ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 45 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

Кинетический вывод новой формы соотношений Стефана−Максвелла и анизотропных коэффициентов переноса для частично ионизованных газов во внешнем магнитном поле

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Кинетический вывод новой формы соотношений Стефана−Максвелла и анизотропных коэффициентов переноса для частично ионизованных газов во внешнем магнитном поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 45. 35 с. doi:10.20948/prepr-2017-45
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-45

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Кинетический вывод новой формы соотношений Стефана−Максвелла и анизотропных коэффициентов переноса для частично ионизованных газов во внешнем магнитном поле

Москва — 2017

Александр Владимирович Колесниченко

Кинетический вывод новой формы соотношений Стефана−Максвелла и анизотропных коэффициентов переноса для частично ионизованных газов во внешнем магнитном поле.

Аннотация. Методами кинетической теории получены определяющие соотношения для термодинамических потоков диффузии и тепла в многокомпонентной частично ионизованной газовой смеси, находящейся во внешнем электромагнитном поле. Выведены обобщённые соотношения Стефана−Максвелла и соотнесённые с диффузионно-тепловыми процессами алгебраические уравнения для анизотропных коэффициентов переноса (коэффициентов многокомпонентной диффузии, термодиффузии, электрической и термоэлектрической проводимости, а также термодиффузионных отношений). Определяющие уравнения второго порядка выводятся процедурой Чепмена−Энскога с использованием разложений по полиномам Сонина. Соотношения для скоростей электронно-ионной диффузии использованы для описания амбиполярной диффузии в ионосфере в присутствии сильного магнитного поля.

Ключевые слова: Теория Чепмена−Каулинга, тепло-массоперенос, анизотропные кинетические коэффициенты, амбиполярная диффузия.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Kinetic derivation of new form of Stefan-Maxwell relations and anisotropic transport coefficients for partially ionized gases in an external magnetic field.

Abstract. By the kinetic theory methods, the determining relationships for the thermodynamic fluxes of diffusion and heat in a multicomponent partially ionized gas mixture in an external electromagnetic field are obtained. Generalized Stefan-Maxwell relations and algebraic equations correlated with diffusion-thermal processes for anisotropic transport coefficients (in particular, the coefficients of multicomponent diffusion, thermal diffusion, electrical and thermoelectric conductivity, and thermodiffusion ratios) are derived. The determining equations of the second order are derived by the procedure Chapman-Enskog with the use expansions of Sonin polynomial. The ratios for the velocities of electron-ion diffusion are used to describe ambipolar diffusion in an ionospheric plasma with a strong magnetic field.

Key words: Chapman-Cowling theory, heat-masstransfer, anisotropic kinetic coefficients, ambipolar diffusion.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 15-01-03490 и 17-02-00507.

1. Введение

Для замыкания гидродинамических уравнений многокомпонентных смесей газов и плазмы (дифференциальных уравнений сохранения массы, количества движения и энергии) необходимы определяющие соотношения переноса («потоки через силы») – выражения для диффузионных потоков различных компонентов смеси, для потока тепла и для тензора вязких напряжений, линейно зависящие от градиентов гидродинамических переменных. Эти соотношения переноса в настоящее время выводятся двумя принципиально различными способами. Первый из них основывается на использовании классической термодинамики необратимых процессов − в том виде, в каком она была разработана Онсагером, Пригожиным и другими авторами (см. де Гроот, Мазур, 1964; Дьярмати, 1974). Несмотря на большую общность термодинамического подхода, который может быть применён для широкого класса разнообразных сред, он, к сожалению, не даёт способа вычисления феноменологических коэффициентов (коэффициентов диффузии, термодиффузии, теплопроводности, электропроводности и некоторых других коэффициентов, появляющихся в случае многокомпонентной нейтральной среды или плазмы с магнитным полем), фигурирующих в линейных определяющих соотношениях (см., например, Колесниченко, 2017a). Второй − статистический подход основан на решении системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентной смеси нейтральных и заряженных частиц. Он позволяет получить не только определяющие соотношения, связывающих термодинамические потоки с градиентами плотности числа частиц и температуры, но и расчётные формулы для кинетических коэффициентов (Чепмен, Каулинг, 1960; Гиршфельдер и др., 1961; Ферцигер, Капер, 1976; Маров, Колесниченко, 1987).

В классической форме записи определяющие соотношения[1)], полученные как методами неравновесной термодинамики (см., например, Колесниченко, Тирский, 1976; Колесниченко, Маров, 2009), так и газокинетическими методами (Гиршфельдер и др., 1961; Ферцигер, Капер, 1976) для диффузионных скоростей $\mathbf{w}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ и потока тепла $\mathbf{q}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{w}_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}\mathbf{d}_\beta - D_{T\alpha}\nabla \ln T, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{q} = -\lambda'\nabla T - p\sum_{\alpha=1}^{N} D_{T\alpha}\,\mathbf{d}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha n_\alpha \mathbf{w}_\alpha\,, \tag{1.2}$$

где

[1)] Далее наше рассмотрение будет касаться только диффузионно-тепловой части процессов переноса в многокомпонентной частично ионизованной газовой среде.

$$\mathbf{d}_\alpha = \nabla x_\alpha + (x_\alpha - c_\alpha)\nabla \ln p - \frac{\rho c_\alpha}{p}\left(\mathbf{F}_\alpha - \sum_{\beta=1}^{N} c_\beta \mathbf{F}_\beta\right) \qquad (1.3)$$

– векторы диффузионных термодинамических сил, $\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{d}_\alpha = 0$; $c_\alpha = \rho_\alpha/\rho$, $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{w}_\alpha = (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v})$, m_α, $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$, n_α, $x_\alpha = n_\alpha/n$ – соответственно, массовая концентрация, средняя массовая скорость, диффузионная скорость, молекулярная масса, массовая плотность, числовая плотность и мольная доля компоненты α $(\alpha = 1,2,...,N)$ смеси; h_α – парциальная энтальпия на одну частицу компоненты α (для идеального газа $h_\alpha = \frac{5}{2}kT$); $n = \sum_\alpha n_\alpha$, $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$, T, $p = kTn$, $\mathbf{v} = \rho^{-1}\sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ – соответственно, полная числовая плотность, массовая плотность, температура, давление и гидродинамическая скорость газовой смеси; k – постоянная Больцмана; $\mathbf{F}_\alpha$ – массовая неэлектромагнитная сила, действующая на компоненту α; $D_{\alpha\beta}$, $D_{T\alpha}$, λ' – соответственно симметричные коэффициенты многокомпонентной диффузии[2] $(D_{\beta\alpha} = D_{\alpha\beta}, D_{\alpha\alpha} > 0)$, коэффициенты термодиффузии и парциальный коэффициент теплопроводности многокомпонентной смеси. Величина λ' в (1.2) интерпретируется как коэффициент теплопроводности смеси (при отсутствии всех диффузионных сил $\mathbf{d}_\alpha$). Поскольку при этом феноменологические коэффициенты диффузии и термодиффузии являются линейно зависимыми:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha D_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\beta = 1,2,...,N), \quad (^1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha D_{T\alpha}(\mathbf{x},t) = 0, \qquad (^2)$$

то для N-компонентной смеси имеется только $N(N-1)/2$ независимых коэффициентов диффузии и $(N-1)$ независимых коэффициентов термодиффузии. Использование соотношений (1.1) для скоростей диффузии $\mathbf{w}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,...,N)$ в общем многокомпонентном случае крайне затруднительно, поскольку в литературе за редким исключением отсутствуют какие-либо практические сведения по коэффициентам многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}$ (так как величины $D_{\alpha\beta}$ зависят от молярных долей, то они обычно не табулируются), а существующие экспериментальные данные относятся в основном к коэффициентам диффузии в бинарных газовых смесях $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$.

---

[2] В настоящей работе используются симметричные коэффициенты многокомпонентной диффузии в представлении Ферцигера–Капера, которые, в отличие от аналогичных коэффициентов в представлении Гиршфельдера и др., согласуются с термодинамическим принципом взаимности Онзагера (Curtiss, 1968).

Кинетическая теория газовых смесей даёт следующие выражения для кинетических коэффициентов переноса в любом приближении ξ при отыскании их в виде рядов по полиномам Сонина (Ферцигер, Капер, 1976):

$$\begin{cases} [D_{\alpha\beta}]_\xi = \dfrac{1}{2n} d^{\beta}_{\alpha,0}(\xi), \quad [D_{T\alpha}]_\xi = -\dfrac{1}{2n} a_{\alpha,0}(\xi) = -\dfrac{5}{4n}\sum_{\beta=1}^{N} n_\beta d^{\alpha}_{\beta,1}(\xi), \\ [\lambda']_\xi = \dfrac{5}{4} k \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha a_{\alpha,1}(\xi). \end{cases} \tag{1.4}$$

При этом порядок приближения ξ, с которым определяются коэффициенты $a_{\alpha,p}(\xi)$ и $d^{\alpha}_{\beta,p}(\xi)$, соответствует числу первых членов, удерживаемых при разложении в ряды (по ортогональным полиномам Сонина $S^{(p)}_{\nu}(x)$ в методе Чепмена−Каулинга) пробных функций $\boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{c}_\alpha)$ и $\boldsymbol{d}^{\beta}_{\alpha}(\boldsymbol{c}_\alpha)$, характеризующих возмущения $\phi^{(1)}_\alpha = -n^{-1}\boldsymbol{a}_\alpha \cdot \nabla \ln T - n^{-1}\sum_\beta \boldsymbol{d}^{\beta}_{\alpha} \cdot \mathbf{d}_\beta + \ldots$ первого порядка функций распределения отдельных компонентов $f_\alpha = f^{(0)}_\alpha (1+\phi^{(1)}_\alpha)$.
Здесь

$$\boldsymbol{a}_\alpha = -\mathcal{V}_\alpha \sqrt{\frac{m_\alpha}{2kT}} \sum_{p=0}^{\xi} a_{\alpha,p}(\xi) S^{(0)}_{3/2}(\mathcal{V}^2_\alpha), \quad \boldsymbol{d}^{\beta}_{\alpha} = \mathcal{V}_\alpha \sqrt{\frac{m_\alpha}{2kT}} \sum_{p=0}^{\xi-1} d^{\beta}_{\alpha,p}(\xi) S^{p}_{3/2}(\mathcal{V}^2_\alpha);$$

$\mathbf{c}_\alpha$ − скорость молекулы сорта α относительно неподвижной системы координат; $\mathcal{V}_\alpha = (\mathbf{c}_\alpha - \mathbf{v})\sqrt{m_\alpha / 2kT}$ − безразмерная тепловая скорость; $f^{(0)}_\alpha$ − максвелловская функция распределения. Коэффициенты (1.4) даются, в конечном счёте, в виде отношений определителей порядка $N\xi+1$ к определителям порядка $N\xi$. Элементы этих определителей выражаются через так называемые парциальные интегральные скобки $[\,]'$ и $[\,]''$, которые, в свою очередь, выражаются известным образом через интегралы столкновений ($\Omega-$интегралы), зависящих от потенциалов взаимодействия между различными парами частиц, от их масс и температуры (Гиршфельдер и др., 1961; Ферцигер, Капер, 1976).

Следует отметить, что возникающая часто необходимость учёта далёких приближений ($\xi = 3$ и более) при вычислении кинетических коэффициентов при исследовании течений частично ионизованных газовых смесей, обусловленная медленной сходимостью ортогональных разложений возмущённой функции распределения электронов (когда сечения столкновений электронов с нейтральными частицами быстро растут с ростом скоростей электронов), приводит в случае многокомпонентной смеси к обращению матриц высоких порядков и, тем самым, к чрезвычайно большому объёму вычислений (см. Devoto, 1966,1967,1968; Тирский, 1974). Ещё более громоздким оказывается выражение для истинного коэффициента теплопроводности λ. Для его вычисления необходимо исключить из (1.2) векторы $\mathbf{d}_\alpha$ с помощью диффузионных соотношений (1.1). Формальное решение последних относительно $\mathbf{d}_\alpha$ даёт

$$\mathbf{d}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{N} E_{\beta\alpha}\mathbf{w}_\alpha - \nabla \ln T \sum_{\alpha=1}^{N} E_{\beta\alpha} D_{T\alpha}\,, \tag{1.5}$$

где $E_{\beta\alpha}$ − элементы матрицы, обратной к матрице с элементами $D_{\beta\alpha}$. Подставляя (1.5) в (1.2), найдём

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T + \frac{5}{2}kT \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha \mathbf{w}_\alpha + p \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} D_{T\alpha}\, E_{\beta\alpha}\mathbf{w}_\alpha\,, \tag{1.6}$$

где истинный коэффициент теплопроводности даётся выражением

$$\lambda = \lambda' - kn \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} D_{T\beta} E_{\alpha\beta} D_{T\alpha}\ \ . \tag{1.7}$$

Двойные суммы в формулах (1.6) и (1.7) также являются чрезвычайно сложными выражениями в случае многокомпонентной смеси частично ионизованных газов, поскольку коэффициенты $E_{\beta\alpha}$, являющиеся элементами обратной матрицы к матрице $D_{\beta\alpha}$, в которой, в свою очередь, элементами являются отношения определителей порядка $N\xi+1$ и $N\xi$. Кроме этого, система уравнений, получаемая после подстановки $\mathbf{w}_\alpha$ из (1.1) в систему уравнений сохранения масс для отдельных компонентов смеси, оказывается не разрешённой относительно старших производных. Как известно, численная реализация подобных систем сопряжена с большими трудностями (Тирский, 1974).

