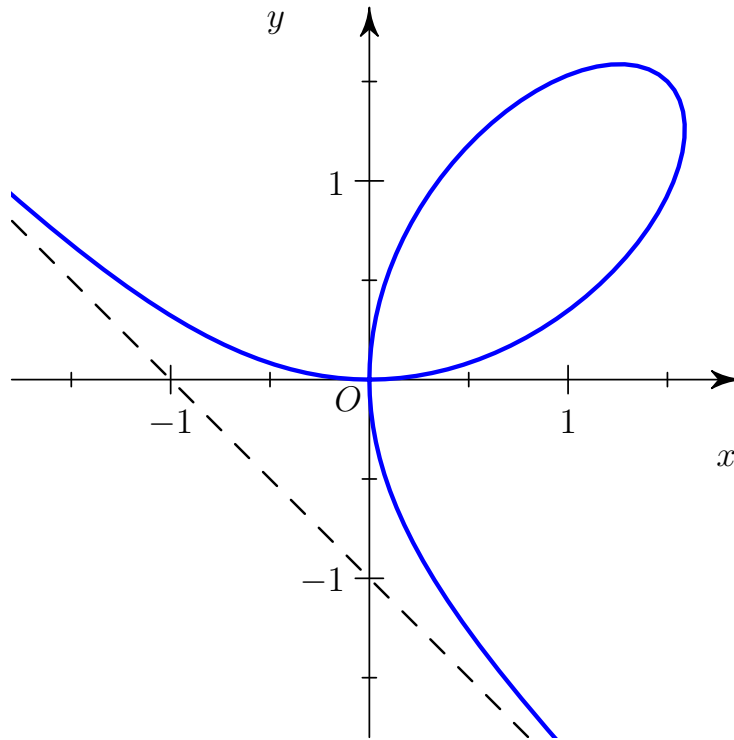


Рис. 5. Лист Декарта. Пунктиром показана асимптота.

**3.3. Гиперэллиптический случай с  $g > 1$  [7, гл. 13].** В этом случае с помощью бирационального преобразования  $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$  уравнение кривой приводится к нормальной форме

$$y_2^2 = R(y_1),$$

где  $R(y_1)$  — многочлен степени  $2g + 1$  или  $2g + 2$  без кратных корней. Решения этого уравнения можно записать в виде  $y_1 = \varphi(t)$ ,  $y_2 = \psi(t)$ , где автоморфные функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  определённым образом выражаются через тета-функции. Если  $g = 2$ , то кривая всегда является гиперэллиптической (см. примеры в [8–14]), но при  $g > 2$  существуют не гиперэллиптические кривые [15, гл. 7].

**3.4. Суперэллиптический случай с  $g > 2$ .** В этом случае бирациональной заменой координат уравнение приводится к нормальной форме

$$y_2^m = R(y_1),$$

где натуральное  $m \geq 3$ , а  $R(y_1)$  — многочлен. Здесь также существует униформизация через тэта-функции. Но как её находить, пока неясно [16, 17].

По-видимому, существуют кривые, которые не являются суперэллиптическими. Но для них пока нет нормальной формы.

**Пример 5.** Рассмотрим кривую Ферма

$$x^n + y^n = 1. \quad (10)$$

Её род  $g = n(n - 3)/2 + 1$ . Эти значения приведены в таблице 4.

Таблица 4. Род кривой Ферма (10).

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g$	0	1	3	6	10	15	21	28	36

Только при  $n = 2$  эта кривая рациональна. Помимо случая  $n = 3$ , её униформизации также известны при  $n = 4$  и  $8$  [10].  $\square$

**3.5. Общий случай.** Для произвольной кривой  $f(x_1, x_2) = 0$  известна только теорема о существовании её глобальной униформизации  $x_1 = \varphi(t)$ ,  $x_2 = \psi(t)$ , но нет аналитического алгоритма её вычисления. К настоящему времени при  $g > 1$  явные униформизации известны только для кривых, имеющих достаточно большую группу симметрий, т. е. бирациональных автоморфизмов [8–10]. Более того, даже для гиперэллиптических кривых такая униформизация находится преимущественно в случаях наличия дополнительных симметрий [8–12].

В [18, 19] предложен алгоритм униформизации алгебраической кривой с помощью радикалов. В частности, он позволяет найти униформизации кривых рода  $g \leq 6$ , а также некоторых специальных кривых с  $g > 6$ . Например, для эллиптической кривой  $y_2^2 = 4y_1^3 - g_2y_1 - g_3$  униформизация в радикалах — это

$$y_1 = t, \quad y_2 = \sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}.$$

Для общей кривой рода  $g > 6$  униформизация в радикалах невозможна. Так же как невозможно решение в радикалах общего уравнения степени больше 4.

**3.6. Имплементация.** Все локальные вычисления пунктов 3.1, 3.2, 3.3 имеют место в системе компьютерной алгебры Maple. С помощью пакета `algcurves` можно вычислить род кривой  $g$ . Если  $g = 0$  или  $1$ , то можно найти соответствующую бирациональную замену координат. Если  $g > 2$ , то можно выяснить, является ли кривая гиперэллиптической или нет. Для гиперэллиптической кривой можно найти бирациональное преобразование к нормальной форме, алгоритма поиска униформизации там нет. Вопросы, связанные с суперэллиптическими кривыми, в Maple не рассматриваются.

**Пример 6.** В статье [13] дана униформизация кривой

$$w^3 - 3A(z)w - 2B(z) = 0,$$

где

$$A(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad B(z) = \frac{z}{(z^2 - a^2)(z^2 - 1)}, \quad 0 < a < 1.$$

Вычисления в системе Maple показали, что род этой кривой равен 2, а её нормальная форма есть  $y^2 = x^6 - 3a^2x^4 + 3a^4x^2 - 2a^4 + a^2$ .  $\square$

**3.7. Метод многогранника Адамара.** Если для кривой  $\mathcal{F} : f(x_1, x_2) = 0$  не удалось найти параметризацию, то можно найти несколько более простых приближённых кривых  $\check{\mathcal{F}}_l : \check{f}_l(x_1, x_2) = 0$ ,  $l = 1, \dots, m$ , которые приближают исходную кривую в своём множестве  $\mathcal{W}_l$  пространства  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{C}^2$ .

Может случиться, что кривая  $\check{\mathcal{F}}_l$  параметризуема:  $x_1 = \check{\varphi}_l(t)$ ,  $x_2 = \check{\psi}_l(t)$ . Для исходной кривой  $\mathcal{F}$  эту параметризацию можно уточнить.

