



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 43 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Колесниченко А. В.**

К описанию движения  
разреженной  
магнитосферной плазмы в  
сильном магнитном поле

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Колесниченко А. В. К описанию движения разреженной магнитосферной плазмы в сильном магнитном поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 43. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-43](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-43)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-43>

**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. Келдыша**  
**Российской академии наук**

**А.В. Колесниченко**

**К описанию движения**  
**разреженной магнитосферной плазмы**  
**в сильном магнитном поле**

**Москва — 2017**

**Колесниченко А.В.**

К описанию движения разреженной магнитосферной плазмы в сильном магнитном поле

**Аннотация.** Проанализирован ряд теоретических моделей плазмы, используемых для описания динамических процессов в магнитосфере планеты. Рассматривается плазма малой плотности в сильном магнитном поле, состоящая из электронов и ионов одного сорта. Обсуждаются различные аспекты моделирования, связанные как со свободным движением отдельных заряженных частиц во внешнем поле в приближении ведущего центра, так и учитывающие коллективные свойства магнитосферной плазмы. Кинетический подход основан на решении уравнения Власова с самосогласованными электромагнитными полями для ионов. Обосновывается метод получения совокупности уравнений гидродинамики для движения бесстолкновительной плазмы поперёк магнитного поля и приближённого кинетического уравнения для продольного движения. Малым параметром приближения является отношение характерной частоты динамических процессов в плазме к циклотронной частоте ионов. Исходя из системы кинетических уравнений в дрейфовом приближении и в случае наличия определённой симметрии функции распределения относительно продольных скоростей (вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий) выводятся уравнения двухжидкостной гидродинамики, предназначенные для описания медленных движений космической плазмы с анизотропным тензором давления.

**Ключевые слова:** магнитосфера, разреженная плазма, уравнение Власова, дрейфовое приближение, квазигидродинамическое описание

**Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko**

To description of motion of rarefied magnetospheric plasma in a strong magnetic field

**Abstract.** The theoretical models used to describe of dynamic processes in the planet's magnetosphere are analyzed. A completely ionized plasma of small density in the strong magnetic field, consisting of electrons and ions of one kind is considered. The various aspects of modeling related as with the free motion of individual charged particles in the external field in approximation of leading center and considering collective properties of the magnetospheric plasma are discussed. The kinetic approach is based on solution the system of equations of Vlasov with self-consistent electromagnetic fields for ions. The method of obtaining a set of hydrodynamic equations for the motion of a rarefied plasma across the magnetic field and an approximate kinetic equation for the sake of longitudinal motion is substantiated. Small parameter of approximation is the relation of the characteristic frequency of dynamic processes in plasma to the cyclotron frequency of ions. In the case of a certain symmetry of the distribution function with respect to longitudinal velocities (owing to which there are no heat flows along the lines of force) and proceeding from the system of kinetic equations in the drift approximation, are derived the equations of two-fluid hydrodynamics, intended for describing slow motions of a plasma with an anisotropic pressure tensor.

**Keywords:** magnetosphere, rarefied plasma, Vlasov' equation, drift approach, quasi-hydrodynamic description.

## Введение

Непрерывное истечение солнечной плазмы (солнечный ветер) и солнечные вспышки, сопровождаемые выбросами плотных облаков горячей плазмы, приводят, в частности, к изменению топологии магнитного поля в околопланетном пространстве и тем самым к формированию магнитосферы со всем сложным комплексом процессов её взаимодействия как с солнечным ветром, так и с ионосферой и с нейтральной верхней атмосферой планеты. Динамические процессы в магнитосфере и в пограничных областях планеты, в основе которых лежат фундаментальные закономерности физики плазмы, во многом сходны с процессами, характерными для нескольких классов астрофизических объектов, обладающих регулярным магнитным полем, например пульсаров. По сложившимся представлениям, именно в магнитосферах этих космических объектов происходит ускорение частиц до релятивистских энергий (галактические космические лучи). Солнечный ветер можно рассматривать как непрерывно стационарно натекающую бесстолкновительную плазму, которая при взаимодействии с магнитосферой планеты оказывает на неё динамическое давление.

У Меркурия, Земли, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна имеются активные внутренние динамо, в то время как у Венеры, Марса, земной луны, комет и астероидов их нет. Эти активные динамо создают магнитные поля, которые выдерживают давление внешней плазменной среды. Из-за наличия сильных вариаций внешних плазменных сред имеющиеся в гелиосфере магнитосферы планет очень динамичны. Например, магнитосфера Юпитера имеет мощный изменяющийся во времени источник энергии, который меняет динамику его магнитосферы и создаёт совершенно другую картину циркуляции плазменных частиц, чем у Земли и, предположительно, у Меркурия. Однако не только собственные планетарные магнитные поля создают магнитосферы, но и ненамагниченные планеты Венера и Марс, а также кометы способны индуцировать магнитосферы, связанные с взаимодействием солнечного ветра с их атмосферами. В частности, процессами взаимодействия ионов, образующихся из сублимированных газов кометного ядра, с плазмой солнечного ветра и с межпланетным магнитным полем определяется структура плазменных хвостов комет. Более того, атмосферы меньших тел со слабыми магнитными полями также могут взаимодействовать с солнечным ветром. Небольшие магнитные аномалии на Луне и, возможно, астероиды вызывают слабые прогибы солнечного ветра. Динамика этих разнообразных магнитосфер обеспечивает богатый спектр поведения, подробное обсуждение которого можно найти в работах (Freeman, Ibrahim, 1975; Belcher, 1983; Russell и др., 1988; Brecht, 1997; Brown, Bouchez, 1997; Kane и др., 1991; Luhmann и др., 1992; Lin и др., 1998; Russell, 1991, 2001).

Природа предоставила возможность изучать на примерах Земли и её соседей в Солнечной системе несколько разновидностей обтекания небесного тела солнечной плазмой. Принципиальные отличия рассматриваемых моделей состоят прежде всего в том, обладает ли небесное тело значительным постоянным

магнитным полем и есть ли у него устойчивая атмосфера. «Крайними» моделями магнитосфер в гелиосфере служат обладающие сильными магнитными полями Земля и Юпитер, с одной стороны, и практически лишённые собственных полей Луна и Венера – с другой, хотя из-за наличия атмосферы характер обтекания Венеры существенно иной, чем у Луны. Промежуточные случаи представляют Меркурий (заметное магнитное поле, нет атмосферы) и Марс (есть магнитное поле, есть атмосфера). На сегодня наиболее полно исследована магнитосфера Земли, которой, естественно, уделяется наибольшее внимание.

При наиболее простом способе описания магнитосферной плазмы может быть использовано представление о свободном движении отдельных заряженных частиц во внешних электромагнитных полях в дрейфовом приближении. Однако такое приближение, не учитывающее по своему определению взаимные столкновения частиц одного сорта (хотя столкновения с частицами других сортов могут быть учтены введением внешней силы трения), а также их плотности на разных орбитах, не будет полным. Для получения основных уравнений, описывающих коллективные свойства магнитосферной плазмы, необходимо найти способ суммирования движений отдельных заряженных частиц, сохранив при этом все существенные характеристики системы. В общем случае для этой цели может быть использован систематический метод кинетических уравнений Власова с самосогласованными электромагнитными полями для ионов.

В литературе существует большое число публикаций, посвящённых различным аспектам вывода приближённых кинетических уравнений движения высокотемпературной разреженной плазмы в связи с проблемой её удержания электромагнитными полями (см, например, Chew и др., 1956; Watson, 1956; Chandrasekhar и др. 1957, 1958; Кадомцев, 1958; Рудаков, Сагдеев, 1958; Волков, 1964; Ramos, 2008). Вместе с тем, в связи со значительными успехами, достигнутыми современной астрофизикой в понимании эволюции различных космологических объектов, имеющих магнитосферу, назрела настоятельная потребность распространить аналогию с гелиосферными магнитосферами и в область планетной космологии (в частности, на исследование топологии и эволюции экзопланетных плазменных оболочек). По этой причине возникла необходимость в переосмыслении основных этапов вывода базовых уравнений движения низкотемпературной разреженной плазмы, находящейся под влиянием собственного магнитного поля. В настоящей работе излагаются методы и результаты решения уравнений Власова–Максвелла для устойчивых состояний полностью ионизированного газа низкой плотности в регулярном магнитном поле. При условии, что член, представляющий силу Лоренца, доминирует над всеми другими, решение исходного кинетического уравнения ищется в виде ряда по малому параметру, которым является отношение характерной частоты динамических процессов в плазме к циклотронной частоте ионов. Исходя из этого ключевого предположения, можно вывести правильное масштабирование всех интересующих нас величин. При таком масштабировании может быть выведен набор асимптотических уравнений, во многом сходный с существующими гид-

ромагнитными теориями. В работе в результате решения уравнений Власова–Максвелла получены кинетическое уравнение в дрейфовом приближении для продольного движения частиц разреженной плазмы и уравнение гидродинамического типа для движения поперёк магнитного поля. При некоторых предположениях вместо указанной совокупности уравнений получены более простые уравнения магнитной квазигидродинамики с анизотропным тензором давления.

## § 1. Приближение ведущего центра

**Движение одиночной частицы.** Если пренебречь индуцированными полями, возникающими при взаимодействии заряженных частиц магнитосферы в области их локализации, по сравнению с достаточно сильным электромагнитным полем планеты, то уравнение движения отдельной частицы с массой  $M_\alpha$  и зарядом  $e_\alpha$  запишется в виде

$$M_\alpha \frac{d\mathbf{c}_\alpha}{dt} = e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{c}_\alpha \times \mathbf{B} \right\} + \mathbf{F}_\alpha, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{c}_\alpha = d\mathbf{r}/dt$  – скорость частицы сорта  $\alpha$ ,  $\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}, t)$  – равнодействующая всех сил неэлектромагнитного происхождения (например, силы тяжести, градиентов давления частиц других сортов, силы трения и т.п.). Так как уравнение (1.1) в общем случае неоднородных в пространстве  $\mathbf{r}$  и переменных во времени  $t$  полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}, t)$  не поддаётся, кроме самых простейших случаев, аналитическому решению, то приходится прибегать к приближенным или численным методам его интегрирования. Среди приближённых методов особое место занимает так называемое дрейфовое приближение (или приближения ведущего центра), позволяющее ясно представить качественную картину движения частицы в сильном магнитном поле, а в более общем случае – довести вычисления до конца. Метод решения уравнения (1) в приближении ведущего центра для случая сильного магнитного поля и в предположении медленных изменений в пространстве и во времени полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}_\alpha$  был разработан в работах Альвена (см. Альвен, 1952). Важность дрейфового движения плазменных частиц для физики магнитосферы Земли стала особенно понятной после того, как было обнаружено, что за геомагнитный кольцевой ток ответственны заряженные частицы, движущиеся подобным образом вблизи экваториальной области магнитосферы, где невозмущенное магнитное поле имеет дипольный характер (Акасофу, Чепмен, 1975).