Вследствие этих причин для описания диффузионно-тепловых процессов в многокомпонентной смеси удобно иметь определяющие соотношения (1.1) в виде так называемых соотношений Стефана−Максвелла (т.е. в виде соотношений, разрешённых относительно диффузионных термодинамических сил $\mathbf{d}_\alpha$ через потоки $\mathbf{J}_\alpha = n_\alpha \mathbf{w}_\alpha$ − «силы через потоки», но полученных некоторым специальным методом − без обращения матриц $D_{\beta\alpha}$), в которые вместо многокомпонентных коэффициентов диффузии $D_{\beta\alpha}$ входят бинарные коэффициенты диффузии $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$. Подобное обратное преобразование имеет следующий вид:

$$\mathbf{d}_\beta = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{(n_\beta \mathbf{J}_\alpha - n_\alpha \mathbf{J}_\beta)}{n^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}} + \nabla \ln T \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{n^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}} \left(D_{T\alpha} - D_{T\beta} \right), \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N) \qquad (1.8)$$

Преимуществом соотношений (1.8) является то, что в них при низкой плотности газовой смеси коэффициенты $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ почти не зависят от концентраций отдельных компонентов (см. Чепмен, Каулинг, 1960).

Исторический обзор. Исторически соотношения (1.8) (без учёта термодиффузии, $D_{T\alpha} = 0$) были получены феноменологически Стефаном (Stefan, 1871) и Максвеллом (Maxwell, 1868) в предположении, что сила, действующая на частицы сорта α со стороны частиц сорта β, пропорциональна разности их диффузионных скоростей, а полная сила сопротивления движению частиц сорта α в смеси равна сумме независимых сил сопротивления от всех остальных частиц (других сортов). Обобщённые соотношения Стефана−Максвелла (учитывающие термодиффузию и влияние внешних массовых сил) методами кинетической теории одноатомных газов впервые были получены в монографии (Гиршфельдер и др., 1961) в рамках учёта первого приближения теории Чепмена−Энскога для коэффициентов многокомпонентной диффузии $[D_{\alpha\beta}]_1$ и второго приближения для коэффициентов термодиффузии $[D_{T\alpha}]_2$. В работах (Muckenfuss, Curtiss,1958; Muckenfuss,1973) эти соотношения были выведены в рамках полного второго приближения кинетических коэффициентов. Позднее в ряде работ предпринимались безуспешные попытки получить соотношения (1.8) из газокинетической теории в любом приближении коэффициентов переноса. В связи с этим Трусделлом (см. Truesdell,1984) было высказано предположение, что соотношения (1.8) не носят всеобъемлющего характера, а являются приближённым результатом кинетической теории. Тем не менее, автору этой статьи удалось, исходя из методологии решения системы уравнений Больцмана для частично ионизованных газов, развитой в монографии (Ферцегер, Капер, 1976), вывести соотношения Стефана−Максвелла в высших приближениях коэффициентов диффузии (Колесниченко, 1979, 1981, 1982). Этот результат был получен также в работе (Колесников, Тирский,1982) на основе методологии, развитой в монографии (Гиршфельдер и др.,1961), а в работе (Жданов, Тирский, 2003) − при использовании симметричных коэффициентов многокомпонентной диффузии.

Наряду с этим, соотношения Стефана−Максвелла были выведены автором методами неравновесной термодинамики (диссертация,1973), что фактически доказывает их абсолютную универсальность, т.е. обоснованность применения при моделировании любых взаимно диффундирующих сплошных сред. В работе (Колесниченко, Тирский, 1976) развитый термодинамический подход был применён к описанию неидеальных (умеренно плотных) смесей газов и жидкостей.

Важно отметить, что по аналогии с кинетической теорией процессов переноса в газах, представленной в монографии (Ферцегер, Капер, 1976), также и при термодинамическом подходе удобно (см. Колесниченко,1994) вводить в рассмотрение новые коэффициенты переноса для описания эффектов термодиффузии – так называемые *термодиффузионные отношения* $k_{T\alpha}$:

$$\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta} k_{T\beta} = D_{T\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,\dots,N), \quad (^1) \quad \sum_{\alpha=1}^{N} k_{T\alpha}(\mathbf{x},t) = 0. \quad (^2) \tag{1.9}$$

В этом случае выражение (1.1) для диффузионной скорости $\mathbf{w}_\alpha$ может быть записано в виде обобщённого закона Фика:

$$\mathbf{w}_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}\left(\mathbf{d}_\beta + k_{T\beta}\nabla \ln T\right), \quad (\alpha = 1,2,\dots,N), \tag{1.10}$$

а выражение (1.2) для потока тепла приобретает вид

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T + p\sum_{\beta=1}^{N}\left(k_{T\beta} + \frac{5}{2}\frac{n_\beta}{n}\right)\mathbf{w}_\beta\ . \tag{1.11}$$

Кроме этого, термодинамический подход (Колесниченко,1994, 2017а) позволяет получить следующие важные соотношения, которые тождественны аналогичным соотношениям кинетической теории (Curtiss,1968; Ферцегер, Капер, 1976):

− удобную для практического решения гидродинамических задач форму соотношений Стефана−Максвелла

$$\mathbf{d}_\beta = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{x_\beta x_\alpha}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta\right) - k_{T\beta}\nabla \ln T, \quad (\beta = 1,2,\dots,N); \tag{1.12}$$

− выражения для термодиффузионных отношений

$$k_{T\beta} = \sum_{\beta\neq\alpha}^{N} \frac{n_\alpha n_\beta}{n^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}}(D_{T\beta} - D_{T\alpha}), \quad (\beta = 1,2,\dots,N-1), \tag{1.13}$$

связывающие $k_{T\beta}$ с коэффициентами $D_{\gamma\beta}$ и $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$;

− выражение для истинного коэффициента теплопроводности многокомпонентной смеси

$$\lambda \equiv \lambda' - nk\sum_{\beta=1}^{N} k_{T\beta} D_{T\beta}; \tag{1.14}$$

– систему уравнений для нахождения многокомпонентных коэффициентов диффузии смеси $D_{\gamma\beta}$ через бинарные (табулированные) диффузионные коэффициенты $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$.

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\left(\frac{n_\alpha n_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}+\sum_{\alpha\neq\delta=1}^{N}\frac{m_\beta}{m_\alpha}\frac{n_\alpha n_\delta}{\mathcal{D}_{\alpha\delta}}\right)D_{\gamma\beta}=n^2(c_\alpha-\delta_{\gamma\alpha}),\quad (\alpha,\gamma=1,2,\ldots,N). \tag{1.15}$$

Заметим, что в случае бинарной смеси уравнения (1.15) позволяют получить следующие выражения для коэффициентов $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{11}=\frac{n^2 n_2 m_2^2}{n_1\rho^2}\mathcal{D}_{12},\quad D_{22}=\frac{n^2 n_1 m_1^2}{n_2\rho^2}\mathcal{D}_{12},\quad D_{12}=D_{21}=-\frac{n^2 m_1 m_2}{\rho^2}. \tag{1.16}$$

Для смеси, состоящей из трёх компонентов, из (1.15) можно найти

$$\begin{cases} D_{11}=\dfrac{n^2}{\rho^2 n_1}\dfrac{n_1 n_3 m_3^2\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{31}+n_1 n_2 m_2^2\mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{23}+(\rho_2+\rho_3)^2\mathcal{D}_{31}\mathcal{D}_{12}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}}, \\ D_{12}=\dfrac{n^2}{\rho_1^2}\dfrac{n_3 m_3^2\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{31}-m_2(\rho_1+\rho_2)\mathcal{D}_{23}\mathcal{D}_{12}-m_1(\rho_2+\rho_3)\mathcal{D}_{31}\mathcal{D}_{12}}{n_1\mathcal{D}_{23}+n_2\mathcal{D}_{31}+n_3\mathcal{D}_{12}}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Остальные коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ получаются из (1.17) с помощью соответствующей перестановки индексов.

Подчеркнём ещё раз, что, в отличие от газокинетического подхода, термодинамический вывод всех приведённых соотношений не связан с постулированием конкретного вида межмолекулярного взаимодействия. Именно по этой причине они носят универсальный характер, т.е. пригодны при моделировании диффузионно-тепловых процессов для широкого класса сплошных сред (многоатомных смесей газов, плотных газов, жидких растворов и т.п.).

Наряду с приведёнными выше результатами, автором также были термодинамически выведены обобщённые соотношения Стефана–Максвелла для гетерогенной среды и соотнесённое с ними выражение для полного потока тепла (Колесниченко, Максимов, 1997, 2001). На их основе были проанализированы фильтрационные движения многофазной смеси в пористом твёрдом теле (с капиллярными свойствами), при учёте несовпадения давлений в фазах, а также получен обобщённый закон фильтрации Дарси, распространяющий классическую теорию фильтрации на многофазные среды. Эти соотношения были использованы также при конструировании турбулентных космических сред, лежащих в основе постановок и численных расчётов задач образования, пространственной структуры и эволюции различных астрофизических объектов (в частности, газопылевых протопланетных дисков (Marov, Kolesnichenko, 2013; Колесниченко, 2017b)).

В недавней работе (Жданов, Тирский, 2007) её авторы на основе формализма расширенной неравновесной термодинамики (Жоу и др., 2006) получили новую (релаксационную) модификацию соотношений Стефана−Максвелла, которая, принимая во внимание вклад в эти соотношения производных по времени и пространству от термодинамических потоков, устраняет парадокс классического подхода, связанный с бесконечной скоростью распространения малых возмущений концентраций компонентов и температуры (результат использования «обычных» линейных зависимостей неравновесной термодинамики для соответствующих потоков).

Наконец, в большом цикле работ (Колесниченко,1980,1995,1998,2002,2003, 2014a,b, 2015, 2017a; Колесниченко, Маров,1999, 2009; Marov, Kolesnichenko, 2001,2013), посвящённом изучению эволюции турбулентных газовых смесей (частично ионизованной плазмы) и турбулентных газопылевых сред для различных природных и космических объектов, онзагеровский формализм неравновесной термодинамики позволил получить различные модификации соотношений Стефана−Максвелла для турбулентных диффузионных потоков и турбулентных потоков тепла, которые на первом уровне замыкания осреднённых уравнений гидродинамического типа наиболее полно описывают процессы турбулентного тепло- и массопереноса.

Вместе с тем необходимо отметить, что до последнего времени в литературе кинетическое рассмотрение диффузионно-тепловых процессов в частично ионизованной среде на основе обобщённых соотношений Стефана−Максвелла и соответственного выражения для потока тепла было проведено без учёта анизотропии коэффициентов переноса, возникающей при наличии внешнего магнитного поля. Однако именно эти эффекты часто становятся существенными при адекватном моделировании замагниченной плазмы ионосферы и особенно магнитосферы планеты. В отличие от нейтральных газов, которые характеризуются тремя пространственными параметрами, а именно радиусом действия межмолекулярных сил, средней длиной свободного пробега и масштабом изменения макроскопических характеристик, в физике плазмы существенную роль играют по меньшей мере ещё три пространственных параметра − дебаевский радиус и два циклотронных радиуса (один − для электронов, а другой для ионов). По этой причине одной из непростых задач кинетической теории плазмы является вывод расчётных формул для анизотропных коэффициентов переноса. В представленной работе на основе строгого кинетического подхода к моделированию частично или полностью ионизованных газовых смесей (образованных из электронов, ионов и нейтральных атомов (молекул) различных видов, и которые удовлетворяют условие квазинейтральности), разработанного в монографии (Ферцигер, Капер,1976), даётся вывод обобщённых соотношений Стефана−Максвелла для диффузионных потоков как в продольном, так и в перпендикулярном и поперечном направлениях к магнитному полю $\mathbf{B}$. Даётся также вывод соотнесённых с диффузионно-тепловыми процессами алгебраических уравнений для определения различных анизотропных коэффициентов переноса в плазме с внешним электромагнитным полем: коэффициентов многокомпонентной диффузии, теплопроводности, электропроводимости и др. В качестве примера полученные здесь результаты используются для описания амбиполярной диффузии в ионосферной плазме планеты (в области F-слоя), обобщающего известные сведения по амбиполярной диффузии тройной смеси (состоящей из электронов, ионов и нейтральных частиц) на многокомпонентную плазму.