Пусть  $g(t, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} f(\check{\varphi}_l(t) + \beta_1\varepsilon, \check{\psi}_l(t) + \beta_2\varepsilon)$ , где  $\beta_i = \text{const}$ ,  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ . Находим  $\varepsilon$  по методу Ньютона: из уравнения  $f(\check{\varphi}_l(t), \check{\psi}_l(t)) + \varepsilon_1 \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\check{\varphi}_l, \check{\psi}_l) = 0$  получаем  $\varepsilon_1$ . При этом все последовательные добавки  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  являются рациональными функциями от  $\check{\varphi}_l(t)$  и  $\check{\psi}_l(t)$ .

Находить эти кривые  $\check{\mathcal{F}}_l$  можно так. Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q,$$

где  $X = (x_1, x_2)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$ ,  $X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ . Каждому слагаемому  $a_Q X^Q$  ставится в соответствие точка  $\check{Q} = (Q, \ln|a_Q|)$  в  $\mathbb{R}^3$ . Их совокупность образует *суперноситель*  $\check{\mathbf{S}} \subset \mathbb{R}^3$ . Его выпуклая оболочка  $\mathbf{H}$  — это *многогранник Адамара*. Каждой грани  $\check{\Gamma}_l^{(2)}$  верхней части его границы  $\partial\mathbf{H}$  соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}_l^{(2)}(X) = \sum a_Q X^Q \text{ по } \check{Q} \in \check{\Gamma}_l^{(2)} \cap \check{\mathbf{S}}.$$

Для нормальной формы суперэллиптической кривой  $x_2^m = R(x_1)$  в множествах  $\mathcal{W}_l$  ограничены только значения  $x_1$ , а значения  $x_2$  там произвольны. Точность приближения  $\check{\mathcal{F}}_l$  к  $\mathcal{F}$  можно оценить по точности приближения корней уравнения  $\check{R}_l(x_1) = 0$  к корням уравнения  $R(x_1) = 0$ .

**Пример 7** (продолжение примера 1). Рассмотрим кривую  $\mathcal{F}$ :

$$f \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 + 9x - 10x^3 + x^5 = 0. \quad (11)$$

Её род равен 2. Согласно [10, Proposition 18] кривая (11) имеет униформизацию в тэта-функциях

$$x = 3 \frac{\theta_3^2(3t)}{\theta_3^2(t)}, \quad y = 48\sqrt{3}i \frac{\theta_3^3(3t)}{\theta_3^3(t)} \frac{\theta_2^2(t)\theta_4^2(t)}{9\theta_3^4(3t) - \theta_3^4(t)}.$$

Её многогранник Адамара  $\mathbf{H}$  натянут на 4 вершины  $(0, 2, 0)$ ,  $(1, 0, \ln 9)$ ,  $(3, 0, \ln 10)$ ,  $(5, 0, 0)$  и при  $q_2 = 0$  изображён на рис. 1. Проекция многогранника  $\mathbf{H}$  на плоскость  $q_1, q_2$  показана на рис. 6.

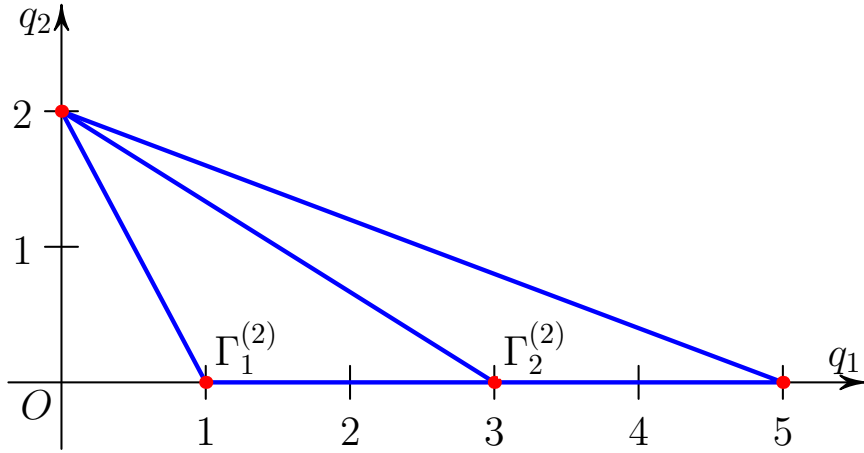


Рис. 6. Проекция многогранника Адамара многочлена (11) на плоскость  $q_1, q_2$ .

Из него видно, что многогранник  $\mathbf{H}$  имеет точно две двумерные грани  $\Gamma_1^{(2)}$  и  $\Gamma_2^{(2)}$ . Им соответствуют два укороченных многочлена

$$\begin{aligned} \check{f}_1^{(2)} &= -y^2 + 9x - 10x^3, \\ \check{f}_2^{(2)} &= -y^2 - 10x^3 + x^5. \end{aligned}$$

Их приведённые нормальные конусы являются точками  $\tilde{\mathbf{U}}_{1+}^{(2)} = (\omega, \gamma)$  и  $\tilde{\mathbf{U}}_{2+}^{(2)} = (\beta, \delta)$ , где  $\omega = \ln \sqrt{0.9} \approx -0.05268$ ,  $\gamma = (3 \ln 9 - \ln 10)/4 \approx 1.07227$ ,  $\beta = \ln \sqrt{10} \approx 1.15129$ ,  $\delta = (5 \ln 10)/4 \approx 2.87231$ , показаны на рис 7.

Будем считать, что область  $\mathcal{W}_1 = \{x, y : \ln|x| < (\omega + \beta)/2 \approx 0.5493, \text{ т. е. } |x| < 1.73204, y \text{ — любое}\}$ , а  $\mathcal{W}_2 = \{x, y : \ln|x| > (\omega + \beta)/2 \approx 0.5493, \text{ т. е. } |x| > 1.73204, y \text{ — любое}\}$ . Кривые  $\check{\mathcal{F}}_1$  и  $\check{\mathcal{F}}_2$  имеют род 1.