В дрейфовом приближении движение частицы в каждый момент времени раскладывается на три составляющие: быстрое циклотронное вращение вокруг силовых линий магнитного поля с частотой  $\omega_\alpha(\mathbf{r}, t) = e_\alpha |\mathbf{B}| / M_\alpha c$ ; медленное

дрейфовое движение центра циклотронной окружности (ведущего центра) поперёк магнитного поля, вызванное действием слабого электрического поля, а также влиянием неоднородностей магнитного поля; движение ведущего центра вдоль магнитного поля (на это движение магнитное поле  $\mathbf{B}$  влияния не оказывает). Кроме этого, такое движение сопровождается медленными изменениями численных значений продольной  $c_{\alpha\parallel} = \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{c}_\alpha) / |\mathbf{B}|^2$  и поперечной  $\mathbf{c}_{\alpha\perp} = \mathbf{c}_\alpha - \mathbf{c}_{\alpha\parallel}$  скоростей частицы под влиянием неоднородностей магнитного поля. Другими словами, движение ведущего центра состоит из плавного движения, характеризующегося дрейфовой скоростью, на которое накладываются малые колебания. В дрейфовом приближении такие колебания ведущего центра отделяют от плавного движения. Однако так как величины  $c_{\alpha\parallel}(t)$  и  $c_{\alpha\perp}(t)$  входят в выражение для скорости движения ведущего центра в качестве параметров, при рассмотрении движения заряженной частицы в электромагнитном поле в дрейфовом приближении, наряду с расчётом дрейфовой скорости, также решают уравнения, описывающие изменения во времени скоростей  $\mathbf{c}_{\alpha\parallel}$  и  $\mathbf{c}_{\alpha\perp}$ .

Таким образом, в приближении ведущего центра движение частицы характеризуется пятью переменными: тремя координатами  $x, y, z$  ведущего центра и двумя скоростями  $c_{\alpha\parallel}$  и  $c_{\alpha\perp}$ . Общее рассмотрение данного приближения проведено в работах (Боголюбов, Митропольский, 1958; Сивухин, 1963; Морозов, Соловьев, 1963), где показано, что дрейфовая скорость определяется выражением

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} = \langle c_{\parallel} \rangle \mathbf{h} + \frac{1}{\omega} \mathbf{f} \times \mathbf{h} - \frac{\langle c_{\parallel}^2 \rangle}{\omega} \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - \frac{\langle c_{\perp}^2 \rangle}{2\omega} \mathbf{h} \times \nabla \ln |\mathbf{B}|, \quad (1.2)$$

в котором  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор центра циклотронной окружности,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = M^{-1}(e\mathbf{E} + \mathbf{F})$ ;  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$  – единичный вектор в направлении вдоль магнитного поля;  $\langle c_{\parallel} \rangle, \langle c_{\perp} \rangle$  – усреднённые (сглаженные) проекции скорости частицы на направление магнитного поля и в перпендикулярном к полю направлении в точке нахождения ведущего центра. Первый член уравнения (1) даёт скорость плавного движения ведущего центра в направлении  $\mathbf{h}$  (в направлении магнитной силовой линии, проходящей через ведущий центр). Остальные члены дают скорость плавного движения ведущего центра в направлениях, перпендикулярных к  $\mathbf{h}$ .

К уравнению (1.1) добавляются два уравнения для определения медленно и плавно меняющихся скоростей  $\langle c_{\parallel} \rangle$  и  $\langle c_{\perp} \rangle$

$$\frac{d\langle c_{\parallel} \rangle}{dt} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{f} - \frac{1}{2|\mathbf{B}|} \langle c_{\perp} \rangle^2 (\mathbf{h} \cdot \nabla |\mathbf{B}|) + \frac{\langle c_{\parallel} \rangle}{\omega} \left( \mathbf{f} - \frac{\langle c_{\perp} \rangle^2}{2} \frac{\nabla |\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} \right) \left[ \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right], \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle c_{\perp} \rangle}{dt} &= \frac{\langle c_{\parallel} \rangle \langle c_{\perp} \rangle}{2|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \cdot \nabla |\mathbf{B}| + \frac{\langle c_{\perp} \rangle \langle c_{\parallel} \rangle^2}{2\omega} \frac{\nabla |\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} \cdot [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] - \\ &- \frac{\langle c_{\perp} \rangle}{2\omega} \mathbf{h} (\nabla \times \mathbf{f}) + \frac{\langle c_{\perp} \rangle}{2\omega |\mathbf{B}|} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{h} \times \nabla |\mathbf{B}|). \quad (b) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) и (1.3) образуют полную систему дрейфовых уравнений, описывающую среднее движение частицы в магнитном поле под действием силы  $M\mathbf{f}$ . Заметим, что эти уравнения имеют двойственный характер в том смысле, что  $\mathbf{V}$  является скоростью ведущего центра, поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{f}$  также отнесены к ведущему центру<sup>1</sup>, в то время как параметры  $\langle c_{\parallel} \rangle$  и  $\langle c_{\perp} \rangle$  служат характеристиками самой частицы и определяются её положением. Область применимости приведённых дрейфовых уравнений существенно ограничена требованием  $c|\mathbf{E}| \ll \langle c_{\parallel} \rangle |\mathbf{B}|$  (сильное магнитное поле).

Уравнения (1.3) можно заменить двумя другими (эквивалентными им) уравнениями. Умножая для этого (1.3<sup>(a)</sup>) на  $\langle c_{\parallel} \rangle$ , а (1.3<sup>(b)</sup>) на  $\langle c_{\perp} \rangle$  и складывая результаты, получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = M\mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \frac{M\langle c_{\perp} \rangle^2}{2\omega} \mathbf{h} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}), \quad \text{где } \mathcal{E} = \frac{M}{2} \left\{ \langle c_{\parallel} \rangle^2 + \langle c_{\perp} \rangle^2 \right\}. \quad (1.4)$$

Это уравнение выражает закон сохранения кинетической энергии, причём первый член (1.4) описывает работу электрического поля в случае, если бы частица двигалась со скоростью ведущего центра  $\mathbf{V}$ , а второй член – работу, которую совершает вихревое поле  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  над частицей, вращающейся по циклотронной окружности. Для получения второго уравнения перепишем (1.3<sup>(b)</sup>) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\langle c_{\perp} \rangle}{dt} &= \frac{\langle c_{\perp} \rangle}{2|\mathbf{B}|} (\mathbf{V} \cdot \nabla |\mathbf{B}|) - \frac{\langle c_{\perp} \rangle}{2\omega} \mathbf{h} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \\ &= \frac{\langle c_{\perp} \rangle}{2|\mathbf{B}|} \frac{d|\mathbf{B}|}{dt} - \frac{\langle c_{\perp} \rangle}{2\omega} \left\{ \mathbf{h} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) + \frac{e}{Mc} \frac{\partial |\mathbf{B}|}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

(здесь использовано обозначение  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$ ) и, вводя так называемый поперечный адиабатический инвариант  $J_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \langle c_{\perp} \rangle^2 / |\mathbf{B}|$ , получим окончательно

---

<sup>1</sup>) Строго говоря, под  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{f}$  здесь понимаются не значения полей в точке нахождения ведущего центра, а их плавно меняющиеся слагаемые.



$$\frac{dJ_{\perp}}{dt} = -\frac{\langle c_{\perp} \rangle^2}{\omega |\mathbf{B}|} \left\{ \mathbf{h} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) + \frac{e}{Mc} \frac{\partial |\mathbf{B}|}{\partial t} \right\}. \quad (1.6)$$

При условии  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  имеет место закон сохранения инварианта  $J_{\perp}$ . Действительно, согласно уравнению Максвелла  $c\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , получаем, что  $\{ \} = 0$ , и уравнения (1.4) и (1.6) принимают вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = M\mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \frac{M\langle c_{\perp} \rangle^2}{2\omega} \frac{\partial |\mathbf{B}|}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\partial J_{\perp} / \partial t = 0, \quad (8)$$

причём если поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не зависят от времени, то как  $J_{\perp} = \langle c_{\perp} \rangle^2 / |\mathbf{B}|$ , так и  $\mathcal{E} + e\Phi$  постоянны (здесь  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ). Уравнения (1.2), (1.7) и (1.8) также составляют полную систему дрейфовых уравнений при условии  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ .

Как известно, с адиабатической инвариантностью величины  $\langle c_{\perp} \rangle^2 / |\mathbf{B}|$  связано явление отражения заряженных частиц от области сильного магнитного поля в магнитосфере планеты (см. Франк-Каменецкий, 1964). Предположим для простоты, что магнитное поле не меняется во времени, а электрическое поле отсутствует. Тогда, согласно (1.7) и (1.8), сохраняются квадрат скорости частицы и поперечный инвариант. Продольная скорость частицы будет равна  $\langle c_{\parallel} \rangle = \sqrt{\langle c \rangle^2 - J_{\perp} |\mathbf{B}|}$ . Если по мере продвижения в область усиливающегося магнитного поля ведущий центр частицы достигнет окрестности точки  $\mathcal{M}$ , в которой поле максимально ( $|\mathbf{B}|_{\mathcal{M}} = |\mathbf{B}|_{max}$ ) и при этом  $\langle c \rangle^2 < J_{\perp} |\mathbf{B}|$ , то частица, не дойдя до области максимального магнитного поля, отразится и начнёт двигаться в противоположном направлении. В противном случае она пройдёт через область сильного магнитного поля. Следовательно, области сильного поля при некоторых условиях могут играть для заряженных частиц роль своеобразных магнитных пробок. В частности, если поле усиливается вдоль силовых линий по обе стороны от некоторой средней области, то заряженная частица может оказаться запертой между двумя магнитными пробками и будет колебаться вдоль силовых линий, не выходя за пределы ограниченной области пространства.

Обозначая через  $\theta$  питч-угол между направлениями скорости частицы и магнитной силовой линией и подставляя в неравенство  $\langle c \rangle^2 < J_{\perp} |\mathbf{B}|_{\mathcal{M}}$  инвариант  $J_{\perp} = \langle c_{\perp} \rangle^2 / |\mathbf{B}| = \langle c \rangle^2 \sin^2 \theta / |\mathbf{B}|$ , перепишем его в виде  $\sin^2 \theta > |\mathbf{B}| / |\mathbf{B}|_{\mathcal{M}}$ . Таким образом, от пробок отражаются только те частицы, угол вектора скорости

которых с силовой линией магнитного поля превышает определённое критическое значение  $\theta_{kr}$ , соответствующее полю  $|\mathbf{B}|_{max}$  на границе поглощающей термосферы ( $\sin\theta_{kr} = \sqrt{|\mathbf{B}|_{min} / |\mathbf{B}|_{max}}$ ). Следует отметить, что глубина точки отражения не зависит от сорта частицы или её энергии, а зависит лишь от питч-угла и конфигурации магнитного поля. Конус  $0 < \theta_{kr}$  называют конусом потерь частиц. Частицы, у которых  $\langle c_{\parallel} \rangle$  и  $\langle c_{\perp} \rangle$  такие, что  $0 < \theta_{kr}$ , от пробок не отражаются, а уходят через них вдоль силовых линий поля  $\mathbf{B}$  в поглощающую атмосферу. Именно эти частицы могут переносить продольные токи в полярных сияниях Земли.

