



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахолдин И.Б.

Исследование моделей,
описывающих
распространение волн в
трубе с упругими стенками
при наличии заполнения ее
жидкостью и газом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахолдин И.Б. Исследование моделей, описывающих распространение волн в трубе с упругими стенками при наличии заполнения ее жидкостью и газом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 51. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-51](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-51)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-51>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

И.Б. Бахолдин

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ,
ОПИСЫВАЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
В ТРУБЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ
ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПОЛНЕНИЯ ЕЕ ЖИДКОСТЬЮ И ГАЗОМ

Москва–2017

УДК 534.1+539.3+532.59+517.9+519.6

Бахолдин И.Б. Исследование моделей, описывающих распространение волн в трубе с упругими стенками при наличии заполнения ее жидкостью и газом

Работа посвящена исследованию моделей для описания распространения волн в трубах с упругими стенками и анализу численных методов, разработке методов их расчета и анализу решений, содержащих обратимые структуры разрывов, для модели трубы с упругими стенками в случае заполнения трубы жидкостью и газом. Для стенок трубы используются модель мембраны и модель пластины. Дана численная методика решения уравнений в случае заполнения трубы жидкостью и газом. Решена задача о распаде произвольного разрыва. Полученные результаты соответствуют ранее разработанной теории обратимых разрывов. Проанализирована возможность опрокидывания волн. Разработана методика коррекции численных схем посредством включения в уравнения производных высокого порядка. Выведены гиперболические упрощенные уравнения и уравнения волн малой амплитуды, аналогичные уравнениям Буссинеска.

Ключевые слова: труба, упругость, жидкость, газ, дисперсия, нелинейность, структура разрыва, численный метод, задача о распаде разрыва.

Bakholdin I.B. Investigation of models that describe wave propagation in fluid-filled and gas-filled tubes with elastic walls

The paper is devoted to development of models for description of waves in tubes with elastic walls in the case when a tube is filled by liquid or gas. It is also devoted to development of numerical methods for these models. Membrane model and plate model are used for tube. Numerical methods for solving equations for cases of fluid-filled tube and gas-filled tube are given. Riemann problem is solved. Results obtained for fluid-filled tube and gas-filled tube correspond to theory of reversible shocks. Ability of overlapping of waves is analyzed. Method of correction of numerical schemes by the aid of inclusion of additional terms with higher-order derivatives is developed. Hyperbolic simplified equations and Boussinesq-type equations are derived.

Keywords: tube, elasticity, fluid, gas, dispersion, nonlinearity, shock structure, numerical method, Riemann problem.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 150104357а.

1 Введение

В данной работе осуществляются сопоставление моделей трубы с упругими стенками и анализ численных методов с учетом результатов ранее проведенных исследований для случая трубы с контролируемым давлением [1], с заполнением жидкостью [2] и с учетом новых исследований для случая трубы, заполненной газом.

Волны в трубах с упругими стенками, рассматривались во многих работах в связи с актуальностью таких исследований для технических приложений и изучения биологических объектов, см. например обзор [3], где, в частности, использованы модельные уравнения с дисперсией: уравнения Кортевега–де Вриза и нелинейное уравнение Шредингера. В настоящей работе изучены уравнения, полученные на основе полной модели мембраны и нелинейной гиперупругой модели с конечными деформациями при использовании начальной лагранжевой продольной координаты [4]. Модели гиперупругих материалов применяются в случае, когда возможно значительное растяжение или сжатие образца без его разрушения. В этом случае используется нелинейный упругий потенциал, определяющий зависимость напряжения от растяжений, подобранный на основе экспериментальных данных. Обычные, широко используемые модели линейной или слабонелинейной упругости также могут быть описаны таким способом, потенциал в этом случае имеет полиномиальный вид. Эти уравнения ранее были исследованы аналитически в случае контролируемого давления [5] и в случае, когда труба заполнена жидкостью [6–8]; основной целью этих работ было исследование уединенных волн.

Ранее была разработана теория обратимых разрывов [9–13] для моделей со сложной дисперсией (под дисперсией здесь понимается дисперсия в обратимых системах), ее основные элементы — прогноз возможного типа разрыва по дисперсионному соотношению и классификация структур разрывов. Согласно этой теории, решения должны содержать однородные участки, центрированные простые волны и расширяющиеся со временем волновые зоны (расширяющиеся структуры разрывов), описываемые усредненными уравнениями, а также локальные структуры разрывов типа классических и обобщенных кинков и уединенных волн. Под обратимыми структурами разрывов понимаются переходы между однородными, периодическими, квазипериодическими состояниями. Исследовались и слабодиссипативные дисперсионные модели, в этом случае также наблюдаются обратимые структуры, но волновые зоны не расширяются со временем, но тоже описываются усредненными уравнениями.

Аналитически и методами численного анализа были детально исследо-

ваны уединенные волны и обратимые структуры разрывов в случае трубы с контролируемым давлением [1]; рассматривались решения задачи о распаде произвольного разрыва и сделан вывод о том, что найденные решения соответствуют теории обратимых разрывов. Аналогичные исследования для трубы с жидкостью описаны в работе [2].

Структура работы. Предлагается обобщение известных уравнений: учитывается вязкость и сжимаемость материала трубы, сжимаемость наполнителя, учитывается жесткость стенок трубы на изгиб. Делается это для определения границ применимости полученных результатов и методов расчета. Затем анализируются решения задачи о распаде произвольного разрыва в случае трубы, заполненной жидкостью и газом. В решениях наблюдаются основные структуры обратимых разрывов, выявленные ранее для других моделей. Затем обсуждается возможность опрокидывания упругих волн, делается вывод о том, что в данной модели в отличие от других моделей дисперсия порождается членами с производными низшего порядка и потому, несмотря на наличие структур разрывов, при некоторых начальных данных возможно опрокидывание. Затем излагаются численные методы, применявшиеся для решения уравнений, описывающих течения в трубах. Результаты теории обратимых и слабодиссипативных разрывов использовались при подборе численной схемы путем анализа полученных решений задачи о распаде произвольного разрыва. Применялась методика коррекции схем путем добавления членов с производными высокого порядка, позволяющая добиваться сходимости без снижения порядка аппроксимации. Далее для случаев заполнения жидкостью и газом выводятся упрощенные уравнения гиперболического типа и уравнения длинных волн малой амплитуды, аналогичные обычным и обобщенным уравнениям Буссинеска. Для уравнений Буссинеска ранее уже исследовались структуры разрывов, что позволяет сравнивать результаты.

2 Основные уравнения, предлагаемые обобщения, анализ дисперсионных ветвей

Уравнения для стенок трубы. Уравнения движения волн в трубе с несжимаемыми упругими осесимметричными стенками и фиксированным внутренним и внешним давлением имеют вид [5]

$$\left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - P^* r r' = \rho R \ddot{z}, \quad (2.1)$$

$$\left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + P^* r z' = \rho R \ddot{r}; \quad (2.2)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{r'^2 + z'^2}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H}, \quad P^* = \frac{P}{H}, \quad \sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p, \quad i = 1, 2, 3.$$

Штрихом обозначено дифференцирование по переменной Z , являющейся начальной лагранжевой пространственной координатой вдоль трубы, точкой обозначено дифференцирование по времени t , H и h — толщина стенки трубы в ненапряженном и напряженном состоянии, $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — упругий потенциал, p — давление, связанное с несжимаемостью материала трубы [14], аналогичное давлению в несжимаемой жидкости (в теории упругости несжимаемых материалов эту величину называют множителем Лагранжа [15, 16]), параметр P — разность между внутренним и внешним давлением, параметр ρ — плотность материала трубы на единицу площади. Для описания упругих свойств стенки трубы используется мембранная модель, неизвестные z и r задают поверхность трубы в цилиндрической системе координат, ось z этой системы совпадает с осью трубы. Здесь λ_i — главные удлинения, а σ_i — главные напряжения, компоненты тензора напряжений. Индексы 1, 2, 3 соответствуют широтному (круговому), меридианальному (касательному в плоскости, проходящей через ось вращения) и ортогональному направлению деформируемой поверхности. Предполагается, что при отсутствии нагрузки

$$z = Z, \quad r = R, \quad h = H.$$

Модель с контролируемым давлением пригодна в случае заполнения трубы газом пренебрежимо малой плотности. Давление поддерживается за счет перетекания в трубу среды из резервуара большого объема или работы компрессора.

Вязкоупругая модель. В случае применения для описания материала трубы вязкоупругой модели типа Кельвина–Фойтха [17] логично добавить вязкие напряжения, например, так:

$$\sigma_i \rightarrow \sigma_i + \sigma_{vi}, \quad \sigma_{vi} = \nu_{vi} \dot{\lambda}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Коэффициенты вязкости могут зависеть от деформации.

Переход к двумерному потенциалу. Материал трубы считается несжимаемым, поэтому согласно работе [18]

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \sigma_i = \lambda_i \hat{W}_i, \quad \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2) = W(\lambda_1, \lambda_2, 1/(\lambda_1 \lambda_2)), \quad i = 1, 2.$$

Здесь и далее используется обозначение $\hat{W}_i = \partial \hat{W} / \partial \lambda_i$. Приведенная выше формула для напряжений σ_1 и σ_2 выводится из предположения о равенстве нулю поперечных напряжений σ_3 (мембранная модель), точнее предполагается, что величины p и $\lambda_3 W_3$ велики по сравнению с разностью давлений P . В случае применения описанной выше вязкоупругой модели аналогичным образом получаем

$$\sigma_{vi} = \nu_{vi} \dot{\lambda}_i - \nu_{v3} (1/(\dot{\lambda}_1 \lambda_2)), \quad i = 1, 2.$$

В случае учета сжимаемости материала трубы, когда величина p определяется упругими деформациями, также можно вывести формулы для σ_1 и σ_2 , не содержащие λ_3 , воспользовавшись предположением $\sigma_3 = 0$ и найдя λ_3 через λ_1, λ_2 . Например, для описанного ниже материала Генки,

$$\sigma_i = \lambda[1 - \lambda/(\lambda + 2\mu)] \ln(\lambda_1\lambda_2) + 2\mu \ln \lambda_i, \quad i = 1, 2.$$

Величины λ и μ здесь аналогичны параметрам Ламе. В случае большого внешнего давления P_e можно для сжимаемых материалов использовать условие $\sigma_3 = -P_e$, если $|P - P_e|/P_e \ll 1$. Ниже уравнения, как правило, записаны с использованием величин σ_i без раскрытия конкретного их вида, что подразумевает возможность использования обобщений модели.

В случае контролируемого давления дисперсионное соотношение содержит четыре дисперсионные ветви, которые можно условно сопоставить с продольными и поперечными упругими волнами [1]. Ветвь продольных упругих волн пересекает начало координат, а ветвь поперечных волн — нет.

