



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 40 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Блянкинштейн Н.И., Орлов Ю.Н.,
Родкин М.В., Федоров С.Л.

Об оценке уровня
стационарности каталогов
землетрясений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Об оценке уровня стационарности каталогов землетрясений / Н.И.Блянкинштейн [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 40. 18 с. doi:[10.20948/prepr-2017-40](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-40)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-40>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**Н.И. Блянкинштейн, Ю.Н. Орлов,
М.В. Родкин, С.Л. Федоров**

**Об оценке уровня стационарности
каталогов землетрясений**

Москва — 2017

Блянкинштейн Н.И., Орлов Ю.Н., Родкин М.В., Федоров С.Л.

Об оценке уровня стационарности каталогов землетрясений

В работе анализируется уровень стационарности Японского регионального каталога JMA по магнитудам и промежуткам времени между событиями. Показана большая, чем обычно принимается в расчет, трендовая нестационарность каталога, предположительно связанная с развитием наблюдательной сети. Выявлены также короткопериодные нестационарности. Показано, что вариабельность распределений этих параметров может быть объяснена меняющимся во времени коэффициентом наклона в законе распределения Гутенберга-Рихтера. Изменение этого коэффициента можно представить в виде суперпозиции двух квазипериодических динамических систем с коротким и длинным периодами.

Ключевые слова: землетрясение, магнитуда, согласованный уровень стационарности, выборочная функция распределения

Bliankinshtein N.I., Orlov Yu.N., Rodkin M.V., Fedorov S.L.

On the estimation of stationary level of earthquake catalogs

In this paper we analyzed the stationary level of JMA catalog of magnitude and time intervals between events. It was shown, that these distributions are non-stationary and the time dependence of Gutenberg – Richter law parameter could be represented as a superposition of two quasi-periodical dynamical systems with short and long periods.

Key words: earthquake, magnitude, self-consistent stationary level, sample distribution function

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект

№ 16-01-00342

Содержание

Введение	3
1. Согласованный уровень стационарности	6
2. Анализ уровня нестационарности распределений.....	8
3. Динамика угла наклона в законе Гуттенберга-Рихтера	14
Выводы	17
Литература	18

Введение

В задачах прогнозирования землетрясений важную роль играет понимание тонких особенностей изменений статистики этих событий во времени. Главными объектами анализа являются региональные функции распределения землетрясений по магнитуде и функции распределения промежутков времени между последовательными событиями, что отражает рост или уменьшение сейсмической активности (как известно, к прогностическим признакам относятся как рост потока слабых землетрясений, так и эффект сейсмического затишья). Эти функции распределения являются эмпирическими, причем в разных регионах планеты они различны и, возможно, нестационарны, также и ввиду изменения систем регистрации. Нестационарность наблюдаемых распределений и является центральным объектом изучения в данной работе. При этом, на данном этапе, мы рассматриваем общие особенности нестационарности, не переходя на уровень изменений режима сейсмичности в окрестности отдельных сильных землетрясений.

В качестве примера анализируется временной ряд магнитуд землетрясений Японии с 1916 по январь 2011 года по данным регионального каталога JMA (Japan Meteorological Agency), данные за более ранние годы мы исключили как заведомо сильно нестационарные и неполные. Мы также ограничились рассмотрением центральной части региона, лишь с незначительным захватом прилегающей акватории; это было сделано в целях большей стационарности используемого далее ряда данных. Стандартная проверка полноты полученного каталога по выполнимости закона Гутенберга-Рихтера позволяет считать этот каталог удовлетворительно полным на уровне магнитуд $M_{JMA} \geq 4.0$. В сформированном таким образом подкаталоге содержится около 34 тыс. событий с магнитудой $M_{JMA} \geq 4$. Фрагмент этого ряда за последние 3 года представлен на рис. 1, а на рис. 2 показано распределение вероятностей этих событий по магнитуде.

В соответствии с эмпирическим законом Гутенберга-Рихтера [1] плотность функции распределения (а также и сама функция распределения) числа землетрясений N от магнитуды M имеет вид:

$$\lg(N) = a - bM, \quad (1)$$

где N – число землетрясений с магнитудой не менее M , a и b – параметры; параметр a характеризует сейсмическую активность (равен числу событий с магнитудой $M \geq 0$), параметр b отражает долю событий разной магнитуды и обычно называется углом наклона графика повторяемости землетрясений.