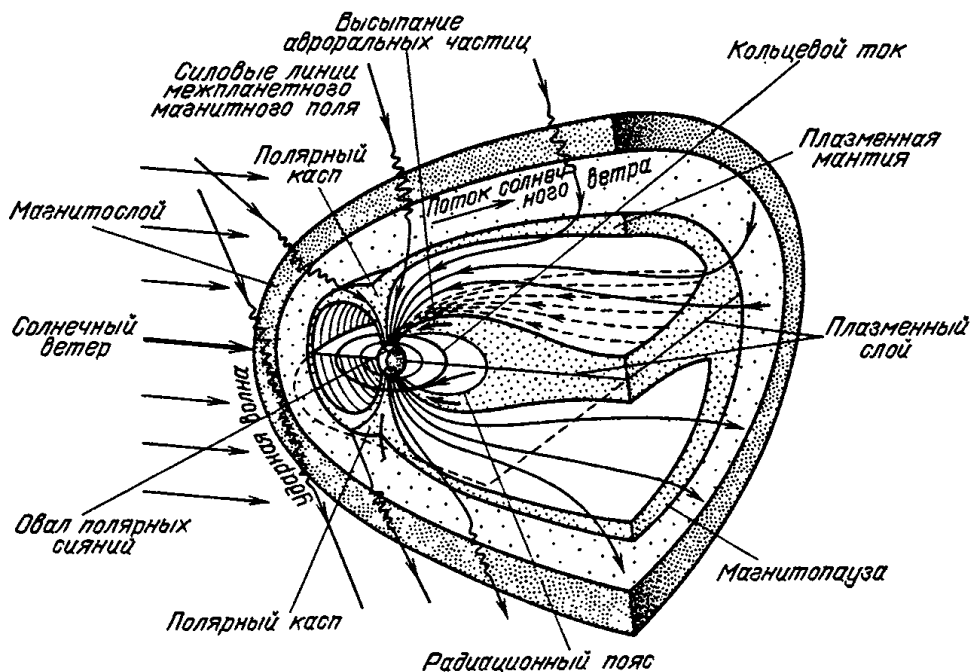


Рис.1. Структура земной магнитосферы и названия отдельных областей

В частности, в геомагнитном поле захваченные в ловушку заряженные частицы совершают колебания вдоль магнитных силовых линий, отражаясь от областей усиленного магнитного поля на достаточных высотах над атмосферой, которые играют роль магнитных пробок. Период вращения вокруг силовой линии составляет величину порядка  $10^{-6}$  с для электронов и  $10^{-3}$  с для ионов. Период колебания между точками отражения одинаков для электронов и ионов и, например, для линии, которая пересекает экватор на высоте 2000 км, он составляет примерно 0,5 с. На колебательное движение накладывается дрейфовое движение на восток или на запад (в зависимости от знака заряда частицы) в направлении геомагнитной параллели. Направленный в противоположные стороны дрейф ионов и электронов создаёт вокруг Земли кольцевой ток, текущий на запад. Заряженные частицы больших энергий (от нескольких кэВ до нескольких МэВ) образуют в магнитосфере Земли радиационный пояс (Рис. 1).

Подобным же образом формируются радиационные пояса в магнитосферах других планет.

В случае, когда захваченная заряженная частица длительно удерживается между двумя магнитными пробками и совершает при этом (без учёта дрейфа) периодическое движение, из дрейфовых уравнений можно получить ещё один так называемый продольный адиабатический инвариант  $J_{\parallel}$  дрейфовых уравнений. Он определяется как интеграл за полный период колебаний между магнитными пробками:

$$J_{\parallel} = \int_M^{M'} \langle c_{\parallel} \rangle ds = 2 \langle c \rangle \int_M^{M'} \sqrt{1 - |\mathbf{B}| / |\mathbf{B}|_M} ds \approx const. \quad (1.9)$$

Здесь скорость  $\langle c_{\parallel} \rangle$  и элемент длины силовой линии  $ds$  относятся к продольному движению ведущего центра;  $|\mathbf{B}|_M$  – величина магнитного поля в области магнитной пробки  $M$ ;  $|\mathbf{B}|$  – величина магнитного поля в произвольной точке вдоль пути частицы;  $M'$  – область магнитной пробки в противоположном полушарии.

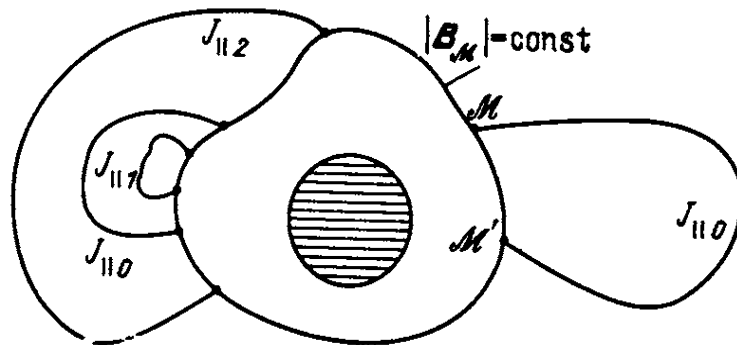


Рис.2

Предположим, что ведущий центр заряженной частицы движется так, что в зеркальных точках  $M$  и  $M'$  напряжённость магнитного поля равна  $|\mathbf{B}|_M$ , а продольный инвариант есть  $J_{\parallel 0}$  (правая часть Рис. 2). Пусть, кроме того, двигаясь в долготном направлении, частица окажется на противоположной стороне планеты. Тогда из условия сохранения поперечного инварианта будет следовать, что напряжённость в новой зеркальной точке остаётся прежней ( $|\mathbf{B}|_M$ ), однако существует много силовых линий, вдоль которых могут быть найдены точки, в которых  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}|_M$ . В свою очередь, интеграл  $J_{\parallel}$  между зеркальными точками различен на разных силовых линиях. Постоянство продольного инва-

рианта в этом случае означает, что захваченная в ловушку частица находится на той силовой линии, где  $J_{\parallel} = J_{\parallel 0}$ .

Для удобства интерпретации отдельных членов дрейфовых уравнений выпишем различные скорости поперечного дрейфа заряженных частиц и связанные с этими движениями электрические токи.

### Скорости дрейфа:

$$\mathbf{v}_E = \frac{c}{|\mathbf{B}|} \mathbf{E} \times \mathbf{h} \quad (1.10)$$

– электрический дрейф при постоянных и однородных электрическом и магнитном полях;

$$\mathbf{v}_P = \frac{Mc^2}{e|\mathbf{B}|^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.11)$$

– поляризационный дрейф при переменном электрическом поле или при изменении магнитного поля во времени;

$$\mathbf{v}_R = \frac{2c\langle w_{\parallel} \rangle}{e|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \quad (1.12)$$

– дрейф за счёт кривизны силовых линий магнитного поля планеты (центробежный дрейф);

$$\mathbf{v}_g = \frac{c\langle w_{\perp} \rangle}{e|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \times \nabla \mathbf{h} \quad (1.13)$$

– градиентный дрейф (дрейф в неоднородном магнитном поле, меняющемся только по величине);

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{e|\mathbf{B}|} \mathbf{F} \times \nabla \mathbf{h} \quad (1.14)$$

– дрейф при наличии внешней силы (гравитационной или силы инерции, если движение рассматривается в неинерциальной системе отсчёта)

### Электрические токи:

$$\mathbf{j}_M = -\nabla \times \left( \frac{n\langle w_{\perp} \rangle}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \right) \quad (1.15)$$

– электрический ток намагничивания, связанный с циклотронным вращением частиц;

$$\mathbf{j}_P = \sum n e \mathbf{v}_P = \frac{M n c^2}{|\mathbf{B}|^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.16)$$

– электрический поляризационный ток;

$$\mathbf{j}_R = \sum n e \mathbf{v}_R = \frac{2c \langle w_{\parallel} \rangle}{e |\mathbf{B}|} \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \quad (1.17)$$

– электрический ток из-за кривизны поля;

$$\mathbf{j}_g = \sum n e \mathbf{v}_g = \frac{n \langle w_{\perp} \rangle}{e |\mathbf{B}|} \mathbf{h} \times \nabla \mathbf{h} \quad (1.18)$$

– электрический ток при наличии градиента;

$$\mathbf{j}_F = \sum n e \mathbf{v}_F = \frac{n c}{|\mathbf{B}|} \mathbf{F} \times \nabla \mathbf{h} \quad (1.19)$$

– электрический ток при действии внешних сил.

Здесь  $\langle w_{\parallel} \rangle$ ,  $\langle w_{\perp} \rangle$  – кинетическая энергия частицы, связанная, соответственно, с продольной и поперечной компонентами скорости. Дальнейшее обобщение на случай кривизны поля любого характера дано в (Михайловский, Цыпин, 1982).

У планеты, обладающей магнитным полем, причиной появления дрейфового движения в нижней ионосфере под действием внешней силы  $\mathbf{F}$  может служить отличный от нуля вертикальный градиент давления нейтрального газа, сила трения о нейтральный газ и т.п. Продольный дрейф заряженных частиц в ионосферной плазме может возникнуть под влиянием постоянного сильного продольного планетарного электрического поля  $\mathbf{E}_{\parallel}$ . Если  $\mathbf{F} = 0$ , то согласно уравнению (1.1) продольная скорость свободной частицы будет расти со временем по закону  $s_{\parallel} \approx (e\mathbf{E}/M)t$ . Однако при столкновениях с частицами других сортов, в том числе с нейтралами, продольный дрейф заряженных частиц нарушается. При этом свободная частица испытывает силу трения  $\mathbf{F} = -\beta \mathbf{s}$ , так что её продольная дрейфовая скорость выходит на стационарное значение, равное  $s_{\parallel} \approx e\mathbf{E}/M\beta$ .

Такие столкновения (наиболее вероятные в области нижней ионосферы) будут сказываться на дрейфе заряженных частиц тем сильнее, чем больше циклотронная частота. В ионосфере Земли для протонов циклотронная частота составляет  $(4.5 \div 9) \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ , для тяжёлых ионов уменьшается пропорционально

их массовому числу, а для электронов соответственно в 1830 раз больше. Частота же газокинетических соударений на высотах около 100 км порядка  $\beta_{ie} \approx 6.2 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ . Это означает, что в этих областях ионосферы дрейф тяжёлых ионов невозможен, поскольку их циклотронная частота меньше частоты соударений, и в промежутки времени между очередными соударениями здесь могут дрейфовать только электроны. Однако с ростом высоты условия для длительного дрейфа тяжёлых частиц становятся более благоприятными.