Уравнения для жидкости. В случае, когда труба заполнена инерционной несжимаемой жидкостью, давление в трубе будет не постоянным, следует добавить уравнения движения жидкости [6]

$$\dot{r}z' - r'\dot{z} + vr' + \frac{1}{2}rv' = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho_f(\dot{v}z' - v'\dot{z} + vv') + P' = 0. \quad (2.4)$$

Здесь v — скорость жидкости, ρ_f — ее плотность. Дисперсионное соотношение содержит четыре дисперсионные ветви, пересекающие начало координат, которые можно сопоставить с продольными упругими и гидродинамическими волнами.

Уравнения для газа. Анализ методики вывода уравнений для трубы с жидкостью [4] показывает, что в случае заполнения трубы инерционным сжимаемым газом нужно модифицировать уравнение сохранения массы (2.3):

$$(\dot{\rho}_f z' - \rho_f' \dot{z})r^2 + 2\rho_f r(\dot{r}z' - r'\dot{z}) + (\rho_f v r^2)' = 0. \quad (2.5)$$

В изотермическом и адиабатическом случае имеется баротропия, добавляется уравнение состояния вида

$$P = P(\rho_f), \quad P^* = (P - P_e)/H,$$

P_e — внешнее давление. В этой модели (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) шесть дисперсионных ветвей: в основном продольных упругих волн, в основном поперечных упругих волн и газодинамические ветви. Ветви, связанные с распространением в основном поперечных упругих волн, не пересекают начало координат. Такие ветви есть и в случае модели с контролируемым давлением, поэтому такую модель следует рассматривать как упрощенную модель

трубы, заполненной газом. Заметим при этом, что дисперсионные ветви продолжных упругих волн в модели с контролируемым давлением все же можно получить предельным переходом $\rho_f \rightarrow 0$ из модели трубы, заполненной жидкостью. В случае исследования полной модели трубы, заполненной газом, потребуется еще включение уравнения энергии при учете термодинамики и уравнения состояния с зависимостью давления от температуры.

Учет трения и вязкости. При необходимости можно учитывать трение о стенки, включив в правую часть уравнения (2.1) член rF/H , где $F = F(v)$ — сила трения на единицу длины, обычно линейная функция, а в левую часть уравнения (2.4) — член $-2F/r$, величина r' предполагается малой. Вязкость заполнителя трубы можно учесть, включив в левую часть уравнения (2.4) член $c_v 2v''$.

Пример потенциала. Потенциал в численных расчетах, проведенных далее, соответствует модели материала Гента [19], считающейся пригодной для резиноподобных материалов [5]:

$$W = -\tilde{\mu} J_m \ln \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m} \right).$$

Возможное использование иного потенциала или учет сжимаемости материала не меняет методику расчета. Отметим, что для существования структуры разрыва типа классического кинка (структура класса -1 [13]), см. разд. 3, существенно свойство нелинейного усиления сопротивления при растяжении, характерное для резин, металлы обладают противоположными свойствами.

О начальных данных. В качестве начальных данных для расчетов удобно брать распределения $r(Z)$ и $z'(Z)$. Тогда

$$z(Z) = \int_0^Z z'(\zeta) d\zeta.$$

Данные для решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) берутся такими, что на бесконечности выполняется условие равновесия:

$$P^* = \hat{W}_2(r_{\pm\infty}, z'_{\pm\infty}) / (r_{\pm\infty} z'_{\pm\infty}).$$

При решении этой задачи могут выявляться однородные области, соответствующие некоторым другим состояниям равновесия.

Учет сопротивления на изгиб. Целесообразность учета сопротивления стенок трубы на изгиб обусловлена тем, что помимо возможности уточнения модели, было показано [1], что включение жесткости на изгиб в некоторых случаях необходимо для корректности уравнений, см. разд. 3. Кроме того, использование упрощенного варианта включения жесткости оказалось удобным для стабилизации численных схем, см разд. 4.

Учтем сопротивление на изгиб по аналогии с известным уравнением колебаний пластины

$$-M_{xx} + (\sigma\eta_x)_x + P = \rho\eta_{tt}, \quad M = D\eta_{xx}.$$

Здесь η — смещение по вертикали, x — горизонтальная координата, D — жесткость на изгиб, σ — натяжение, P — давление на пластину, M — момент. Учтем влияние сопротивления на изгиб, формально включив в уравнения (2.1)-(2.2), но не в уравнение (2.4), дополнительное давление:

$$P \rightarrow P + P_b,$$

$$P_b = -\cos\alpha \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} r \right) - \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} z \right) \right], \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\cos\alpha}{z'} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r'}{z'}.$$

Здесь $\alpha(Z)$ — угол наклона по отношению к оси Z касательной к кривой, образованной пересечением поверхности трубы с плоскостью, проходящей через ее ось, x — координата в локальной системе координат, ось которой направлена по касательной к рассматриваемой кривой в некоторой точке $(r_0(Z), z_0(Z))$, рис. 1; в такой системе координат величина смещения

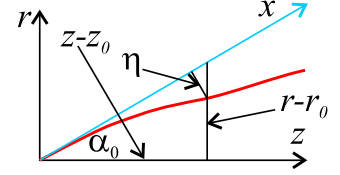


Рис. 1

$$\eta = [(r - r_0) - (z - z_0)\operatorname{tg}\alpha_0]\cos\alpha_0.$$

Если геометрическая нелинейность не учитывается, то

$$P_b = P_{bs} = -Dr''''.$$

Жесткость на изгиб вычисляется с использованием упругого потенциала W , линеаризованного относительно значений

$$\lambda_{10}(Z) = (r'^2 + z'^2)^{1/2}, \quad \lambda_{20}(Z) = r/H, \quad \lambda_{30}(Z) = (\lambda_{10}\lambda_{20})^{-1}.$$

Здесь предполагается, что сопротивление на изгиб невелико, поскольку труба тонкостенная. Уравнения бегущих волн, описывающие решения, стационарные в некоторой системе координат наблюдателя, при такой модификации уравнений (2.1)-(2.2) имеют восьмой порядок. В наиболее упрощенном варианте ($\alpha \approx 0$, $z' \approx 1$, $h \approx H$, $r \approx R$) имеется изотропия линеаризованного потенциала, можно применять стандартную формулу $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, используемую для обычного линейно упругого материала, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Сделаем дополнительное предположение о слабой сжимаемости материала (велик первый параметр Ламе λ)

$$E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) \approx 3\mu, \quad \nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)] \approx 1/2, \quad D = \mu h^3/3.$$

Поэтому в случае упрощенного учета жесткости на изгиб в левую часть уравнения (2.2) только добавляется член $-br''''$, где

$$b = DR/H = \mu H^2 R/3.$$

При таком упрощенном учете жесткости на изгиб уравнения бегущих волн имеют шестой порядок в случае трубы с контролируемым давлением и восьмой порядок в случае трубы, заполненной жидкостью.

Отметим, что упрощенный учет жесткости без учета геометрической нелинейности используется для вывода обобщенных уравнений Кортвега–де Вриза и Буссинеска, описывающих распространение длинных волн малой амплитуды в слое жидкости при наличии упругого покрытия [20, 11, 9].

В случае линейно упругого материала приведенные выше коэффициенты жесткости на изгиб можно использовать и при конечных деформациях стенок трубы. Найдем коэффициент жесткости в случае нелинейно упругого материала. Предположим, что материал сжимаем и напряжения описываются соотношением

$$\sigma_i = \lambda f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + \lambda_i W_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

Здесь f — возрастающая функция. При $\lambda \rightarrow \infty$ это соотношение можно использовать для описания несжимаемого материала. Формулой, приводимой к такому виду, описывается, например, материал Генки — модель, применяемая для эластомеров [22, 16]

$$\sigma_i = \lambda \ln(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + 2\mu \ln(\lambda_i).$$

Помимо материала Генки, были рассмотрены [16] и некоторые другие модели нелинейно упругих материалов, в том числе и слабо сжимаемых. Линеаризуя зависимости напряжений от главных удлинений, получаем

$$\Delta\sigma_{11} = \sigma_{1,10}\varepsilon_{11} + \sigma_{1,30}\varepsilon_{33}, \quad \Delta\sigma_{33} = \sigma_{3,10}\varepsilon_{11} + \sigma_{3,30}\varepsilon_{33},$$

где ε_{ii} — компоненты тензора малой деформации относительно состояния, обозначенного индексом 0, $\varepsilon_{22} = 0$, $\Delta\sigma_{ii}$ — компоненты линеаризованного тензора напряжений, $\sigma_{i,j} = \partial\sigma_i/\partial\lambda_j$. В результате анализа и обобщения стандартных методов расчета жесткости пластины на изгиб [21] можно вывести формулу

$$D = (\sigma_{1,10} - \sigma_{1,30}\sigma_{3,10}/\sigma_{3,30})h^3/12.$$

Используя соотношение (2.6), при $\lambda \rightarrow \infty$ получаем

$$D = \{W_1 + \lambda_1(W_{11} - W_{13}) + [W_3 + \lambda_3(W_{33} - W_{31})]\lambda_3/\lambda_1\}h^3/12.$$

В ранее разработанной теории обратимых структур разрывов была дана классификация возможных эволюционных типов структур. Исследовались в

основном модели, приводящие к системам бегущих волн четвертого порядка, но математические формулировки были абстрактные, они были даны для систем произвольного порядка. Проведенные здесь исследования показывают, что системы более высокого порядка реально появляются при исследовании уравнений, имеющих практическое значение, что подтверждает целесообразность такого абстрактного подхода.

При учете жесткости на изгиб появляется дисперсия, обусловленная производными высокого порядка.

3 Решение задачи о распаде произвольного разрыва для случаев заполнения трубы жидкостью и газом

Методика расчета и характер ожидаемых решений. Исследование решений задачи о распаде разрыва с использованием уравнений с контролируемым давлением было произведено ранее [1]. Было выведено [6] дисперсионное соотношение для уравнений (2.1)—(2.4), описывающих волны в трубе, заполненной жидкостью. Основное отличие от случая уравнений с контролируемым давлением состоит в том, что все четыре дисперсионные ветви пересекаются в точке $\omega = 0$, $k = 0$, тогда как в случае контролируемого давления только две из них (это ветви в основном продольных упругих волн) пересекают начало координат. С каждым таким пересечением при решении задачи о распаде разрыва связана некоторая структура разрыва или центрированная простая волна, поэтому при учете массы жидкости в трубе решения задачи о распаде разрыва оказываются более сложными из-за наличия гидродинамических ветвей. Система уравнений в случае, когда труба заполнена жидкостью, содержит неизвестную величину P^* . Нет уравнения, непосредственно определяющего производную по времени от этой величины. Это не позволяет использовать ранее разработанные методы решения уравнений эволюционного типа, см. разд. 4.