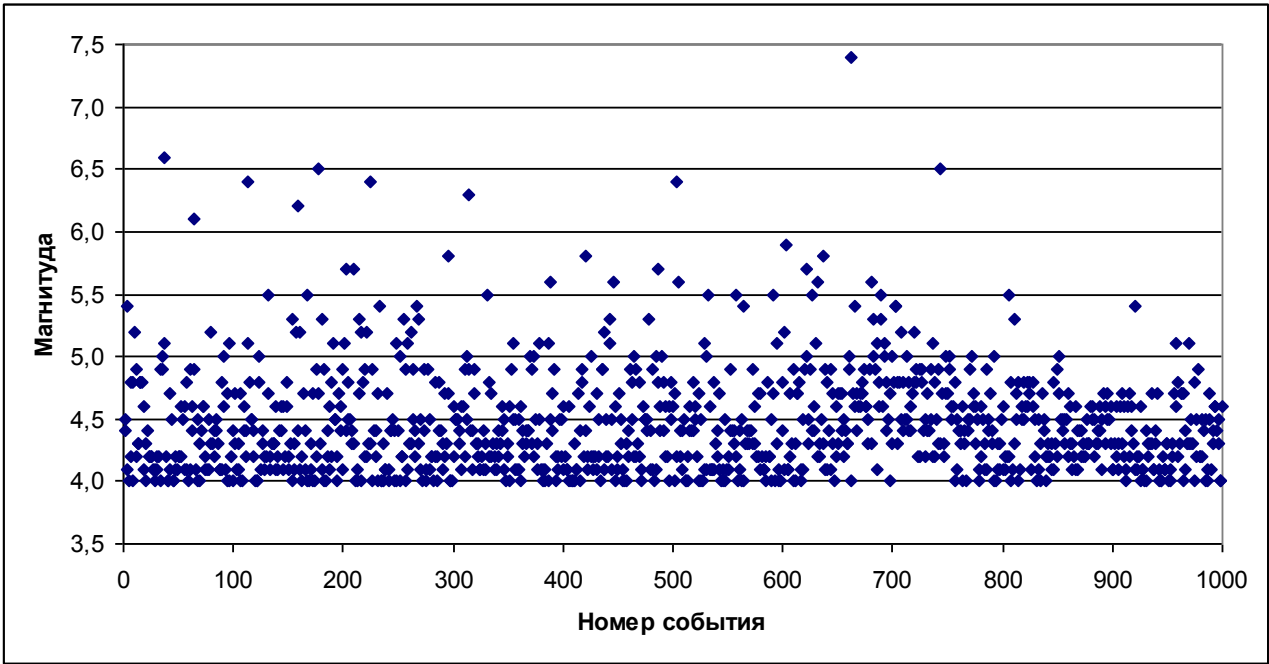


Рис. 1. Фрагмент ряда магнитуд

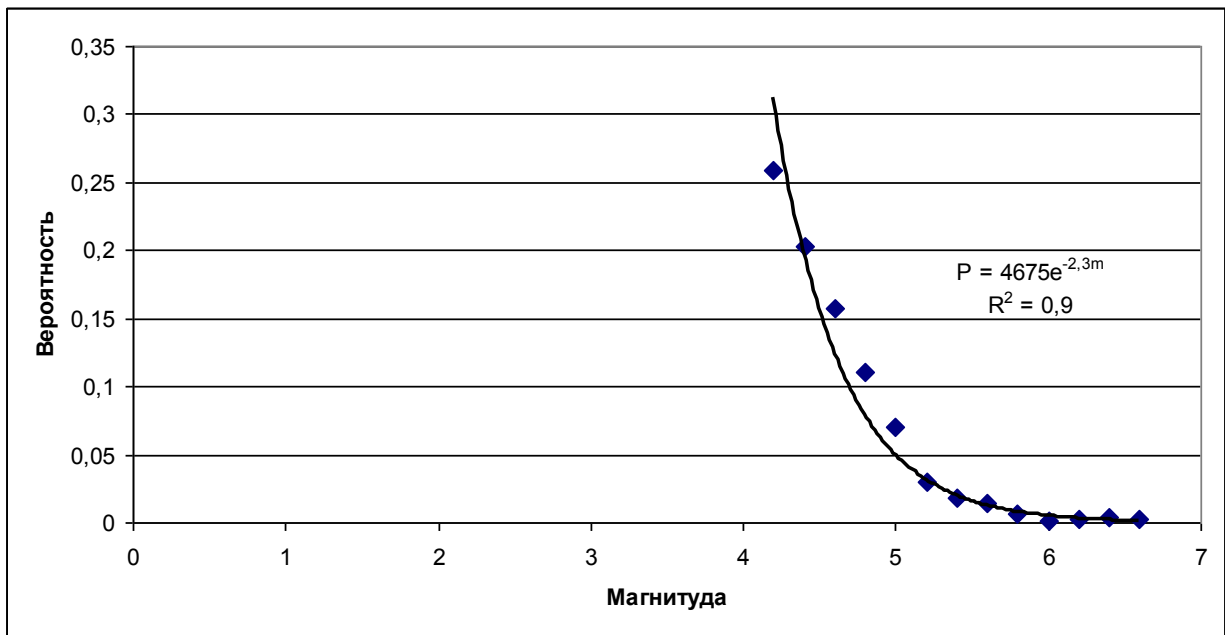


Рис. 2. Плотность распределения фрагмента ряда (рис. 1)

Широко используемым параметром сейсмического режима в сейсмологии является коэффициент наклона графика повторяемости землетрясений – величина b из соотношения (1). В большом числе работ обосновывается, что уменьшения величин параметра b являются предвестниковым признаком сильного землетрясения. Но обычно исследуемые вариации значения b привязываются к конкретным сильным и сильнейшим землетрясениям [2]. Возникает вопрос: насколько систематически варьируеблен коэффициент наклона b для разных выборок конечной длины? Являются ли рассматриваемые

распределения стационарными в общем случае непараметрического оценивания?

Например, следует ли считать различными распределения, построенные по первой части Каталога (плотность $df1$ в легенде рис. 3) и по второй ($df2$)? Насколько значимо их отличие от полного распределения (df)? Аналогичные вопросы можно поставить и по отношению к распределениям промежутков времени (в логарифмах секунд) между событиями, показанным на рис. 4.

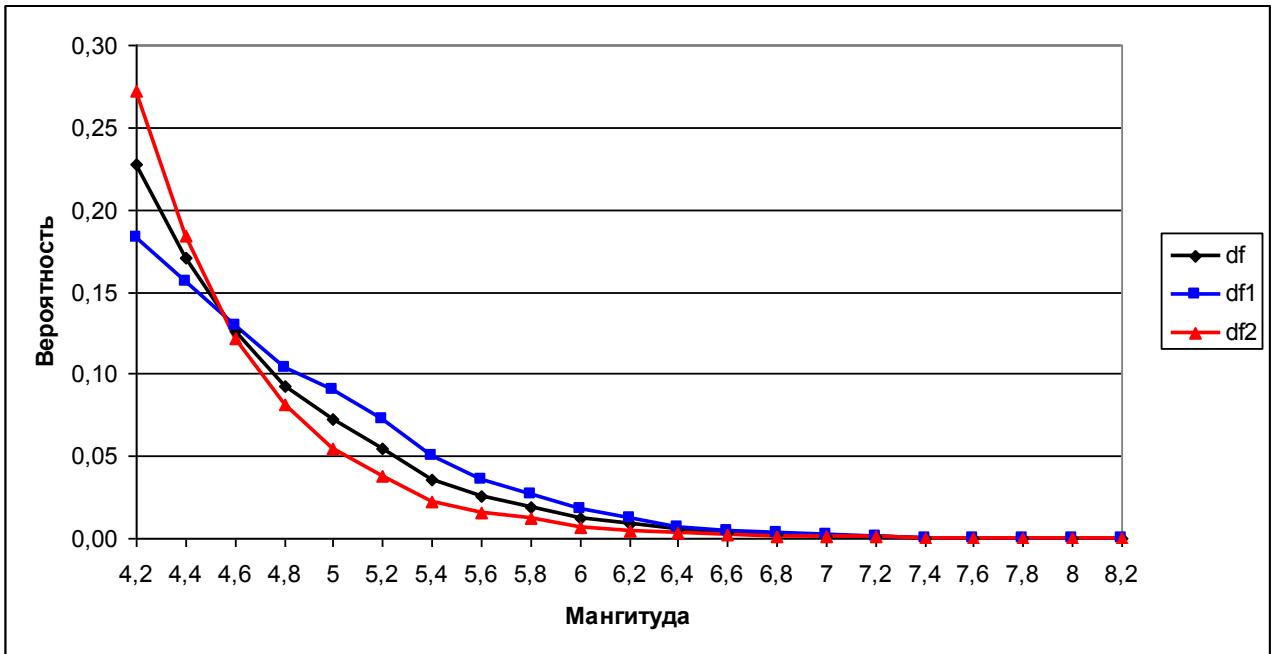


Рис. 3. Распределения магнитуд землетрясений по Японии за разные интервалы времени.

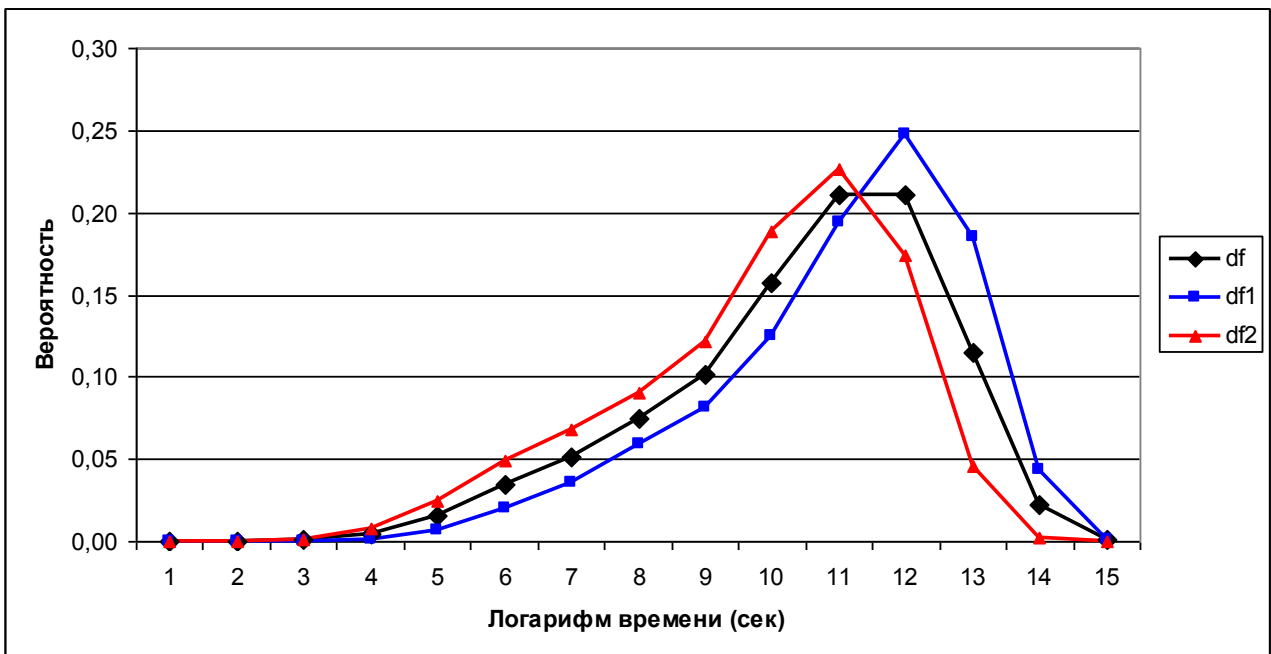


Рис. 4. Распределения промежутков времени между событиями

Расстояние между распределениями магнитуд за первую и вторую половину данных в норме С для функций распределения составило 0,18, а в гистограммной норме L1 для плотностей функций распределения (они и показаны на рис. 3) при равномерном разбиении гистограммы – величину 0,36. Расстояние в С между двумя функциями распределения определяется как $\sup_x |F_1(x) - F_2(x)|$, а в норме L1 между плотностями – как $\int |f_1(x) - f_2(x)| dx$.