Эффект соударений для электрона выражается в изменении направления его движения (рассеяние). При рассеянии может измениться питч-угол, а точка отражения сместится в более плотную атмосферу, где электрон с большей вероятностью передаст свою энергию другим частицам. Благодаря этому происходит непрерывная потеря захваченных электронов, обладающих малыми питч-углами, особенно там, где точки отражения расположены наиболее низко. Поэтому, например, в атмосфере Земли наиболее обильное "высыпание" электронов из радиационных поясов происходит в области южно-атлантической геомагнитной аномалии (Акасофу, Чепмен, 1975).

Укажем теперь условия применимости приближения «отдельных частиц». Заряженные частицы плазмы наряду с упорядоченным движением под действием электромагнитного поля (и поля неэлектромагнитного происхождения) совершают также и тепловое движение со скоростью  $v_T$ . За характерное время  $t_0$  (например, за характерное время изменения поля  $t_0 = (|\mathbf{B}|^{-1} \partial |\mathbf{B}| / \partial t)^{-1}$ ) частицу можно считать локализованной в области размером  $\sim v_T t_0$ . Это, по существу, локализация частицы в направлении поля  $\mathbf{B}$ . В направлении поперёк поля частица локализована благодаря циклотронному вращению вокруг силовых линий поля с радиусом  $\sim v_T / \omega$ . Чтобы можно было пренебречь эффектами столкновения частиц одного сорта между собой, необходимо, чтобы оба указанных масштаба были значительно меньше характерной длины  $L$ , т.е.

$$v_T t_0 / L \ll 1, \quad v_T / \omega L \ll 1. \quad (1.20)$$

Таким образом, дрейфовое приближение применимо лишь для тех частиц ионосферной плазмы, скорости которых значительно больше тепловых скоростей частиц данного сорта, а расстояния, на которых существенно меняются характеристики движения, больше циклотронных радиусов  $r_c = v_T / \omega$ .

## § 2. Самосогласованные уравнения Власова–Максвелла

Приближение ведущего центра удобно использовать при описании динамики магнитосферной плазмы в случае заданного внешнего электромагнитного поля (Сивухин, 1963; Морозов, Соловьев, 1963). Однако в реальных условиях магнитосферы планеты в результате движения плазменных частиц возникают

пространственные заряды и электрические токи, которые приводят к изменению внешних полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Эти изменения можно учесть, только решая задачу о движении плазмы в самосогласованных электромагнитных полях.

Наиболее точное описание движения заряженных частиц в электромагнитном поле магнитосферы достигается с помощью системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (a) \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j}, \quad (b) \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_L, \quad (a) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (b) \quad (2.2)$$

и кинетических уравнений Власова (Власов, 1967) для ионов и электронов

$$\frac{\partial f^\pm}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f^\pm \pm \frac{e}{M^\pm} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f^\pm = 0, \quad (2.3)$$

где  $f^\pm = f^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$  – функция распределения заряженных частиц (ионов (верхний индекс «+») и электронов (верхний индекс «-»)) в переменных  $\mathbf{r}, \mathbf{c}, t$ . Плотность электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  и плотность заряда  $\rho_L(\mathbf{r}, t)$  определяются при этом с помощью функций распределения  $f^\pm$  соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= e \int \mathbf{c} (f^+ - f^-) d\mathbf{c} \equiv e(n^+ \mathbf{V}^+ - n^- \mathbf{V}^-), \\ \rho_L(\mathbf{r}, t) &= e \int (f^+ - f^-) d\mathbf{c} \equiv e(n^+ - n^-), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $M^\pm$ ,  $e^\pm$ ,  $\mathbf{c}$  – соответственно молекулярная масса, электрический заряд ( $e$  – заряд иона) и скорость плазменной частицы относительно неподвижной системы координат;  $\mathbf{V}^\pm(\mathbf{r}, t) = (n^\pm)^{-1} \int \mathbf{c} f^\pm d\mathbf{c}$  и  $n^\pm(\mathbf{r}, t) = \int f^\pm d\mathbf{c}$  – средняя скорость и числовая плотность ионов и электронов. Векторы электромагнитной индукции  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  и напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  включают, помимо индуцированных полей, также и внешние магнитные и электрические поля. Системы уравнений (2.1)-(2.4) образуют полную систему уравнений, описывающих согласованное движение частиц нетепловой плазмы с возникающими при этом движении электромагнитными полями.

Следует отметить, что взаимодействие электронов и ионов между собой учитывается здесь по методу самосогласованного электромагнитного поля, т.е. поля, возбуждаемого как внешними источниками, так и макроскопическими объёмными зарядами  $\rho_L(\mathbf{r}, t)$  и токами  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  самой плазмы. Такому условию подчиняется взаимодействие частиц лишь на далёких расстояниях, где не дей-

ствуют кулоновские силы притяжения или отталкивания (которые часто трактуются как обычные столкновения). Таким образом, уравнения (2.3) описывают только далёкие взаимодействия заряженных частиц, причём возникающее в этом случае движение плазмы создаёт силовое поле, поддерживающее само это движение.

Упростим теперь систему уравнений (2.1)-(2.3), для чего предположим, что характерная длина неоднородностей плазмы  $L$  значительно превышает средний циклотронный радиус вращения  $R^+ = M^+ \tau^+ c / e |\mathbf{B}| = \tau^+ / \omega^+$  ионов, а соответствующие макроскопические временные масштабы динамических процессов в плазме  $T \sim L / \tau^+$  значительно больше времени циклотронного вращения ионов  $1/\omega^+$  (здесь  $\omega^+(\mathbf{r}) = (e/M^+c) |\mathbf{B}|$  – характерная циклотронная частота ионов;  $\tau^\pm$  – тепловая скорость плазменных частиц). В этом случае заряженные частицы движутся по спирали вдоль магнитной силовой линии, вращаясь вокруг неё, и дрейфуют в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Поскольку  $\omega^+ T = L/R^+ \gg 1$  (условие адиабатичности), то можно ожидать, что распределения электронов и ионов по скоростям обладают осевой симметрией относительно направления магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Тогда, путём осреднения их движения по ларморовскому вращению ионов (электронов), можно получить совокупность (квази) магнитогидродинамических уравнений для движений поперёк магнитного поля и кинетических уравнений для продольного движения (Chew и др., 1956; Watson, 1956; Chandrasekhar и др. 1957, 1958). Важно отметить, что возможность квазигидродинамического описания замагниченной бесстолкновительной плазмы объясняется, в конечном счёте, тем, что магнитное поле, симметризуя распределение скоростей в ортогональной ему плоскости, по характеру действия на заряженные частицы вполне аналогично столкновениям. Иногда (при наличии определённой симметрии, вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий) из этих уравнений можно получить уравнения гидродинамического типа с анизотропным тензором давления, описывающие медленное движение плазмы (см., например, Кадомцев, 1958; Рудаков, Сагдеев, 1958; Волков, 1964; Ramos, 2008).

**Нулевое приближение.** Введём безразмерные величины по формулам

$$t = T t^*, \quad \mathbf{r} = L \mathbf{r}^*, \quad \mathbf{c} = L \mathbf{c}^* / T, \quad \mathbf{E}_{\parallel} = E_{\parallel 0} \mathbf{E}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{E}_{\perp} = E_{\perp 0} \mathbf{E}_{\perp}^*, \quad \mathbf{B} = B_0 \mathbf{B}^* \quad (2.5)$$

(где  $T$ ,  $L$ ,  $L/T$ ,  $E_{(\parallel, \perp)0}$ ,  $B_0$  – характерные значения времени, длины, скорости, электрического поля и магнитной индукции соответственно) и сделаем обычное в дрейфовой теории предположение о эквипотенциальности магнитных силовых линий. В этом случае  $E_{\parallel 0} \ll E_{\perp 0} \sim E_0 = LB/cT$  (т.е.  $\xi \equiv E_{\parallel 0}/E_{\perp 0} \ll 1$ ). Будем далее опускать индексы « $\pm$ » у параметров плазмы, указывающие на раз-



новидность плазменной частицы, поскольку уравнения для ионов и электронов выглядят аналогично: полученные ниже результаты для ионов применимы также и к электронам.

Подставляя (2.5) в (2.3) и опуская для простоты индекс «\*», в безразмерном виде получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f + \omega_0 T \left( \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} \mathbf{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_c f + \omega_0 T \xi (\mathbf{E}_\parallel \cdot \nabla_c f) = 0, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{E})$ ,  $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B} / |\mathbf{B}|$  – единичный вектор вдоль магнитного поля;  $\omega_0 = eB_0 / M^+ c$  – характерная циклотронная частота.

В случае если электромагнитные поля медленно меняются в пространстве и во времени, решение уравнений (2.6) можно получить разложением по степеням  $(\omega_0)^{-1}$ . Такое разложение для случая статистических полей с точностью до членов порядка  $(\omega_0)^{-1}$  проведено в работе (Боголюбов, Зубарев, 1955). При  $\omega_0 T \gg 1$  третий член в (2.6) много больше остальных, поэтому, пренебрегая малыми величинами, в нулевом приближении имеем

$$\left( \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} \mathbf{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_c f = 0. \quad (2.7)$$

Это уравнение может быть переписано следующим образом:

$$\left\{ (\mathbf{c} - \mathbf{v}_E) \times \mathbf{B} \right\} \cdot \nabla_c f = 0, \quad \text{где } \mathbf{v}_E(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{|\mathbf{B}|} (\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{h}) \quad (2.7^*)$$

– скорость электрического дрейфа (скорость движения ведущего центра). Общее решение уравнения (2.7) имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = f_0(\mathbf{r}, t, \mathbf{B}, (\mathbf{c} - \mathbf{v}_E)^2), \quad (2.8)$$

где функция  $f_0$  обладает осевой симметрией относительно направления  $\mathbf{h}$ . Таким образом, в случае нулевого приближения движение заряженных частиц представляет собой циклотронное вращение вокруг центра, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}_E$  поперёк магнитного поля.

Если теперь ввести макроскопические поперечные скорости для ионов  $\mathbf{v}_\perp^+(\mathbf{r}, t)$  и электронов  $\mathbf{v}_\perp^-(\mathbf{r}, t)$

$$n^+ \mathbf{V}_\perp^+ = \int \mathbf{c}_\perp f_0^+ d\mathbf{c}, \quad n^- \mathbf{V}_\perp^- = \int \mathbf{c}_\perp f_0^- d\mathbf{c}, \quad (2.9)$$

(где  $\mathbf{c}_\perp = \mathbf{c} - \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{c})$ ), то можно заключить (см. также ниже), что в нулевом приближении  $f_0$  электроны и ионы дрейфуют с одинаковыми скоростями  $\mathbf{V}_\perp^+(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_\perp^-(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{r}, t)$  поперёк магнитного поля; при этом:  $\mathbf{E}_\perp = -c^{-1}(\mathbf{V}_\perp \times \mathbf{B})$ .