Преобразование  $x_1 = -10x, y_1 = -20y$  приводит уравнение  $\check{f}_1 = 0$  к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_1^2 = 4x_1^3 - 360x_1,$$

для которой  $g_2 = 360, g_3 = 0$ . Поэтому кривая  $\check{\mathcal{F}}_1$  униформизируется так:

$$x = -\frac{1}{10}\wp(t|360, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\varphi}_1(t), \quad y = -\frac{1}{20}\wp'(t|360, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\psi}_1(t). \quad (12)$$

Преобразование  $x = x_2, y = x_2 y_2 / 2$  приводит уравнение  $\check{f}_2 = 0$  к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_2^2 = 4x_2^3 - 40x_2,$$

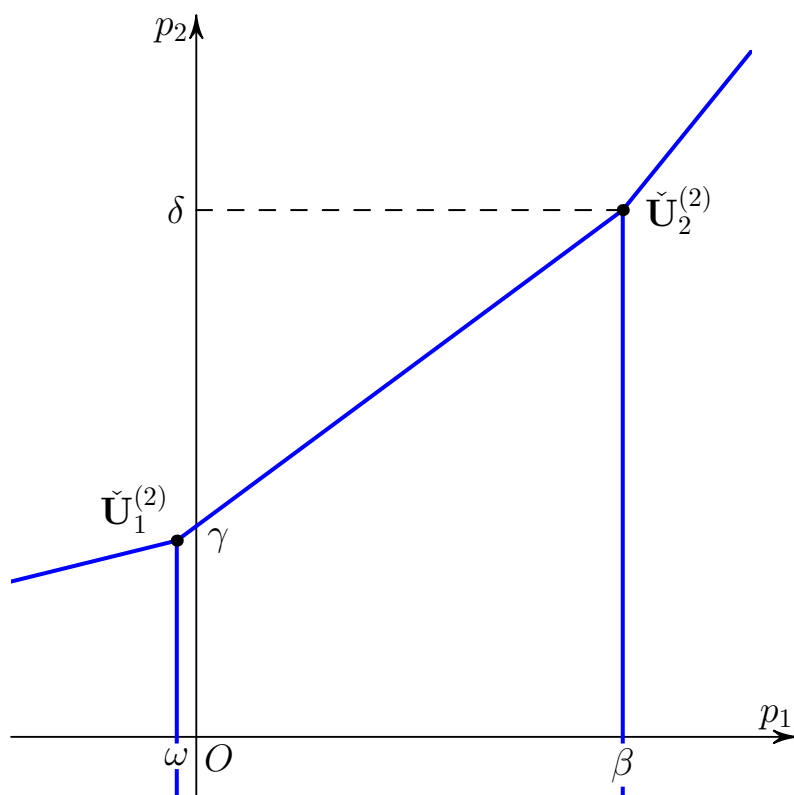


Рис. 7. Приведённые нормальные конусы многогранника Адамара многочлена (11).

для которой  $g_2 = 40$ ,  $g_3 = 0$ . Поэтому кривая  $\check{\mathcal{F}}_2$  униформизируется так:

$$x = \wp(t|40, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\varphi}_2(t), \quad y = \frac{1}{2}\wp(t|40, 0)\wp'(t|40, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \check{\psi}_2(t). \quad (13)$$

Кривые  $\mathcal{F}$ ,  $\check{\mathcal{F}}_1$ ,  $\check{\mathcal{F}}_2$  показаны на рис. 8.

Уточним кривую (12) как приближение к кривой (11). Для этого положим  $x = \check{\varphi}_1(t) + \varepsilon$ ,  $y = \check{\psi}_1(t)$ . Тогда по методу Ньютона для  $\varepsilon$  получаем уравнение

$$-\check{\psi}_1^2 + \varepsilon (9 - 30\check{\varphi}_1^2 + 5\check{\varphi}_1^4) + 9\check{\varphi}_1 - 10\check{\varphi}_1^3 + \check{\varphi}_1^5 = 0.$$

Из уравнения кривой  $\check{\mathcal{F}}_1$  получаем, что

$$\varepsilon (9 - 30\check{\varphi}_1^2 + 5\check{\varphi}_1^4) + \check{\varphi}_1^5 = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = -\frac{\check{\varphi}_1^5}{9 - 30\check{\varphi}_1^2 + 5\check{\varphi}_1^4}.$$

Можно вычислить и дальнейшие поправки.



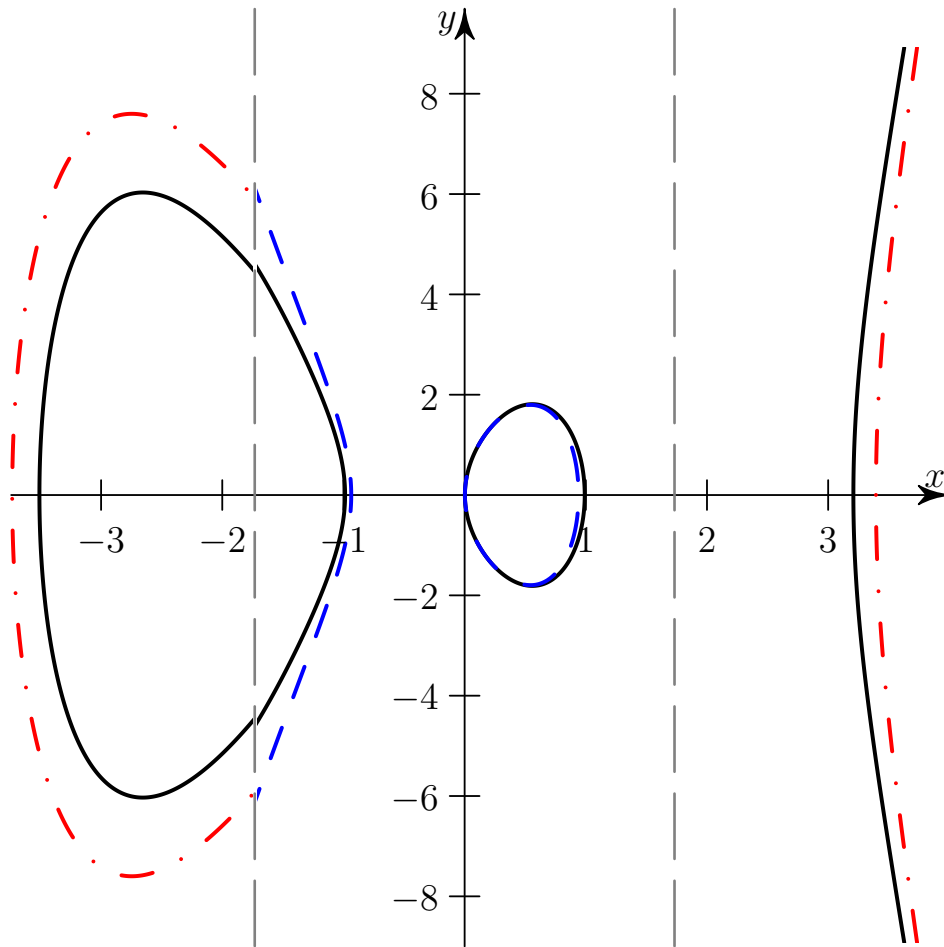


Рис. 8. Кривые примера 7:  $\mathcal{F}$  (сплошная),  $\check{\mathcal{F}}_1$  (пунктир),  $\check{\mathcal{F}}_2$  (штрих-пунктир). Кривые  $\check{\mathcal{F}}_1$ ,  $\check{\mathcal{F}}_2$  изображены только в своих областях  $\mathcal{W}_1$ ,  $\mathcal{W}_2$ .