Распределения же промежутков времени за первую и вторую половины данных отличаются соответственно в норме С на 0,26, а в норме L1 – на 0,51. Много это или мало? На каком уровне доверия эти распределения можно считать построенными по выборкам из одной генеральной совокупности? Далее проводится анализ распределения расстояний между выборочными функциями распределения (ВФР) для выборок различных длин с целью установления допустимого отклонения.

1. Согласованный уровень стационарности

Как известно [3, 4], задача о принадлежности двух выборок одной генеральной совокупности решается непараметрической статистикой Колмогорова-Смирнова

$$S_N = \sup_x |F_{1,N}(x) - F_{2,N}(x)|, \quad (2)$$

для которой справедлива асимптотика

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ 0 < \sqrt{\frac{N}{2}} S_N < z \right\} = K(z), \quad (3)$$

где $K(z)$ есть табулированная функция Колмогорова, а N – длина выборки.

Это означает, что если для двух ВФР было найдено значение S_N и вычислена величина $z = \sqrt{\frac{N}{2}} S_N$, то величина $1 - K(z)$ приближенно считается

равной вероятности того, что $\sqrt{\frac{N}{2}} S_N \geq z$. Задав уровень значимости α ,

считаем, что если $1 - K(z) < \alpha$, то осуществилось маловероятное событие, несовместимое с понятием случайности, и эти выборки следует считать различными. В частности, применительно к вышеописанному примеру расстояний между двумя распределениями магнитуд, построенными по

выборкам в 17 тыс. данных, выяснилось, что $\sqrt{\frac{N}{2}} S_N = 16,3$, и по таблице

функции $K(z)$ (приведенной, например, в [3]) находим, что $1 - K(16,3) < 10^{-6}$.

Это означает, что вероятность того, что расстояние между двумя выборками указанной длины из одного распределения будет не менее чем 0,18, меньше, чем 10^{-6} , т.е. рассматриваемые распределения следует признать различными.

Некоторая неопределенность сделанного вывода состоит в том, что априори не ясно, насколько достаточен указанный уровень значимости. Суть проблемы в том, что необходимо выяснить, как часто две независимых выборки длины N отличаются в смысле ВФР в норме C больше, чем на некоторое число ε такое, что

$$1 - K\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\varepsilon\right) < \alpha. \quad (4)$$

Если число α в (4) выбрано слишком малым, то может случиться так, что доля пар выборок, расстояние между которыми удовлетворяет этому условию, будет меньше, чем α , и тогда по факту ложного отбрасывания «своей» выборки ошибка идентификации будет больше, чем α , тогда как критерий утверждает, что эта ошибка равна именно α . Обратно, если α выбрано слишком большим, то на практике может оказаться, что число пар выборок, для которых условие (4) не выполнено, больше, чем $1 - \alpha$, т.е. больше уровня доверия, на котором предположительно выполнен эксперимент по сравнению выборок. Следовательно, в предположении непрерывности распределения расстояний между ВФР, существует некоторый согласованный с экспериментом уровень значимости, равный эмпирической доле ошибочных отклонений верной гипотезы, которые (отклонения) принимаются тогда, когда расстояние между выборками больше некоторого критического уровня $\varepsilon^*(N)$.

В экспериментах по сравнению выборок случайной величиной является расстояние между парой выборок, а также и функция распределения этих расстояний, квантиль которой следует выбрать на практике в качестве нужного уровня значимости. Как известно [3, 4], если случайная величина ξ (в данном примере это расстояние между выборками) имеет функцию распределения $F(x)$ (для расстояний между выборками асимптотически это есть функция Колмогорова), то случайная величина $\eta = F(\xi)$ (здесь это уровень значимости) имеет равномерное распределение на $[0; 1]$. Следовательно, согласованный с экспериментом уровень значимости α есть функция, линейно зависящая от расстояния ε между выборками. Поскольку же в норме C это расстояние меняется от нуля до единицы, то следует положить $\alpha = \varepsilon$. В результате получаем, что критическое расстояние разделения выборок на уровне значимости, согласованном в вышеописанном смысле с экспериментом, определяется из уравнения [5]

$$1 - K\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\varepsilon\right) = \varepsilon. \quad (5)$$

Таким образом, при анализе выборок определенной длины было бы неправильным задавать априори желаемый уровень значимости, так как для заданной длины N выборки лишь при одном значении $\varepsilon = \varepsilon^*(N)$, определяемом из уравнения (5), вероятность превышения значения $\varepsilon^*(N)$ равна значимости используемого для этой цели критерия. Заметим, что на

практике принято задавать априорный уровень значимости для задач, имеющих определенную важность (например, не хуже, чем 0,05), но важно также и понимать, на каком уровне значимости вообще можно принимать решение по выборке определенной длины. Этот уровень дается решением уравнения (5).

Важность результата (5) для стационарных распределений состоит в том, что он не зависит от конкретного вида распределения. Следовательно, построив расстояния между независимыми ВФР, например, между встык-выборками длины N в скользящем окне с шагом N

$$\rho(N, k) = \|F_N(x, kN) - F_N(x, kN + N)\|_C, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

можно построить и эмпирическую функцию распределения этих расстояний $G_N(\rho)$. Если затем численно решить уравнение относительно ρ

$$G_N(\rho) = 1 - \rho, \quad (7)$$

то полученное решение $\rho^*(N)$ есть согласованный уровень стационарности (СУС, [5]) для данного временного ряда. Если выяснилось, что $\rho^*(N) > \varepsilon^*(N)$, то ряд нестационарный. Величина $\rho^*(N)$ есть тот уровень значимости, на котором можно принимать стационарно формулируемые гипотезы о свойствах данного временного ряда по выборке длины N .

Введем далее величину, называемую уровнем нестационарности (или индексом нестационарности) временного ряда. Эта величина определяется как отношение

$$J(N) = \frac{\rho^*(N)}{\varepsilon^*(N)}. \quad (8)$$

Индекс нестационарности показывает, во сколько раз СУС рассматриваемого ряда больше, чем соответствующий согласованный уровень значимости $\varepsilon^*(N)$ для стационарных распределений, то есть, во сколько раз уровень значимости статистики для выборки заданной длины из рассматриваемого ряда больше, чем уровень значимости, следующий из стационарной оценки.

Применим описанную методику к анализу распределений магнитуд и промежутков времени между землетрясениями в соответствии с данными, содержащимися в упомянутом выше каталоге ЖМА.

2. Анализ уровня нестационарности распределений

Проведем в качестве примера детальное определение СУС для выборки конкретной длины по первой половине ряда магнитуд.

Сначала строятся ВФР $F_N(x, n)$ в зависимости от длины выборки N и номера события n . На рис. 5 показан набор таких ВФР в скользящем окне длины $N=100$. Шаг по номеру события равен 1. Левая ось графика отвечает магнитуде x , правая – номеру события n , вертикальная ось отвечает интегральной вероятности.