2. Определяющие уравнения и анизотропные коэффициенты многокомпонентной диффузии

В рамках основного предположения, что градиенты гидродинамических величин и внешние силы вызывают малое отклонение функций распределения от равновесного максвелловского распределения $f^{(0)}$, модифицированный метод Чепмена–Энскога решения системы уравнений Больцмана для ионизованной квазинейтральной N-компонентной смеси невозбуждённых одноатомных газов умеренной плотности в изотермическом случае приводит к следующим макроскопическим соотношениям первого порядка для диффузионных скоростей $\mathbf{w}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ различных компонентов и полного потока тепла $\mathbf{q}$ (Ферцигер, Капер, 1976):

$$\mathbf{w}_\beta = -\sum_s \sum_{\alpha=1}^{N} D^s_{\beta\alpha} \mathbf{d}_{\alpha s} - \sum_s D^s_{T\beta} \nabla_s \ln T, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{q} = -\sum_s \lambda'_s \nabla_s T - p \sum_s \sum_{\alpha=1}^{N} D^s_{T\alpha} \mathbf{d}_{\alpha s} + \frac{5}{2} kT \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha \mathbf{w}_\alpha, \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{d}_{\alpha s} = \nabla_s x_\alpha + (x_\alpha - c_\alpha) \nabla_s \ln p - \frac{\rho c_\alpha}{p} \left(\mathbf{F}_{\alpha s} - \sum_{\beta=1}^{N} c_\beta \mathbf{F}_{\beta s} \right) - \frac{\rho c_\alpha}{p} \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{N} \frac{n_\beta e_\beta}{\rho} \right) \mathbf{E}'_s \tag{2.3}$$

– диффузионная термодинамическая сила α-компоненты, $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \mathbf{d}_{\alpha s} = 0$; e_α – электрический заряд частицы сорта α; $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ – электрическое поле в движущейся плазме, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – электрическое и магнитное поле; c – скорость света в вакууме. Индекс s означает, что берётся компонента вектора, параллельная $(s = \|)$, перпендикулярная $(s = \perp)$ или поперечная $(s = \wedge)$ к магнитному полю $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{d}_{\alpha\|} = \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}_\alpha), \quad \mathbf{d}_{\alpha\perp} = \mathbf{d}_\alpha - \mathbf{d}_{\alpha\|}, \quad \mathbf{d}_{\alpha\wedge} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}_\alpha \quad (\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|)$$

$$\nabla_{\|}T = \mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\nabla T),\quad \nabla_{\perp}T = \nabla T - \nabla_{\|}T\,,\quad \nabla_{\wedge}T = \mathbf{b}\times\nabla T\,.$$

Относительно соотношений (2.1) и (2.2) следует отметить следующее. За исключением члена, пропорционального электрическому полю, все члены имеют такой же вид, как и в случае диффузии обычных (нейтральных) газов. Важно, однако, иметь в виду, что в случае ионизованного газа при наличии магнитного поля существуют потоки частиц, перпендикулярные как $\mathbf{B}$, так и к направлениям обычной диффузии и термодиффузии. Эти поперечные потоки частиц характеризуются коэффициентами поперечной диффузии $D^{\wedge}_{\beta\alpha}$ и термодиффузии $D^{\wedge}_{T\beta}$. Входящие в соотношения (2.2) и (2.3) симметричные[3)] коэффициенты многокомпонентной диффузии $D^{s}_{\beta\alpha}$ ($D^{s}_{\beta\alpha}= D^{s}_{\alpha\beta}$; $\sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{s}_{\beta\alpha} = 0$; $D^{s}_{\alpha\beta} > 0$), коэффициенты термодиффузии $D^{s}_{T\beta}$ ($\sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{s}_{T\alpha} = 0$) и парциальный коэффициент теплопроводности λ'_{s} (при отсутствии всех диффузионных сил) выражаются через коэффициенты разложения $d^{\alpha(\xi)}_{\beta,p}$, $a^{(\xi)}_{\beta,p}$ функций возмущения $\phi^{(1)}_{\beta}$ равновесных распределений Максвелла $f^{(0)}_{\alpha}$ в ряды по ортогональным полиномам Сонина следующим образом (см. Ферцигер, Капер, 1976; Колесниченко, 1982):

$$[D^{\|}_{\alpha\beta}]_{\xi} = \frac{1}{2n} d^{\alpha(1)}_{\beta,0}(\xi) = \frac{1}{2n} d^{\beta(1)}_{\alpha,0}(\xi),\quad [D^{\perp}_{\alpha\beta}]_{\xi} + i[D^{\wedge}_{\alpha\beta}]_{\xi} = \frac{1}{2n} d^{\alpha(2)}_{\beta,0}(\xi) = \frac{1}{2n} d^{\beta(2)}_{\alpha,0}(\xi), \tag{2.3$^{(a)}$}$$

$$\begin{cases} [D^{\|}_{T\alpha}]_{\xi} = -\dfrac{1}{2n} a^{(1)}_{\alpha,0}(\xi) = -\dfrac{5}{4n}\displaystyle\sum_{\beta=1}^{N} x_{\beta} d^{\alpha(1)}_{\beta,1}(\xi), \\ [D^{\perp}_{T\alpha}]_{\xi} + i[D^{\wedge}_{T\alpha}]_{\xi} = -\dfrac{1}{2n} a^{(2)}_{\alpha,0}(\xi) = -\dfrac{5}{4n}\displaystyle\sum_{\beta=1}^{N} x_{\beta} d^{\alpha(2)}_{\beta,1}(\xi), \end{cases} \tag{2.3$^{(b)}$}$$

$$[\lambda'_{\|}]_{\xi} = \frac{5}{4} k \sum_{\beta=1}^{N} x_{\beta} a^{(1)}_{\beta,1}(\xi),\quad [\lambda'_{\perp}]_{\xi} + i[\lambda'_{\wedge}]_{\xi} = \frac{5}{4} k \sum_{\beta=1}^{N} x_{\beta} a^{(2)}_{\beta,1}(\xi)\,. \tag{2.3$^{(c)}$}$$

Порядок приближения $\xi = 1, 2, \ldots$, с которым определяются коэффициенты переноса, соответствует числу первых членов, удерживаемых при разложении коэффициентов возмущённых функций распределения компонент в ряды по ортогональным полиномам. Таким образом, $D^{s}_{\alpha\beta}$ и $D^{s}_{T\alpha}$ выражаются только через

[3)] В соотношениях (2.1) и (2.2) используются симметричные коэффициенты многокомпонентной диффузии в полном соответствии с соотношениями взаимности Онзагера в неравновесной термодинамике (де Гроот, Мазур, 1964; Ферцигер, Капер, 1976).

нулевые коэффициенты, а λ'_s − только через первый коэффициент разложения независимо от числа приближений. Однако величины этих коэффициентов будут зависеть от числа удерживаемых членов разложения, так как они должны находиться из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p=0}^{\xi-1}\Lambda_{\gamma\beta}^{mp}d_{\beta,p}^{\alpha(s)}(\xi)+i\frac{4|\mathbf{B}|}{25ckp}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(m+\frac{5}{2})}{\Gamma(m+1)}\delta_{2s}\sum_{\beta=1}^{N}(\delta_{\gamma\beta}-c_{\gamma}\delta_{m0})x_{\beta}e_{\beta}d_{\beta,m}^{\alpha(s)}(\xi)=$$
$$=\frac{8}{25k}(\delta_{\gamma\alpha}-c_{\gamma})\delta_{m0},\ (s=1\to\|,2\to\perp,\wedge;\ m=0,1,...,\xi-1;\ \gamma,\alpha=1,2,...,N),\tag{2.4}$$

$$\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p=0}^{\xi}\Lambda_{\alpha\beta}^{mp}a_{\beta,p}^{(s)}(\xi)+i\frac{4|\mathbf{B}|}{25ckp}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(m+\frac{5}{2})}{\Gamma(m+1)}\delta_{2s}\sum_{\beta=1}^{N}(\delta_{\gamma\beta}-c_{\gamma}\delta_{m0})x_{\beta}e_{\beta}a_{\beta,m}^{(s)}(\xi)=$$
$$=\frac{4}{5k}x_{\alpha}\delta_{m1},\quad (s=1\to\|,2\to\perp,\wedge;\quad m=0,1,...,\xi-1;\ \alpha=1,2,...,N).\tag{2.5}$$

Здесь $\delta_{\gamma k}$ − символ Кронекера; $\Gamma(m)$ − Гамма–функция; $\Lambda_{\alpha\beta}^{mp}$ − коэффициенты (для простых типов ионов − линейные комбинации приведённых Ω^*–интегралов), выражающиеся через парциальные интегральные скобки от полиномов Сонина порядков m и p следующим образом (см. Гиршфельдер и др.,1961)

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{mp}=\Lambda_{\beta\alpha}^{pm}=\frac{8\sqrt{m_{\alpha}m_{\beta}}}{75kT}\left\{\delta_{\alpha\beta}\sum_{\gamma=1}^{N}x_{\alpha}x_{\gamma}\left[\mathcal{V}_{\alpha}S_{3/2}^{(m)}(\mathcal{V}_{\alpha}^{2}),\ \mathcal{V}_{\alpha}S_{3/2}^{(p)}(\mathcal{V}_{\alpha}^{2})\right]'_{\alpha\beta}+\right.$$
$$\left.+x_{\alpha}x_{\beta}\left[\mathcal{V}_{\alpha}S_{3/2}^{(m)}(\mathcal{V}_{\alpha}^{2}),\mathcal{V}_{\alpha}S_{3/2}^{(p)}(\mathcal{V}_{\alpha}^{2})\right]''_{\alpha\beta}\right\}$$

и обладающие (согласно закону сохранения импульса) свойствами

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\Lambda_{\alpha\beta}^{0p}=0;\quad \sum_{\beta=1}^{N}\Lambda_{\alpha\beta}^{m0}=0,\quad (\alpha=1,2,...,N).\tag{2.6}$$

При $m=0$ системы (2.4) и (2.5) не являются линейно независимыми, в чем нетрудно убедиться, просуммировав их по индексу γ и сопоставив результат с тождеством (2.6). Поэтому к ним необходимо добавить ещё два независимых соотношения (связанных с условием разрешимости уравнений для возмущений $\phi_{\alpha}^{(1)}$) между коэффициентами $a_{\beta,0}^{(\xi)}$ и $d_{\beta,0}^{\alpha(\xi)}$; они имеют вид:

$$\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta a_{\beta,0}^{(s)}(\xi)=0, \quad (s=1,2); \quad \sum_{\beta=1}^{N} c_\beta d_{\beta,0}^{\alpha(s)}(\xi)=0, \quad (s=1,2;\ \alpha=1,2,\dots,N). \quad (2.7)$$

В литературе была проделана большая работа по вычислению Ω^*–интегралов как функций температуры для ряда конкретных потенциалов межмолекулярного взаимодействия (см., например, Гиршфельдер и др., 1961). Величины $\Lambda_{\alpha\beta}^{mp}$ для $m,p=0,1$, входящие в выражения для коэффициентов диффузии в первом и втором приближениях, а также для коэффициентов термодиффузии и теплопроводности в первом приближении[4], записанные через коэффициенты бинарной диффузии в первом приближении (Ферцигер, Капер, 1976)

$$[\mathcal{D}_{\alpha\beta}]_1 = \frac{3}{16\,n}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m_{\alpha\beta}}}\,\frac{1}{\pi\sigma_{\alpha\beta}^2\,\Omega_{\alpha,\beta}^{(1,1)*}},$$

имеют следующий вид:

$$\Lambda_{\alpha\alpha}^{00} = \frac{4}{25kn}\sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{N}\frac{x_\alpha x_\gamma}{[\mathcal{D}_{\alpha\gamma}]_1}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^{00} = \Lambda_{\beta\alpha}^{00} = -\frac{4}{25kn}\frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}_{\alpha\beta}]_1} \quad (\alpha\neq\beta),$$

$$\Lambda_{\alpha\alpha}^{01} = \Lambda_{\alpha\alpha}^{10} = -\frac{2}{25kn}\sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{N}\frac{x_\alpha x_\gamma}{[\mathcal{D}_{\alpha\gamma}]_1}\,\frac{m_\gamma}{m_\alpha+m_\gamma}(6C_{\alpha\gamma}^*-5),$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{01} = \Lambda_{\beta\alpha}^{10} = \frac{2}{25kn}\frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}_{\alpha\beta}]_1}\,\frac{m_\beta}{m_\alpha+m_\beta}(6C_{\alpha\beta}^*-5) \quad (\alpha\neq\beta),$$

$$\Lambda_{\alpha\alpha}^{11} = \frac{4}{25kn}\left[\frac{2x_\alpha^2 A_{\alpha\alpha}^*}{[\mathcal{D}_{\alpha\alpha}]_1} + \sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{N}\frac{x_\alpha x_\gamma(\frac{15}{2}m_\alpha^2+\frac{25}{4}m_\gamma^2-3m_\gamma^2B_{\alpha\gamma}^*+4m_\alpha m_\gamma A_{\alpha\gamma}^*)}{[\mathcal{D}_{\alpha\gamma}]_1(m_\alpha+m_\gamma)^2}\right],$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{11} = -\frac{4}{25kn}\frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}_{\alpha\beta}]_1}\,\frac{m_\alpha m_\beta A_{\alpha\gamma}^*}{(m_\alpha+m_\beta)^2}\left[\frac{55}{4}-3B_{\alpha\beta}^*-4A_{\alpha\beta}^*\right] \quad (\alpha\neq\beta),$$

где $[\mathcal{D}_{\alpha\alpha}]_1$ – коэффициент самодиффузии; комбинации приведённых интегралов $A_{\alpha\beta}^*=\Omega_{\alpha,\beta}^{(2,2)*}/\Omega_{\alpha,\beta}^{(1,1)*}$, $B_{\alpha\beta}^*=(5\Omega_{\alpha,\beta}^{(1,2)*}-4\Omega_{\alpha,\beta}^{(1,3)*})/\Omega_{\alpha,\beta}^{(1,1)*}$, $C_{\alpha\beta}^*=\Omega_{\alpha,\beta}^{(1,2)*}/\Omega_{\alpha,\beta}^{(1,1)*}$ – близкие к единице величины (Чепмен, Каулинг,1960; Ферцигер, Капер, 1976).