Один из возможных способов расчета в случае, когда труба заполнена жидкостью, — заменить жидкость слабо сжимаемым газом (см. разд. 2), вместо уравнений (2.1)—(2.4) использовать уравнения (2.1)—(2.3), (2.5), применять стандартные явные численные схемы. В связи с тем, что, как и в случае контролируемого давления, такая модель предполагает наличие чисто радиальных колебаний газа и стенок трубы, помимо газодинамических ветвей, появляются дополнительные дисперсионные ветви в основном поперечных упругих волн, не пересекающие начало координат, поэтому соответствующих им структур разрывов нет.

Другой способ — исключить давление и получить уравнения для v , r , z и $q = \dot{z}$. Для вывода этих уравнений делается подстановка \dot{r} из уравнения

(2.3) в уравнение (2.2), в полученное уравнение подставляется \ddot{z} из первого из уравнения (2.1), затем из полученного уравнения выражается P и делается подстановка в уравнение (2.4) и уравнение(2.1). Формула для давления имеет вид:

$$P^* + P_b^* = \frac{P + P_b}{H} = \frac{-1}{\xi} \left[\frac{r' \rho R}{r z'^2} \dot{v} + \frac{\rho R}{2 z'^2} \dot{v}' + \mathcal{P} \right], \quad \xi = 1 + \frac{r'^2}{z'^2},$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{r z'} \left[\left(R \sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{r'}{z'} \left(R \sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} \right] - \frac{\rho R}{r z'^2} (q - v) \left(\frac{z' q - v r' - \frac{1}{2} r v'}{z'} \right)' - \frac{\rho R}{r z'^3} \left(r' q - v r' - \frac{1}{2} r v' \right) \left(\frac{1}{2} v' - q' \right).$$

Уравнения для расчета течений в трубе, заполненной жидкостью, теперь такие:

$$\begin{aligned} & \left[\rho_f^* z' - \left(\frac{r' \rho R^2}{r z'^2 \xi} \right)' \right] \dot{v} - \left[\frac{r' \rho R^2}{r z'^2 \xi} + \left(\frac{\rho R^2}{2 z'^2 \xi} \right)' \right] \dot{v}' - \frac{\rho R^2}{2 z'^2 \xi} \dot{v}'' = \\ & = \rho_f^* (v' q - v v') + \left[-P_b^* + \frac{\mathcal{P}}{\xi} \right]' + c_{v2} v'' - \{c_{v4} v''''\}, \quad \rho_f^* = \frac{\rho_f}{H}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{r} z' - r' q + v r' + \frac{1}{2} r v' = 0 + \{c_{r6} r'''' z'\}, \quad (3.2)$$

$$\dot{z} = q - \{c_{z4} z''''\}, \quad \rho R \dot{q} = \left(R \sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - (P^* + P_b^*) r r'. \quad (3.3)$$

В фигурных скобках здесь добавлены некоторые члены, иногда полезные для стабилизации численных схем (см разд. 4). В случае вязкоупругой модели (см. разд. 2) для применения описанного ниже численного метода потребуется еще исключение пространственно-временных производных \dot{r}' и \dot{r}'' в формулах для σ_{vi} с помощью уравнения (2.3); в упрощенном варианте включается только член $c_{v2} v''$ (см. разд. 6).

Все рассматриваемые уравнения в бездиссипативном случае относятся к классу уравнений обратного типа, для которых была разработана теория обратимых разрывов [9–13].

Примеры расчетов в случае заполнения жидкостью. Были получены численные решения задачи о распаде разрыва с использованием уравнений (3.1)–(3.3). В качестве начальных данных была взята сглаженная ступенька для r и z' , скачка давления и скорости не было. Выявлены типичные ранее встречавшиеся структуры разрывов. Как и в случае контролируемого давления [1], при некоторых значениях параметров были выявлены флаттер, а также неустойчивость структур солитонного типа.

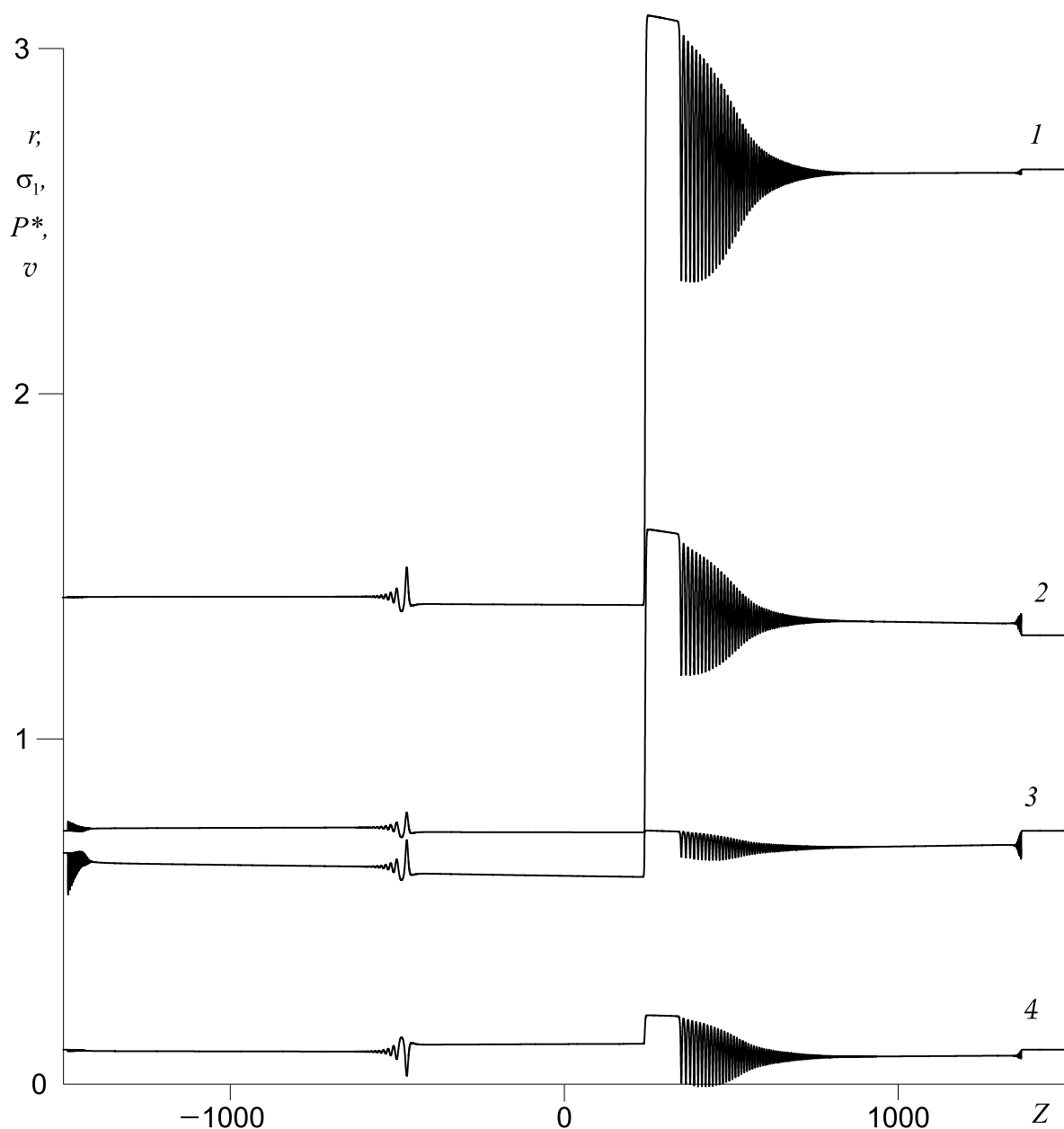


Рис. 2: Решение задачи о распаде разрыва: 1 — r , 2 — σ_1 , 3 — P^* , 4 — v

Были осуществлены расчеты с учетом жесткости по упрощенному варианту, $P_b^* = -br''''$. Основная цель — качественный анализ влияния коэффициента b на тип решения и сопоставление с эффектами, наблюдаемыми в решениях задачи о распаде произвольного разрыва в случае использования модельных уравнений типа Кортевега–де Вриза.

На рис. 2 приведен пример графиков при

$$v_0 = 0.1, R = 1, \rho = 1, \rho_f^* = 1, \tilde{\mu} = 2, J_m = 30, z'_{-\infty} = 1.1, t = 1000, b = 0.001.$$

Видны кинк и структуры солитонного типа. Здесь заметны более медленные гидродинамические волны (деформации стенок трубы для этих волн преимущественно поперечные) и более быстрые, в основном продольные упру-

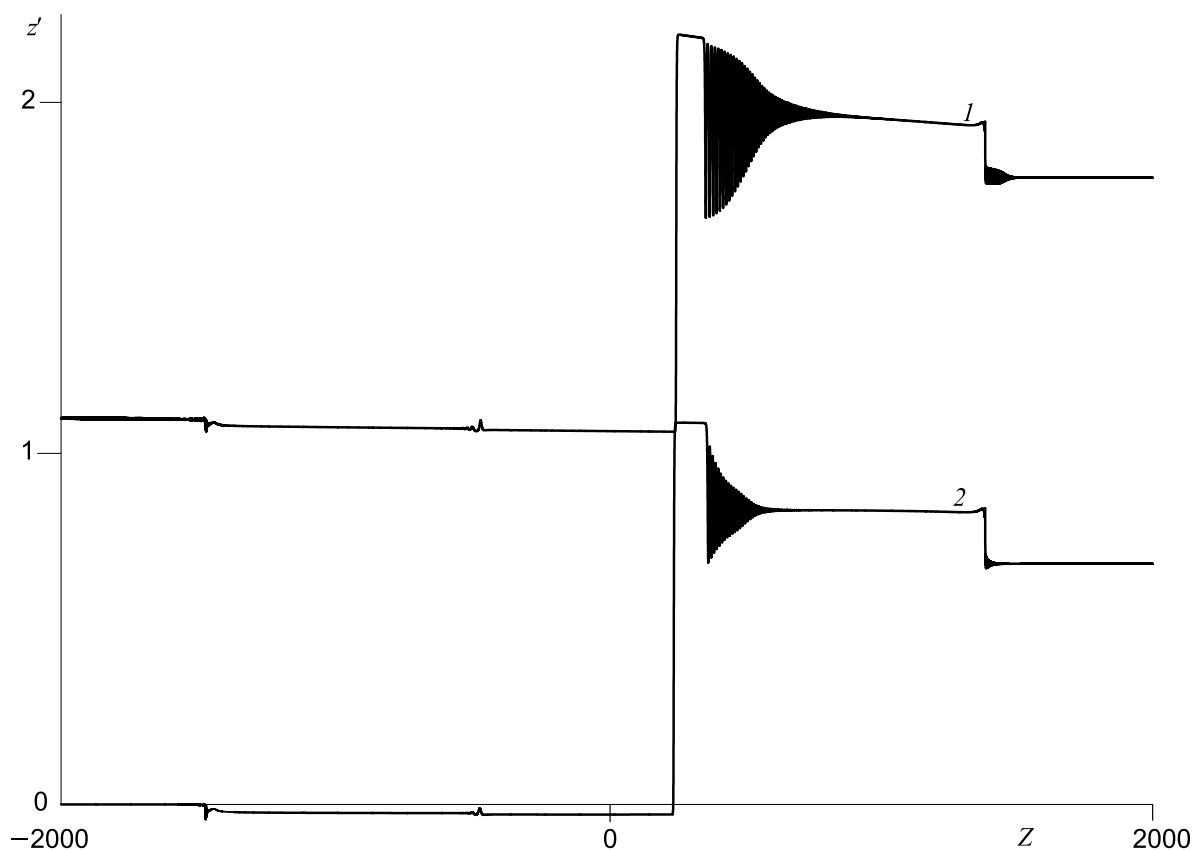


Рис. 3: Решение задачи о распаде разрыва при наличии жесткости на изгиб: $1 - c_{v2} = 0$, $2 - c_{v2} = 0.02$

гие, волны.