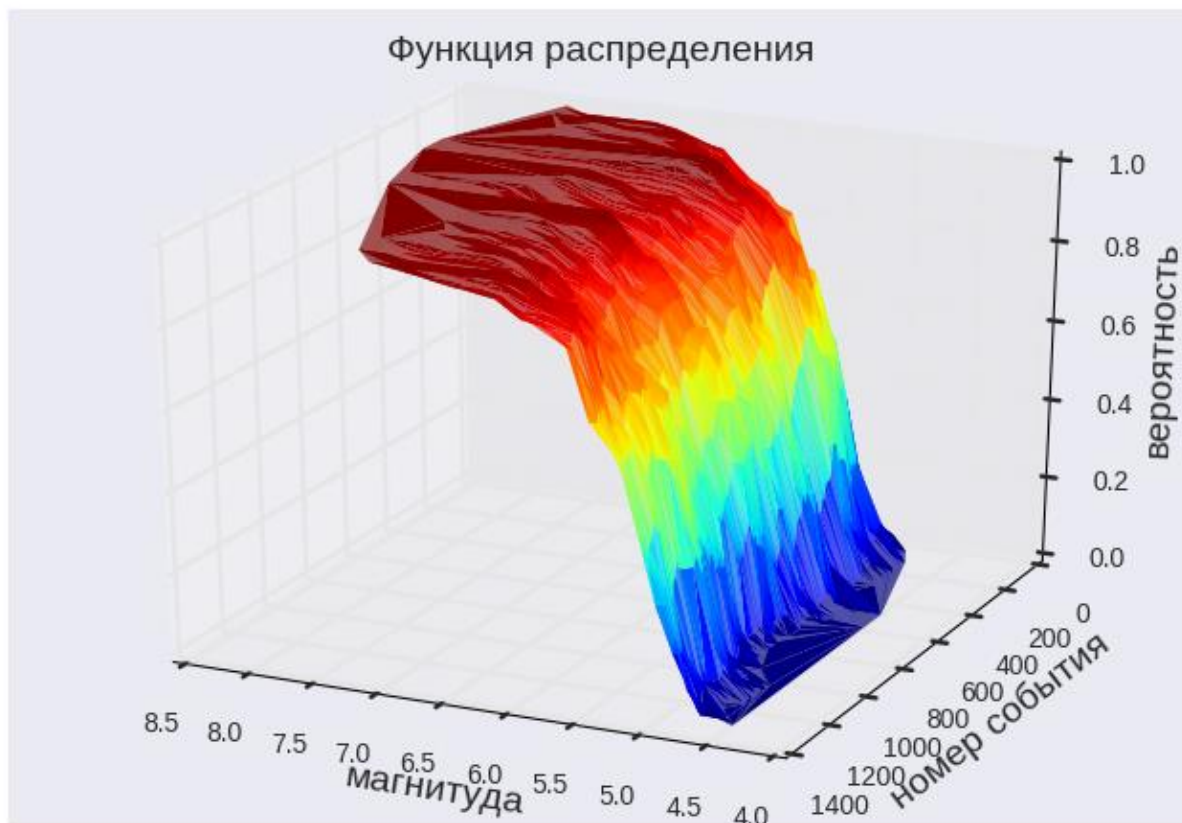


Рис. 5. Фрагмент ВФР магнитуды по выборкам длины 100

Затем вычисляются расстояния между распределениями встык-выборок в норме C в соответствии с (6). Это означает, что берутся две ВФР, построенные по выборкам длины 100, которые (выборки) сдвинуты одна относительно другой на ширину окна, т.е. на 100 шагов. Фрагмент получающегося ряда расстояний $\rho(100; n)$ для выборок длины $N=100$, оканчивающихся событием n , приведен на рис. 6. Шаг по номеру события по-прежнему единичный, т.е. пара встык-выборок смещается по оси времени с шагом 1, а на рис. 6 показано соответствующее изменение расстояний между ними в норме C .

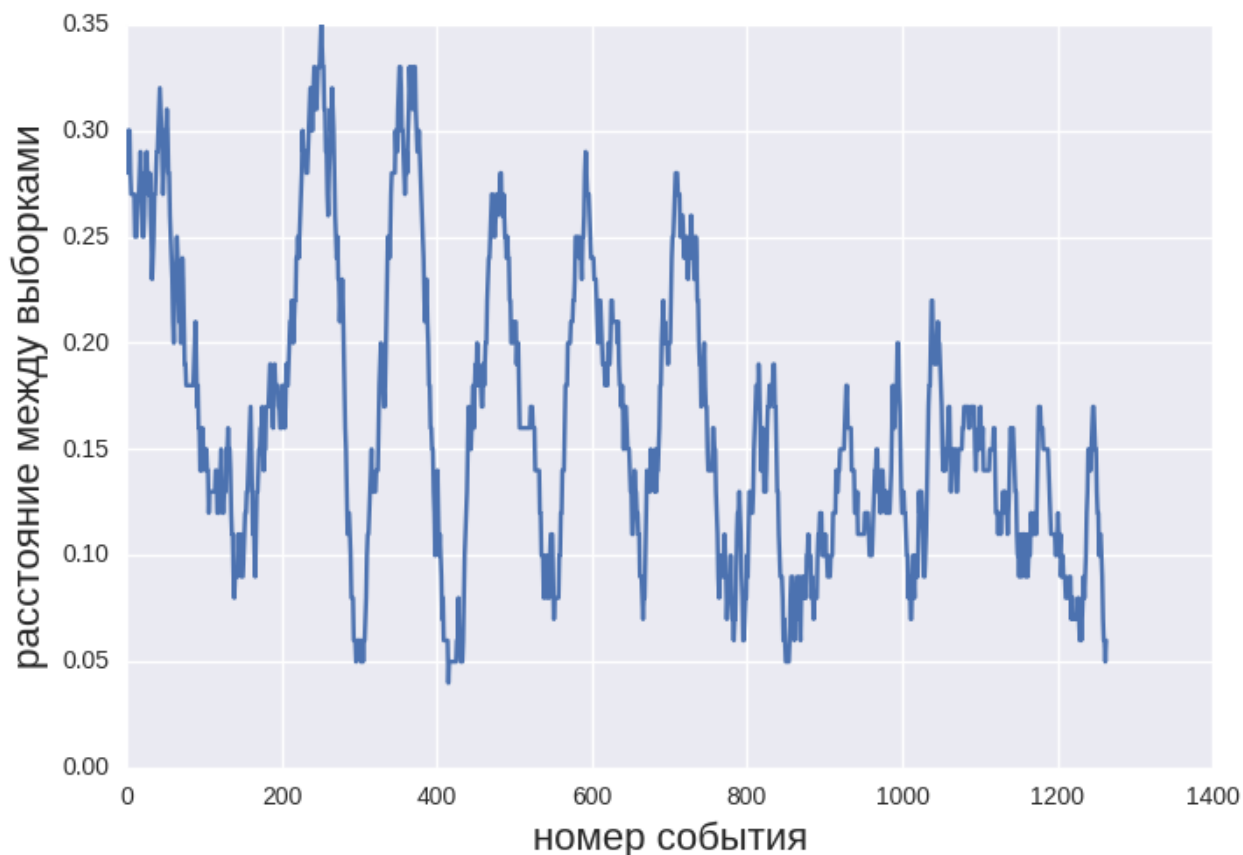


Рис. 6. Временной ряд расстояний между ВФР магнитуды, длина 100, норма С.

По всей совокупности построенных расстояний между ВФР магнитуды строится соответствующая функция распределения расстояний $G_N(\rho)$ и решается уравнение (7) относительно СУС. На рис. 7 графически показано вычисление СУС для длины выборки $N = 100$. Абсцисса точки пересечения прямой $1 - \rho$ с графиком ВФР $G_{100}(\rho)$ дает значение СУС $\rho^*(100)$. В данном примере это число, приблизительно равное 0,22.

Аналогичные вычисления проводятся для выборок всех доступных длин. Ограничением является конечность исходного объема данных, в нашем случае это 34 тыс. событий. Поэтому объемы выборок, больших 15 тыс. данных, рассматривать нецелесообразно, ибо тогда число статистических экспериментов будет недостаточным для оценки СУС.