В случае пренебрежения током смещения (что возможно всегда, когда характерная скорость процесса  $L/T$  мала по сравнению со скоростью света  $c$ ), в нулевом приближении уравнения Максвелла (2.1) принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v}_E \times \mathbf{B}), \quad c \text{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} \equiv 4\pi e \mathbf{v}_E (n^+ - n^-) \simeq 0. \quad (2.10)$$

Когда плазменная (ленгмюровская) частота электронов  $\Omega^- = \sqrt{4\pi e^2 n^- / M^-}$  больше их циклотронной частоты  $\omega^-$ , плазма является квазинейтральной ( $n^- \simeq n^+$ ); это условие (справедливое, как правило, для плазмы) заменяет уравнение Пуассона (2.2<sup>(a)</sup>),  $\text{div} \mathbf{E} = 4\pi e (n^+ - n^-)$ . Таким образом, уравнения (2.10) совместно с уравнением  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  служат для определения самосогласованных электромагнитных полей.

**Первое приближение.** Рассмотрим теперь общий подход к решению уравнения (2.3) (см. Brueckner, Watson, 1956; Chandrasekhar и др. 1957, 1958; Кадомцев, 1958; Ramos, 2008; Tasso, Throumoulopoulos, 2011, 2013). Перепишем уравнение (2.3) следующим образом:

$$\mathcal{D}f + \omega \mathcal{L}f = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\mathcal{D}f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f + \frac{e}{M} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_\perp \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f,$$

$$\mathcal{L}f \equiv \{(\mathbf{c} - \mathbf{V}_\perp) \times \mathbf{B}\} \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f.$$

Поскольку первый оператор кинетического уравнения (2.11) является малым по сравнению со вторым ( $|\omega| \gg 1$ ), то решение уравнения  $f$  будем искать в виде разложения по обратным степеням частоты  $\omega$ . Таким образом, принимая усло-

вие  $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^{-\nu} f_\nu$ , получим

$$\mathcal{L}f_0(\mathbf{c} - \mathbf{v}_E) = 0, \quad \mathcal{D}f_0 + \mathcal{L}f_1 = 0, \quad \mathcal{D}f_{(\nu-1)} + \mathcal{L}f_{(\nu)} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Введём теперь новые переменные фазового пространства  $t$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{c}_\parallel$ ,  $\mathbf{c}_\perp$  и  $\theta$  по формулам

$$c_{\parallel} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}, \quad c_{\perp} = \sqrt{(\mathbf{c} - \mathbf{V}_{\perp})^2 - c_{\parallel}^2}, \quad (2.12)$$

где  $c_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$  – продольная компонента скорости заряженной частицы,  $c_{\perp}(\mathbf{r}, t)$  – поперечная компонента относительной скорости,  $\theta$  – азимутальный угол в пространстве скоростей в плоскости, нормальной к единичному вектору  $\mathbf{h}$ . В криволинейной ортогональной системе координат в пространстве скоростей, связанной с магнитным полем, с ортами  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  – соответственно нормаль и бинормаль к силовой линии магнитного поля), скорость частицы  $\mathbf{c}$  может быть представлена в виде:

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}_E + c_{\parallel} \mathbf{h} + c_{\perp} (\cos\theta \mathbf{n} + \sin\theta \mathbf{b}). \quad (2.13)$$

Тогда, в дрейфовых переменных  $\mathbf{r}$ ,  $c_{\parallel}$ ,  $c_{\perp}$  и  $\theta$  оператор  $\mathcal{L}$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f &\equiv c_{\perp} (\sin\theta \mathbf{n} - \cos\theta \mathbf{b}) \cdot \nabla_{\mathbf{c}} f = c_{\perp} (\sin\theta \mathbf{n} - \cos\theta \mathbf{b}) \times \\ &\times \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial f}{\partial c_{\parallel}} + (\cos\theta \mathbf{n} + \sin\theta \mathbf{b}) \frac{\partial f}{\partial c_{\perp}} + \frac{1}{c_{\perp}} (-\sin\theta \mathbf{n} + \cos\theta \mathbf{b}) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\} = -\frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Следовательно, в нулевом приближении ( $\mathcal{L}f_0(\mathbf{r}, t) = 0$ ) справедливо уравнение  $\partial f_0 / \partial \theta = 0$ , решение которого  $f_0 = f_0(\mathbf{r}, t, c_{\parallel}, c_{\perp})$ ; сравнивая это решение с (2.8), получим равенство  $\mathbf{V}_{\perp}^{\pm} \equiv \mathbf{v}_E$ .

Для решения кинетического уравнения (2.11) в первом «дрейфовом» приближении, положим  $f = f_0(\mathbf{c} - \mathbf{v}_E) + \omega^{-1} f_1$ ; пренебрегая величиной  $f_1$  в операторе  $\mathcal{D}$ , функцию  $f_1$  будем определять из уравнения

$$\omega \partial f_1(\mathbf{r}, t) / \partial \theta = \mathcal{D} f_0(\mathbf{r}, t). \quad (2.15)$$

Для этого запишем оператор  $\mathcal{D}$  в дрейфовых переменных  $t$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $c_{\parallel}$ ,  $c_{\perp}$ . Переход к новым переменным в пространстве скоростей сводится к замене

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial c_{\parallel}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial c_{\parallel}} + \frac{\partial c_{\perp}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial c_{\perp}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial c_{\parallel}} - \left( \frac{c_{\parallel}}{c_{\perp}} \mathbf{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{v}_E}{c_{\perp}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial c_{\perp}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
\nabla &\rightarrow \nabla + \nabla c_{\parallel} \left( \frac{\partial}{\partial c_{\parallel}} \right) + \nabla c_{\perp} \left( \frac{\partial}{\partial c_{\perp}} \right) = \\
&= \nabla + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{h} \left( \frac{\partial}{\partial c_{\parallel}} \right) - \left( \frac{c_{\parallel}}{c_{\perp}} (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{h} + \frac{1}{c_{\perp}} [(\mathbf{c} - \mathbf{v}_E) \cdot \nabla] \mathbf{v}_E \right) \frac{\partial}{\partial c_{\perp}}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

С учётом этих выражений и формулы (2.14) для оператора  $\mathcal{L}$  кинетическое уравнение (2.15) для определения функции  $f^{(1)}$  принимает следующий вид (Ramos, 2008):

$$\begin{aligned}
\omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f_0 + \left( \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}' + \frac{e}{M} \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} \right) \frac{\partial f_0}{\partial c_{\parallel}} + \\
&+ \left\{ -\frac{c_{\parallel}}{c_{\perp}} \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}' - \frac{\mathbf{c} - \mathbf{v}_E}{c_{\perp}} \cdot \mathbf{v}'_E + \frac{e}{M} \frac{\mathbf{c} - \mathbf{v}_E}{c_{\perp}} \cdot \left[ \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_E \times \mathbf{B}) \right] \right\} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial c_{\perp}},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где штрихом обозначена производная  $\partial(\cdot) / \partial t + \mathbf{c} \cdot \nabla(\cdot)$ .

При рассмотрении динамики плазмы необходимо решать кинетические уравнения (2.18) совместно с уравнениями Максвелла. При этом истинные плотности электрического тока и заряда должны определяться средними макроскопическими скоростями электронов и ионов, которые выражаются через функции распределения частиц  $f^{\pm}(\mathbf{r}, t)$ , а не средними скоростями их ведущих центров с функцией распределения  $f_0$  (см. ниже). Следовательно, для получения правильных выражений для средних скоростей частиц данного сорта необходимо учитывать члены первого порядка в разложении функции  $f$  по степеням  $\omega^{-1}$ .

Чтобы это уравнение (2.18) было разрешимо относительно  $f_1$ , необходимо, как известно, выполнение условия ортогональности правой части (2.18) к решению уравнения, сопряжённого с  $\partial f_1 / \partial \theta = 0$ . Это условие разрешимости получается в результате осреднения (2.18) по  $\theta$ . По физическому смыслу задачи величина  $f_1$  должна быть периодической функцией угла  $\theta$ ; тогда в силу однозначности  $f_1$  получаем необходимое для этого случая условие:  $\int_0^{2\pi} \mathcal{D} f_0 d\theta = 0$  – интегральное условие периодичности.

С учётом этого условия, равенства  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_E = 0$ , а также следующего из (2.9) векторного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h} = (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E - (\mathbf{v}_E \cdot \nabla) \mathbf{h} - \mathbf{h} \{ \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E \}, \quad (2.19)$$

проинтегрируем уравнение (2.18) по  $\theta$ . В результате получим кинетическое уравнение, записанное в форме Лиувилля в фазовом пространстве  $t, \mathbf{r}, c_{\parallel}, c_{\perp}$  (Сивухин, 1963; Ramos, 2008):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_E + c_{\parallel} \mathbf{h}) \cdot \nabla f_0 + \frac{dc_{\parallel}}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial c_{\parallel}} + \frac{dc_{\perp}}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial c_{\perp}} = 0, \quad (2.20)$$

где  $\mathbf{v}_c \equiv (\mathbf{v}_E + c_{\parallel} \mathbf{h})$  – скорость движения ведущего центра;

$$\frac{dc_{\parallel}}{dt} \equiv \frac{e}{M} \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} + \frac{c_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} - c_{\parallel} \mathbf{h} \cdot [(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E] + \mathbf{h} \cdot \nabla \left( |\mathbf{v}_E|^2 / 2 \right); \quad (2.21)$$

$$\frac{dc_{\perp}}{dt} \equiv -\frac{c_{\perp}}{2} \left\{ c_{\parallel} \operatorname{div} \mathbf{h} + \operatorname{div} \mathbf{v}_E - \mathbf{h} \cdot [(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E] \right\}. \quad (2.22)$$

В этих соотношениях под  $c_{\parallel}$  и  $c_{\perp}$  следует понимать теперь сглаженные значения соответствующих величин (т.е. значения, усреднённые по азимуту  $\theta$ ); функция распределения  $f_0$  также не зависит от распределения скоростей частиц по  $\theta$  и потому может интерпретироваться как функция распределения ведущих центров; величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  также следует трактовать как напряжённости полей в точке нахождения ведущего центра

Второе интегральное условие, являющееся следствием определения (2.9) макроскопической скорости поперечного движения частиц  $\mathbf{V}_{\perp}$ , запишется так:

$$\int (\mathbf{c} - \mathbf{V}_{\perp} - \mathbf{h} c_{\parallel}) f d\mathbf{c} = 0, \quad (2.23)$$

причём в первом приближении это условие принимает следующий вид  $\int c_{\perp} (\mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta) f_1 d\mathbf{c} = 0$ , поскольку при интегрировании по углу  $\theta$  члены с  $f_0 \cos \theta$  и  $f_0 \sin \theta$  выпадают. Для выполнения условия (2.23) умножим скалярно уравнение (2.18) на  $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{c} - \mathbf{V}_{\perp} - \mathbf{h} c_{\parallel})$  и проинтегрируем результат по  $\mathbf{c}$  ( $d\mathbf{c} = c_{\perp} dc_{\perp} dc_{\parallel} d\theta$ ). В итоге получим уравнение для макроскопической скорости поперечного движения  $\mathbf{V}_{\perp}$  заряженной частицы в первом приближении:

$$\mathbf{V}_\perp = \mathbf{v}_E + \frac{1}{\omega} \left\{ \mathbf{h} \times \left[ \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} + V_\parallel \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \frac{\nabla p_\perp}{nM} + \frac{p_\parallel - p_\perp}{nM} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right] \right\}, \quad (2.24)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_E + \mathbf{V}_\parallel) \cdot \nabla,$$

$$V_\parallel^\pm = (n^\pm)^{-1} \int c_\parallel f^\pm d\mathbf{c} V, \quad p_\perp^\pm = \frac{1}{2} M^\pm \int c_\perp^2 f^\pm d\mathbf{c}, \quad p_\parallel^\pm = M^\pm \int (c_\parallel - v_\parallel^\pm)^2 f^\pm d\mathbf{c}; \quad (2.25)$$

$\mathbf{V}_\parallel = \mathbf{h} V_\parallel$ ,  $v_\parallel$ ,  $p_\parallel$ ,  $p_\perp$  – соответственно макроскопическая скорость, продольная компонента макроскопической скорости, поперечное и продольное давление плазменных частиц.