---

[4] Здесь, также как и в монографии (Ферцигер, Капер, 1976), под первым приближением к коэффициентам $D_{T\alpha}$ и λ' понимается первое отличное от нуля приближение.

Термодиффузионные отношения. Таким образом, если считать, что величины $\Lambda_{\alpha\beta}^{mp}$ известны, то коэффициенты $D_{\alpha\beta}^{s}$, $D_{T\alpha}^{s}$ и λ_s' можно вычислить с любой степенью точности через решения системы (2.4)−(2.6). Следует, однако, отметить, что, как и в случае нейтрального газа, коэффициенты λ_s' не являются истинными коэффициентами теплопроводности. Для получения истинных коэффициентов теплопроводности (вычисленных при $\mathbf{w}_\alpha = 0$) следует исключить из (2.2) векторы $\mathbf{d}_{\alpha s}$ с помощью диффузионных соотношений (2.1). Это можно сделать, если ввести для каждой компоненты смеси соответственно параллельные, перпендикулярные и поперечные термодиффузионные отношения $k_{T\alpha}^{s}$ $(s = \|, \perp, \wedge)$ с помощью определений

$$\sum_{\alpha=1}^{N} D_{\beta\alpha}^{s} k_{T\alpha}^{s} = D_{T\beta}^{s}, \quad (\beta = 1, 2, ..., N); \quad \sum_{\alpha=1}^{N} k_{T\alpha}^{s} = 1 \quad (s = 1, 2). \tag{2.8}$$

При этом следует заметить, что поскольку термодиффузионные отношения связывают коэффициенты диффузии, которые описывают эффекты переноса первого порядка, с коэффициентами термодиффузии, описывающими эффекты второго порядка, то $\xi-\mathrm{e}$ приближение для термодиффузионного отношения определяется следующим образом:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} d_{\alpha,0}^{\beta(s)}(\xi+1)[k_{T\alpha}^{s}]_\xi = -\frac{5}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha d_{\alpha,1}^{\beta(s)}(\xi+1), \quad (\beta = 1, ... N; \quad s = \|, \perp, \wedge). \tag{2.9}$$

С учётом (2.8) определяющие соотношения (2.1) и (2.2) принимают вид:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_\beta = \sum_s \mathbf{w}_{\beta s} = -\sum_s \left[\sum_{\alpha=1}^{N} D_{\beta\alpha}^{s} (\mathbf{d}_{\alpha s} + k_{T\alpha}^{s} \nabla_s \ln T) \right], & (a) \\ \mathbf{q} = -\sum_s \lambda_s \nabla_s T + p \sum_s \left[\sum_{\alpha=1}^{N} \left(k_{T\alpha}^{s} + \frac{5}{2} x_\alpha \right) \mathbf{w}_{\alpha s} \right], & (b) \end{cases} \tag{2.10}$$

где λ_s − истинные коэффициенты теплопроводности:

$$\lambda_s = \lambda_s' - nk \sum_{\alpha=1}^{N} k_{T\alpha}^{s} D_{T\alpha}^{s}, \quad (s = \|, \perp, \wedge). \tag{2.11}$$

Формула (2.11) в общем случае сложна для вычислений коэффициентов теплопроводности λ_s, поскольку соответствующая процедура приводит к двукратному обращению матриц. Одно обращение связано с нахождением коэффициентов λ_s' и $D_{T\alpha}^{s}$ из системы (2.4), (2.5) и (2.7), а второе − с разрешением системы (2.9) (Devoto, 1966, 1967). В монографии (Ферцигер, Капер, 1976) для смесей нейтральных газов приведены выражения для коэффициентов λ_s и $k^s_{T\alpha}$, позволяющие вычислять их в первом приближении непосредственно через коэффициенты $\Lambda^{mp}_{\alpha\beta}$. Этот результат обобщён в работах (Колесниченко, 1982) на случай частично ионизованных смесей газов в магнитном поле:

$$\begin{cases} [\lambda_{\|}]_1 = \sum\limits_{\beta,\gamma=1}^{N} x_\beta (\Lambda^{11})^{-1}_{\beta\gamma} x_\gamma, \\ [\lambda_{\perp}]_1 = \sum\limits_{\beta,\gamma=1}^{N} x_\beta (L^{11})^{-1}_{\beta\gamma} x_\gamma, \\ [\lambda_{\wedge}]_1 = \dfrac{5ckp}{2|\mathbf{B}|} \sum\limits_{\beta=1}^{N} \dfrac{x_\beta}{e_\beta} \left[\sum\limits_{\gamma,\alpha=1}^{N} \dfrac{e_\beta}{e_\gamma} (L^{11})^{-1}_{\beta\alpha} \Lambda^{11}_{\alpha\gamma} - 1 \right] \end{cases} \tag{2.12}$$

$$[k^{\|}_{T\alpha}]_1 = \frac{5}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \Lambda^{10}_{\alpha\gamma} (\Lambda^{11})^{-1}_{\gamma\beta} x_\beta, \quad [k^{\perp,\wedge}_{T\alpha}]_1 = \frac{5}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \Lambda^{10}_{\alpha\gamma} (L^{11})^{-1}_{\gamma\beta} x_\beta, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,N) \tag{2.13}$$

что позволяет вычислять коэффициенты теплопроводности λ_s и термодиффузионные отношения $k^s_{T\alpha}$ в первом приближении непосредственно через величины $\Lambda^{mp}_{\alpha\beta}$,т.е. без предварительного вычисления коэффициентов λ', $D_{\beta\alpha}$ и $D_{T\alpha}$ и последующего решения системы уравнений (2.8). Здесь $(\Lambda^{11})^{-1}_{\gamma\delta}$ представляет собой (γ,δ)-й элемент матрицы, обратный к $\Lambda^{11}_{\gamma\delta}$; $\sum_\gamma (\Lambda^{11})^{-1}_{\beta\gamma} \Lambda^{11}_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\alpha}$, $(\alpha,\beta = 1,2,\ldots,N)$; $L^{11}_{\gamma\beta} = \Lambda^{11}_{\gamma\beta} + i\delta_{\gamma\beta}(2|\mathbf{B}|/5ckp) x_\beta e_\beta$.

Плотность электрического тока. С учётом ($2.10^{(a)}$) выражение для плотности электрического тока $\mathbf{J}$ (закон Ома для частично ионизованного газа) запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sum_s \mathbf{J}_s = \sum_s \sum_{\beta=1}^{N} n_\beta e_\beta \mathbf{w}_{\beta s} = -\sum_s \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} n_\beta e_\beta D^s_{\alpha\beta} (\mathbf{d}_{\alpha s} + k^s_T \nabla_s \ln T) = \\ &= \sum_s \left[\sum_{\alpha,\beta}^{N} \sigma^s_{\alpha\beta} \mathbf{d}'_{\beta s} - \sum_{\beta=1}^{N} \varphi^s_\beta \nabla_s T \right], \quad (s = \|, \perp, \wedge) \end{aligned} \tag{2.14}$$

где величина $\mathbf{d}'_\beta$ связана с термодинамической силой $\mathbf{d}_\beta$ (1.3) формулой

$$\mathbf{d}'_\beta = \frac{p}{c_\beta}\left(\frac{\rho c_\beta}{m_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha e_\alpha\right)^{-1} \mathbf{d}_\beta = -\mathbf{E}' +$$

$$+\frac{p}{c_\beta}\left(\frac{\rho e_\beta}{m_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha e_\alpha\right)^{-1}\left[\nabla x_\beta + (x_\beta - c_\beta)\nabla \ln p - \frac{\rho c_\beta}{p}\left(\mathbf{F}_\beta - \sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha \mathbf{F}_\alpha\right)\right], \quad (2.15)$$

а коэффициенты $\sigma^s_{\alpha\beta}$ и φ^s_β выражаются, соответственно, через коэффициенты диффузии и термодиффузии:

$$\sigma^s_{\alpha\beta} = \frac{e_\alpha n_\alpha}{p} D^s_{\alpha\beta}\left[e_\beta n_\beta - c_\beta \sum_{\gamma=1}^{N} e_\gamma n_\gamma\right], \; (a), \quad \varphi^s_\beta = \frac{e_\beta n_\beta}{T}\sum_{\alpha=1}^{N} k^s_{T\alpha} D^s_{\alpha\beta}, \quad (b) \qquad (2.16)$$

$$(s = \|, \perp, \wedge)$$

Здесь $\sigma^s_{\alpha\beta}$, φ^s_β – парциальные коэффициенты электропроводимости и парциальные электротермические коэффициенты соответственно. Элементы полных тензоров электропроводимости σ^s и электротермической проводимости φ^s получаются путём суммирования парциальных коэффициентов по индексам.

Многокомпонентные коэффициенты диффузии. Система уравнений (2.4) может быть переписана в более наглядном виде, позволяющем определить диффузионные коэффициенты $D^s_{\alpha\beta}$, необходимые для расчёта диффузионных скоростей $\mathbf{w}_{\beta s}$. Для простоты положим $\xi = 2$; тогда

$$\sum_{\beta=1}^{N}\left\{d^{\alpha(2)}_{\beta,0}\left(\Lambda^{00}_{\gamma\beta} + i\frac{4|\mathbf{B}|}{25cpk} x_\beta e_\beta(\delta_{\gamma\beta} - c_\gamma)\right) + \Lambda^{01}_{\gamma\beta} d^{\alpha(2)}_{\beta,1}\right\} = \frac{8}{25k}(\delta_{\gamma\alpha} - c_\gamma) \qquad (2.17)$$

$$(m = 0) \quad \textit{для всех} \quad (\gamma, \alpha = 1, 2, ..., N),$$

$$\left\{\sum_{\beta=1}^{N} \Lambda^{10}_{\gamma\beta} d^{\alpha(2)}_{\beta,0} + \left(\Lambda^{11}_{\gamma\beta} + i\delta_{\gamma\beta}\frac{2|\mathbf{B}|}{5ckp} x_\beta e_\beta\right) d^{\alpha(2)}_{\beta,1}\right\} = 0 \qquad (2.18)$$

$$(m = 1) \quad \textit{для всех} \quad (\gamma, \alpha = 1, 2, ..., N).$$

Решая систему (2.18) относительно величин $d^{\beta(2)}_{\alpha,1}$ и подставляя результат в уравнения (2.17), получим следующую систему алгебраических уравнений, позволяющих находить анизотропные коэффициенты многокомпонентной диффузии $D^s_{\alpha\beta}$ через бинарные коэффициенты диффузии $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ (Колесниченко, 1982):

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\beta}]_2}\left\{[D^{\|}_{\gamma\alpha}]_2-[D^{\|}_{\gamma\beta}]_2\right\}=\delta_{\alpha\gamma}-c_\alpha,\quad(\alpha,\gamma=1,2,\dots,N),\tag{2.19}$$

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\beta}]_2}\left\{[D^{\perp}_{\gamma\alpha}]_2-[D^{\perp}_{\gamma\beta}]_2\right\}=\delta_{\alpha\gamma}-c_\alpha+\frac{|\mathbf{B}|}{cp}\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}(\delta_{\alpha\beta}-c_\alpha)n_\beta e_\beta[D^{\wedge}_{\gamma\beta}]_2,\tag{2.20}$$

$$(\alpha,\gamma=1,2,\dots,N)$$

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\beta}]_2}\left\{[D^{\wedge}_{\gamma\alpha}]_2-[D^{\wedge}_{\gamma\beta}]_2\right\}=-\frac{|\mathbf{B}|}{cp}\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}(\delta_{\alpha\beta}-c_\alpha)n_\beta e_\beta[D^{\perp}_{\gamma\beta}]_2,\tag{2.21}$$

$$(\alpha,\gamma=1,2,\dots,N)$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta[D^{\|}_{\alpha\beta}]_2=0\quad(a),\\ \displaystyle\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta[D^{\perp}_{\gamma\beta}]_2=0\quad(b),\quad\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta[D^{\wedge}_{\gamma\beta}]_2=0\quad(c),\end{cases}\tag{2.22}$$

где $[\mathcal{D}^{(k)}_{\alpha\beta}]_\xi=[\mathcal{D}_{\alpha\beta}]_1\cdot[f^{(k)}_{\alpha\beta}]_\xi$ – бинарные коэффициенты диффузии в ξ приближении («параллельные» при $k=1$ и «перпендикулярные» при $k=2$); $[f^{(k)}_{\alpha\beta}]_\xi$ – поправочные множители, учитывающие высшие приближения в коэффициентах $\mathcal{D}^{(k)}_{\alpha\beta}$:

$$[f^{(k)}_{\alpha\beta}]_\xi=[1-\Delta^{(k)}_{\alpha\beta}(\xi)]^{-1},\quad\Delta^{(k)}_{\alpha\beta}(1)=0,$$

$$\Delta^{\|}_{\alpha\beta}(2)=\frac{1}{\Lambda^{00}_{\alpha\beta}}\sum_{\gamma,\delta=1}^{2}\Lambda^{01}_{\alpha\gamma}(\Lambda^{11})^{-1}_{\gamma\delta}\Lambda^{01}_{\delta\beta},\quad\Delta^{\perp,\wedge}_{\alpha\beta}(2)=\frac{1}{\Lambda^{00}_{\alpha\beta}}\sum_{\gamma,\delta=1}^{2}\Lambda^{01}_{\alpha\gamma}(L^{11})^{-1}_{\gamma\delta}\Lambda^{01}_{\delta\beta}.\tag{2.23}$$

Коэффициенты переноса $D^{\|}$. Системы (2.19) и (2.22$^{(a)}$) могут быть объединены в следующие алгебраические соотношения, аналогичные (1.15):

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\left[\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\beta}}+\sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{N}\frac{m_\beta}{m_\alpha}\frac{x_\gamma x_\beta}{\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\gamma}}\right][D^{\|}_{\beta\delta}]_2=c_\alpha-\delta_{\alpha\delta},\quad(\alpha,\delta=1,2,\dots,N),\tag{2.24}$$

связывающие многокомпонентные коэффициенты продольной диффузии $D^{\|}$ с коэффициентами диффузии бинарных смесей $\mathcal{D}^{(1)}$ в первом приближении. Соотношения (2.24) аналогичны соотношениям (1.15) для смеси нейтральных газов. Таким образом, в случае плазмы формулы (1.16) и (1.17) для бинарной смеси и смеси из трёх компонентов остаются справедливыми для продольных составляющих диффузионных тензоров переноса. Например, для квазинейтральной смеси из однократно ионизованных атомов с массой m_2 и электронов с массой m_1 из (2.24) следует

$$[D^{\|}_{11}]_2 = p\tau^{(1)}_{12} / n_1 m_1, \quad [D^{\|}_{12}]_2 = -\varepsilon[D^{\|}_{11}]_2, \quad [D^{\|}_{22}]_2 = \varepsilon^2[D^{\|}_{11}]_2, \tag{2.25}$$

где $\tau^{(1)}_{\alpha\beta} = n^2 m_{\alpha\beta}\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\beta} / pn_\beta$ – средняя обратная частота столкновений (вдоль магнитного поля $\mathbf{B}$) частиц сорта α и β $(\tau^{(1)}_{\alpha\beta} \neq \tau^{(1)}_{\beta\alpha})$; $m_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta/(m_\alpha + m_\beta)$ – приведённая масса пары частиц; $\varepsilon = m_1 / m_2 << 1$.