В случае рис. 3 для кривой 1 данные те же, что и для рис. 2, но $b = 0.1$. Солитонная структура для в основном продольных волн, движущихся вправо, заменяется разрывом с излучением, а для движущихся влево — нестационарной структурой хаотического типа с волновыми зонами по обе стороны от разрыва. Характер остальных структур не изменился, хотя незначительно изменилась скорость их распространения. Ранее подобные эффекты наблюдались при переходе от классического уравнения Кортевега–де Вриза к обобщенному уравнению с производной пятого порядка [9, 10], применяемому для длинных волн в слое жидкости при наличии упругой пластины на поверхности. Но здесь они наблюдаются для структур, связанных не с гидродинамическими, а с продольными упругими волнами. Расчеты с полным учетом жесткости на изгиб также проводились, однако в случае тонких стенок для большинства начальных данных результаты мало отличаются от случая, когда такого учета нет. Учет жесткости тонкостенных труб актуален в случае слабого продольного натяжения или при $\sigma_1 < 0$, без такого учета уравнения в последнем случае становятся некорректными [1], см. обсуждение ниже.

Проводились также расчеты при учете слабой вязкости среды, заполняю-

щей трубу (или материала трубы по упрощенному варианту), $c_{v2} > 0$. В этом случае, как и следовало ожидать согласно теории обратимых и слабодиссипативных разрывов, со временем волновые зоны перестают расширяться. Пример такого расчета показан на рис. 3, кривая 2, $c_{v2} = 0.02$ (для удобства просмотра кривая смещена по вертикали, т. е. показан график $z' - z'_{-\infty}$); как и в случае кривой 1, $b = 0.1$.

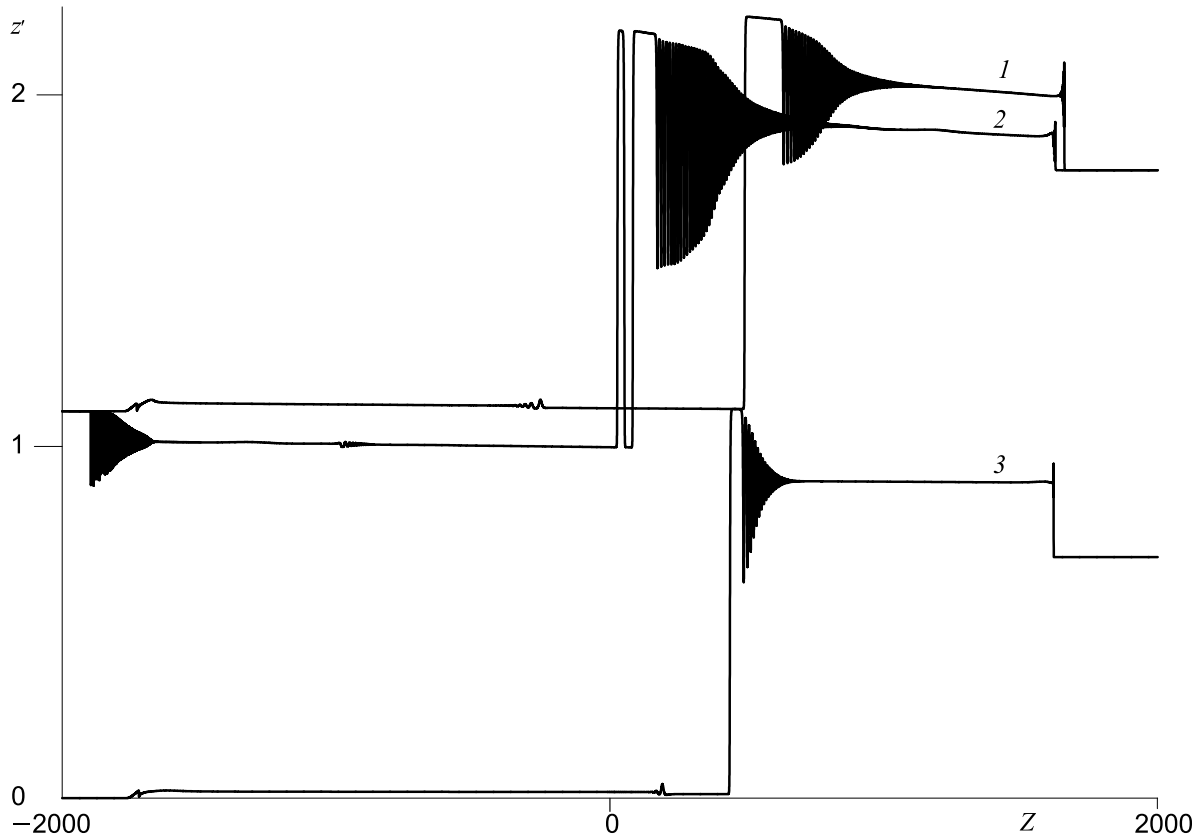


Рис. 4: Решение задачи о распаде разрыва: 1 — $v_0 = 0.4$, $\rho_f = 1$; 2 — $v_0 = -0.25$, $\rho_f = 1$; 3 — $v_0 = 0.4$, $\rho_f = 10$

Сравнение результатов расчета при положительных и отрицательных значениях v_0 ($v_0 = 0.4$ — кривая 1 и $v_0 = -0.25$ — кривая 2, $t = 1200$, $b = 0$) представлено на рис. 4. Отметим некоторые особенности этих решений, обнаруженные в результате анализа их графиков. В первом случае левая в основном продольная переходная структура состоит из простой волны и солитонной структуры типа Жуге, более длительный расчет показывает, что в процессе эволюции здесь возникают две такие солитонные структуры, во втором случае возникают три кинка, см. рис. 4; такие повторяющиеся структуры могут не сохраняться при $t \rightarrow \infty$. Кривая 3 на рис. 4 (смещена по вертикали) иллюстрирует влияние плотности среды, наполняющей трубу, $\rho_f^* = 10$. Как и в случае кривой 1, $v_0 = 0.4$. Значительно уменьшилась скорость в основном поперечных структур. Расчеты показывают, что при увеличении вязкости или повышении плотности заполняющей среды реше-

ние в области неволновых зон быстро становится автомодельным.

При расчетах опрокидывания гидродинамических волн обнаружено не было, что можно предвидеть из анализа уравнения (3.1), в котором имеются высшие производные, порождающие дисперсию.

Примеры расчетов в случае заполнения газом. Был произведен также расчет задачи о распаде произвольного разрыва в случае заполнения трубы газом. Предполагается изотермичность, $P = C\rho$, величина C при заданной температуре постоянна. Графики, полученные в результате расчета, показаны на рис. 5-6, $t = 2500$.

На рис. 5 слева направо: центрированная волна продольных упругих волн, возможно центрированная газодинамическая волна, кинк, солитонная структура газодинамических волн, центрированная волна продольных упругих волн.

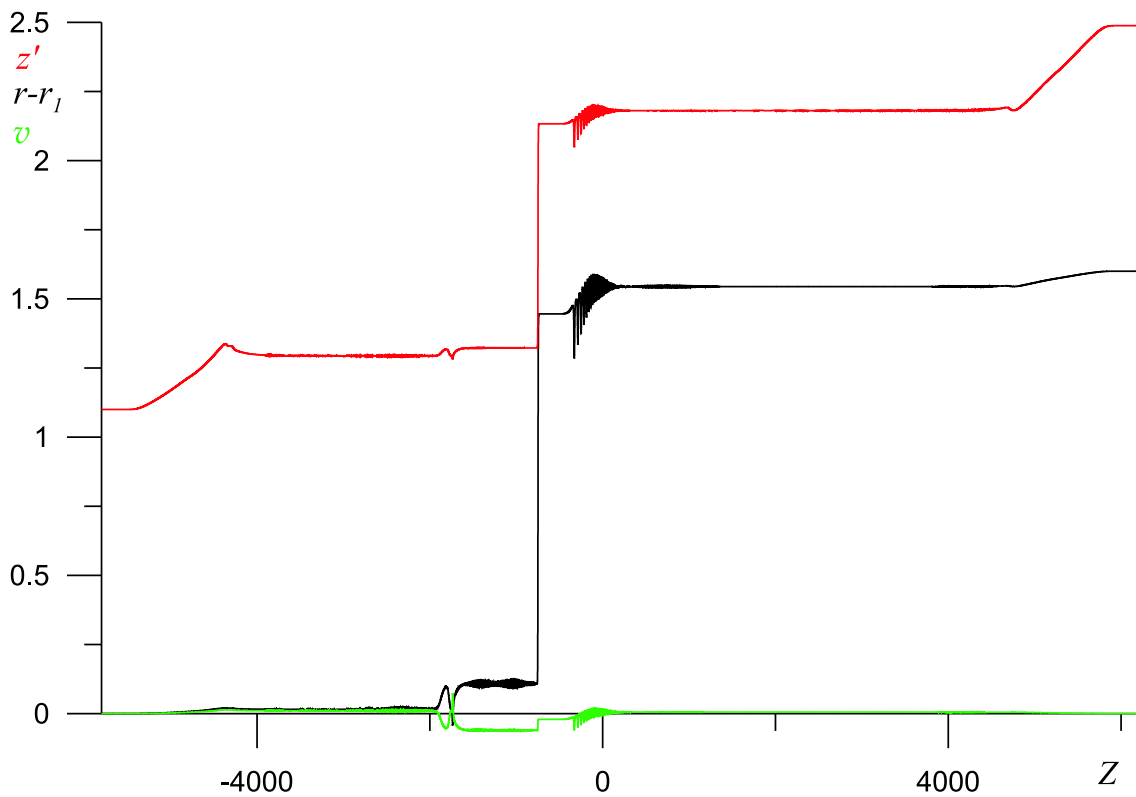


Рис. 5: Труба с газом, решение задачи о распаде разрыва, $v_0 = 0$

На рис. 6 слева направо: разрыв с излучением продольных упругих волн, возможно солитонная структура газодинамических волн (таких структур две, со временем одна из них может исчезнуть), кинк, солитонная структура газодинамических волн, центрированная волна продольных упругих волн, кинк, солитонная структура газодинамических волн, центрированная волна продольных упругих волн (более детальный анализ графика позволяет сделать предположение, что центрированная волна продольных волн справа содержит узкую волновую зону и солитонную структуру Жуге малой амплитуды).