Аналогично уточним кривую (13) как приближение кривой (11). Для этого положим  $x = \check{\varphi}_2(t) + \varepsilon$ ,  $y = \check{\psi}_2(t)$ . Тогда в первом приближении по  $\varepsilon$  получаем

$$-\check{\psi}_2^2 + \varepsilon (9 - 30\check{\varphi}_2^2 + 5\check{\varphi}_2^4) + 9\check{\varphi}_1 - 10\check{\varphi}_1^3 + \check{\varphi}_1^5 = 0.$$

Но теперь  $-\check{\psi}_2^2 = -10\check{\varphi}_2^3 + \check{\varphi}_2^5$ , поэтому

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = -\frac{9\check{\varphi}_2}{9 - 30\check{\varphi}_2^2 + 5\check{\varphi}_2^4}.$$

**Пример 8** (продолжение примера 2). Рассмотрим кривую  $\mathcal{F}$ :

$$f \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 - x - \frac{5}{6}x^3 + x^5 = 0.$$

Её род равен двум и параметризация неизвестна. Её суперноситель  $\mathbf{S}$  состоит из четырёх точек  $(0, 2, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(3, 0, \ln(5/6))$ ,  $(5, 0, 0)$ . Многогранник Адамара

**Н** имеет сверху только одну грань  $\Gamma_1^{(2)}$ , содержащую точки  $(0, 2, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(5, 0, 0)$ , с приведённым нормальным конусом  $\tilde{U}_{1+}^{(2)} = (0, 0)$ . Ей соответствует одно укороченное уравнение

$$\check{f}_1^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 - x + x^5 = 0.$$

Это кривая Бернсайда, её явная параметризация  $x = \check{\varphi}(t)$ ,  $y = \check{\psi}(t)$  в функциях  $\check{\varphi}$  и  $\check{\varphi}'$  приведена в сложной формуле (3) статьи [9]. Найдём поправку  $\varepsilon$  к кривой  $\check{\mathcal{F}}_1$ . Положим  $g(t, \varepsilon) = f(\check{\varphi}_1(t) + \varepsilon, \check{\psi}_1(t))$ . Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(\check{\varphi}_1, \check{\psi}_1)},$$

и в первом приближении получаем уравнение для  $\varepsilon$ :  $f(\check{\varphi}, \check{\psi}) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\check{\varphi}, \check{\psi}) = 0$ , т. е.

$$\varepsilon = - \frac{\frac{5}{6} \check{\varphi}_1^3(t)}{-1 - \frac{5}{2} \check{\varphi}_1^2 + 5 \check{\varphi}_1^4}.$$

Эту процедуру можно продолжить и получить дальнейшие добавки  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  как рациональные функции от  $\check{\varphi}_1(t)$  и  $\check{\psi}_1(t)$ . Здесь область  $\mathcal{W}_1$  совпадает со всем пространством.  $\square$

При этом подходе приходим к задаче параметризации кривых вида

$$y^m = a_k x^k + a_l x^l, \quad k < l, \quad a_k, a_l = \text{const} \neq 0.$$

Они могут быть любого рода (см. пример 5), но у них много симметрий, т. е. бирациональных автоморфизмов.

**3.8. Преобразование кривой в координатную ось.** Пусть кривая  $\mathcal{F}$ , заданная алгебраическим уравнением  $f(x_1, x_2) = 0$ , имеет параметризацию  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Для того чтобы перевести кривую  $\mathcal{F}$  в координатную ось, сделаем замену координат

$$x_1 = \varphi(t) + \beta_1 z, \quad x_2 = \psi(t) + \beta_2 z, \tag{14}$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — такие постоянные, что  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ . Тогда многочлен  $f(x_1, x_2)$  переходит в функцию  $h(t, z)$ , которая при  $z = 0$  тождественно равна нулю, а её производная  $\partial h / \partial z \neq 0$  при  $z = 0$ .

**Пример 9** (продолжение примера 4). В многочлене  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$  сделаем подстановку

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3} + 3z, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}. \tag{15}$$

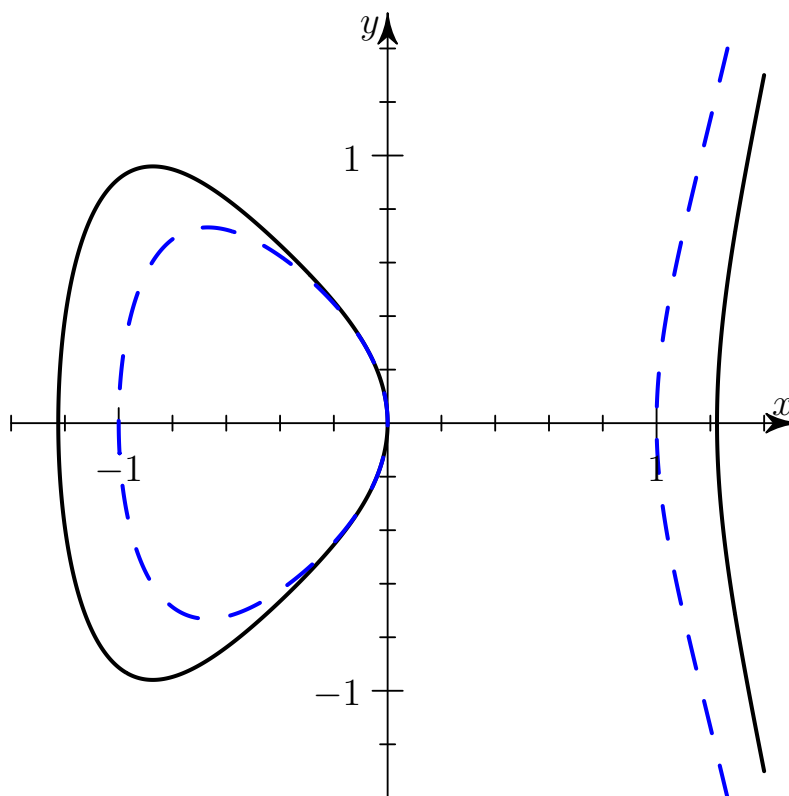


Рис. 9. Кривые примера 8:  $\mathcal{F}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_1$ .