Коэффициенты переноса $D^{\perp}$ и $D^{\wedge}$. Коэффициенты $D^{\perp}$ и $D^{\wedge}$ удобно вычислять совместно. Вводя комплексные величины $\tilde{D}_{\alpha\beta} = D^{\perp}_{\alpha\beta} + iD^{\wedge}_{\alpha\beta}$, перепишем (2.20) и (2.21) следующим образом:

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\beta}]_2}\left\{[\tilde{D}_{\gamma\alpha}]_2 - [\tilde{D}_{\gamma\beta}]_2\right\} + i\frac{|\mathbf{B}|}{cp}\sum_{\beta=1}^{N}\left(\delta_{\alpha\beta} - c_\alpha\right) n_\beta e_\beta [D^{\wedge}_{\gamma\beta}]_2 = \delta_{\alpha\gamma} - c_\alpha, \tag{2.26}$$

$$(\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, N)$$

Отсюда, с учётом (2.22$^{(b),(c)}$), получим соотношения, связывающие многокомпонентные коэффициенты диффузии $D^{\perp,\wedge}_{\alpha\beta}$ с коэффициентами диффузии бинарных смесей во втором приближении:

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\left[\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{B}^{(2)}_{\alpha\beta}} + \sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{N}\frac{m_\beta}{m_\alpha}\frac{x_\gamma x_\beta}{\mathcal{B}^{(2)}_{\alpha\gamma}}\right][\tilde{D}_{\beta\delta}]_2 = c_\alpha - \delta_{\alpha\delta}, \quad (\alpha, \delta = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.27}$$

где

$$\mathcal{B}^{(2)}_{\beta\alpha} = \frac{kTx_\alpha}{m_{\beta\alpha}}\frac{\tau^{(2)}_{\beta\alpha}}{1 + ic_\alpha\omega_{\beta\alpha}\tau^{(2)}_{\beta\alpha}}. \tag{2.28}$$

Здесь

$$\omega_{\beta\alpha} = e_\beta \left|\mathbf{B}\right| / c m_{\beta\alpha}, \quad \tau^{(2)}_{\beta\alpha} = \frac{m_{\beta\alpha}}{kTx_\alpha} \mathcal{D}^{(2)}_{\beta\alpha} \tag{2.29}$$

– соответственно обобщённая гирочастота β-й компоненты и среднее время между столкновениями в перпендикулярном направлении (во втором приближении) α-й компоненты с β-й ($\tau^{(2)}_{\beta\alpha} \neq \tau^{(2)}_{\alpha\beta}$).

Для квазинейтральной бинарной смеси ($e_1 = -e_2 = e$) из (2.27) следует

$$D^{\perp}_{11} = \frac{p}{n_1 m_1} \frac{\tau^{(2)}_{12}}{1 + [\omega_{12}\tau^{(2)}_{12}]^2}, \quad D^{\perp}_{12} = -\varepsilon D^{\perp}_{11}, \quad D^{\perp}_{22} = \varepsilon^2 D^{\perp}_{11}, \tag{2.30}$$

$$D^{\wedge}_{11} = -\frac{p}{n_1 m_1} \tau^{(2)}_{12} \frac{\omega_{12}\tau^{(2)}_{12}}{1 + [\omega_{12}\tau^{(2)}_{12}]^2}, \quad D^{\wedge}_{12} = -\varepsilon D^{\wedge}_{11}, \quad D^{\wedge}_{22} = \varepsilon^2 D^{\wedge}_{11}, \tag{2.31}$$

где $\omega_{12} = -\omega_{21}$. Поправка $\Delta^{2(2)}_{12}$ к коэффициентам $\mathcal{D}^{(2)}_{12}$ легко может быть получена из (2.23) (Колесниченко, 1978).

Выпишем также формулы для коэффициентов $D^{\perp,\wedge}_{\alpha\beta}$ в случае квазинейтрального газа, образованного электронами ($\alpha = 1$), нейтральными атомами $(\alpha = 3)$ и ионами (однократно ионизованными атомами того же сорта). Используя далее обозначение для степени ионизации $\alpha = n_1 / (n_1 + n_3)$ и пренебрегая членами порядка $\zeta\,(= m_1/m_2)$ из (2.27) получим

$$\left\{\begin{aligned}
D^{\perp}_{11} &= \frac{kT}{m_1}\frac{1+\alpha}{\alpha}\tau^{(2)}_{21}\frac{(1-\alpha^2)(\tilde{\omega}_1^2 W_1 + W_2) + \left[\alpha(1-\alpha)\tau^{(2)}_{21}/\tau^{(2)}_{31} + \tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_3\right]W_2}{W_2^2 + \tilde{\omega}_1^2 W_1^2},\\
D^{\perp}_{13} &= -\frac{kT}{m_1}(1-\alpha^2)\tau^{(2)}_{21}\left(1 - \tau^{(2)}_{21}/\tau^{(2)}_{31}\right)\frac{W_2}{W_2^2 + \tilde{\omega}_1^2 W_1^2},\\
D^{\perp}_{33} &= \frac{kT}{m_1}\alpha(1+\alpha)\tau^{(2)}_{21}\frac{\left(1 + (1-\alpha)\tau^{(2)}_{21}/\,\alpha\tau^{(2)}_{31}\right)W_2 - \tilde{\omega}_1^2 W_1}{W_2^2 + \tilde{\omega}_1^2 W_1^2},\\
D^{\perp}_{23} &= -\frac{1-\alpha}{\alpha}D^{\perp}_{33}, \quad D^{\perp}_{12} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}D^{\perp}_{13}, \quad D^{\perp}_{22} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 D^{\perp}_{33};
\end{aligned}\right. \tag{2.32}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&D_{11}^{\wedge}=\frac{kT}{m_1}\frac{1+\alpha}{\alpha}\tau_{21}^{(2)}\frac{(1-\alpha^2)(W_1-W_2)\tilde{\omega}_1+\left[\alpha(1-\alpha)\tau_{21}^{(2)}/\tau_{31}^{(2)}+\tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_3\right]W_2\,\tilde{\omega}_1}{W_2^2+\tilde{\omega}_1^2W_1^2},\\
&D_{13}^{\wedge}=\frac{kT}{m_1}(1-\alpha^2)\tau_{21}^{(2)}\left(1-\tau_{21}^{(2)}/\tau_{31}^{(2)}\right)\frac{\tilde{\omega}_1W_2}{W_2^2+\tilde{\omega}_1^2W_1^2},\\
&D_{33}^{\wedge}=-\frac{kT}{m_1}\alpha(1+\alpha)\tau_{21}^{(2)}\tilde{\omega}_1\frac{\left(1+(1-\alpha)\tau_{21}^{(2)}/\,\alpha\tau_{31}^{(2)}\right)W_1+W_2}{W_2^2+\tilde{\omega}_1^2W_1^2},\\
&D_{23}^{\wedge}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}D_{33}^{\wedge},\quad D_{12}^{\wedge}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}D_{13}^{\wedge},\quad D_{22}^{\wedge}=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2D_{33}^{\wedge}.
\end{aligned}\right. \tag{2.33}$$

В приведённых формулах: $\tilde{\omega}_1=\omega_{21}\tau_{21}^{(2)},\quad \tilde{\omega}_3=\omega_{23}\tau_{23}^{(2)},$

$$W_1=\frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{\alpha}\frac{\tau_{21}^{(2)}}{\tau_{31}^{(2)}}-\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3},\quad W_2=(1-\alpha)^2\tilde{\omega}_1^2+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\tau_{21}^{(2)}}{\tau_{31}^{(2)}}\left(1+\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3}\right)+\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3}. \tag{2.34}$$

Наконец, приведём здесь выражения для парциальных анизотропных коэффициентов электропроводимости в случае трёхкомпонентной смеси частично ионизованного газа. Согласно формуле (2.14) для коэффициентов $\sigma_{\alpha\beta}^{s}$ имеем

$$\sigma^{s}=\frac{ne^2}{kT}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left[D_{11}^{s}-2D_{21}^{s}+D_{22}^{s}\right],\quad (s=\|,\perp,\wedge), \tag{2.35}$$

откуда, с учётом (2.33) и (2.34), для коэффициентов электропроводимости получаем следующие формулы для продольной, поперечной и холовской проводимости

$$\sigma^{\|}=\frac{ne^2}{m_1}\frac{\alpha}{1+\alpha}\tau_{21}^{(2)}\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\tau_{21}^{(2)}}{\tau_{31}^{(2)}}+\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3}\right]\Big/\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\tau_{21}^{(2)}}{\tau_{31}^{(2)}}\left(1+\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3}\right)+\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3}\right], \tag{2.36$^{(a)}$}$$

$$\sigma^{\perp}=\frac{ne^2}{m_1}\frac{\alpha}{1+\alpha}\tau_{21}^{(2)}W_2\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\tau_{21}^{(2)}}{\tau_{31}^{(2)}}+\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3}\right]\Big/\left(\mathrm{W}_2^2+\tilde{\omega}_1^2\,\mathrm{W}_1^2\right), \tag{2.36$^{(b)}$}$$

$$\sigma^{\wedge}=-\frac{ne^2}{m_1}\frac{\alpha}{1+\alpha}\tau_{21}^{(2)}W_1\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{\tau_{21}^{(2)}}{\tau_{31}^{(2)}}+\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3}\right]\Big/\left(\mathrm{W}_2^2+\tilde{\omega}_1^2\,\mathrm{W}_1^2\right) \tag{2.36$^{(c)}$}$$

Ω^*-интегралы столкновений. Итак, с помощью соотношений (2.24) и (2.27) можно свести выражения для многокомпонентных коэффициентов диффузии к комбинациям бинарных коэффициентов различных компонент смеси, которые, в свою очередь, являются комбинациями Ω^*-интегралов столкновений. Приведённые интегралы столкновений для потенциалов межмолекулярного взаимодействия $\varphi(r) = (\sigma_{\alpha\beta}/r)^\nu$ (ν − показатель отталкивания) выводятся строго аналитически и имеют следующий вид (Гиршфельдер и др., 1961):

$$\Omega_{\alpha,\beta}^{(l,r)*} = \frac{4(l+1)(\nu/kT)^{2/\nu}\Gamma(r+2-2/\nu)}{(r+1)![2l+1-(-1)^l]} \int_0^\infty [1-\cos^l \chi_{\alpha\beta}(z,\nu) z\,dz \qquad (2.37)$$

Здесь $z = b(m_{\alpha\beta}g^2/2\nu)^{1/\nu}\sigma_{\alpha\beta}^{-1}$; $\chi_{\alpha\beta}(z,\nu)$ − угол отклонения молекул в системе координат центра тяжести, причём для данного значения параметра ν угол $\chi_{\alpha\beta}$ не зависит от относительной скорости молекул g и прицельного параметра b по отдельности, а является функцией переменной z. Ниже интеграл по z в формуле (2.37) будем обозначать символом $A_l(\nu)$. Трудности вычисления (2.37) возникают вследствие того, что кулоновский потенциал дальнодействующий. Тем не менее $\Omega_{\alpha,\beta}^{(l,r)*}$ -интегралы можно вычислить для точечных центров отталкивания (для этого следует положить $\sigma_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta$ и $\nu = 1$). Тогда для неэкранированного кулоновского потенциала с радиусом обрезания[5)] при $r = R_D$

$$\varphi(r) = \begin{cases} e_\alpha e_\beta / r, & r < R_D \\ 0, & r > R_D \end{cases} \qquad (2.38)$$

(где $R_D = 1/\sqrt{\sum_\alpha 4\pi n_\alpha e_\alpha^2 / kT}$ − дебаевский радиус экранирования) фактор $A_l(\nu)$ может быть аппроксимирован следующей величиной (Ферцигер, Капер, 1976)

$$A_1(1) \approx \tfrac{1}{4}\ln(1+4z_0^2), \quad A_2(1) \approx \tfrac{1}{2}\left[\ln(1+4z_0^2) - \frac{4z_0^2}{4z_0^2+1}\right], \qquad (2.39)$$

где $z_0 \equiv (2kT/e_\alpha e_\beta)R_D$. В этом случае интеграл (2.37) вычисляется тривиально, и мы имеем следующий результат: $\Omega_{\alpha,\beta}^{(l,r)*} = (\pi kT/2m_{\alpha\beta})^{1/2} A_1(1)(r-1)!(e_\alpha e_\beta/kT)^2$.