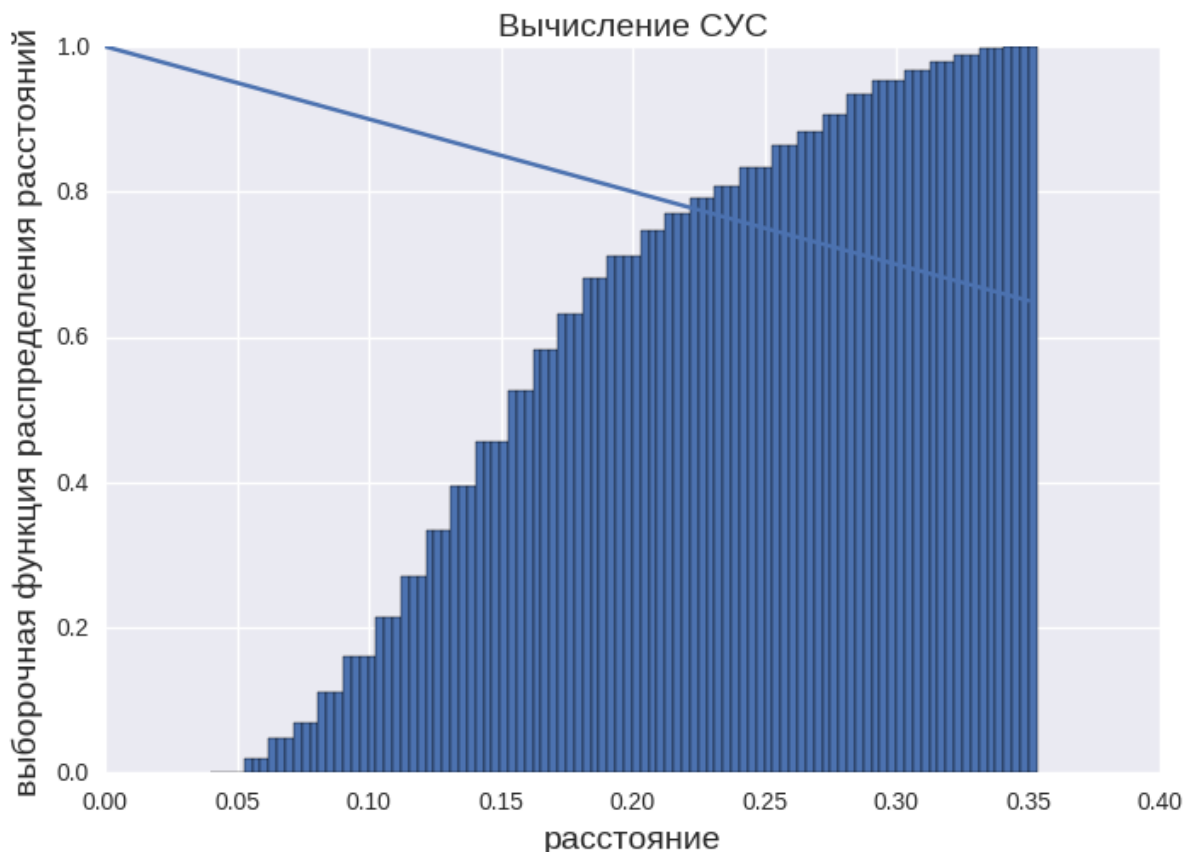


Рис. 7. Построение ВФР расстояний между ВФР магнитуды и вычисление СУС, длина 100, норма С

Результаты вычислений СУС для рядов магнитуд и промежутков времени между событиями для всего набора данных (34 тыс. событий) представлены на рис. 8, где также показан и теоретический стационарный уровень значимости (черная линия), на каком принимались бы решения в предположении стационарности рассматриваемых статистик. Видно, что ряды существенно нестационарны, причем с увеличением длины выборки нестационарность только увеличивается. Некоторая стабилизация СУС для больших длин связана с недостаточной статистикой расстояний между независимыми выборками. Подчеркнем, что стабилизация СУС как функции длины выборки в статистическом смысле также означает нестационарность, поскольку в стационарном случае должен наблюдаться монотонный спад в соответствии с черной кривой на рис. 8.

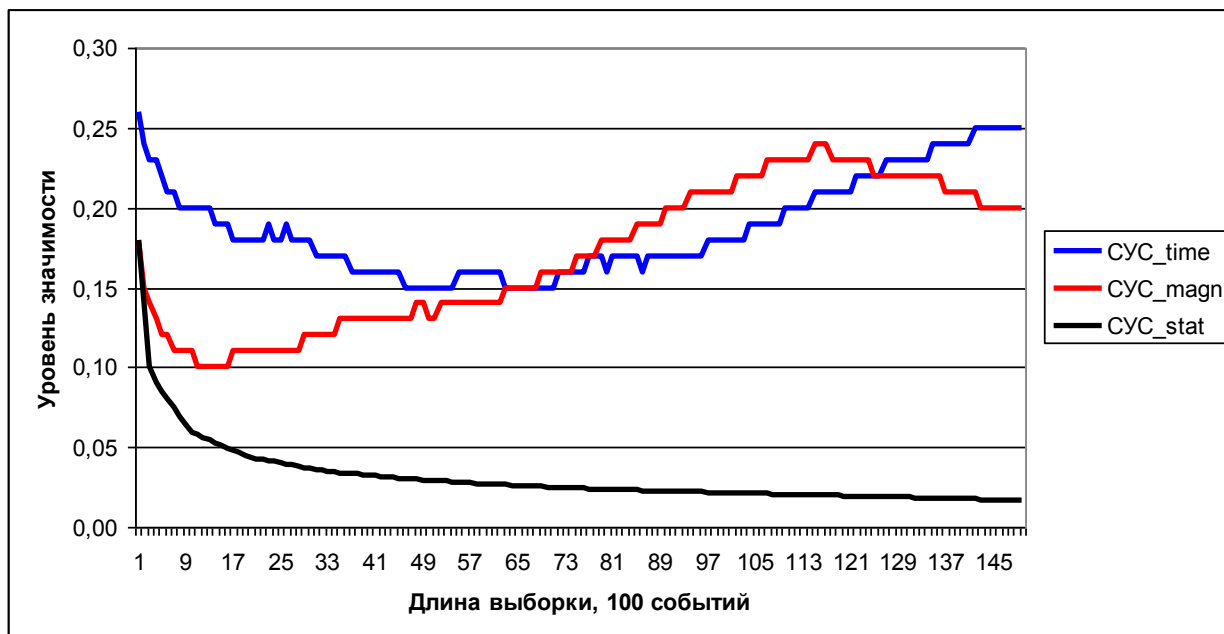


Рис. 8. СУС для рядов магнитуд и промежутков времени между событиями в зависимости от длины выборки

Из рис. 8 следует, что наилучшая точность (наименьший СУС) для ряда магнитуд и ряда промежутков времени между событиями достигается на разных длинах. Для магнитуд наилучший уровень стационарности 0,10 достигается на выборках длин от 1100 до 1600 событий (это промежуток приблизительно от 3 до 5 лет). Для промежутков времени между событиями наилучшая точность 0,15 достигается на выборках длин от 4600 до 5400 (приблизительно от 12 до 15 лет). Главный вывод состоит в том, что с увеличением длины выборки уровень значимости в оценке вероятностей не снижается, т.е. добавление новых событий не приводит к уточнению знаний о процессе в рамках статистических методов.

То, что минимум СУС не острый, позволяет указать горизонт максимальной стационарности ситуации, т.е., наилучшего прогнозирования вероятности землетрясений. По магнитуде он составляет 500 событий (примерно 2 года) по скользящей выборке 1100 событий, а по промежуткам времени – 800 событий (примерно 3 года) по скользящей выборке 4600 событий.

На рис. 9 показан индекс нестационарности для двух рассматриваемых рядов (значений магнитуд и интервалов времени между событиями). Согласно (8), этот индекс представляет собой результат отношения СУС к теоретическому значению стационарности (черная кривая на рис. 8). В нашем случае индекс является растущей функцией объема выборки. Это подтверждает сделанный ранее вывод о том, что два встык-распределения магнитуд, построенных по половинным объемам данных, с вероятностью, очень близкой к единице, относятся к разным генеральным совокупностям.