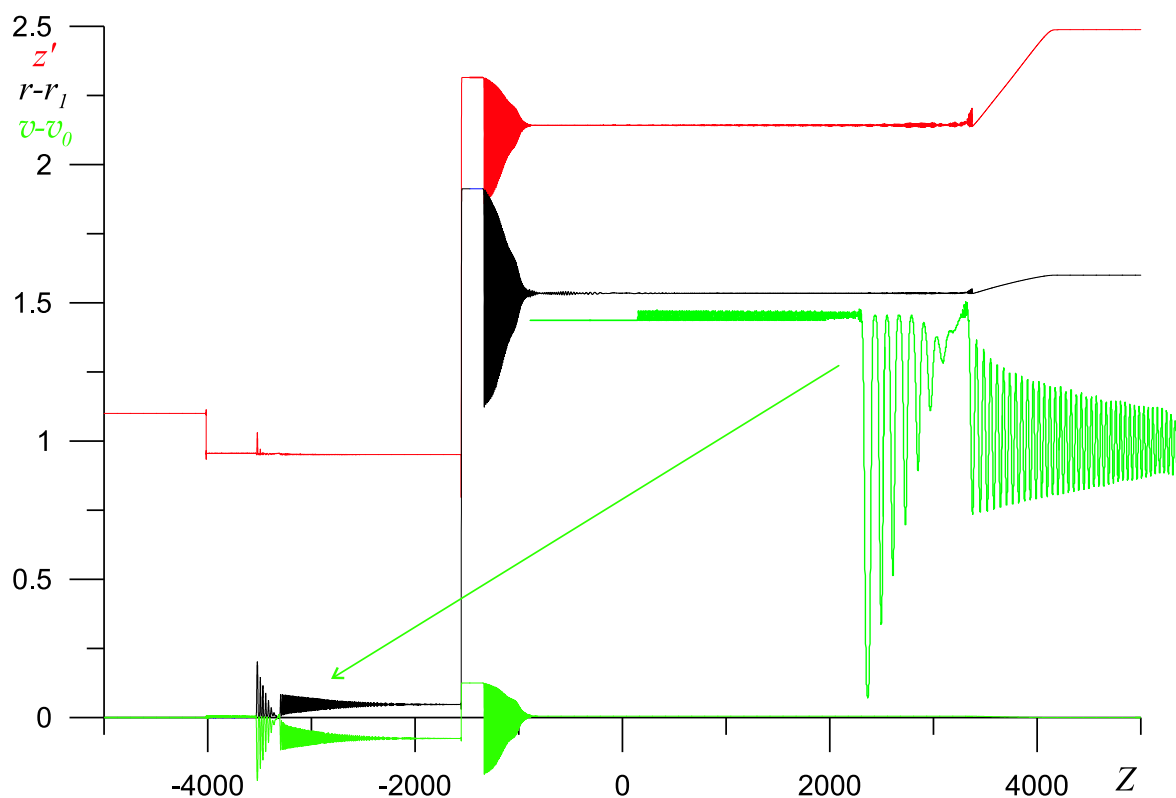


Рис. 6: Труба с газом, решение задачи о распаде разрыва, $v_0 = -1$

При расчетах опрокидывания газодинамических волн обнаружено не было, что можно было предвидеть исходя из методики вывода для них аналогов уравнений Буссинеска, см. разд. 6. Предложенные в разд. 6 подстановки приводят к дисперсионной системе с высшими производными, описывающей эволюцию величин ρ_f и v , и в случае рассмотрения волн конечной амплитуды. В некоторых расчетах наблюдался блоуп, быстрый рост величины r на ограниченном участке, возможно, это означает в реальности разрушение стенок трубы.

Об опрокидывании упругих волн и областях некорректности. В типичном случае нелинейных гиперболических систем уравнений (упрощенных уравнений) возникает опрокидывание волн. При рассмотрении полной системы уравнений с учетом диссипации или дисперсии, вызванной обратимыми членами, такое опрокидывание не происходит, а формируется структура разрыва, стационарная или расширяющаяся со временем. Но это, видимо, справедливо, когда компенсация опрокидывания достигается за счет включения членов с производными высокого порядка. В случае контролируемого давления дисперсия упругих волн вызывается членами с низшими производными.

Исследования показали, что и в этом случае возникают структуры разрывов и не требуется в обязательном порядке добавлять дополнительные диссипативные или дисперсионные члены, но при некоторых начальных данных опрокидывание волны возможно. С математической точки зрения это

можно пояснить так: если в уравнениях (2.1)-(2.2) удалить члены, порождающие дисперсию, и оставить только члены с производными второго порядка, то получится нелинейная система:

$$\left(R\sigma_1 \frac{u'}{\lambda_1^2}\right)' = \rho R\ddot{u}, \quad \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2}\right)' = \rho R\ddot{r}.$$

Эта система применима при больших значениях производных второго порядка или при больших значениях R , и не предполагается устранения нелинейного опрокидывания волн за счет дисперсии. Эта модель при использовании потенциала Гента допускает наличие однородных состояний с разными значениями радиуса при одном и том же значении давления, поэтому продвижение одного участка на другой может привести к опрокидыванию волны.

Можно и изначально задать данные с опрокидыванием. Опрокидывание волны в плоском случае можно наблюдать в физическом эксперименте, сделанном с помощью листа бумаги или резины, не имеющих изломов и обладающих жесткостью на изгиб. Поскольку используется Лагранжева начальная координата, то в области после опрокидывания можно применять исходные уравнения и получать однозначное решение, в котором неизвестные непрерывны, но производная обращается в бесконечность в двух точках. Для расчета такого решения требуется разработка специальных численных методов. Правильно описывать явления такое решение может только в случае контролируемого давления. В случае заполнения трубы газом или жидкостью такое решение формально тоже возможно, но оно противоречит предположению об одномерности течений, сделанному при выводе уравнений. Анализ показывает, что в случае опрокидывания упругих волн труба должна быть не растянута, а сжата, т. е. уравнения становятся некорректными [1].

Выход в область некорректности действительно наблюдается при некоторых начальных данных. При этом случае в расчете возникают хаотические волны с растущей амплитудой и последующая аварийная остановка расчета, наступающая тем быстрее, чем мельче сетка, схемные эффекты обеспечивают некоторую коррекцию системы на грубых сетках. Включение жесткости на изгиб или вязкости по упрощенному варианту (с геометрической линейностью) в случае контролируемого давления трубы, заполненной жидкостью, превращает систему в типичную корректную дисперсионную систему, где дисперсия связана с высшими производными; возможность опрокидывания исчезает. Включение же жесткости с полным учетом геометрической нелинейности тоже корректирует систему, предотвращает изломы стенок трубы (разрывы производных), но не исключает возможность опрокидывания волн, поскольку в точке опрокидывания коэффициенты при высших производных обращаются в нуль.

4 Используемые численные методы

Применялась методика расчета при использовании уравнений со сложной дисперсией (здесь под дисперсией понимается недиссипативная дисперсия) и нелинейностью в недиссипативном или слабодиссипативном случаях [1, 9–12, 23]. Использовались две схемы: центрированная по пространству и времени трехслойная схема типа "крест" и центрированная по пространству двухшаговая схема типа предиктор-корректор, где на первом шаге значения вычисляются для половины временного шага, иначе это можно называть применением метода Рунге–Кутты для аппроксимации временных производных. При наличии пространственно-временных производных, например, в случае преобразованных уравнений в задаче о трубе, заполненной жидкостью, эти производные аппроксимируются с центрированием по времени, что приводит к неявности схемы, поскольку при такой аппроксимации используются неизвестные значения величин не с текущего, а со следующего временного шага. При двухшаговой схеме такая аппроксимация применяется как на шаге предиктор, так и на шаге корректор. Аналогичные пространственно-временные производные ранее встречались в уравнениях электронной магнитной гидродинамике плазмы [23] (магнитная гидродинамика с учетом инерции электронов, порождающей дисперсию). Неявные уравнения разрешаются методом итераций или методом прогонки. При расчетах с диссипацией схема "крест" для достижения устойчивости требует специальных методов аппроксимации диссипативных членов с пространственными производными четного порядка: нецентрированная по времени аппроксимация с использованием значений величин на предыдущем временном шаге или центрированная аппроксимация по шаблону "ромб", как в схеме Дюфорта–Франкеля для уравнения теплопроводности.

Обе схемы условно устойчивы, условие сходимости определяется экспериментально и имеет вид

$$\tau < C\zeta^{k_s}, \quad C = \text{const},$$

ζ и τ — шаги по пространству и времени. При выборе минимально возможного значения k_s можно ориентироваться на максимальный показатель роста модуля частоты $\omega = \omega(k)$, где k — волновое число, для всех дисперсионных ветвей. В случае уравнений без учета диссипации и жесткости этот показатель равен единице, при учете — равен двум.

Для обеих схем проводится экспериментальная проверка сеточной сходимости и сравнение результатов расчетов, полученных этими двумя методами; при малых временных шагах результат практически один и тот же. Расчеты проводятся с двойной точностью, относительная машинная погрешность 10^{-14} . Обе схемы имеют второй порядок аппроксимации по пространству и по времени. Поскольку схемная дисперсия суммируется с дисперсией рассматриваемых уравнений, она не оказывает влияния на качественный

вид решений, и огибающая волновых зон описывается правильно; в случае возникновения волн, не прогнозируемых теорией, их можно устранить уменьшением пространственного шага. Поэтому ниже основное внимание уделяется схемной вязкости. Схема типа "крест" в устойчивых случаях не обладает схемной вязкостью. Используемая схема предиктор-корректор конструктивно сходна со схемами типа Лакса-Вендроффа [24], но не относится к этому типу, поскольку в ней не используется усреднение схемы Лакса, приводящее к появлению дополнительной схемной вязкости, описываемой производной четвертого порядка с коэффициентом, пропорциональным $\tau\zeta^2$. Схемы типа Лакса-Вендроффа, как и трехслойная схема "крест", требуют специальных аппроксимаций для вязких членов.