[5)] Обрезание означает, что, когда прицельный параметр b превышает дебаевский радиус R_D, столкновения не происходят ($\chi = 0$), а в интеграле (2.37) верхний предел интегрирования следует заменить величиной R_D.Эта замена не приводит к заметному изменению интеграла, за исключением того случая, когда значение прицельного параметра b весьма близко к R_D.

С учётом этого выражения коэффициент бинарной диффузии (в первом приближении) и средняя обратная частота столкновений определяются следующим образом:

$$[\mathcal{D}_{\alpha\beta}]_1 = \frac{3}{2\sqrt{2\pi m_{\alpha\beta}}} \frac{(kT)^{5/2}}{n e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln(1+4z_0^2)}, \quad \tau_{\alpha\beta}(1) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \frac{m_{\alpha\beta}^{1/2}(kT)^{3/2}}{n_\beta e_\alpha^2 e_\beta^2 \ln(1+4\Lambda_{\alpha\beta}^2)}. \quad (2.40)$$

3. Соотношения «силы через потоки». Обобщённые соотношения Стефана−Максвелла

Систему уравнений (2.19)-(2.22), связывающую многокомпонентные коэффициенты диффузии с коэффициентами диффузии бинарных смесей для различных пар компонент смеси, часто трудно использовать при решении конкретных задач. Кроме того, как уже отмечалось, подстановка выражений (2.1)−(2.2) для потоков в уравнения магнитной гидродинамики приводит к системе уравнений, не разрешённых относительно старших производных, что ведёт, ввиду отсутствия общих методов, к некоторым затруднениям при численном решении таких уравнений. Поэтому удобно иметь соотношения (2.1.), разрешённые относительно термодинамических диффузионных сил $\mathbf{d}_\alpha$ через потоки $\mathbf{w}_\alpha$ и записанные в виде соотношений Стефана−Максвелла, в которые вместо многокомпонентных коэффициентов диффузии $D^s_{\alpha\beta}(\xi)$ входят коэффициенты диффузии в бинарных смесях газов $\mathcal{D}^{(k)}_{\alpha\beta}(\xi)$.

Умножим обе части уравнений (2.19)-(2.21) на $\mathbf{d}_{\alpha s} + k^s_{T\beta}\nabla_s \ln T \quad (s = \|, \perp, \wedge)$ и результат просуммируем по индексу β. Учитывая (2.10$^{(a)}$), получим следующие обобщённые соотношения Стефана−Максвелла с анизотропными кинетическими коэффициентами для многокомпонентной диффузии в сильном магнитном поле:

$$\mathbf{d}_{\alpha\|} = \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\beta}]_\xi}\left(\mathbf{w}_{\beta\|} - \mathbf{w}_{\alpha\|}\right) - [k^{\|}_{T\alpha}]_{\xi-1}\nabla_{\|}\ln T, \quad (3.1^{(a)})$$

$$\mathbf{d}_{\alpha\perp} = \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\beta}]_\xi}(\mathbf{w}_{\beta\perp} - \mathbf{w}_{\alpha\perp}) - [k^{\perp}_{T\alpha}]_{\xi-1}\nabla_{\|}\ln T - \frac{n_\alpha}{cp}\mathbf{B}\times\left(e_\alpha \mathbf{w}_{\alpha\wedge} - \frac{m_\alpha}{\rho}\mathbf{J}_\wedge\right), \quad (3.\ 1^{(b)})$$

$$0 = \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\beta}]_\xi}(\mathbf{w}_{\beta\wedge} - \mathbf{w}_{\alpha\wedge}) - \frac{n_\alpha}{cp}\mathbf{B}\times\left(e_\alpha \mathbf{w}_{\alpha\perp} - \frac{m_\alpha}{\rho}\mathbf{J}_\perp\right). \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N). \quad (3.\ 1^{(c)})$$

Соотношения ($3.1^{(a)}$) (как и ($3.1^{(b,c)}$)) не независимы: их сумма по α даёт тождество. Преимуществом этих уравнений является то, что в них коэффициенты $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(k)}$ почти не зависят от состава газовых смесей при низкой плотности (т.е. $\Delta_{\beta\alpha}^{N(k)} \cong \Delta_{\beta\alpha}^{2(k)}$ (Брагинский 1963).

В случае слабого магнитного поля, когда можно считать, что $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(1)} \approx \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)} = \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ и $k_{T\alpha}^{\|} \approx k_{T\alpha}^{\perp} = k_{T\alpha}$, суммирование соотношений (3.1) по $s\,(=\|, \perp, \wedge)$, приводит к соотношениям Стефана−Максвелла в следующем стандартном виде

$$\mathbf{d}_\alpha^* = \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\left(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{v}_\alpha\right) - k_{T\alpha}\nabla \ln T\,, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{d}_\alpha^* = \nabla x_\alpha + (x_\alpha - c_\alpha)\nabla \ln p - \dfrac{n_\alpha}{p}\left(\mathbf{F}_\alpha^* - \sum_{\beta=1}^{N} c_\beta \mathbf{F}_\beta^*\right)$; $\mathbf{F}_\beta^* = \mathbf{F}_\beta - \dfrac{e_\beta}{m_\beta}\left(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v}_\beta \times \mathbf{B}\right)$; $\mathbf{v}_\alpha$− средняя массовая скорость частицы сорта α.

С другой стороны, используя полное уравнение движения $\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + c^{-1}\mathbf{J}\times\mathbf{B} + \sum_{\beta=1}^{N}\rho_\beta \mathbf{F}_\beta$ для континуума, моделирующего ионизованный газ в целом, и соотношение $p_\alpha = x_\alpha p$ для парциального давления α–й компоненты, соотношениям (3.1) можно придать вид уравнений движения для отдельных компонентов смеси, которые в случае квазинейтральной плазмы принимают вид:

$$\rho_\alpha\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\|} = -\nabla_{\|} p_\alpha - p k_{T\alpha}^{\|}\nabla_{\|}\ln T + \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\frac{n_\beta m_{\beta\alpha}}{\tau_{\beta\alpha}^{(2)}}\left(\mathbf{v}_{\alpha\|} - \mathbf{v}_{\beta\|}\right) + \rho_\alpha \mathbf{F}_{\alpha\|} + n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}_{\|}\,, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\rho_\alpha\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\perp} &= -\nabla_{\perp} p_\alpha - p k_{T\alpha}^{\perp}\nabla_{\perp}\ln T + \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\frac{n_\beta m_{\beta\alpha}}{\tau_{\beta\alpha}^{(2)}}\left(\mathbf{v}_{\alpha\perp} - \mathbf{v}_{\beta\perp}\right) + \\ &\quad + \rho_\alpha \mathbf{F}_{\alpha\perp} + n_\alpha e_\alpha\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_{\beta\perp}\times\mathbf{B}\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь $\mathbf{v}_{\alpha\|} = \mathbf{w}_{\alpha\|} + \mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})$ и $\mathbf{v}_{\alpha\perp} = \mathbf{w}_{\alpha\perp} + \mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})$ − соответственно средняя продольная и средняя поперечная скорость частицы сорта.

Анизотропные коэффициенты электропроводности для многокомпонентной плазмы в сильном магнитном поле. При использовании соотношений (2.24) для коэффициентов многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}^{||}$ и формул (2.16[a]) для коэффициентов электропроводности $\sigma_{\alpha\beta}^{||}=\dfrac{e_\alpha e_\beta n_\alpha n_\beta}{p}D_{\alpha\beta}^{||}$ легко получить следующие алгебраические уравнения, связывающие продольные коэффициенты электропроводности $\sigma_{\alpha\beta}^{||}$ для квазинейтральной многокомпонентной плазмы с коэффициентами диффузии бинарных смесей:

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\left[\frac{x_\alpha x_\beta}{[\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(1)}]_2}+\sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{N}\frac{m_\beta}{m_\alpha}\frac{x_\gamma x_\beta}{[\mathcal{D}_{\alpha\gamma}^{(1)}]_2}\right]\frac{[\sigma_{\beta\delta}^{||}]_2}{e_\beta x_\beta}=\frac{e_\delta n_\delta}{kT}(c_\alpha-\delta_{\alpha\delta}),\quad (\alpha,\delta=1,2,\ldots,N). \quad (3.5)$$

Используя соотношения (2.27), связывающие многокомпонентные коэффициенты диффузии $\tilde{D}_{\alpha\beta}=D_{\alpha\beta}^{\perp}+iD_{\alpha\beta}^{\wedge}$ с коэффициентами диффузии бинарных смесей и формулы $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\beta}^{\perp}+i\sigma_{\alpha\beta}^{\wedge}$, можно получить алгебраические уравнения, удобные для определения перпендикулярных и поперечных коэффициентов электропроводности многокомпонентной плазмы

$$\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{N}\left[\frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{B}_{\alpha\beta}^{(2)}}+\sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{N}\frac{m_\beta}{m_\alpha}\frac{x_\gamma x_\beta}{\mathcal{B}_{\alpha\gamma}^{(2)}}\right]\frac{[\tilde{\sigma}_{\beta\delta}]_2}{e_\beta x_\beta}=\frac{e_\delta n_\delta}{kT}(c_\alpha-\delta_{\alpha\delta}),\quad (\alpha,\delta=1,2,\ldots,N), \quad (3.6)$$

где

$$\frac{1}{\mathcal{B}_{\beta\alpha}^{(2)}}\equiv\frac{1}{\mathcal{D}_{\beta\alpha}^{(2)}}+i\frac{e_\beta|\mathbf{B}|}{c}\frac{c_\alpha}{kTx_\alpha} \quad (3.7)$$

Аналогичные соотношения можно получить для парциальных электротермических коэффициентов φ_α^s $(s=||,\perp,\wedge)$.

4. Амбиполярная ионосферная диффузия при наличии внешнего электромагнитного поля

В аэрономии ионосферы важным фактором является перенос заряженных частиц путём диффузии, которая наряду с фотохимическими процессами контролирует вертикальное распределение ионизации (Ратклифф.1975). Роль процессов переноса особенно велика в области F, где быстро возрастает с высотой длина свободного пробега и время жизни заряженных частиц (Jonson, 1951; Гершман, 1974). При описании диффузии заряженных частиц в частично ионизованной ионосферной плазме по сравнению с диффузией малых составляющих в условиях нейтральной атмосферы необходимо учитывать ряд дополнительных факторов (Ferraro, 1945). Во-первых, это влияние электрического поля амбиполярной диффузии, возникающего при диффузионном разделении более лёгких и «быстрых» электронов (шкала высот которых велика) и значительно более «медленных» ионов, препятствующего относительной диффузии этих заряженных частиц. Во-вторых, это электростатические силы, возникающие при соударениях не только заряженных частиц между собой, но и заряженных и нейтральных частиц, когда у последних наводится электрический дипольный момент. Одной из особенностей диффузии заряженных частиц является анизотропия, вызываемая действием магнитного поля (Спитцер, 1957; Голанд, 1963; Роуз, Кларк, 1963).

Известно (Dougherty, 1961; Rishbeth, 1964; Уиттен, Попов, 1977), что в случае трёхкомпонентной плазмы $(e,\ i, m)$ её электронная и ионная составляющие под действием возникающего в гравитационном поле электрического поля поляризации диффундируют совместно (амбиполярная диффузия) с общим коэффициентом диффузии и общей гидродинамической скоростью. Для ионосферной плазмы, состоящей из электронов, многосортных ионов и нейтральных частиц, диффузионные скорости отдельных заряженных компонент не равны друг другу, особенно при наличии градиентов концентраций и сильного электромагнитного поля, и должны определяться с учётом условия приближенного равенства нулю продольного электрического тока (Ferraro, 1964; Schunk, Walker, 1972; 1973).