Иногда удобно разрешить уравнение (2.25) относительно  $d\mathbf{v}_E/dt$ , чтобы получить макроскопические уравнения движения плазменных частиц в поперечном направлении:

$$n^\pm M^\pm \left[ \left( \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} \right) + V_\parallel^\pm \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right] = -\nabla_\perp p_\perp^\pm - (p_\parallel^\pm - p_\perp^\pm) (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} + e^\pm n^\pm \left( \mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{v}_E}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (2.6)$$

Таким образом, вместо одного гидростатического давления  $p$  в плазме, в которой существенную роль играют столкновения, в бесстолкновительном случае давление имеет продольную и поперечную компоненты относительно направления магнитного поля, т.е. является анизотропным.

Важно иметь в виду, что рассмотренный здесь подход позволяет получить приближения и более высоких порядков (см. Brueckner, Watson, 1956; Chandrasekhar и др., 1957, 1958). В частности, во втором приближении будут учитываться дрейфовые потоки (Ramos, 2008). Кроме того, этот метод допускает присутствие и столкновительного члена в исходном кинетическом уравнении, который в модифицированном уравнении (2.20) будет описывать процесс установления максвелловского распределения, а в уравнении (2.26) приведёт к появлению силы трения между электронами и ионами, т.е. к диффузии плазмы за счёт конечной проводимости (см., например, Михайловский, 1977). Наконец, учёт столкновительного члена во втором приближении приведёт к поперечной вязкости и теплопроводности плазмы. Однако все эти эффекты являются малыми и в ряде задач, как, например, при исследовании эволюции магнитосферной плазмы, могут не учитываться (Кадомцев, 1958).

Остановимся вкратце на физическом смысле полученных уравнений. Уравнение (2.20) после его интегрирования по  $\theta$  эквивалентно осреднению уравнений движения для отдельных частиц по азимутальному углу  $\theta$ . Осреднение означает переход к дрейфовому приближению. В этом случае функцию

$f_0(\mathbf{r}, c_{\parallel}, c_{\perp})$ , не зависящую от распределения скоростей частиц по азимуту, можно интерпретировать как функцию распределения ведущих центров. Функция  $f^{(0)}$  удовлетворяет кинетическому уравнению (2.20), которое в дрейфовом приближении принимает форму теоремы Лиувилля, выражающей закон сохранения числа частиц в фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, c_{\parallel}, c_{\perp})$ . При этом под  $c_{\parallel}$  и  $c_{\perp}$  следует понимать осреднённые по  $\theta$  значения продольной и поперечной скоростей относительного движения. Наконец, можно (см. Морозов, Соловьев, 1963) заключить, что  $\mathbf{V}_{\perp}$  – это скорость движения ведущего центра (в первом приближении), а уравнения (2.21) и (2.22) описывают плавное изменение продольной и поперечной скоростей частицы.

Наконец, складывая уравнение (2.26), записанное для ионов, с аналогичным уравнением для электронов, можно исключить члены с электрическим полем, а члены с магнитным полем дадут электрическую силу  $c^{-1}\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . В случае пренебрежения инерцией электронов получим следующее уравнение для поперечного движения бесстолкновительной плазмы:

$$\rho \left( \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} \right)_{\perp} = -\rho V_{\parallel} \frac{d\mathbf{h}}{dt} - \nabla_{\perp} p_{\perp} - (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h} + \frac{1}{c}(\mathbf{j}_{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (2.27)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + [(\mathbf{v}_E + \mathbf{V}_{\parallel}) \cdot \nabla],$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + [(\mathbf{v}_E + \mathbf{V}_{\parallel}) \cdot \nabla]\mathbf{h} = (\mathbf{V}_{\parallel} \cdot \nabla)\mathbf{h} + (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{v}_E + \mathbf{h} \{ \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{h} \cdot \nabla)\mathbf{h} \},$$

где  $p_{\parallel, \perp} = p_{\parallel, \perp}^+ + p_{\parallel, \perp}^-$ ;  $\rho \approx n^+ M^+$  – массовая плотность смеси. Это уравнение, рассматриваемое совместно с выражениями (2.25) для давлений, с кинетическими уравнениями (2.20) для продольного движения ионов и электронов, а также с системой уравнений Максвелла (в дрейфовом приближении) для полей, записанных в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V}_{\perp} \times \mathbf{B}), \quad (a) \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (b)$$

$$c \text{rot} \mathbf{B} = 4\pi(\mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel}) = 4\pi n e (\mathbf{V}_{\perp}^+ - \mathbf{V}_{\perp}^-) + 4\pi n e (\mathbf{V}_{\parallel}^+ - \mathbf{V}_{\parallel}^-)\mathbf{h}, \quad (c) \quad (2.28)$$

представляет собой полную систему уравнений для описания движений плазмы с частотами значительно ниже циклотронной частоты ионов  $\omega^+$ . Эти уравнения являются первым приближением в разложении точных кинетических уравне-

ний по степеням малого параметра  $\omega^{-1}$ . Подчеркнём также, что уравнение (2.28<sup>(a)</sup>) является следствием того факта, что электрическое поле в собственной системе координат, связанной с частицей плазмы, равно нулю, т.е.  $\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0$ .

Если уравнение (2.27) разрешить относительно поперечного электрического тока  $\mathbf{j}_\perp$ , то получим

$$\mathbf{j}_\perp = ne(\mathbf{V}_\perp^+ - \mathbf{V}_\perp^-) = \frac{c}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \times \left\{ \rho \left( \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} \right)_\perp + \rho V_\parallel \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \nabla_\perp p_\perp + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right\}. \quad (2.29)$$

Тогда закон Ома приобретает вид:  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_\parallel = \mathbf{j}_\perp + ne(\mathbf{V}_\parallel^+ - \mathbf{V}_\parallel^-) \mathbf{h}$ . Аналогичное выражение получается в элементарной теории дрейфовых токов (см. Сивухин, 1963).

**Макроскопическая скорость заряженных частиц в плазме.** Вычислим среднюю макроскопическую скорость в первом приближении для плазменных частиц. По определению имеем

$$n^\pm \mathbf{V}^\pm = \int \mathbf{c} f^\pm d\mathbf{c} \cong \int \mathbf{c} (f_0^\pm + f_1^\pm) d\mathbf{c}. \quad (2.30)$$

Подставляя сюда выражение  $\mathbf{c} = \mathbf{v}_E + c_\parallel \mathbf{h} + c_\perp (\cos\theta \mathbf{n} + \sin\theta \mathbf{b})$  и учитывая (2.24), а также то обстоятельство, что при осреднении по  $\theta$  члены с  $f_0 \sin\theta$  и  $f_0 \cos\theta$  обращаются в нуль, в результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^\pm &= \mathbf{v}_E + V_\parallel^\pm \mathbf{h} = \\ &= V_\parallel^\pm \mathbf{h} + \frac{1}{\omega^\pm} \left\{ \mathbf{h} \times \left[ \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} + V_\parallel^\pm \frac{d\mathbf{h}}{dt} - \frac{e^\pm \mathbf{E}}{M^\pm} + \frac{\nabla p_\perp^\pm}{n^\pm M^\pm} + \frac{p_\parallel^\pm - p_\perp^\pm}{n^\pm M^\pm} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

или, при использовании векторного соотношения

$$\frac{c}{e^\pm n^\pm} \text{rot} \left( \frac{p_\perp^\pm}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \right) = \frac{p_\perp^\pm}{M^\pm n^\pm \omega^\pm} \left\{ \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \cdot \text{roth}) + \mathbf{h} \times [(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}] + \mathbf{h} \times \nabla \ln \frac{|\mathbf{B}|}{p_\perp^\pm} \right\} \quad (2.32)$$

в другой форме (Волков, 1964):



$$\mathbf{V}^{\pm} = \left( \mathbf{v}_E + \hat{V}_{\parallel}^{\pm} \mathbf{h} \right) + \frac{c}{e^{\pm} n^{\pm}} \left\{ -rot \left( \frac{p_{\perp}^{\pm}}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \times \left[ n^{\pm} M^{\pm} \left( \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} + V_{\parallel}^{\pm} \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) + p_{\perp}^{\pm} \nabla \ln |\mathbf{B}| + p_{\parallel}^{\pm} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right] \right\}. \quad (2.33)$$

Здесь величина  $\hat{V}_{\parallel} \equiv V_{\parallel} + (p_{\perp}/M \omega) \mathbf{h} \cdot rot \mathbf{h}$  представляет собой сглаженную проекцию скорости заряженной частицы на направление магнитного поля в точке, совпадающей с ведущим центром частицы (так называемая скорость дрейфового движения (Сивухин, 1963)). Поясним физический смысл отдельных членов в соотношении (2.33):  $\hat{V}_{\parallel} \mathbf{h}$  – упорядоченная микроскопическая скорость плазменной частицы вдоль поля (величина, обычно используемая в теории дрейфового движения частиц);  $\mathbf{v}_E$  – скорость, с которой дрейфуют заряженные частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях (этот член является главным, если электрическое поле достаточно сильное); последний член даёт усреднённый дрейф частиц за счёт градиента магнитного поля, его кривизны (центробежный дрейф), а также за счёт силы инерции  $\frac{d\mathbf{v}_E}{dt} + V_{\parallel} \frac{d\mathbf{h}}{dt}$ , поскольку рассмотрение проводилось в движущейся локальной системе координат.