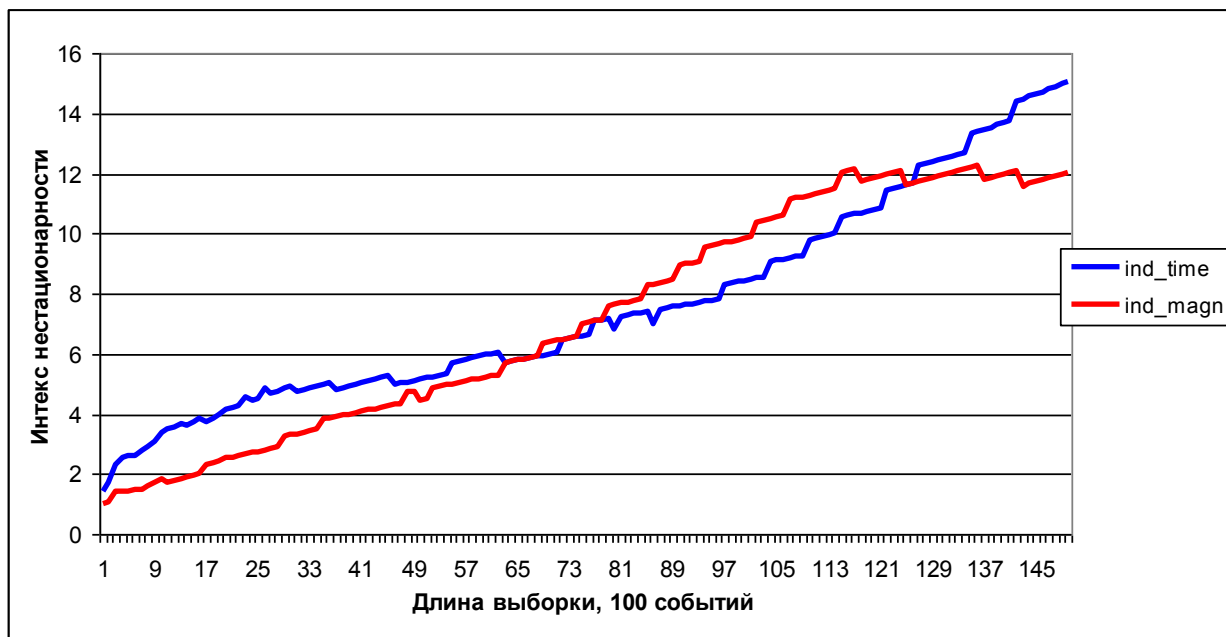


Рис. 9. Индекс нестационарности для рядов магнитуд и промежутков времени между событиями в зависимости от длины выборки

В то же время анализ выборок ожидаемо (в согласии с законом Гутенберга-Рихтера) показывает, что каждая из них имеет распределение магнитуд, которое с достаточно высокой детерминацией (на уровне 0,9 и выше) аппроксимируется показательной функцией (см. рис. 2). На рис. 10 приведено сравнение аппроксимаций для логарифмов двух распределений магнитуд, показанных ранее на рис. 3.

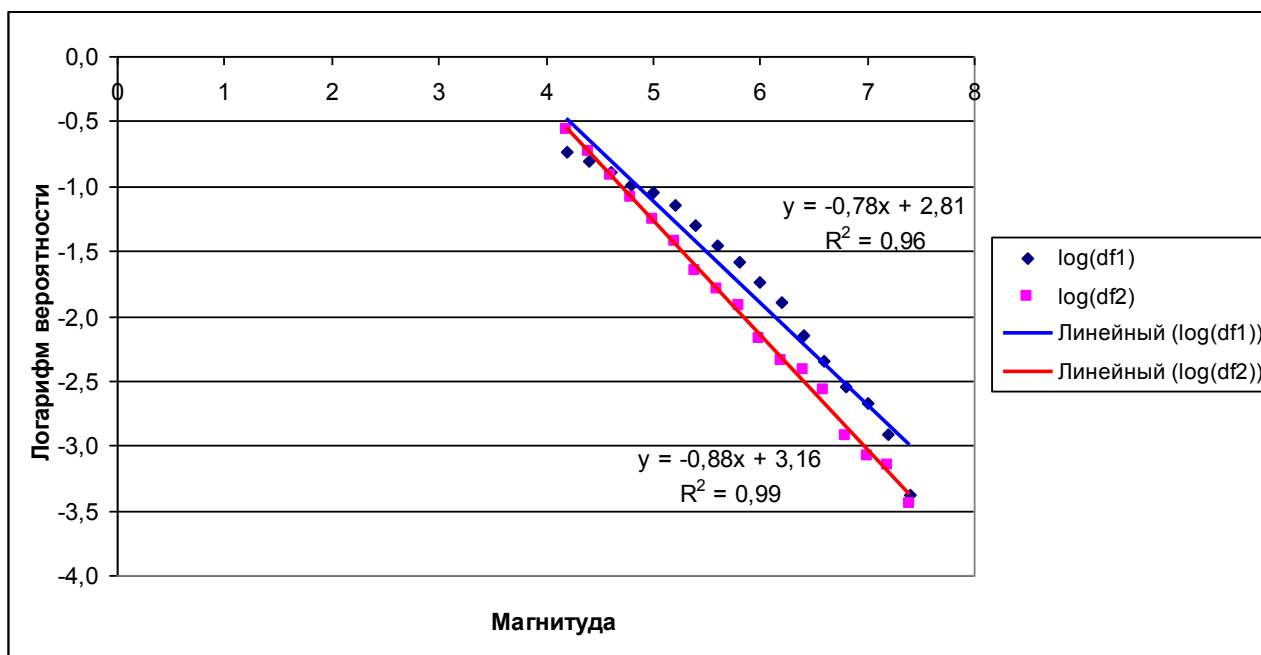


Рис. 10. Сравнение аппроксимаций для логарифмов двух распределений магнитуд

Это сравнение показывает, что нестационарность распределений магнитуд может объясняться нестационарным поведением показателя наклона b в формуле (1) закона Гутенберга-Рихтера, а не тем, что меняется сама функциональная форма этого закона. Проанализируем тогда временной ряд $b_N(t)$, полученный из аппроксимаций распределений вида (1) по скользящим выборкам длины N достаточной длины, например, для $N=1000$. Такая выборка достаточно длинная для получения значений параметра b с практически приемлемой точностью, но и достаточно короткая, чтобы иметь некоторое минимальное число независимых серий, позволяющее оценить динамику изменения b . Далее индекс N опускаем.

3. Динамика угла наклона в законе Гутенберга-Рихтера

Рассмотрим десятичный логарифм распределения вероятностей магнитуды землетрясений по скользящим выборкам длины $N=1000$. Соответствующие наклоны аппроксимационных прямых показаны на рис. 11.