В качестве примера предложенного здесь подхода рассмотрим далее случай, когда учитывается взаимодействие только между заряженными (индексы α и β) и нейтральными (индекс m) компонентами плазмы и не принимаются во внимание столкновения электронов и ионов (всех сортов) между собой[6]. При этом гидродинамическую скорость $\mathbf{v}$ будем считать совпадающей со скоростью нейтрального ветра. Воспользуемся уравнениями (3.3) и (3.4), которые (для однократно ионизованной квазинейтральной плазмы и с учётом указанных ограничений) могут быть переписаны в виде:

$$p\sum_m \frac{x_\alpha x_m}{\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha m}}\mathbf{w}_{\alpha\|} = n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}_{\|} - \mathbf{G}_{\alpha\|}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \tag{4.1}$$

$$p\sum_m \frac{x_\alpha x_m}{\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha m}}(\mathbf{w}_{\alpha\perp} + \mathbf{w}_{\alpha\wedge}) = n_\alpha e_\alpha \mathbf{E}'_{\perp} + c^{-1}\left|\mathbf{B}\right| n_\alpha e_\alpha (\mathbf{w}_{\alpha\perp} + \mathbf{w}_{\alpha\wedge}) \times \mathbf{b} - \mathbf{G}_{\alpha\perp}, \tag{4.2}$$

где

$$\mathbf{G}_{\alpha s} \equiv \nabla_s p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{F}_{\alpha s} + \rho_\alpha (d\mathbf{v}/dt)_s + p k^s_{T\alpha} \nabla_s \ln T, \ \ (s = \|, \perp, \wedge). \tag{4.3}$$

---

[6]) Обобщение теории амбиполярной диффузии на случай учёта столкновений электронов с ионами можно найти, например, в монографии (Гершман, 1974).

Здесь в целях упрощения ограничимся первым приближением для кинетических коэффициентов и будем пренебрегать инерцией заряженных частиц, а также считать, что $\mathbf{F}_\alpha \equiv \mathbf{g}$.

Вводя коэффициенты подвижности частиц сорта β

$$b_{\beta||} \equiv \frac{e_\beta}{kT}\left[\sum_m \frac{x_m}{\mathcal{D}_{\beta m}}\right]^{-1} = e_\beta\left[\sum_m m_{\beta m}\tau_{\beta m}^{-1}\right]^{-1} = \frac{c}{|\mathbf{B}|}\gamma_\beta^{-1}, \tag{4.4}$$

$$b_{\beta\perp} \equiv \frac{b_{\beta||}}{1+c^{-2}|\mathbf{B}|^2 b_{\beta||}^2} = \frac{c}{|\mathbf{B}|}\frac{\gamma_\beta}{1+\gamma_\beta^2} \qquad b_{\beta\wedge} \equiv \frac{c^{-1}|\mathbf{B}|b_{\beta||}^2}{1+c^{-2}|\mathbf{B}|^2 b_{\beta||}^2} = \frac{c}{|\mathbf{B}|}\frac{1}{1+\gamma_\beta^2}, \tag{4.5}$$

(где $\gamma_\beta = \sum_m (\omega_{\beta m}\tau_{\beta m})^{-1}$), перепишем (4.1) и (4.2) следующим образом:

$$\mathbf{w}_{\beta||} = b_{\beta||}(\mathbf{E}_{||} - \mathbf{G}_{\beta||}/n_\beta e_\beta), \tag{4.6}$$

$$\mathbf{w}_{\beta\perp}+\mathbf{w}_{\beta\wedge} = b_{\beta\perp}(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{G}_{\beta\perp}/n_\beta e_\beta) + b_{\beta\wedge}(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{G}_{\beta\perp}/n_\beta e_\beta)\times\mathbf{b}; \tag{4.7}$$

отсюда следует:

$$(1+\gamma_\beta^2)\mathbf{w}_\beta = \frac{c}{\gamma_\beta|\mathbf{B}|}\left(\mathbf{E}_{||} - \frac{\mathbf{G}_{\beta||}}{n_\beta e_\beta}\right) + \frac{c}{|\mathbf{B}|}\gamma_\beta\left(\mathbf{E}' - \frac{\mathbf{G}_{\beta\perp}}{n_\beta e_\beta}\right) - \frac{c}{|\mathbf{B}|}\mathbf{b}\times\left(\mathbf{E}' - \frac{\mathbf{G}_\beta}{n_\beta e_\beta}\right). \tag{4.8}$$

$$(\beta = 1, 2, \ldots)$$

При этом, согласно (4.6) и (4.7), закон Ома для вектора плотности тока $\mathbf{J}$ принимает вид

$$\mathbf{J} = \sigma'_{||}\mathbf{E}_{||} + \sigma'_\perp\mathbf{E}'_\perp - \sigma'_\wedge\mathbf{b}\times\mathbf{E}'_\perp - \sum_\beta\left(b_\beta\mathbf{G}_{\beta||} + b_{\beta\perp}\mathbf{G}_{\beta\perp} - b_{\beta\wedge}\mathbf{b}\times\mathbf{G}_{\beta\perp}\right), \tag{4.9}$$

где

$$\sigma'_{||} = \sum_\beta e_\beta n_\beta b_{\beta||}, \quad \sigma'_\perp = \sum_\beta e_\beta n_\beta b_{\beta\perp}, \quad \sigma'_\wedge = \sum_\beta e_\beta n_\beta b_{\beta\wedge}. \tag{4.10}$$

Любое электрическое поле, образованное стремлением электронов подняться выше ионов, будет вертикальным, так как ионосфера горизонтально расслоена. Выберем теперь начало декартовой системы координат в какой-либо точке ионосферы таким образом, чтобы оси $0x$ и $0y$ были направлены соответственно на магнитный юг и восток, а ось $0z$ − вверх. Введём следующие обозначения: I − независящее (по предположению) от координат магнитное наклонение; $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ – соответственно единичные векторы в направлениях $0x$, $0y$ и $0z$. Тогда

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{l} + v_y\mathbf{m}, \quad \mathbf{B} = -B\cos I\,\mathbf{l} - B\sin I\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = E_x\mathbf{l} + E_y\mathbf{m} + E_z\mathbf{n};$$

$$\mathbf{E}_{\|} = (E_x\cos^2 I + E_z\cos I\sin I)\mathbf{l} + (E_x\cos I\sin I + E_z\sin^2 I)\mathbf{n},$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = v_x\sin^2 I\,\mathbf{l} + v_y\mathbf{m} - v_x\cos I\sin I\,\mathbf{n}, \quad \mathbf{b}\times\mathbf{E}'_{\perp} = c^{-1}|\mathbf{B}|\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{b}\times\mathbf{E}_{\perp},$$

$$\mathbf{b}\times\mathbf{E} = E_y\sin I\,\mathbf{l} + (E_z\cos I - E_x\sin I)\mathbf{m} - E_y\cos I\,\mathbf{n}.$$

Ограничимся также случаем стратифицированной ионосферы. Тогда

$$\mathbf{G}_{\alpha s} = \mathrm{G}_{\alpha}\,\mathbf{n}_s \cong (\partial p/\partial z + \rho_{\alpha}g)\mathbf{n}_s, \quad (s = \|, \perp, \wedge), \tag{4.11}$$

где $\mathbf{n}_{\|} = -\sin I\cos I\,\mathbf{l} + \sin^2 I\,\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_{\perp} = -\sin I\cos I\,\mathbf{l} + \cos^2 I\,\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_{\wedge} = \cos I\,\mathbf{m}$. Кроме того, из уравнений Максвелла для электрического поля $\partial E_x/\partial z = 0$, $\partial E_y/\partial z = 0$ и $\partial E_z/\partial z = 4\pi e\left(n_e - \sum_{\alpha} Z_{\alpha}n_{\alpha}\right)$ следует, что E_x и E_y не зависят от координаты z и полностью определяются граничными условиями, а переменное поле поляризации $E_z = E_z(z)$, возникающее в результате частичной компенсации положительных и отрицательных зарядов, необходимо исключить из рассмотрения для квазинейтральной плазмы (здесь $e_{\alpha} = Z_{\alpha}e$ – заряд ионов сорта α).

Рассматривая далее ионосферу как тонкую оболочку с непроводящей электрический ток нижней границей, можно положить $\mathrm{J}_z \cong 0$ (в силу сохранения электрического заряда). Тогда из (4.9) следует

$$\mathrm{J}_z = (\sigma'_{\|} - \sigma'_{\perp})\left(E_x\cos I\sin I + E_z\sin^2 I\right) + \sigma'_{\perp}E'_z + \sigma'_{\wedge}E'_y\cos I - \frac{c}{|\mathbf{B}|}\sum_{\beta}\mathrm{G}_{\beta}\frac{\gamma_{\beta}^2 + \sin^2 I}{\gamma_{\beta}(1+\gamma_{\beta}^2)} \approx 0. \tag{4.12}$$

Произведём численную оценку коэффициентов проводимости σ'_s в области $F2$: $|\mathbf{B}| \approx 0{,}3\,гс$; $\tau_{\alpha m}^{-1} \approx 1\,сек^{-1}$; $\tau_{em}^{-1} \approx 35\,сек^{-1}$ ($T = 1480\,K$); $m \approx 10m_H$ (где m_H – масса атома водорода), $m_{em} \approx m_e = 9{,}1\cdot 10^{-28}\,г$, $\omega_e = e|\mathbf{B}|/m_e = 6{,}2\cdot 10^6\,сек^{-1}$, $\omega_{\alpha} = e|\mathbf{B}|/m_{\alpha} = 1{,}5\cdot 10^2\,сек^{-1}$ и в значительном интервале высот справедливы неравенства $\omega_{em}^{-1}\tau_{em}^{-1} << \omega_{\alpha m}^{-1}\tau_{\alpha m}^{-1}$. Тогда $\gamma_e << \gamma_{\alpha} << 1$, $b_{\beta\perp} << b_{\beta\wedge} << b_{\beta\|}$, $|b_e| >> |b_{\alpha}|$ и

$$b_{\beta\wedge} \approx c/|\mathbf{B}|, \quad \sigma'_{\|} \approx eb_e n_e, \quad \sigma'_{\wedge} \approx 0. \tag{4.13}$$

В случае пренебрежения малыми членами соотношение (4.12), с учётом (4.13), превращается в

$$0=\sigma'_{\|}\left(E_x\cos I\sin I+E_z\sin^2 I\right)+\frac{c}{|\mathbf{B}|}E'_z\sum_\beta e_\beta n_\beta\gamma_\beta-\frac{c}{|\mathbf{B}|}\sum_\beta G_\beta\frac{\gamma_\beta^2+\sin^2 I}{\gamma_\beta}. \quad (4.14)$$

Рассмотрим теперь область, далёкую от магнитного экватора (когда $I>3^\circ$); в этом случае в формуле (4.14) можно пренебречь также членами $\sim(\gamma_\beta/\sin I)^2$, малыми по сравнению с единицей; тогда из (4.14) следует

$$E_z=-E_x\operatorname{ctg}I+\frac{c}{|\mathbf{B}|\sigma'_{\|}}\sum_\beta\gamma_\beta^{-1}G_\beta\simeq-E_x\operatorname{ctg}I+\frac{1}{en_e}G_e+\sum_\alpha\frac{n_\alpha}{en_e}\frac{\gamma_e}{\gamma_\alpha}\left(\frac{G_e}{n_e}+\frac{G_\alpha}{n_\alpha}\right). \quad (4.15)$$

Это соотношение используем теперь для исключения вертикальной компоненты электрического поля E_z из уравнений (4.8), записанных в тех же предположениях, что и (4.15). Тогда для диффузионных скоростей ионов сорта α и электронов получим следующие выражения:

$$\begin{cases} w_{\alpha x}=-v_x+w_{\alpha z}ctgI-c|\mathbf{B}|^{-1}E_y\operatorname{cosec}I,\\ w_{\alpha y}=-v_y+c|\mathbf{B}|^{-1}E_x\operatorname{cosec}I+\gamma_\alpha c|\mathbf{B}|^{-1}E_y+\gamma_\alpha v_x\sin I-c|\mathbf{B}|^{-1}E_{p\alpha}\cos I,\\ w_{\alpha z}=v_x\sin I\cos I+c|\mathbf{B}|^{-1}E_y\cos I-E_{p\alpha}\sin^2 I/\sum_m m_{\alpha m}\tau_{\alpha m}^{-1}; \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} w_{ex}=-v_x+w_{ez}ctgI-c|\mathbf{B}|^{-1}E_y\operatorname{cosec}I,\\ w_{ey}=-v_y+c|\mathbf{B}|^{-1}E_x\operatorname{cosec}I+\gamma_e c|\mathbf{B}|^{-1}E_y+\gamma_e v_x\sin I-c|\mathbf{B}|^{-1}\sum_\alpha\frac{n_\alpha\gamma_e}{n_e\gamma_\alpha}E_{p\alpha}\cos I,\\ w_{ez}=v_x\sin I\cos I+c|\mathbf{B}|^{-1}E_y\cos I-\sin^2 I\sum_\alpha\left[\frac{n_\alpha E_{p\alpha}}{n_e\sum_m m_{\alpha m}\tau_{\alpha m}^{-1}}\right]. \end{cases} \quad (4.16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$E_{p\alpha}\equiv\frac{G_e}{n_e}+\frac{G_\alpha}{n_\alpha}=kT\left[\frac{\partial\ln n_e}{\partial z}+\frac{\partial\ln n_\alpha}{\partial z}+\frac{1}{H_\alpha}+2\frac{\partial\ln T}{\partial z}\right];\quad H_\alpha=\frac{kT}{m_\alpha g} \quad (4.17)$$

– высота однородной атмосферы ионов сорта α.