О методике выявления численной и физической неустойчивости. При численной неустойчивости скорость роста и длина наблюдаемых в расчете волн зависит от величин шагов сетки и от соотношения между пространственными и временными шагами, отсутствует сходимость, требуется подбор условия сходимости или изменение численной схемы. В случае, если в решениях исследуемых уравнений присутствует неустойчивость волн конечной, не бесконечно малой длины (в известных автору случаях физически осмысленная неустойчивость именно такая), сходимость при применении подходящих конечно-разностных схем на ограниченном интервале времени достигается. В случае математической некорректности уравнений, связанной с наличием неустойчивых волн со сколь угодно быстрым ростом возмущений (для известных некорректных уравнений такой рост происходит при стремлении длины волны к нулю), отсутствует сходимость, но сходящуюся схему найти не удастся, требуется изменение уравнений.

Проверка применимости численных схем для различных моделей трубы с упругими стенками. В ранее проведенных расчетах в случае контролируемого давления [1] применялись две эти схемы, и принципиальных отличий при их применении обнаружено не было. При расчете в случае трубы, заполненной жидкостью, обнаружилось, что при применении схемы типа "крест" возникает краевая неустойчивость, она устраняется путем введения диссипативных зон вблизи границы, где в уравнение для v добавляется диссипативный член с производной второго порядка $c_{v2}v''$, аппроксимируемой по шаблону "ромб" (как в схеме Дюфорта-Франкеля для уравнения теплопроводности), а коэффициент при этой производной берется тем большим, чем меньше пространственный шаг. Такая схема применялась для контроля, а для систематических исследований, результаты которых приведены на фигурах в разд. 3, применялась схема предиктор-корректор. Метод прогонки позволил для повышения устойчивости использовать неявную двухслойную аппроксимацию для v' в левой части уравнения (3.1). Аналогичная краевая неустойчивость трехслойной схемы была выявлена и при расчетах трубы, наполненной газом.

О шаблоне "ромб" на примере уравнения теплопроводности. Трехслойная схема типа "крест" для уравнения теплопроводности обладает некорретной схемной вязкостью, неустойчива и не обеспечивает сходимость. Коррекция трехслойной схемы для уравнения теплопроводности возможна путем добавления члена с производной второго порядка по времени по схеме Дюфорты-Франкеля:

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\tau} &= a^2 \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{\zeta^2} \\ &= a^2 \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - 2u_k^n}{\zeta^2} - a^2 \frac{\tau^2}{\zeta^2} \frac{u_k^{n+1} + u_k^{n-1} - 2u_k^n}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Она аппроксимирует уравнение

$$u_t + a^2 \frac{\tau^2}{\zeta^2} u_{tt} + a^2 \frac{\tau^4}{\zeta^2} \frac{2}{4!} u_{tttt} = a^2 u_{xx} + a^2 \frac{2}{4!} \zeta^2 u_{xxxx}.$$

Схема абсолютно устойчива, т. е. не имеет никаких ограничений на шаг по времени. Если поддерживается условие $\tau < \zeta^2$, то считается уравнение теплопроводности. Если же $\tau = \zeta$, то при больших значениях a фактически считается гибридное уравнение, которое можно интерпретировать и как уравнение теплопроводности, и как волновое уравнение. Опыт расчетов более сложных систем уравнений показывает, что аппроксимация диссипативных членов по схеме "ромб" не вызывает неустойчивости при расчетах уравнений с основными обратимыми членами, аппроксимируемыми по схеме "крест". При расчетах с большим коэффициентом вязкости, как это было сделано выше для устранения граничной неустойчивости, влияние члена u_t пренебрежимо мало. Фактически считается волновое уравнение, для которого, как и для уравнения теплопроводности, математически необходимое число граничных условий совпадает с числом условий, необходимым для использования центрированной схемы, см. методику в конце данного раздела.

Аналогичные схемы можно построить и для уравнений с производными четвертого и шестого порядка

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^{n-1}}{2\tau} &= a^2 \frac{u_{k+3}^n + u_{k-3}^n - 6u_{k+2}^n - 6u_{k-2}^n + 15u_{k+1}^n + 15u_{k-1}^n - 10u_k^{n+1} - 10u_k^{n-1}}{\zeta^6} \\ &= a^2 \frac{u_{k+3}^n + u_{k-3}^n - 6u_{k+2}^n - 6u_{k-2}^n + 15u_{k+1}^n + 15u_{k-1}^n - 20u_k^n}{\zeta^6} \\ &\quad + 10a^2 \frac{u_k^{n+1} + u_k^{n-1} - 2u_k^n}{\zeta^6}, \end{aligned}$$

$$u_t + 10a^2 \frac{\tau^2}{\zeta^2} u_{tt} = a^2 u_{xxxxxx} + a^2 \frac{2}{4!} (3^4 - 2^2 \cdot 6 + 15) \zeta^2 u_{xxxxxxxx}.$$

Устойчивость (по крайней мере условная) проверяется с помощью спектрального признака.

Попытка устранить граничную неустойчивость для уравнений, описывающих волны в трубе с жидкостью, с помощью поглощающей зоны с производной шестого порядка оказалась неудачной. Тем не менее поглощающие зоны с дополнительным членом с производной шестого порядка эффективно применялись для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка [9], это обеспечивает для этого уравнения математически корректную постановку задачи.

Коррекция численных схем с помощью добавления членов с высшими производными. При некоторых начальных данных в областях структур разрывов был обнаружен медленный рост амплитуд коротких волн, приводящий со временем к быстрому росту амплитуд волн в некоторой области — вычислительный блоуп. Это явление устраняется, если делать расчет предиктора не для полуцелого шага, а для целого, но такая схема имеет первый порядок по времени и обладает сильной схемной вязкостью, пропорциональной τ , что нежелательно для проводимых здесь длительных расчетов теоретического характера. Схемная вязкость приводит к тому, что волновые зоны со временем перестают расширяться. Но эта схема вполне пригодна для практических расчетов. Регулируя величину временного шага в предикторе, можно управлять величиной схемной вязкости. Заметим, что предиктор для целого шага применяется, например, в схеме Годунова, обладающей большой устойчивостью. Была разработана методика коррекции схемы путем добавления в уравнения членов с высшими производными, не менее чем на два порядка выше порядка производных члена, аппроксимация которого могла породить рост волн. Коэффициент при этих дополнительных членах брался пропорциональным ζ^2 , поскольку схема имеет второй порядок аппроксимации, экспериментально проверялась сходимость (возможно в некоторых случаях достаточно выбрать пропорциональность $\tau\zeta^2$, как в схемах Лакса–Вендроффа, или ζ^3). Таким образом, не меняется порядок аппроксимации, достигается сходимость, а результат такой добавки можно интерпретировать как дополнительную схемную диссипацию или схемную дисперсию, но не как искусственную диссипацию или искусственную дисперсию. Объяснить такой подход интуитивно можно так. Аппроксимирующие численную схему уравнения содержат, помимо членов исходных уравнений, члены с производными высокого порядка, некоторые из них могут оказаться некорректными. Коррекция таких некорректных уравнений возможна только добавлением членов с производными того же порядка, что вызвали некорректность, или выше [1].

Анализ дисперсионно-диссипативных свойств схем на примере уравнения переноса. С целью выяснения свойств различных двухшаговых численных схем, а именно двухшаговая схема применялась выше, сопоставим их на примере уравнения переноса (такие схемы иногда называются схемами

типа Лакса-Вендроффа). Приведем ниже некоторые из них. Наименования классических схем типа Лакса-Вендроффа даны согласно [24].

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа (Рихтмаера), переходящая в классическую одношаговую схему Лакса-Вендроффа для линейных уравнений:

$$\frac{u_k^{n+1/2} - \frac{u_{k+1}^n + u_k^n}{2}}{\tau/2} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\zeta} = 0, \quad \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^{n+1/2} - u_{k-1}^{n+1/2}}{2\zeta} = 0 \quad (4.4)$$

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа (Бёрнштейна):

$$\frac{u_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{u_{k+1}^n + u_k^n}{2}}{\tau/2} + c \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\zeta} = 0, \quad \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1/2}^{n+1/2} - u_{k-1/2}^{n+1/2}}{\zeta} = 0 \quad (4.5)$$

Использованная выше схема второго порядка точности:

$$\frac{u_k^{n+1/2} - u_k^n}{\tau/2} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\zeta} = 0, \quad \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^{n+1/2} - u_{k-1}^{n+1/2}}{2\zeta} = 0 \quad (4.6)$$

Использованная выше схема первого порядка точности:

$$\frac{\tilde{u}_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\zeta} = 0, \quad \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{\tilde{u}_{k+1}^{n+1} - \tilde{u}_{k-1}^{n+1}}{2\zeta} = 0 \quad (4.7)$$

Последние две схемы нельзя называть схемами типа Лакса-Вендроффа, поскольку в них отсутствует усреднение $\frac{u_{k+1}^n + u_k^n}{2}$, что как раз характерно для схемы Лакса [24].

Одношаговые представления и старшие остаточные диссипативные и обратимые дисперсионные члены в правой части уравнений при аппроксимации схем такие:

1.
$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+2}^n - u_{k-2}^n}{4\zeta} - c^2 \tau \frac{u_{k+2}^n + u_{k-2}^n - 2u_k^n}{8\zeta^2} = 0$$

$$- \frac{1}{3!} \tau^2 u_{ttt} - c \frac{4}{3!} \zeta^2 u_{xxx} - c^2 \left(\frac{4}{3!} - \frac{4}{4!} \right) \tau \zeta^2 u_{xxxx} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} \right) \tau^3 u_{tttt}$$
2.
$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\zeta} - c^2 \tau \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - 2u_k^n}{2\zeta^2} = 0$$

$$- \frac{1}{3!} \tau^2 u_{ttt} - c \frac{1}{3!} \zeta^2 u_{xxx} - c^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 3!} - \frac{1}{4!} \right) \tau \zeta^2 u_{xxxx} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} \right) \tau^3 u_{tttt}$$
3.
$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\zeta} - c^2 \tau \frac{u_{k+2}^n + u_{k-2}^n - 2u_k^n}{8\zeta^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3!}\tau^2 u_{ttt} - c\frac{1}{3!}\zeta^2 u_{xxx} - c^2\left(\frac{1}{2\cdot 3!} - \frac{4}{4!}\right)\tau\zeta^2 u_{xxxx} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2\cdot 3!}\right)\tau^3 u_{tttt} \\
4. \quad & \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\zeta} - c^2 2\tau\frac{u_{k+2}^n + u_{k-2}^n - 2u_k^n}{8\zeta^2} = 0 \\
& c^2\frac{1}{2}\tau u_{xx} - \frac{1}{3!}\tau^2 u_{ttt} - c\frac{1}{3!}\zeta^2 u_{xxx}
\end{aligned}$$

При анализе остаточных членов, сохраняя порядок аппроксимации, можно делать замену $u_t = -cu_x$ для всех схем, и более точные замены $u_t = -cu_x - c4/3!u_{xxx}\zeta^2 - 1/3!u_{ttt}\tau^2$ для схемы (4.4), $u_t = -cu_x - c1/3!u_{xxx}\zeta^2 - 1/3!u_{ttt}\tau^2$ — для схем (4.5) и (4.6) для исключения членов с высшими производными, содержащими дифференцирование по времени. Для диссипативного члена $\tau/2u_{tt}$ такие замены здесь сделаны.