Выясним теперь смысл члена  $\frac{c}{en} rot \left( p_{\perp} \mathbf{h} / |\mathbf{B}| \right)$  в выражении (2.33). Если разрешить соотношение (2.27) относительно электрического тока  $\mathbf{j}$ , то в результате получим закон Ома в следующем виде:

$$\mathbf{j} = ne(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) = en(\hat{V}_{\parallel}^+ - \hat{V}_{\parallel}^-) \mathbf{h} - c rot \left( \frac{p_{\perp}}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \right) + \mathbf{j}^*, \quad (2.34)$$

где

$$\mathbf{j}^* = \frac{c}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} \times \left\{ \rho \left( \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} + V_{\parallel} \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) + p_{\perp} \nabla \ln |\mathbf{B}| + p_{\parallel} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \right\}$$

где  $V_{\parallel} = V_{\parallel}^+ + V_{\parallel}^-$ ,  $p_{\perp} = p_{\perp}^+ + p_{\perp}^-$ ,  $p_{\parallel} = p_{\parallel}^+ + p_{\parallel}^-$ . Тогда уравнение Максвелла  $c rot \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}$  может быть переписано следующим образом:

$$c rot \mathbf{H} = 4\pi ne(\mathbf{V}_{\parallel}^+ - \mathbf{V}_{\parallel}^-) + 4\pi \mathbf{j}_{\perp}^*, \quad (2.35)$$

где

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + 4\pi \frac{p_{\perp}}{|\mathbf{B}|} \mathbf{h} = \kappa \mathbf{B}. \quad (2.36)$$

Таким образом, в равенстве (34) член  $rot(p_{\perp} \mathbf{h} / |\mathbf{B}|)$  интерпретируется как ток намагничивания, а величину  $\kappa = \left(1 + 4\pi p_{\perp} / |\mathbf{B}|^2\right)$  следует понимать как магнитную проницаемость плазмы.

Совместное решение кинетических уравнений (2.20) для продольного движения, гидродинамических уравнений (2.27) для поперечного движения заряженных частиц бесстолкновительной плазмы и уравнений поля (2.1), (2.2), (2.35) позволяет наиболее строго описывать коллективные процессы взаимодействия волн с частицами в планетной плазмосфере и магнитосфере. Эти уравнения позволяют, в частности, исследовать механизм бесстолкновительного затухания гидромагнитных волн (затухание Ландау), генерируемых различными видами плазменных неустойчивостей в магнитосфере и особенно в авроральных областях. Диссипация различных типов гидромагнитных волн, приводящая к накоплению тепловой энергии частиц и влияющая на явления крупномасштабного переноса, сопровождается рассеянием и быстрой изотропизацией протонов и электронов по питч-углам, что способствует постоянному притоку частиц в конус потерь и их последующему высыпанию (выходу из состава радиационных поясов) в верхнюю атмосферу.

### § 3. Уравнения макроскопического движения бесстолкновительной плазмы

Часто вместо кинетических уравнений (2.20)-(2.22) можно воспользоваться уравнениями квазигидродинамики. Согласно обычной схеме (Chew и др., 1956; Watson, 1956; Charles, Greene, 1966; Kennel, Greene, 1966) для этого необходимо умножить (2.20) на различные степени скоростей и затем проинтегрировать по пространству скоростей. В результате можно получить бесконечную зацепляющуюся систему уравнений для моментов. Если умножить (2.20) последовательно на 1,  $c_{\parallel}$ ,  $c_{\perp}^2$  и  $(c_{\parallel} - V_{\parallel})^2$  и проинтегрировать полученный результат по  $\mathbf{c}$ , то получим следующие уравнения для каждого сорта частиц (см. Chew и др., 1956):

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial n^{\pm}}{\partial t} + div \left\{ n^{\pm} (\mathbf{v}_E + V_{\parallel}^{\pm} \mathbf{h}) \right\} = 0; \quad (3.1)$$

уравнения движения в направлении магнитного поля

$$M^\pm n^\pm \frac{dV_\parallel^\pm}{dt} = -\mathbf{h} \cdot \nabla p_\parallel^\pm + (p_\perp^\pm - p_\parallel^\pm) \operatorname{div} \mathbf{h} + e^\pm n^\pm \mathbf{E} \cdot \mathbf{h} - M^\pm n^\pm \left( \mathbf{h} \cdot \frac{d\mathbf{v}_E}{dt} \right); \quad (3.2)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \frac{dp_\perp^\pm}{dt} + 2p_\perp^\pm \operatorname{div} \mathbf{v}_E - p_\perp^\pm \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{v}_E + p_\perp^\pm \operatorname{div} \mathbf{V}_\parallel^\pm + p_\perp^\pm V_\parallel^\pm \operatorname{div} \mathbf{h} = \\ = -\operatorname{div}(q^\pm \mathbf{h}) - q^\pm \operatorname{div} \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{dp_\parallel^\pm}{dt} + 3p_\parallel^\pm (\mathbf{h} \cdot \nabla V_\parallel^\pm) - p_\parallel^\pm V_\parallel^\pm \operatorname{div} \mathbf{h} + p_\parallel^\pm \operatorname{div} \mathbf{v}_E + 2p_\parallel^\pm \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E = -\operatorname{div}(\mathbf{h} s^\pm). \quad (3.4)$$

Здесь величины  $q$  и  $s$  представляют тепловые потоки (третьи моменты от функции распределения):

$$q = \int c_\perp^2 (c_\parallel - V_\parallel) f_0 d\mathbf{c}, \quad s = \int (c_\parallel - V_\parallel)^3 f_0 d\mathbf{c} \quad (3.5)$$

Если теперь воспользоваться векторным равенством

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \mathbf{B} \left\{ -V_\parallel \operatorname{div} \mathbf{h} - \operatorname{div} \mathbf{v}_E + \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{v}_E \right\}$$

и уравнениями неразрывности (3.1), то уравнения состояния (3.3) и (3.4) примут соответственно  $\mathbf{B}$  вид

$$n^\pm |\mathbf{B}| \frac{d}{dt} \left( \frac{p_\perp^\pm}{n^\pm |\mathbf{B}|} \right) = -\operatorname{div}(q^\pm \mathbf{h}) - q^\pm \operatorname{div} \mathbf{h}, \quad (3.6)$$

$$\frac{n^\pm}{|\mathbf{B}|^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{p_\parallel^\pm |\mathbf{B}|^2}{(n^\pm)^3} \right) = -\operatorname{div}(\mathbf{h} s^\pm). \quad (3.7)$$

С другой стороны, складывая уравнения движения в направлении магнитного поля (3.2) с уравнением (2.26) для поперечного движения плазменных частиц, приходим к общему уравнению движения частиц данного сорта:

$$\begin{aligned} M^\pm n^\pm \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_E + V_\parallel^\pm \mathbf{h}) = -\mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \nabla p_\parallel^\pm) + (p_\perp^\pm - p_\parallel^\pm) \mathbf{h} \operatorname{div} \mathbf{h} + \\ + (p_\perp^\pm - p_\parallel^\pm) (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} - \nabla p_\perp^\pm + e^\pm n^\pm \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_E \times \mathbf{B} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Введём теперь неизотропный тензор давления  $\vec{\mathbf{P}}^\pm$  с компонентами  $(\vec{\mathbf{P}}^\pm)_{ik} = -p_\perp^\pm \delta_{ik} + (p_\perp^\pm - p_\parallel^\pm) h_i h_k$  (здесь  $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, h_3\}$ ); тогда путём непосредственного дифференцирования легко убедиться, что

$$-Div \vec{\mathbf{P}}^\pm = \nabla p_\perp^\pm + (p_\parallel^\pm - p_\perp^\pm)(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} + (p_\parallel^\pm - p_\perp^\pm) \mathbf{h} \cdot div \mathbf{h} + \mathbf{h} \left[ \mathbf{h} \cdot \nabla (p_\parallel^\pm - p_\perp^\pm) \right]. \quad (3.9)$$

С учётом этой формулы общее уравнение движения плазменных частиц (3.8) принимает обычный гидродинамический вид

$$M^\pm n^\pm \frac{d\mathbf{V}^\pm}{dt} = Div \vec{\mathbf{P}}^\pm + e^\pm n^\pm \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_E \times \mathbf{B} \right), \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{V}^\pm = \mathbf{v}_E + V_\parallel^\pm \mathbf{h}$ .

Как видим, система уравнений (3.1)-(3.4) вместе с (2.26) оказывается незамкнутой. Формально её можно замкнуть, приравняв величины  $q^\pm$  и  $s^\pm$  нулю, что физически означает отсутствие потока тепла вдоль силовых линий. Вместе с тем в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{B}$ , перенос тепла, определяемый как раз третьими моментами, затруднителен вследствие циклотронного вращения заряженных частиц. Поэтому в этой плоскости применение системы уравнений (3.1), (3.2), (2.26) и двух адиабатических соотношений (уравнений "состояния")

$$n^\pm |\mathbf{B}| \frac{d}{dt} \left( \frac{p_\perp^\pm}{n^\pm |\mathbf{B}|} \right) = 0, \quad \frac{n^\pm}{|\mathbf{B}|^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{p_\parallel^\pm |\mathbf{B}|^2}{(n^\pm)^3} \right) = 0 \quad (3.11)$$

является достаточно оправданным (см., например, Рудаков, Сагдеев, 1958). Уравнения (3.11), выражающие закон сохранения энергии для продольного и поперечного теплового движения, были выведены Чу, Гольдбергером и Лоу (ЧГЛ) в 1957 г. В первом приближении по параметру  $\omega$  скорости  $\mathbf{V}^\pm$  плазменных частиц, рассчитываемые по формуле (2.31), совпадают со средней скоростью дрейфа ведущего центра, вычисленной в том же приближении. В этом случае величины

$$\frac{p_\perp^\pm}{n^\pm |\mathbf{B}|} = \frac{M^\pm \langle c_\perp^2 \rangle}{2 |\mathbf{B}|} \equiv M_1^\pm, \quad \langle c_\perp^2 \rangle = (n^\pm)^{-1} \int c_\perp^2 f^\pm d\mathbf{c}, \quad (3.12)$$

$$\frac{p_\parallel^\pm |\mathbf{B}|^2}{(n^\pm)^3} = \frac{M^\pm \langle c_\parallel^2 \rangle |\mathbf{B}|}{(n^\pm)^3} \equiv M_2^\pm, \quad \langle c_\parallel^2 \rangle = (n^\pm)^{-1} \int (c_\parallel - V_\parallel^\pm)^2 f^\pm d\mathbf{c}, \quad (3.13)$$

определённые согласно уравнениям (3.11), совпадают с адиабатическими инвариантами в системе отсчёта, движущейся со средней дрейфовой скоростью частиц. Первый из инвариантов  $M_1^\pm$  представляет собой среднее значение эквивалентного магнитного момента (Волков, 1964). Второй инвариант непосредственно связан с продольным адиабатическим инвариантом  $J_\parallel$ , введённым в §1.

Сложив теперь (3.1), (3.11) для электронов и ионов, придём к полной системе гидродинамических уравнений в одножидкостном приближении для бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле (уравнения ЧГЛ).