После умножения на общий знаменатель  $(1 + t^3)^3$  получим многочлен

$$\tilde{f}(t, z) = (1 + t^3)^2 z^3 + 3z^2 t(1 + t^3) + z t^2 (2 - t^3),$$

у которого прямая  $z = 0$  является корнем. На этой прямой

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = t^2 (2 - t^3) \neq 0.$$

Эта производная обращается в ноль при  $t = t_0 = 0$  (что соответствует двойной точке  $x_1 = x_2 = 0$ , ей же соответствует  $t = \infty$ ) и при  $t = t_1 = \sqrt[3]{2}$ . В этой последней точке  $\partial f / \partial x_1 = 0$  на  $f = 0$ . Точку  $t_1$  можно убрать, если вместо (15) сделать замену с другим набором чисел  $\beta_1, \beta_2$  в (14). Но тогда получится другая точка  $t_2 \neq 0, \infty$ , где  $\partial \tilde{f} / \partial z = 0$  при  $z = 0$ .  $\square$

*Замечание 1.* Аналогичная техника применима и при  $n = 3$  для глобальной параметризации двумерного алгебраического многообразия, заданного одним многочленом от трёх переменных. Если такая глобальная параметризация не находится, то её можно заменить несколькими приближенными параметризациями, которые находятся с помощью четырёхмерного многогранника Адамара.

*Замечание 2.* Униформизация двумерных алгебраических поверхностей с помощью радикалов рассматривается в [19].

## 4. Локальный анализ для $n = 2$

Точка  $X = X^0$ ,  $f(X^0) = 0$  называется *простой* точкой кривой  $\mathcal{F}$ , если в ней вектор  $(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2)$  не нулевой. В противном случае точка  $X^0$  называется *особой* или *критической*. Сдвигом перенесём точку  $X^0$  в начало координат.

### 4.1. Локальный анализ простой точки.

**Теорема 1** (Коши [22]). *Если при  $X^0 = 0$  производная  $\partial f/\partial x_2 \neq 0$ , то все решения уравнения (1) вблизи точки  $X^0 = 0$  содержатся в разложении*

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k,$$

где  $b_k$  — постоянные.

**4.2. Локальный анализ особой точки  $X^0 = 0$  [6, гл. I, § 2], [23, гл. 2].** Запишем многочлен  $f(X)$  в виде

$$f(X) = \sum a_Q X^Q \text{ по } Q \geq 0, \quad Q \in \mathbb{Z}^n, \quad (16)$$

где  $X = (x_1, x_2)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$ ,  $X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ ,  $a_Q$  — постоянные. Пусть  $\mathbf{S}(f) = \{Q : a_Q \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Множество  $\mathbf{S}$  называется *носителем* (support) многочлена  $f(X)$ . Пусть оно состоит из точек  $Q_1, \dots, Q_k$ . Выпуклая оболочка носителя  $\mathbf{S}(f)$  — это множество

$$\mathbf{N}(f) = \left\{ Q = \sum_{j=1}^k \mu_j Q_j, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^k \mu_j = 1 \right\},$$

которое называется *многоугольником Ньютона*. Граница  $\partial \mathbf{N}(f)$  состоит из вершин  $\Gamma_i^{(0)}$  и рёбер  $\Gamma_i^{(1)}$ , где  $i$  — это номер.

Каждому ребру  $\Gamma_i^{(1)}$  соответствуют его *граничное подмножество*  $\mathbf{S}_i^{(1)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_i^{(1)}$ , *укороченный многочлен*

$$\hat{f}_i^{(1)}(X) = \sum a_i X^Q \text{ по } Q \in \mathbf{S}_i^{(1)}$$

и свой *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle, Q', Q'' \in \Gamma_i^{(1)}, Q''' \in \Gamma \setminus \Gamma_i^{(1)} \right\},$$

где  $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ , а плоскость  $\mathbb{R}_*^2$  сопряжена плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**Лемма 1** ([6, гл. I, § 2]). *Вблизи особой точки  $X^0 = 0$  все решения уравнения  $f(X) = 0$  образуют ветви вида*

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \tau^{r_{ik}}, \quad i = 1, 2, \quad \tau \rightarrow 0, \quad r_{ik} < r_{ik+1} \quad (17)$$

*и каждый вектор  $R_1 = (r_{11}, r_{21})$  принадлежит одному из нормальных конусов  $U_i^{(1)}$ , лежащих в третьем квадранте плоскости  $\mathbb{R}_*^2$ , т. е.  $p_1, p_2 < 0$ .*

Из этой леммы следует, что в разложениях (17) отношения  $r_{ik}/r_{i1}$ ,  $i = 1, 2$ , суть рациональные числа. Более того, при правильной параметризации все числа  $r_{ik}$  — целые.

Аналогично устроены ветви кривой (1) вблизи точки  $X^0 = (\infty, \infty)$ , только там надо ограничиться рёбрами  $\Gamma_i^{(1)}$  с нормальными конусами  $U_i^{(1)}$ , лежащими в первом квадранте  $p_1, p_2 > 0$  плоскости  $\mathbb{R}_*^2$ . Наконец, так же устроены ветви кривой (1) вблизи точки  $X^0 = (0, \infty)$ , только там нормальные конусы  $U_i^{(1)}$  лежат во втором квадранте  $p_1 < 0, p_2 > 0$  (в конусе задачи).

**4.3. Степенное преобразование.** Теперь заметим, что степенное преобразование

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где  $\alpha = (\alpha_{ij})$  — неособая квадратная  $(2 \times 2)$  матрица с вещественными элементами  $\alpha_{ij}$ , индуцирует аффинное преобразование в плоскостях  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}_*^2$ :

$$\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^* \quad \text{и} \quad \tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*,$$

где звёздочка означает транспонирование. При этом

$$\langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle = \langle P, Q \rangle$$

и моном  $X^Q$  переходит в моном  $Y^{\tilde{Q}}$ .

В дальнейшем можно ограничиться только унимодулярными матрицами  $\alpha = (\alpha_{ij})$ , т. е.  $\alpha_{ij}$  — целые и  $\det \alpha = \pm 1$ .

**Лемма 2** ([6, гл. I, § 2]). *Для каждого ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  существует степенное преобразование (18) с унимодулярной матрицей  $\alpha$ , которое переводит многочлен  $f(X)$  в многочлен  $g(Y)$ . При этом ребру  $\Gamma_i^{(1)} \subset \partial \mathbf{N}(f)$  соответствует вертикальное ребро  $\tilde{\Gamma}_i^{(1)} \subset \partial \mathbf{N}(g)$ .*

Теперь для вычисления разложений, соответствующих ребру  $\Gamma_i^{(1)}$ , надо найти ненулевые корни  $y_2 = y_2^0$  уравнения  $y_1^q \tilde{g}_i(y_2) = 0$ , где  $y_1^q \tilde{g}_i(y_2)$  — укорочение многочлена  $g(y_1, y_2)$ , соответствующее вертикальному ребру  $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ . Пусть  $y_2^0 \neq 0$  — такой корень. Если он прост, то теорема 1 о неявной функции даёт разложение ветви, проходящей через точку  $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$ . Если  $y_2^0$  — кратный корень многочлена  $\tilde{g}_i(y_2)$ , то делаем сдвиг  $y_2 = y_2^0 + z_2$  и исследуем окрестность точки  $y_1 = z_2 = 0$  тем же способом. Так получаются все ветви исходной кривой.