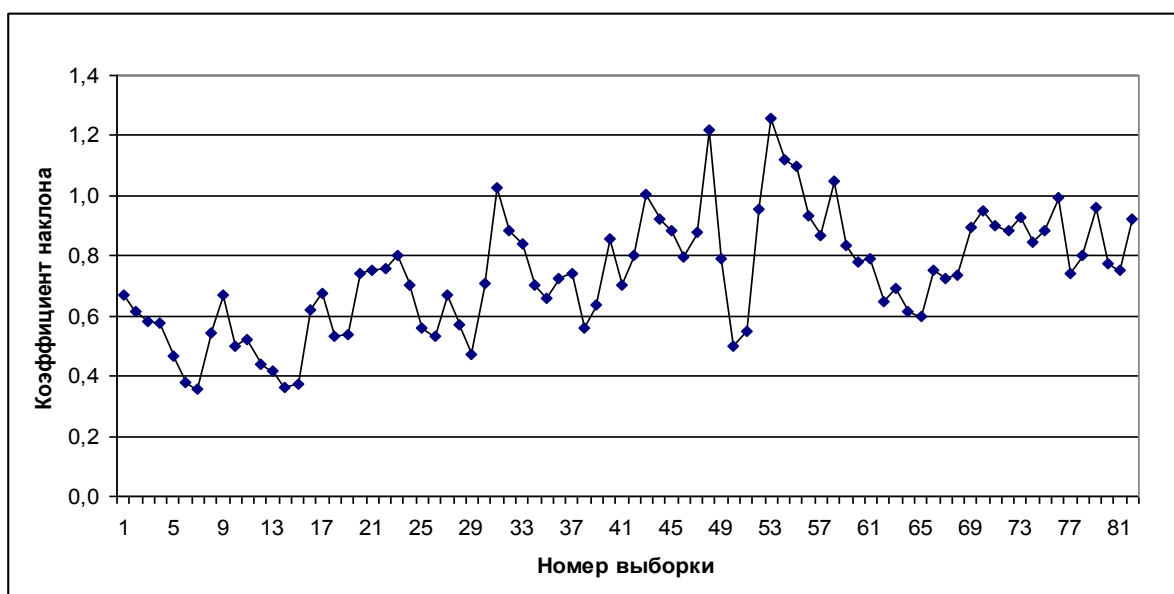


Рис. 11. Последовательность выборочных коэффициентов наклона логарифма кривой Гутенберга-Рихтера

Поскольку длина ряда коэффициентов $b(n)$ сравнительно невелика, детальное исследование его автокорреляционной функции провести не удастся. Ограничимся тогда рассмотрением коэффициентов автокорреляции $A(l)$ с лагом l . Зависимость этих коэффициентов от длины выборки ряда $b(n)$ приведена на рис. 12. Из него видно, что все коэффициенты автокорреляции стабилизируются на длине выборки, примерно превосходящей 50. Это означает, что на уровне моментов второго порядка ряд $b(n)$ можно считать стационарным.

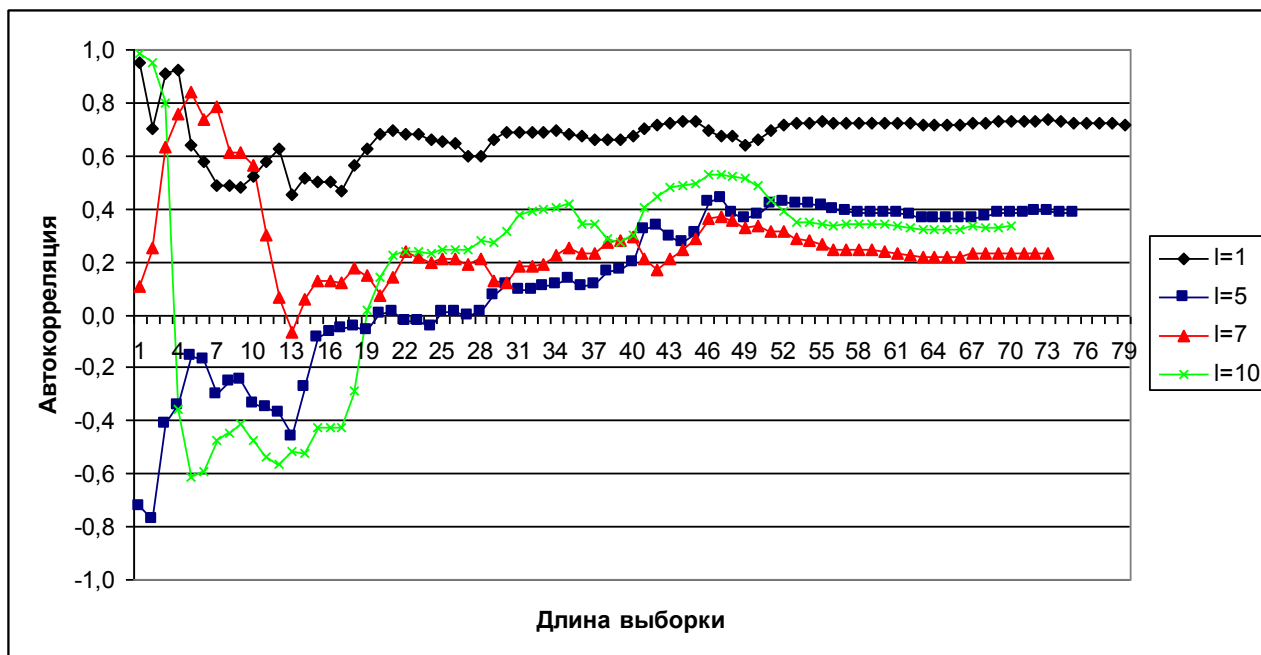


Рис. 12. Зависимость выборочных коэффициентов автокорреляции ряда $b(n)$ от длины выборки для разных лагов

Значения установившихся коэффициентов автокорреляции в зависимости от лага показаны на рис. 13.

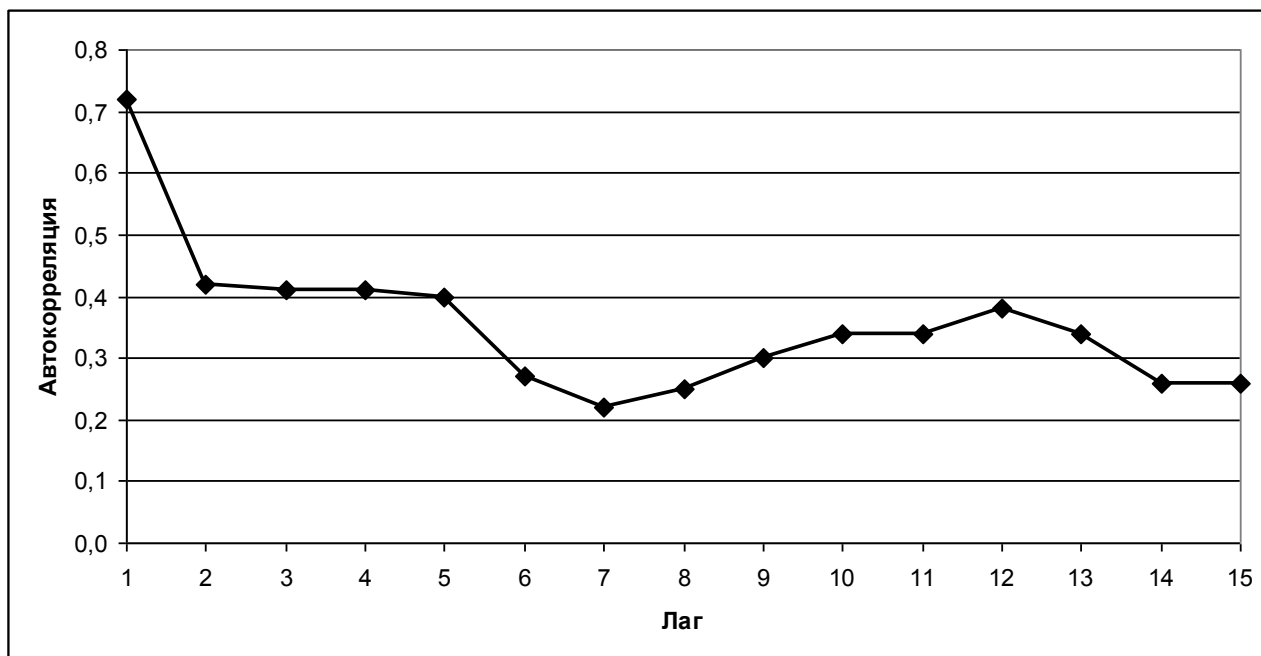


Рис. 13. Установившиеся коэффициенты автокорреляции в зависимости от лага

Коэффициент автокорреляции с лагом $l=1$ достаточно высок, он равен 0,72, коэффициенты автокорреляции для лагов $l=2 \div 5$ стабилизируются примерно на уровне 0,40. Далее автокорреляция снижается до 0,22, но затем при $l=12$ снова возрастает почти до 0,4, после чего опять снижается. Выявленная периодичность зависимости коэффициента автокорреляции от лага

показывает наличие коротковолновых и длинноволновых квазипериодических процессов, которыми можно приблизить колебательное поведение коэффициента наклона $b(n)$.