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad (3.14)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \text{Div}\vec{\mathbf{P}} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \text{rot}\mathbf{B}, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_\perp}{n|\mathbf{B}|} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{p_\parallel |\mathbf{B}|^2}{n^3} \right) = 0, \quad (3.16)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (3.17)$$

где

$$\vec{\mathbf{P}} = -p_\perp \mathbf{I} + (p_\perp - p_\parallel) \mathbf{h}\mathbf{h}, \quad p_{\parallel,\perp} = p_{\parallel,\perp}^+ + p_{\parallel,\perp}^-.$$

Отметим, что адиабатические соотношения (3.16) можно истолковать следующим образом: при сжатии плазмы в направлении магнитного поля величины  $|\mathbf{B}|$  и  $p_\perp$  не изменяются; величины  $p_\parallel$  и  $n$  оказываются связанными адиабатическим законом с показателем адиабаты  $\gamma = 3$  в соответствии с тем, что увеличивается энергия одной продольной степени свободы; при сжатии плазмы в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, давление  $p_\parallel$  остаётся постоянным; согласно условию «вмороженности» (3.17)  $|\mathbf{B}| \sim n$  и, следовательно, второе соотношение (3.16) интерпретируется как адиабата с  $\gamma = 2$ , что свидетельствует об увеличении энергии двух степеней свободы в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ .

Суммируем теперь основные требования, при которых справедливо описание бесстолкновительной плазмы с помощью гидродинамических уравнений:

– характерные времена (длины) физических процессов  $T(L)$  много меньше времени релаксации  $\tau_{rel}$  (длины релаксации  $\lambda_{rel}$ ), за которое устанавливается равновесное состояние;

– характерные пространственные масштабы задачи значительно превышают циклотронный радиус, временные масштабы много больше периода циклотронного обращения ( $T \gg 1/\omega$ ,  $L \gg R$ );

– система локально электроквазинейтральна, что имеет место, если плазменная частота электронов больше их циклотронной частоты ( $\Omega \gg \omega$ );

– отношение массы электрона к массе иона пренебрежимо мало по сравнению с единицей, что отвечает случаю достаточно медленных процессов, когда инерцией электронов можно пренебречь;

– ток смещения пренебрежимо мал (характерная скорость процесса  $L/T$  мала по сравнению со скоростью света  $c$ );

– потоки тепла вдоль силовых линий магнитного поля незначительны, т.е. справедлив адиабатический закон.

Система квазигидродинамических уравнений ЧГЛ (3.14)-(3.17) с успехом используется для описания межпланетной космической плазмы, поскольку для неё функции распределения частиц по скоростям характеризуются малостью третьих моментов, так что предположение о малости потоков  $qh$  и  $sh$  оказывается допустимым (см., например, Баранов, Краснобаев, 1977). Вместе с тем эта система уравнений, учитывающая анизотропию давления (температуры), оказывается более пригодной и для описания динамических процессов в магнитосфере и плазмосфере по сравнению с уравнениями обычной магнитной гидродинамики, часто используемыми при анализе процессов в этих областях.

Попытка рассмотрения взаимодействия частиц ионосферной плазмы с нейтралами на основе анизотропной столкновительной гидродинамики (с использованием 16-моментного приближения для решения кинетического уравнения) предпринята в работе (Konikov, Khazanov, 1982).

## Заключение

В работе проанализированы теоретические модели, используемые для описания динамических процессов в магнитосфере и плазмосфере планеты. Рассматривается полностью ионизованная плазма, состоящая из электронов и одного сорта ионов. Магнитное поле считается весьма сильным, так что циклотронная частота вращения частиц в нем велика по сравнению с частотой столкновений, а расстояния, на которых меняются все величины в плазме, велики по сравнению с циклотронными радиусами частиц. Как известно, такое магнитное поле сильно ограничивает движение частиц в поперечном направлении. Обсуждаются способы моделирования, как связанные со свободным движением отдельных заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле в приближении ведущего центра, так и учитывающие коллективные свойства магнитосферной плазмы в самосогласованных полях. Показано, что медленные по сравнению с циклотронной частотой ионов движения плазмы могут быть описаны совокупностью дрейфовых кинетических уравнений для продольного

движения и уравнений гидродинамического типа для движения поперёк магнитного поля. Исходя из кинетических уравнений (с определённой симметрией, вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий), выводятся уравнения двухжидкостной квазигидродинамики, пригодные для описания медленных движений плазмы с анизотропным тензором давления. Используемый в работе подход применим к исследованию эволюции плазмы за время, которое является коротким по сравнению со временем термализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 15-01-03490 и 17-02-00507.

### Список литературы

- Альвен Х.* Космическая электродинамика. М.: ИЛ. 1952. 260 с.
- Акасофу С.Н., Чепмен С.* Солнечно-земная физика, часть 2. М.: Мир. 1975. 512 с.
- Баранов В.Б., Краснобаев К.В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука. 1977. 335 с.
- Бауэр З.* Физика планетных ионосфер. М.: Мир. 1976. 251 с.
- Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н.* Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле // Укр. матем. журн // Укр. матем. Журн. 1955. Т.7 № 1. С. 5-17.
- Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз. 1958. с.
- Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме // В сб. «Вопросы теории плазмы: Вып. 1 / Под ред. М.А. Леонтовича». М.: Госатомиздат, 1963. С. 183-272.
- Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // УФН. 1967. Т.93. С. 444–470. (воспроизводится по ЖЭТФ. 1938. Т.8 № 3. С.291).
- Волков Г.Ф.* Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы // В сб. «Вопросы теории плазмы» / Под ред. Н.А. Леонтовича. Вып. 4. М.: Госатомиздат. 1964. С. 3-19.
- Кадомцев Б.Б.* О динамике плазмы в сильном магнитном поле // В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 4. С. 370-379.
- Каулинг Т.Г.* Современные проблемы астрофизики и физики Солнца. М.: ИЛ. 1951. 154 с.
- Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей, Т.2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М.: Атомиздат. 1977. 360 с.

*Морозов А.И., Соловьев А. С.* Движение заряженных частиц в электромагнитных полях // В сб. «Вопросы теории плазмы: Вып. 2 /Под ред. М.А. Леонтовича». М.: Госатомиздат». 1963. С. 177-261

*Ратклифф Дж.* Введение в физику ионосферы и магнитосферы. М.: Мир. 1975. 296 с.

*Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З.* О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле// В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 3. С. 268-277.

*Сивухин Д. В.* Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях // В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1. М.: Госатомиздат. 1963. С. 7-97.

*Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965, 210 с.

*Франк-Каменецкий Д. А.* Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат. 1964. 283 с.

*Belcher J.W.* The low energy plasma in the jovian magnetosphere. In: Dessler, A.J. (Ed.), Physics of the Jovian Magnetosphere. Cambridge University Press. New York. 1983. P. 69–105.

*Brecht S.H.* Solar wind proton deposition into the Martian atmosphere. J. Geophys. Res. 1997. V.102. P. 11,287–11,294.

*Brown M.E., Bouchez A.H.* The response of Jupiter's magnetosphere to an outburst on Io//. Science 1997. V.278 (5336). P 268–271.

*Brueckner K. A., Watson K. M.* Use of the Boltzmann Equation for the Study of Ionized Gases of Low Density. II. //Phys. Rev. 1956. V.102. №1. P. 19-27.

*Charles F. K., Greene J.M.* Finite Larmor Radius Hydromagnetics// Annals of Phys.1966. V. 38. P. 63-94.

*Chandrasekhar S., Kaufman A., Watson K.* Properties of an ionized gas of low density in a magnetic field. III// Annals of Phys. 1957. V.2. № 5. P. 435-470.

*Chandrasekhar S., Kaufman A., Watson K.* Properties of an ionized gas of low density in a magnetic field. IV// Annals of Phys. 1958. V.5. P. 1-25.

*Chew G., Goldberger M., Low F.* The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions// Proc. Roy. Soc. Series A. 1956. V. 236. № 1204. P.112-118.

*Freeman J.W., Ibrahim M.* Lunar electric fields, surface potential and associated plasma sheaths. Moon. 1975. V.14. P 103–114.

*Kane M., Mauk B.H., Keath E.P., Krimigis S.M.* Structure and dynamics of the Uranian magnetotail: results from hot plasma and magnetic field observations// J. Geophys. Res. 1991.V. 96, P. 11,485–11,499.

*Kennel C. F., Greene J. M.* Finite Larmor Radius Hydromagnetics// Annals of Phys. 1966. V.38. P 63-94.

*Konikov Yu.V., Khazanov G.V.* The effect of electron-temperature anisotropy on the distribution of charged-particle density in the plasmasphere// Geomagnetizm i Aeronomiia. 1982. V. 22. P. 323-325 (in russian).



*Lin R.P., Mitchell O.L., Curtis D.W., Anderson K.A., Carlson C.W., McFadden J., Acuna M.H., Hood L.L., Binder A.* Lunar surface magnetic fields and their interaction with the solar wind: results from lunar prospector// *Science*. 1998. V. 281. P. 1480–1484.

*Luhmann J.G., Tatrallyay M., Pepin R.O.* (Eds.) *Venus and Mars: Atmospheres, Ionospheres and Solar Wind Interaction*. American Geophysical Union. Washington. DC. 1992. 430 p

*Mikhailovskii A. B., Tsypin V. S.* Plasma transport drift equations// *Sov. Phys. JETP*.1982. V.56. № 1. P. 75-79.

*Ramos J. J.* Finite-Larmor-radius kinetic theory of a magnetized plasma in the macroscopic flow reference frame// *Phys. Plasmas*. 2008. V. 15. P. 082106-(1-11).

*Russell C.T.* The dynamics of planetary magnetospheres// *Planet Space Sci*. 2001. V. 49 P. 1005–1030.

*Russell C.T.* *Venus Aeronomy*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 1991. 489 p.

*Russell C.T., Baker D.N., Slavin J.A.* The magnetosphere of Mercury. In: Vilas F., Chapman C., Matthews M. (Eds.). *Mercury*// Univ. Arizona Press. Tucson. 1988. P. 514–561.

*Tasso H., Throumoulopoulos G. N.* Vlasov versus reduced kinetic theories for helically symmetric equilibria // *Phys. Plasmas*. 2013. V. 20. P. 042508-(1-5).

*Tasso H., Throumoulopoulos G. N.* A comparison of Vlasov with drift kinetic and gyrokinetic theories// *Phys. Plasmas*. 2011, V. 18, № 6, P. 064507- (1-3).

*Watson K. M* Use of the Boltzmann Equation for the Study of Ionized Gases of Low Density. I // *Phys. Rev*. 1956. V.102. №1. P. 12-19.

## Оглавление

Введение .....	3
§ 1. Приближение ведущего центра .....	5
§ 2. Самосогласованные уравнения Власова–Максвелла .....	13
§ 3. Уравнения макроскопического движения бесстолкновительной плазмы ..	25
Заключение.....	29
Список литературы.....	30