**Пример 10.** Лист Декарта

$$f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0 \quad (19)$$

имеет особую точку  $x_1 = x_2 = 0$ . Носитель многочлена (19) состоит из точек  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$  и  $(1, 1)$ . Их выпуклая оболочка — треугольник с этими вершинами (рис. 10) и тремя рёбрами. Приведённые нормальные конусы  $\tilde{U}_{j\pm}^{(1)}$  рёбер  $\Gamma_j^{(2)}$  суть точки  $(-1/2, -1)$ ,  $(-2, -1)$ ,  $(1, 1)$ .

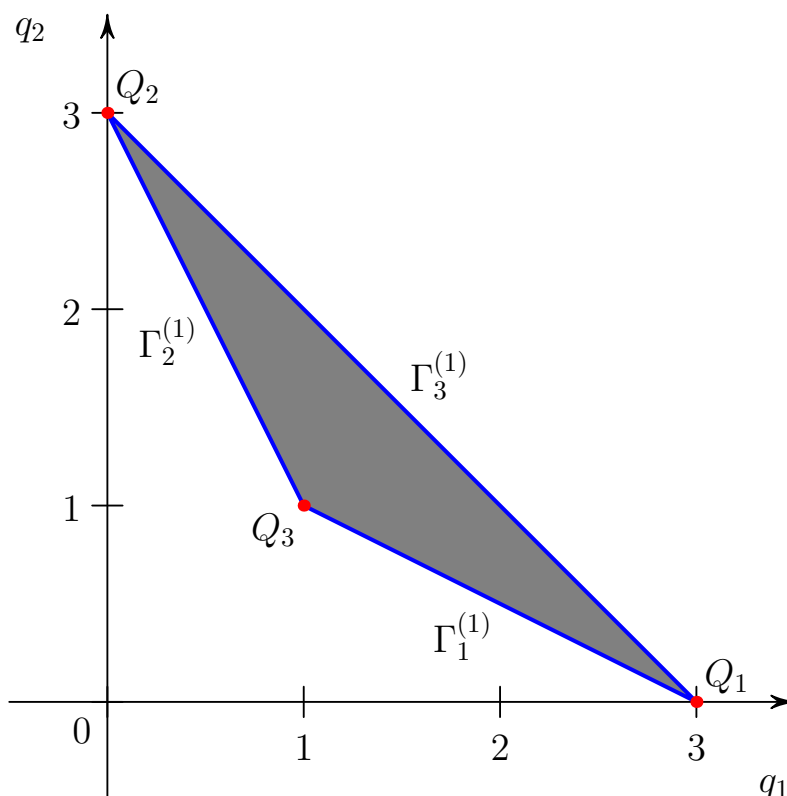


Рис. 10. Носитель и многоугольник Ньютона листа Декарта (19).

1. Ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствуют укороченный многочлен

$$\hat{f}_1^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2$$

и ветвь  $x_2 = \frac{1}{3}x_1^2 + \varphi(x_1)$ .

2. Ребру  $\Gamma_2^{(1)}$  соответствуют укорочение

$$\hat{f}_2^{(1)}(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1x_2$$

и ветвь  $x_1 = \frac{1}{3}x_2^2 + \varphi(x_2)$ . Обе эти ветви пересекаются в особой точке  $X^0 = 0$ .

3. Ребру  $\Gamma_3^{(1)}$  соответствуют укорочение

$$\hat{f}_3^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

и ветвь  $x_2 = -x_1 - 1 + \dots$  в бесконечности (рис. 5). □

## 5. Модифицированные теоремы о неявной функции для $n = 3$

**Теорема 2** (Коши [22]). Пусть при  $X^0 = 0$  имеем  $f(X) = 0$  и  $\partial f / \partial x_3 \neq 0$ , тогда вблизи точки  $X = X^0$  все решения уравнения  $f(X) = 0$  имеют вид

$$x_3 = \sum b_{Q'} X'^{Q'}, \quad (20)$$

где  $X' = (x_1, x_2)$ ,  $Q' = (q_1, q_2)$ ,  $b_{Q'} = \text{const}$ .

**Теорема 3** ([20, 24]). Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q, \quad (21)$$

где  $a_Q = \text{const}$ ,

$$q_1 - \lambda_1 q_2 < 0, \quad q_1 - \lambda_2 q_2 < 0, \quad 0 \leq Q \in \mathbb{Z}^3, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const} \quad (22)$$

и  $a_{(0,0,1)} = \partial f / \partial x_3|_{X=0} \neq 0$ . Тогда решение уравнения  $f(X) = 0$  имеет вид (20), где  $b_{Q'} = \text{const}$  и выполнены неравенства (22); такое решение единственно.

**Теорема 4** ([23, гл. II, § 1, теорема 1.1]). Пусть

$$f(X) = \sum a_{q_2 q_3}(x_1) x_2^{q_2} x_3^{q_3}, \quad (23)$$

где сумма конечна,  $0 \leq q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$ , а  $a_{q_2 q_3}(x_1)$  — некоторые функции от  $x_1$ , кроме того

$$a_{00}(x_1) \equiv 0, \quad a_{10}(x_1) \not\equiv 0.$$

Тогда решение уравнения  $f(X) = 0$  имеет вид

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x_1)x_3^k, \quad (24)$$

где коэффициенты  $b_k$  суть функции от  $x_1$ , являющиеся многочленами от  $a_{q_2q_3}(x_1)$  с  $q_2 + q_3 \leq k$ , деленными на  $a_{10}^{2k-1}$ . Такое разложение единственно.

В русском издании книги [23] имеется опечатка в формулировке этой теоремы. Она исправлена в её английском издании. Кроме того, в [23] она сформулирована вблизи точки  $X = 0$ , но она справедлива вблизи оси  $x_1$ , т. е. прямой  $x_2 = x_3 = 0$ .

Имплементация имеется только для теорем 2 и 3 в Maple и в [20].