Выявленная динамика значений $b(n)$ может быть описана некоторой квазипериодической динамической системой с аддитивным шумом. Если, например, ограничиться кусочно-линейной аппроксимацией, то можно выявить два «треугольных» периода: короткий с полупериодом 5 и длинный с полупериодом примерно 50 (для более точной оценки длинного периода данных недостаточно).

«Длинная» динамическая система определяется уравнением

$$y_1(n) = \begin{cases} 0,45 + 0,008n, & 1 \leq n \leq 53; \\ y_1(53) - 0,008(n - 53), & n > 53. \end{cases} \quad (9)$$

После вычитания ее из ряда наклонов $b(n)$ оставшийся ряд $z(n) = b(n) - y_1(n)$ допускает выделение «короткой» динамической системы:

$$y_2(n) = \begin{cases} 0,2 + 0,08(n - 1), & 1 \leq n \leq 6; \\ y_2(6) - 0,08(n - 6), & 6 < n \leq 11. \end{cases} \quad (10)$$

Далее система (10) продолжается с периодом 10.

В результате модель временного ряда $b(n)$ имеет вид:

$$b(n) = y_1(n) + y_2(n) + \delta(n), \quad (11)$$

где $\delta(n)$ есть некоторый ряд остатков, автокорреляция которого (при любых лагах) не превосходит по модулю 0,013, относительный средний квадрат составляет 0,006, а распределение достаточно хорошо аппроксимируется нормальным (рис. 14).

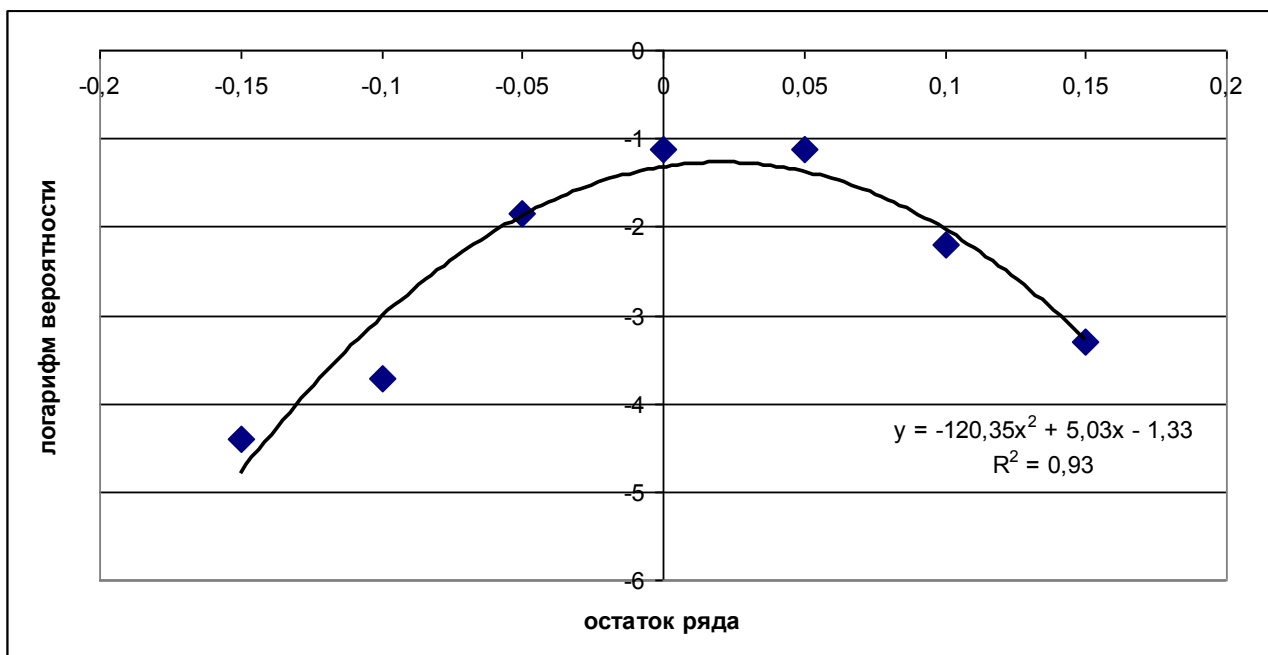


Рис. 14. Логарифм плотности распределения остатков ряда наклонов и его квадратичная аппроксимация

Таким образом, выяснилось, что нестационарность распределений магнитуд обусловлена тем, что параметр в законе распределения Гутенберга-Рихтера зависит от времени, но образует стационарный временной ряд; этот ряд может быть представлен в виде суперпозиции двух динамических систем с периодическим поведением и нормально распределенного остатка, имеющего малую амплитуду (относительная погрешность в определении динамической системы составляет $\sqrt{0,006} \approx 0,08$) и пренебрежимо малую автокорреляцию.

Выводы

Применительно к задачам сейсмологии результаты проведенного исследования можно сформулировать следующим образом. Нестационарность сейсмического режима оказалась и сильнее, и разнообразнее, чем это часто принимается при сейсмологических исследованиях. Действительно, степень полноты каталога в сейсмологии принято оценивать по выполнению закона повторяемости Гутенберга-Рихтера. Но этот закон характеризует число землетрясений разных интервалов магнитуд их десятичным логарифмом. Такая оценка недостаточно чувствительна к относительно небольшим, но статистически значимым изменениям числа слабых событий. Поэтому каталоги землетрясений часто признаются существенно более полными, чем это есть в реальности. Так, например, приведенные выше результаты убедительно свидетельствуют, что один из наиболее детальных региональных каталогов – каталог Японии JMA – не полон по уровню $M_{JMA} = 4.0$ до середины 1970-х годов.

Кроме отмеченной выше нестационарности, связанной с развитием системы регистрации землетрясений, выявляются, по меньшей мере, два характерных периода изменчивости величин наклона графика повторяемости. В сейсмологии известно существование скрытых периодичностей сейсмической активности (интенсивности потока землетрясений и квазипериодичности в реализации сильных землетрясений). Из приведенных выше результатов следует также и определенная периодичность в значениях наклона графика повторяемости. Открытым остается вопрос о характере связи этой периодичности с повторяемостью сильных землетрясений. Вариации наклона графика повторяемости могут представлять собой предвестниковые и постшоковые изменения, связанные с подготовкой и реализацией сильных землетрясений. Но возможна и альтернативная трактовка, что первичны именно изменения величин наклона графика повторяемости, а приуроченность сильных землетрясений к интервалам времени пониженных значений наклона графика повторяемости обуславливается большей вероятностью реализации сильных землетрясений при пониженных значения b -value, как это следует из модели трактовки сейсмического режима в рамках модели мультипликативного каскада (см. Родкин, [6]).

Отметим также, что вывод о возможности описания сейсмического режима как некоторой динамической системы полностью согласуется с аналогичными представлениями в современной сейсмологии.

Литература

1. Gutenberg B., Richter C.F. Frequency of earthquakes in California // Bull. seism. Soc. Am. 1944. № 34. P. 185-188.
2. Родкин М. В., И. Н. Тихонов. О сейсмическом режиме Японии в преддверии мега-землетрясения Тохоку ($m_w = 9$). Вулканонология и сейсмология, 2013, № 4, с. 3–12.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматлит, 1961. – 406 с.
4. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.
5. Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Методы численного моделирования процессов нестационарного случайного блуждания. – М.: МФТИ, 2016. – 112 с.
6. Родкин М.В. Модель сейсмического режима как совокупности эпизодов лавинообразной релаксации, возникающих на множестве метастабильных состояний. Физика Земли, 2011, № 10, с. 18–26.