Полученные здесь результаты в целом согласуются с данными классических работ (Dougherty,1961; Stubbe, 1970). Отличие состоит лишь в том, что в работах этих авторов при выводе выражений для скоростей ионов $\mathbf{w}_\alpha$ через концентрации n_α и температуру T в слабо ионизованной смеси было использовано упрощённое уравнение движения электронов $-\nabla p_e / e n_e = \mathbf{E}' + c^{-1}\mathbf{w}_e \times \mathbf{B}$, без количественной оценки некоторых отбрасываемых членов. Это позволило получить для электростатического поля поляризации E_z выражение (4.15) (но без последнего члена в правой части). Однако выведенные при таком подходе выражения для диффузионных скоростей $\mathbf{w}_{e,\alpha}$ не дают точной аппроксимации при отбрасывании в них членов $\sim \gamma_\alpha^2$. Вместе с тем, в настоящей работе при использовании соотношений (4.8) и (4.12) выведены уточнённые выражения для $\mathbf{w}_{e,\alpha}$.

Если обозначить через $\dot{n}_\alpha$ скорость образования частиц сорта α ионосферы в результате всех аэрономических реакций (см., например, Stubbe, 1970), то хорошей аппроксимацией уравнения непрерывности α-й ионной составляющей для стратифицированной атмосферы может служить следующее уравнение:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{ -D_\alpha \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln n_e}{\partial z} + \frac{\partial \ln n_\alpha}{\partial z} + \frac{1}{H_\alpha} \right) + \frac{\partial \ln T}{\partial z} \right] \sin^2 I + \right.$$
$$\left. + v_x \cos I \sin I + \frac{cE_y}{|\mathbf{B}|} \cos I \right\} = \dot{n}_\alpha, \tag{4.18}$$

где $D_\alpha = 2kT\left[\sum_m m_{\alpha m} \tau_{\alpha m}^{-1} \right]^{-1} = 2\left[\sum_m \frac{x_m}{\mathcal{D}_{\alpha m}} \right]^{-1}$ – эффективный коэффициент амбиполярной диффузии. Это уравнение подтверждает выводы относительно необходимости модификации классической теории амбиполярной диффузии, когда присутствует магнитное поле.

Заключение

Вывод замкнутых систем гидродинамических уравнений для многокомпонентных частично или полностью ионизованных газовых смесей по необходимости включает и вывод соотношений тепло- и массопереноса, которые связывают термодинамические потоки массы и энергии с градиентами основных гидродинамических переменных и внешних сил (гравитационных и электромагнитных), действующих на отдельные компоненты среды. Общий вид подобных определяющих соотношений, полученных на основе как термодинамического, так и строгого газокинетического подхода, представлены во многих известных монографиях (де Гроот, Мазур, 1964; Чепмен, Каулинг, 1960; Гиршфельдер и др,1961; Ферцигер, Капер,1976; Седов, 1984; Франк-Каменецкий, 1987). Однако до настоящего времени в литературе все ещё нет единой точки зрения относительно эффективности и целесообразности использования той или иной конкретной формы соотношений переноса в случае многокомпонентных газовых смесей и плазмы, полученных с использованием различных подходов. Классические соотношения переноса, полученные как в неравновесной термодинамике, так и в газокинетической теории, соответствуют линейным соотношениям между термодинамическими потоками диффузии и тепла с одной стороны, и диффузионными термодинамическими силами и градиентом температуры с другой (этот метод описания можно назвать «потоки через силы»). В этом случае стандартный метод Чепмена−Энскога решения системы уравнений Больцмана для N-компонентных смесей одноатомных молекул приводит к достаточно сложным формулам для вычисления коэффициентов переноса (в частности, коэффициентов многокомпонентной диффузии и термодиффузии) в виде отношений определителей порядка $N\xi+1$ к определителям порядка $N\xi$ (где $\xi-$ порядок приближения, с которым определяются эти коэффициенты). Вместе с тем, возможно и другое представление соотношений переноса, в котором взаимосвязанные термодинамические потоки и силы меняются местами, так что можно записать уравнения для диффузионных потоков в виде так называемых соотношений Стефана−Максвелла («силы через потоки»), а выражение для потока тепла − в виде, разрешённом относительно градиента температуры. Важно при этом отметить, что в эту новую форму соотношений переноса входят только бинарные коэффициенты диффузии для многокомпонентных смесей газов и плазмы (с учётом поправочных коэффициентов на высшие приближения).

До последнего времени в литературе кинетическое рассмотрение диффузионно-тепловых процессов в частично ионизованной среде на основе обобщённых соотношений Стефана−Максвелла и соответственного выражения для потока тепла было проведено без учёта анизотропии коэффициентов переноса, возникающей при наличии внешнего магнитного поля. В представленной работе на основе строгого кинетического подхода к моделированию частично ионизованных газов, разработанного в монографии (Ферцигер, Капер,1976), даётся вывод обобщённых соотношений Стефана−Максвелла для диффузионных потоков как в продольном, перпендикулярном, так и в поперечном направлениях к магнитному полю, а также вывод соотнесённых с диффузионно-тепловыми процессами в плазме с внешним магнитным полем системы алгебраических уравнений для определения различных анизотропных коэффициентов переноса. Важно отметить, что учёт анизотропии коэффициентов переноса, вызванной действием магнитного поля, всё ещё остаётся стержневой проблемой физики многокомпонентной плазмы (Спитцер, 1957; Голанд, 1963; Роуз, Кларк, 1963; Гершман, 1974). Полученная в работе удобная для решения задач МГД− уравнений система анизотропных соотношений переноса позволяет записать эти уравнения в нормальной форме Коши, т.е. в виде разрешённом относительно первых производных по координате от температуры, концентраций и потоков. Как известно, именно для таких случаев были разработаны континуально-кинетические модели и эффективные численные алгоритмы решения задач тепло- и массопереноса в широком диапазоне чисел Кнудсена (см., например, Жданов,Тирский, 2007).

Список литературы

Брагинский С.И. Явления переноса в плазме// В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1/Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 183.

Гершман Б.Н. Динамика ионосферной плазмы. М.: Изд-во «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит. 1974. 257 с.

*Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р***.** Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ. 1961. 930 с.

Голанд В.Е. Диффузия заряженных частиц плазмы в магнитном поле // Усп. физ. Наук. 1963. Т.79. № 3. С. 377-440.

Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1964. 456 с.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1974. 304 с.

Жданов В.М., Тирский Г.А. Применение метода моментов к выводу уравнений переноса газа и плазмы с коэффициентами переноса в высших приближениях// ПММ. 2003.Т. 67. Вып. 3. С. 406-433.

Жданов В.М., Тирский Г.А. Феноменологическое и кинетическое описание диффузии и переноса тепла в многокомпонентных газовых смесях и плазме // Прикладная математика и механика, 2007. Т. 71. С. 864-884

*Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж***.** Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.

Колесников А.Ф., Тирский Г.А. Уравнения гидродинамики для частично ионизованных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях// Молекулярная газодинамика. М.: Наука. 1982. С. 20-44.

*Колесниченко А. В***.** Некоторые вопросы моделирования гетеросферы планеты// Автореферат диссертации на соискание учёной степени канд. физ.-мат. н. (024)/ Науч.-исслед. Ин-т Механики МГУ. Кафедра гидромеханики. М.: [б. и.], 1973. 14 с.

Колесниченко А.В., Тирский Г.А. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред // Числ. метод. мех. сплош. среды. 1976. Т. 7. № 4. С. 106-121.

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла в высших приближениях коэффициентов переноса для частично ионизованных смесей газов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1979. № 66. 23 с.

Колесниченко А.В. Методы неравновесной термодинамики для описания турбулентных многокомпонентных гидротермодинамических систем с химическими реакциями // Препринт ИПМ АН СССР. М.: 1980. № 66. 22 с.

Колесниченко А.В. Уравнения переноса для аэрономии в высших приближениях кинетических коэффициентов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1981. № 10. 23 с.

Колесниченко А.В. О высших приближениях к коэффициентам диффузии смеси нейтральных и заряженных частиц в магнитном поле // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1982. № 142. 24 с.

Колесниченко А.В. К макроскопической теории процессов диффузионного переноса в газах // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1994. № 42. 39 с.

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных газовых смесей // Препринты ИМП им. М.В. Келдыша, 1995. № 22. 48 с.

Колесниченко А.В., Максимов В.М. Термодинамика многофазной химически активной смеси. Законы фильтрации Дарси и диффузии // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1997. № 52. 32 с

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М. Изд-во МГУ.1998. С. 52-76.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: Наука. 1999. 336 с.

Колесниченко А.В., Максимов В.М. Обобщённый закон фильтрации Дарси, как следствие соотношений Стефана−Максвелла для гетерогенной среды// Матем. моделирование. 2001. Т. 13. № 1. С. 3–25.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности// Астрон. Вестник. 2002. Т. 36. № 2. С. 121-139.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем// В сб. «Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова». М.: Физматлит, 2003. С. 123-162.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 632 с.

Колесниченко А.В. Конструирование эволюционных моделей замыкания второго порядка для турбулентных потоков на основе расширенной необратимой термодинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. №71. 32 с. (а)

Колесниченко А.В. Термодинамический вывод новой формы соотношений Стефана-Максвелла и алгебраических уравнений для коэффициентов переноса, соотнесённых с диффузионно-тепловыми процессами в многокомпонентной сплошной среде // Препринты ИМП им. М.В. Келдыша, 2014. № 91. 48 с. (b)

Колесниченко А.В. Континуальные модели природных и космических сред: Проблемы термодинамического конструирования. М.: ЛЕНАНД, 2017. 400 с. (a)

Колесниченко А.В. Некоторые проблемы конструирования космических сплошных сред. Моделирование аккреционных протопланетных дисков. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. 372 с. (b)

Маров М.Я., Колесниченко А.В. Введение в планетную аэрономию. М.: Наука. 1987. 456 с.

Ратклифф Д.Ж. Введение в физику ионосферы и магнитосферы. М.: Изд-во «Мир». 1975. 296 с.

Роуз Д., Кларк М. Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. М.: Госатомиздат. 1963. 490 с.

Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т 2. М.: Наука. 1984. 568 с.

Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: ИЛ. 1957. 212 с.

Тирский Г.А. Уравнения движения частично ионизованных многокомпонентных смесей газов в нормальной форме Коши с точными коэффициентами переноса// Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1974. № 32. С. 6-22.

Уиттен Р., Попов И. Основы аэрономии. Ленинград: Гидрометеоиздат. 1977. 407 с.

Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир. 1976. 554 с.

Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука. 1987. 491 с

Чепмен С, Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. - М.: ИЛ, 1960, 510 с.

Curtiss C. F. Symmetric gaseous diffusion coefficients// J. Chem. Phys., 1968. V.49. P.2917-2919.

Devoto R.S. Transport properties of ionized monatomic gases // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 6. P. 1230-1240

Devoto R.S. Transport coefficients of partially ionized argon // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 2. P. 354-364.

*Devoto R.S.*Transport coefficients of partially ionized helium// J. Plasma Phys.1968. V. 2, № 1, P. 17-32.

Dougherty J.P. On the influence of horizontal motion of the neutral air on the diffusion equation of the F-region // J. Atmospheric Terrest. Phys. 1961. V. 20. № 2. P. 167-176.

Ferraro,V.C.A. Diffusion of ions in the ionosphere//Terr. Mag. Atm. Elect. 1945. V. 50. № 3. P. 215.

Ferraro,V.C.A. Some remarks on ambipolar diffusion in the ionosphere // J. Atm. Terr. Phys.1964. V.26. № 9. P. 913-917.

Johnson M.H. Diffusion as hydrodynamic motion// Phys. Rev. 1951. V.84. № 3. P. 566-568.

Kolesnichenko A.V. Derivation by methods of thermodynamics irreversible processes of generalized Stefan–Maxwell relations for multicomponent diffusion flows in turbulent continuous medium // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 2. 40 с.

Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases (Astrophysics and space science library, V.269): Kluwer Academic Publishers. Dordrecht- Boston- London. 2001. 375 p.

Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V. Turbulence and selforganizing: Problems modelling of space and environments. Springer. Berlin. 2013. 657p. 375 p.

Maxwell J.C. On the Dynamical Theory of Gases// Philosophical magazine and Journal of Science/ 1868. Ser.4. № 35. P. 185-217.

Muckenfuss C., Curtiss C.F. Thermal Conductivity of Multicomponent Gas Mixtures// J. Chem. Phys . 1958. V. 29. № 10. P. 1273-1289.

Muckenfuss C. Stefan-Maxwell relations for multicomponent diffusion and the Chapman−Enskog solution of the Boltzmann equations// J. Chem. Phys . 1973. V. 59. № 4. P. 1747-1752.

Rishbeth H. A time-varying model of the ionospheric F2-layer //J. Atmos. Ten. Phys. 1964. №6. V. 26. P. 657-685.

Schunk R.W., Walker J.C.G. Ion velocity distributions in the auroral ionosphere // Planet. Space Sci. 1972. V. 20. № 12. P. 2175-2191.

Schunk R.W., Walker J.C.G. Theoretical ion densities in the lower ionosphere // Planet. Space Sci. 1973. V. 21. № 11. P. 1875-1896.

Stefan J. Uber das Gleichgewicht und Bewegung, insbesonderc die Diffusion von Gasgemengeu// Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien. 1871. Bd. 63. S. 63-124.

Stubbe P. Simultaneous solution of the time dependent coupled continuity equations, heat conduction equations, and equations of motion for a system consisting of a neutral gas, an electron gas, and a four component ion gas// J. Atmospheric Terrest. Phys. 1970. V. 32. P. 865-903.

Truesdell C. Rational Thermodynamics, McGrow-Hill, New York, 1969; 2nd enlarget edition, Springer. New York. 1984.

Оглавление