## 6. Локальный анализ для $n = 3$

Точка  $X = X^0$ ,  $f(X^0) = 0$  называется *простой*, если в ней вектор  $(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \partial f/\partial x_3)$  ненулевой. В противном случае точка  $X = X^0$  называется *особой* или *критической*. Сдвигом  $X = X^0 + \tilde{X}$  перенесём точку  $X^0$  в начало координат. Если в этой точке производная  $\partial f/\partial x_3 \neq 0$ , то согласно теореме 2 о неявной функции вблизи  $X^0$  все решения уравнения  $f(X) = 0$  имеют вид (20).

**6.1. Многогранник Ньютона.** Пусть точка  $X^0 = 0$  — особая. Записываем многочлен в виде  $f(X) = \sum a_Q X^Q$  (16) с  $n = 3$  и строим его многогранник Ньютона. То есть: носитель  $\mathbf{S} = \{Q : a_Q \neq 0\}$ , многогранник Ньютона  $\mathbf{N}$  как выпуклую оболочку носителя, находим его границу  $\partial\mathbf{N}$  и её обобщённые грани  $\Gamma_j^{(d)}$ , т. е. вершины с  $d = 0$ , ребра с  $d = 1$  и обычные грани с  $d = 2$ . Для каждой из них вычисляем граничное множество  $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_j^{(d)}$ , укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_Q X^Q \text{ по } Q \in \mathbf{S}_j^{(d)}$$

и нормальный конус  $\mathbf{U}_j^{(d)}$  в сопряжённом пространстве  $\mathbb{R}_*^3$ . При  $X \rightarrow 0$  решения полного уравнения стремятся к нетривиальным решениям тех укороченных уравнений

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0,$$

у которых нормальный конус  $\mathbf{U}_j^{(d)}$  пересекается с отрицательным октантом  $P \leq 0$  в  $\mathbb{R}_*^3$ . Для вершины  $\Gamma_j^{(0)}$  укороченная сумма  $\hat{f}_j^{(0)}$  состоит из одного слагаемого. Такие укорочения нам не интересны, ибо их корни — это нулевые значения координат, и в дальнейшем не рассматриваются. Будем рассматривать лишь укорочения, т. е. укороченные суммы, соответствующие ребрам  $\Gamma_j^{(1)}$  и граням  $\Gamma_j^{(2)}$ .



**6.2. Степенные преобразования [23].** Введем *степенные преобразования*

$$\ln X = \alpha \ln Y, \quad (25)$$

где  $\ln X = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)^*$ ,  $\ln Y = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3)^*$ ,  $\alpha$  — невырожденная квадратная  $3 \times 3$  матрица  $(\alpha_{ij})$  с рациональными элементами  $\alpha_{ij}$  (зачастую они будут целыми). При степенном преобразовании (25) моном  $X^Q$  переходит в моном  $Y^{\tilde{Q}}$ , где

$$\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^*.$$

Степенное преобразование (25) в двойственном пространстве  $\mathbb{R}_*^3$  индуцирует линейное преобразование

$$\tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*.$$

Матрица  $B$  называется *унимодулярной*, если все ее элементы целые и  $\det B = \pm 1$ . Очевидно, для унимодулярной матрицы  $B$  обратная матрица  $B^{-1}$  также унимодулярна.

**Теорема 5** ([20, теорема 2]). *Для грани  $\Gamma_j^{(d)}$  существует степенное преобразование (25) с унимодулярной матрицей  $\alpha$ , которое переводит укороченную сумму  $\hat{f}_j^{(d)}(X)$  в сумму от  $d$  координат, т. е.*

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^R h(Y),$$

где  $h(Y) = h(y_1)$ , если  $d = 1$ , и  $h(Y) = h(y_1, y_2)$ , если  $d = 2$ . Здесь  $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ . При этом дополнительные координаты  $y_2, y_3$  при  $d = 1$  и  $y_3$  при  $d = 2$  являются локальными, и для многочлена  $\hat{f}_j^{(d)}(X)$  сумма  $h(Y)$  также будет многочленом.

Умножению многочлена  $f(X)$  на  $X^P$  соответствует параллельный перенос носителя  $\mathbf{S}(f)$  и многогранника  $\Gamma(f)$  на вектор  $P$ . Поэтому если после степенного преобразования (25), применённого к многочлену  $f(X)$ , получаем конечную сумму  $g(Y)$ , содержащую отрицательные степени координат  $y_1, y_2$  или  $y_3$ , то существует такой вектор  $P$ , что произведение  $Y^P g(Y)$  является многочленом, т. е. все показатели степени его мономов неотрицательны.

Структура решений полного уравнения, стремящихся к решениям укороченного уравнения, определяется размерностью  $d$  соответствующей обобщённой грани. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

**6.3. Случай ребра, т. е.  $d = 1$  [23].** В этом случае по теореме 5 существует степенное преобразование и сокращение, приводящее многочлен  $f(X)$  к виду (21), (22). При этом образ ребра  $\Gamma_j^{(1)}$  находится на оси  $q_3$ , т. е.  $q_1 = q_2 = 0$ . Соответствующее укорочение является многочленом  $h(y_3)$ . Пусть  $y_3 = y_3^0$  — его корень. Если это простой корень, то применима теорема 3, которая дает решение полного уравнения  $f(X) = 0$  в виде

$$y_3 = \sum b_{Q'} Y'^{Q'},$$

$Q' = (q_1, q_2)$  с неравенствами

$$q_1 - \lambda_1 q_2 < 0, \quad q_1 - \lambda_2 q_2 < 0.$$

Если  $y_3^0$  — кратный корень, то сдвигом  $y_3 = y_3^0 + \tilde{y}_3$  переводим его в начало координат; получаем новый многочлен  $g(y_1, y_2, \tilde{y}_3)$  и ищем его корни с помощью построения многогранника Ньютона, как описано выше.

**6.4. Случай грани, т. е.  $d = 2$ .** В этом случае согласно теореме 5 с помощью степенного преобразования и сокращения приводим многочлен  $f(X)$  к виду  $g(Y)$ , где  $g(Y) = h(y_1, y_2)$  при  $y_3 = 0$ . Уравнение  $h(y_1, y_2) = 0$  определяет плоскую алгебраическую кривую. Пусть  $\tilde{h}(y_1, y_2)$  — неприводимый сомножитель многочлена  $h(y_1, y_2)$  и  $g$  — род соответствующей кривой  $\mathcal{G}$ .