Существует однопараметрическое семейство схем второго порядка точности на пятиточечном пространственном шаблоне, его можно создать за счет перераспределения комбинаций широкого и узкого шаблона для производных первого и второго порядка. По-видимому, можно помимо коэффициента при члене с диссипацией, описываемой производной второго порядка, обнулить значение коэффициента при дисперсионном члене с производной третьего порядка или диссипативном члене с производной четвертого порядка.

Схема (4.6) имеет некорректную схемную вязкость при любом соотношении между τ и ζ . Заметим, что при малых значениях τ членом с u_{tttt} можно пренебречь, чередуя на временных шагах схему (4.5) и (4.6), можно получить схему с вязкостью, близкой к нулевой. Другой вариант: на одном временном шаге используется схема (4.4), а на двух последующих шагах используется схема (4.6).

Схема (4.7) с предиктором для целого шага обладает вязкостью первого порядка малости.

Все представленные схемы фактически представляют собой простейшую одношаговую центрированную по пространству схему с добавленным разностным оператором, соответствующим аппроксимации дополнительного диссипативного члена с производной второго порядка. Одношаговая схема и остаточные члены, выявляемые при анализе аппроксимации, имеют вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + c\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\zeta} = 0 \tag{4.8} \\
& -c^2\frac{1}{2}\tau u_{xx} - \frac{1}{3!}\tau^2 u_{ttt} - c\frac{1}{3!}\zeta^2 u_{xxx}
\end{aligned}$$

У этой схемы выявляется отрицательный диссипативный член первого порядка, что предполагает некорректность.

Анализ на основе спектрального метода. Простейшая явная центрированная по пространству схема (4.8) с применением метода Эйлера для временной производной обладает свойством ограниченного роста возмущений с коэффициентом их увеличения на временном шаге порядка $1 + O(\tau^2/\zeta^2)$, т. е. рост сколь угодно уменьшается пропорционально τ при условии $\tau = C\zeta^2$ [25]. Это выявляется применением спектрального метода, т.е. подстановкой $u = q^n \exp ik\phi$, $\max |q| = \sqrt{1 + c^2\tau^2/\zeta^2}$. Но $\max |q| = 1 + c^2C^2\tau/2$, если $\tau < C\zeta^2$, C — некоторое число, что меньше $\exp c^2C^2\tau/2$. Согласно приведенному в [25] критерию схема устойчива, расчет возможен, но возмущения при таком расчете растут со временем по экспоненте, хотя показатель роста можно сделать как угодно малым. Можно проверить, что при переходе к методу Рунге–Кутты коэффициент роста имеет порядок $1 + O(\tau^4/\zeta^4)$, т.е. рост возмущений значительно замедляется. Этим объясняется устранимый рост амплитуды уединенной волны, который рассматривается ниже подразделе 3 данного раздела.

У схемы (4.8) аппроксимация первого порядка по времени, второго — по пространству и некорректная (отрицательная) схемная вязкость, описываемая членом с производной по времени второго порядка с коэффициентом порядка τ . Наличие некорректности дифференциального приближения конечного порядка не означает некорректность разностных уравнений, сходимость численных решений к решению аппроксимируемого уравнения есть. Схема без роста возмущений с условием устойчивости, согласно условию Куранта, получается добавлением разностного оператора, соответствующего вязкому члену с пространственной производной второго порядка с коэффициентом $\zeta^2/(2\tau)$ [25]. При учете условия устойчивости $\tau \sim \zeta$ этот коэффициент имеет порядок ζ . Для устранения роста возмущений можно брать и произвольное значение этого коэффициента с таким же порядком (при $\tau/2$ получается схема (4.5)). Это аналитически обоснованный пример применения описанной выше методики, но для схемы с аппроксимацией первого порядка.

Примеры применения коррекции при расчетах для случая трубы, заполненной жидкостью.

1. Для некоторых начальных данных был обнаружен медленный рост коротких волн в области с большим градиентом величины r (область расширяющейся структуры разрыва в основном поперечных волн, движущихся вправо, см. разд. 3). При $v_0 < 0$ развитие этого явления замедляется путем включения дополнительной жесткости на изгиб по упрощенному варианту; достаточно выбрать величину коэффициента $b = c\zeta^2$. Это уменьшает излучение коротких (2-3 шага сетки) волн в области больших градиентов. Амплитуда таких волн может расти за счет нелинейных эффектов, захвата волн структурами разрывов, усиления линейных волн численной схемой. Это излучение сходно с излучением волн на обратимых разрывах [1–2,9–12],

связанным с нелинейным резонансом и дисперсионными эффектами, но амплитуда и длина волн здесь зависят от шага сетки. Можно для подавления роста этих волн включить высшую диссипацию, описываемую производной четвертого порядка в уравнения (3.1), (3.3), или описываемую производной более высокого, шестого порядка в уравнении (3.2) (см. члены в фигурных скобках), величины коэффициентов также выбираются порядка квадрата пространственного шага.

В случае рис. 2 использована диссипативная коррекция, $c_{r6} = 10^{-6}$, в случае рис. 3 $c_{r6} = 5 \cdot 10^{-7}$, $\zeta = 0.1$. В случае рис. 4 использована другая диссипативная коррекция $c_{v4} = c_{z4} = 10^{-5}$, $\zeta = 0.05$. В случае кривой 2 на рис. 4 для области в основном продольной волны слева показан график, полученный с помощью недиссипативной коррекции, $b = 10^{-3}$, $\zeta = 0.1$. Диссипативная коррекция здесь приводит к тому, что эта структура перестает расширяться в связи с тем, что волны имеют малую длину, во всех остальных областях практически нет различий для решений, полученных с помощью диссипативной и недиссипативной коррекции.

2. Было обнаружено, что для некоторых начальных данных включение жесткости по упрощенному варианту с произвольным значением коэффициента b требует дополнительного включения диссипации, описываемой производной шестого порядка, в уравнение (3.2), член в фигурных скобках (рост амплитуд волн, сходный с описанной в подразд. 1, проявляется в области кинка, см. разд. 3). Для случаев, показанных на рис. 3, для устранения роста использована диссипативная коррекция $c_{r6} = 5 \cdot 10^{-7}$. В случае малых значений коэффициента жесткости (а это так для тонкостенных труб) без такой коррекции можно обойтись, поскольку за обозримое время неустойчивость не развивается.

3. Было замечено, что амплитуда первой волны солитонной структуры разрыва для в основном продольных волн, движущихся вправо или влево, росла со временем, и эта волна постепенно отделялась от структуры. При уменьшении τ или ζ скорость роста амплитуды первой солитоноподобной волны уменьшается. Этот неприятный эффект при продолжительных расчетах требует использования излишне малых шагов, он устраняется введением дополнительного диссипативного члена $c_{z4}Z''''$ в уравнение (3.3), величина c_{z4} бралась пропорциональной ζ^2 . Включение производной шестого порядка в уравнение (3.2) также устраняет этот эффект. Эффект роста амплитуды связан с тем, что уединенная волна рассматриваемого типа (класс 0 [13]) обладает нейтральной устойчивостью. Если какие-то возмущения приводят к уменьшению или, наоборот, к увеличению амплитуды, волна не возвращается в исходное состояние, а сохраняет новые амплитуду и скорость. Если численные эффекты таковы, что они систематически со временем снижают амплитуду уединенной волны, то это не влияет на качественный вид решения при расчете структуры солитонного типа, поскольку солитоноподобная волна остается элементом расширяющейся структуры, а амплитуда разры-

ва определяется решением задачи о распаде разрыва и должна оставаться постоянной. Если же численные эффекты, наоборот, систематически увеличивают амплитуду уединенной волны, то скорость первой солитоноподобной волны увеличивается, она со временем отрывается от структуры и становится уединенной волной, а рост ее амплитуды продолжается. Со временем это может привести к остановке расчета.

Примеры коррекции в случае заполнения трубы газом. Описанная выше методика коррекции численных схем применялась также для расчетов в случае трубы, заполненной газом. Как и в случае заполнения жидкостью, была обнаружена краевая неустойчивость при применении центрированной трехслойной схемы, поэтому применялась схема типа предиктор-корректор с аппроксимацией временных производных по методу Рунге-Кутты. В расчетах, результаты которых показаны на рис. 5–6 в разд.3, в правую часть всех аппроксимируемых уравнений вида $\dot{z} = \dots$, $\dot{r} = \dots$, $\dot{\rho} = \dots$, $\dot{v} = \dots$ были включены дополнительные диссипативные члены с производной шестого порядка:

$$c_{z6} = c_{r6} = c_{\rho6} = c_{v6} = 10^{-5}.$$

Таким образом, методику коррекции численных схем, посредством добавления членов с высшими производными можно считать достаточно универсальной методикой для расчетов в тех случаях, когда необходимо добиваться низкой схемной диссипации.

Методика коррекции с целью изменения числа граничных условий. Посредством добавления в случае уравнений, требующих для математической корректности постановки задачи разного числа граничных условий на левой и правой границе (уравнение переноса, Кортевега–де Вриза, сверхзвуковая газовая динамика, и т. д.), дополнительных диссипативных членов в областях вблизи границы можно добиваться математически корректной постановки задачи при применении схем с центрированием по пространству, требующих постановки одинакового числа граничных условий на обеих границах. Это другой вариант коррекции численных схем. Но практика расчетов показывает, что проблем при аппроксимации решения задачи Коши посредством расчета в конечной области в случае несовпадения числа граничных условий обычно не возникает, но поглощающие диссипативные зоны полезно вводить вблизи границы для устранения отражений волн.

5 Упрощенные уравнения

В теории решений с разрывами [17] для описания областей с медленными изменениями был введен термин "упрощенные уравнения". Упрощенные уравнения в случае обратимых систем описывают неволновые зоны в задаче о распаде произвольного разрыва. Обычно они получаются отбрасыванием членов с высшими производными и нелинейно-дисперсионных членов. В

случае контролируемого давления они получаются отбрасыванием уравнения (2.1):

$$\dot{u} = q'; \quad \rho R \dot{q} = \left(R \sigma_1 \frac{u}{\lambda_1^2} \right)' - P^* r', \quad \lambda_1 = u = z', \quad P^* = \frac{\sigma_2}{\lambda_2 r u}, \quad (5.1)$$

P^* здесь постоянная величина. У линейризованного варианта этих уравнений две прямые дисперсионные ветви.