Так или иначе находим униформизацию кривой  $\mathcal{G}$ . Затем алгоритмом п. 3.8 переводим эту кривую в координатную ось, т. е. делаем рациональную замену координат

$$y_1 = \varphi(t) + \beta_1 z, \quad y_2 = \psi(t) + \beta_2 z, \quad (26)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — такие постоянные, что  $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ . Тогда многочлен  $\tilde{h}(y_1, y_2)$  переходит в многочлен  $H(t, z)$ , который при  $z = 0$  тождественно равен нулю, а его производная  $\partial H / \partial z \neq 0$  при  $z = 0$ . При замене (26) во всем многочлене  $g(Y)$  он переходит в функцию  $G(Z)$ , где  $z_1 = t$ ,  $z_2 = z$ ,  $z_3 = y_3$ . Если  $\tilde{h}(y_1, y_2)$  — простой множитель многочлена  $h(y_1, y_2)$ , то применяем теорему 4 и получаем решение — ветвь вида (24)

$$z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_1) z_3^k,$$

где  $b_k(z_1)$  суть рациональные функции от коэффициентов многочлена  $G(Z)$ .

Если  $\tilde{h}(y_1, y_2)$  — кратный множитель в  $h(y_1, y_2)$ , то после замены (26) надо для полученного многочлена снова строить многогранник Ньютона и т. д. Аналогично, для каждой из особых точек многочлена  $h(y_1, y_2)$ : надо сдвигать её в

начало координат по  $y_1, y_2$  и строить многогранник Ньютона. Примеры таких вычислений см. в [24].

Автор благодарит А. Б. Батхина за большую помощь в подготовке этой работы.

## Список литературы

- [1] Fukuda K. Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation // Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations, ACM NY, USA, 2008, 333–334.
- [2] Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T. The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Trans. on Mathematical Software, 22(4):469–483, Dec. 1996, <http://www.qhull.org>.
- [3] King, R. B. Beyond the quartic equation. Birkhäuser, Boston, 1996.
- [4] Умемура Х. Решение алгебраических уравнений с помощью тэта-констант. В кн. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М. Мир, 1988. С. 360–370.
- [5] Hadamard J. Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction consideree par Riemann // Journal de mathematiques pures et appliques. — 1893. — Т. 9, No. 2. — Pp. 171–215.
- [6] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука. 1979. = Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1989.
- [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: «Наука». 1967. Т. 3. = Bateman H. and Erdélyi A. Higher Transcendental Functions, V. 3. — McGraw-Hill, 1955.
- [8] Brezhnev Yu. V. On the uniformization of algebraic curves // Moscow Mathematical Journal. — 2008. — V. 8, No. 2. — Pp. 233–271.
- [9] Brezhnev Yu. V. On uniformization of Burnside's curve  $y^2 = x^5 - x$  // Journ. Math. Phys. — 2009. **50**:10.
- [10] Brezhnev Yu. V. The sixth Painlevé transcendent and uniformization of algebraic curves // J. Differential Equations. — 2016. — V. 260, no. 3. — Pp. 2507–2556. DOI: 10.1016/j.jde.2015.10.009

- [11] Belokolos E. D., Enolskii V. Z. Reduction of Abelian functions and completely integrable equations // *J. Math. Sci.* — 2001. — V. 106, No. 6. — Pp. 3395–3486 (Part I) and 2002. — V. 108, No. 3. — Pp. 295–374 (Part II).
- [12] Ônishi Y. Complex multiplication formulae for hyperelliptic curves of genus three // *Tokyo Journal Mathematics.* — 1998. — V. 21. — Pp. 381–431.
- [13] Аптекарев А. И., Туляков Д. Н., Ятцелев М. Л. О параметризации одной комплексной алгебраической кривой рода 2 // *Матем. заметки.* — 2015. — Т. 98:5. — С. 782–785. = Aptekarev A. I., Toulyakov D. N. and Yattselev M. L. On the parametrization of a certain algebraic curve of genus 2 // *Math. Notes.* — 2015. — Vol. 95, No. 5. — Pp. 843–846. DOI: 10.4213/mzm10799
- [14] Aptekarev A. I., Toulyakov D. N., Van Assche W. Hyperelliptic uniformization of algebraic curves of third order // *J. Computational and Applied Mathematics.* — 2015. — V. 284. — Pp. 38–49. DOI: 10.1016/j.cam.2014.11.048
- [15] Уокер Р. Алгебраические кривые. Пер. с англ. — М.: Книжный дом «ЛИБ-РОКОМ», 2009. = Walker R. J. Algebraic Curves.— Princeton, New Jersey, 1950.
- [16] Eilbeck J. C., Enolski V. Z., Matsutani S., Ônishi Y., Previato E. Abelian functions for trigonal curves of genus three // *Int. Math. Res. Notices.* — 2007. — V. 2007. Article ID rnm140. DOI: 10.1093/imrn/rnm140
- [17] Eilbeck J. C. Weierstrass functions for higher genus curves // <http://www.ma.hw.ac.uk/Weierstrass>
- [18] Sendra J. R., Sevilla D. Radical parametrizations of algebraic curves by adjoint curves // *Journal of Symbolic Computation.* — 2011. — Vol. 46. — Pp. 1030–1038. DOI: 10.1016/j.jsc.2011.05.005
- [19] Harrison M. Explicit solution by radicals, gonial maps and plane models of algebraic curves of genus 5 or 6 // *Journal of Symbolic Computation.* — 2013. — Vol. 51. — Pp. 3–21. DOI: 10.1016/j.jsc.2012.03.004
- [20] Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // *Программирование.* — 2012. — Т. 38, no. 2. — С. 12–30 = Resolution of algebraic singularity by algorithms of Power Geometry // *Programming and Computer Software.* — 2012. — V. 38, No. 2. — Pp. 57–72. DOI: 10.1134/S036176881202003X

- [21] Sendra J. R., Sevilla D. First step towards radical parametrization of algebraic surfaces // Computer Aided Geometric Design.— 2013.— Vol. 30. Pp. 374–388. DOI: 10.1016/j.cagd.2012.12.004
- [22] Гурса Э. Курс математического анализа. — М.-Л.: ГТТИ, 1993. Т. 1, Ч. 2. = Goursat E. Course of Mathematical Analysis. — Dover Publ. Inc., New York. 1959.
- [23] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит. 1998. = Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. Elsevier Science (North-Holland), Amsterdam, 2000.
- [24] Bruno A. D. Asymptotic solving essentially nonlinear problems // Mathematics and Statistics. — 2016. — Vol. 4, No. 1. — Pp. 27–39. DOI: 10.13189/ms.2016.040104

## Оглавление

Введение . . . . .	3
1 Многогранник и нормальные конусы . . . . .	4
2 Глобальный анализ для $n = 1$ . . . . .	4
3 Глобальный анализ для $n = 2$ . . . . .	9
4 Локальный анализ для $n = 2$ . . . . .	19
5 Модифицированные теоремы о неявной функции для $n = 3$ . . . . .	22
6 Локальный анализ для $n = 3$ . . . . .	23
Список литературы . . . . .	26