Для случая заполнения трубы баротропным газом эти уравнения дополняются уравнениями (2.5) и (2.4) и добавляется уравнение состояния для давления. Здесь четыре прямые дисперсионные ветви.

Такой подход объясняется тем, что для этих моделей дисперсионная ветвь поперечных упругих волн не пересекает начало координат.

В случае заполнения трубы жидкостью вместо уравнения (2.5) используется уравнение (2.3) и не используется уравнение состояния. Формально такую систему уравнений можно вывести из уравнений (3.1)–(3.3), отбрасывая высшие производные и нелинейно-дисперсионные члены, при этом $\mathcal{P} = -\sigma_2/(ru\lambda_2)$. Но можно рассмотреть ее и как предельную систему упрощенных уравнений в случае заполнения трубы газом. У линейризованного варианта этих уравнений также имеется четыре дисперсионные ветви, представляющие собой прямые.

Для случая заполнения трубы баротропным газом уравнение (2.3) заменяется уравнением (2.5) и добавляется уравнение состояния для давления; здесь также четыре прямые дисперсионные ветви.

Отметим, что в рассматриваемых уравнениях подразумеваются конечные изменения продольных деформаций, в отличие от критикуемых [4] уравнений длинных волн.

Методика расчета. При использовании данных уравнений возможно опрокидывание гидродинамических или газодинамических волн, требующее введения физической вязкости или исследования обобщенных решений с разрывами необратимого типа. В последнем случае при численных расчетах для гидродинамической или газодинамической части потребуются выделять разрывы или использовать специальные численные методы, позволяющие находить такие решения посредством сквозного счета: метод искусственной вязкости, метод Годунова, метод коррекции потоков, и. т. д.

6 Вывод уравнений волн малой амплитуды без учета упругих продольных волн

Рассмотрим малые деформации и длинные волны относительно некоторого состояния $r_0, z'_0, q_0 = 0, v_0$. Сделаем дополнительные предположения: σ_{20} и σ_{210} — малые параметры; отсутствует резонанс, т. е. скорость исследуемых

волн не близка к скорости линейных продольных волн $[\sigma_{10}/(\rho\lambda_{10}^2)]^{1/2}$, получаемой из линеаризованного варианта уравнения (2.1) при $P^* = 0$. Возмущения продольных деформаций будут иметь порядок квадрата возмущений поперечных деформаций. Можно пренебречь продольными волнами.

Вывод в случае заполнения трубы жидкостью. Из уравнений (3.1) и (3.2) можно вывести нелинейные уравнения, аналогичные классическим или обобщенным (если учитывается жесткость на изгиб) уравнениям Буссинеска:

$$\rho_f^* z_0' \dot{v} - \frac{\rho R^2}{2z_0'^2} \dot{v}'' = -\rho_f^* v v' + (-P_{bs}^* + \mathcal{P})', \quad \dot{r} z_0' + v r' + \frac{1}{2} r v' = 0, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{r_0 z_0'} \left(R \sigma_{10} \frac{r'}{\lambda_{10}^2} \right)' - \frac{\sigma_2(\lambda_{10}, \lambda_2)}{\lambda_2 r z_0'} - \frac{\rho R}{r_0 z_0'^2} (-v_0) \frac{-v_0 r' - \frac{1}{2} r_0 v'}{z_0'}.$$

Согласно асимптотическим методам, в этом приближении должны сохраняться только квадратичные нелинейные члены с дифференцированием первого порядка, поэтому требуется еще замена

$$\left(\frac{\sigma_2}{\lambda_2 r} \right)' \rightarrow r' \left[-\frac{\sigma_{20}}{\lambda_{20} r_0^2} + \frac{2\sigma_{20}\Delta r}{\lambda_{20} r_0^3} - \frac{\sigma_{20}}{\lambda_{20}^2 r_0 R} + \frac{2\sigma_{20}\Delta r}{\lambda_{20}^3 r_0 R^2} + \frac{\sigma_{2,20}}{\lambda_{20} r_0 R} + \frac{\sigma_{2,220}\Delta r}{\lambda_{20} r_0 R^2} \right],$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{\lambda_2 r} \right)' = \left(\frac{\hat{W}_2}{r} \right)' \rightarrow r' \left[-\frac{\hat{W}_{20}}{r_0^2} + \frac{2\hat{W}_{20}\Delta r}{r_0^3} + \frac{\hat{W}_{220}}{r_0 R} + \frac{\hat{W}_{2220}\Delta r}{r_0 R^2} \right]; \quad \Delta r = r - r_0.$$

Первый вариант замены можно применять как в случае сжимаемого материала, так и несжимаемого, второй выведен с использованием потенциала \hat{W} , его можно применять в случае несжимаемости. Формально при выводе уравнений с допущением, что σ_{20} — малый параметр, в этих выражениях члены с $\sigma_{20}\Delta r$ и $\hat{W}_{20}\Delta r$ можно не учитывать.

При использовании описанной в разд. 2 вязкоупругой модели в правую часть первого уравнения (6.1) добавляется еще член $-c_{rt} \dot{r}'$, причем в случае несжимаемости материала

$$c_{rt} = [\nu_{v2} + \nu_{v3}/(\lambda_{10}^2 \lambda_{20})]/(R \lambda_{20} r_0 z_0').$$

Возможно исключение пространственно-временной производной \dot{v}'' из первого уравнения (6.1) путем подстановки низшего приближения для величины v , но польза такого исключения не очевидна. В полученных таким образом уравнениях скорость распространения коротких волн будет сколь угодно большой даже без учета жесткости на изгиб, что не соответствует реальности, требуется также проверка корректности уравнений. Однако оба типа уравнений равноценны при описании длинных волн. Можно также исключить временную производную в диссипативном члене с помощью низшего приближения для r и получить диссипативный член $(v_0 r'' + r_0 v''/2)c_{rt}/z_0'$, при малых значениях v_0 первым членом в скобках можно пренебречь.

Структуры разрывов для уравнений такого типа исследовались ранее [9, 11], они рассчитывались с помощью методики, описанной в разд. 4. Применяя стандартные методы, из этих уравнений можно вывести обычное или обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза, используемое в теории обратимых разрывов [9–13] в качестве основного модельного уравнения, а также упрощенные уравнения.

Вывод в случае заполнения трубы газом. Уравнения без учета продольных волн можно вывести и для малых возмущений состояния $r_0, z'_0, q_0 = 0, v_0, \rho_{f0}, P_0$ из уравнения (2.2) и уравнений (2.4), (2.5)

$$\left(R\sigma_{10} \frac{r'}{\lambda_{10}^2} \right)' - \frac{\sigma_2(\lambda_{10}, \lambda_2)}{\lambda_2} + P_{bs}^* r_0 z'_0 + P^* r z'_0 = \rho R \ddot{r}, \quad (6.2)$$

$$\rho_f(\dot{v}z'_0 + vv') + P' = 0, \quad \dot{\rho}_f z'_0 r^2 + 2\rho_f r \dot{r} z'_0 + (\rho_f v r^2)' = 0; \quad P = P(\rho_f).$$

Для правильного применения асимптотических методов в этих уравнениях величины $\sigma_2/\lambda_2, P^*r, \rho_f \dot{v}, P', \dot{\rho}_f r^2, \rho_f r \dot{r}$ и $(\rho_f v r^2)'$ следует заменить приближениями по возмущениям $\Delta r, \Delta v$ и $\Delta \rho_f$ с сохранением квадратичной нелинейности. Для получения уравнений Буссинеска нужно выразить P^* из первого уравнения (6.2) и, пользуясь уравнением состояния, найти зависимость $\rho_f = \rho_f(r, r', r'', \dot{r}, r''')$. Затем нужно подставить это выражение во второе и третье уравнения, затем, используя низшие приближения полученных уравнений без дисперсионных и нелинейных членов, устранить производные от величины r по времени выше первого порядка и оставить только нелинейные члены второго порядка. Необходимые для подстановок соотношения для случая несжимаемого материала стенок приведены ниже:

$$P^* = -P_{bs}^* + \frac{\hat{W}_{20}}{r_0 z'_0} - \frac{\hat{W}_{20} \Delta r}{r_0^2 z'_0} + \frac{\hat{W}_{20} \Delta r^2}{r_0^3 z'_0} + \frac{\hat{W}_{220} \Delta r}{r_0 z'_0 R} - \frac{\hat{W}_{220} \Delta r^2}{r_0^2 z'_0 R} + \frac{\hat{W}_{2220} \Delta r^2}{2r_0 z'_0 R^2} + \frac{\rho R \ddot{r}}{r_0 z'_0} - \left(\frac{R\sigma_{10} r'}{\lambda_{10}^2 r_0 z'_0} \right)',$$

$$\rho_f = \rho_{f0} + \rho_{fP0} H \Delta P^* + \frac{1}{2} \rho_{fPP0} H^2 c_{\rho f}^2 \Delta r^2, \quad \Delta P^* = P^* - P_0^*, \quad P_0^* = \frac{\hat{W}_{20}}{r_0 z'_0},$$

$$\rho_{f0} = \rho_f(P_0^* H), \quad c_{\rho f} = \frac{\hat{W}_{220}}{r z'_0 R} - \frac{\hat{W}_{20}}{r_0^2 z'_0}, \quad \rho_{fP0} = \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial P} \right)_0, \quad \rho_{fPP0} = \left(\frac{\partial^2 \rho_f}{\partial P^2} \right)_0,$$

$$\rho_{f0}(\dot{v}z'_0 + v_0 v') + H c_{\rho f} r' = 0,$$

$$\rho_{fP0} H c_{\rho f} \dot{r} z'_0 r_0^2 + 2\rho_{f0} r_0 \dot{r} z'_0 + 2\rho_{f0} v_0 r_0 r' + \rho_{f0} \dot{v} r_0^2 + \rho_{fP0} H c_{\rho f} r' v_0 r_0^2 = 0.$$

Последние два уравнения представляют собой линеаризованный вариант рассматриваемых уравнений с исключенной дисперсией.

Методика расчета. Уравнения данного типа обладают типичными дисперсионными свойствами, возможность опрокидывания волн не предполагается. Можно применять стандартные методы, описанные в разд. 4.

7 Заключение

Рассмотрены различные системы уравнений и их обобщения, описывающие распространение волн в трубах с упругими стенками. Расчеты задачи о распаде произвольного разрыва показали, что наблюдаются типичные предсказываемые теорией структуры обратимых и слабодиссипативных разрывов. Разработана достаточно универсальная методика расчетов с применением трехслойной схемы и скорректированной двухслойной схемы с аппроксимацией временных производных по методу Рунге-Кутты, пригодная для нахождения решений и других недиссипативных и слабодиссипативных систем уравнений.

Список литературы

- [1] Бахолдин И. Б. Численное исследование уединенных волн и структур разрывов в трубах с контролируемым давлением // ЖВММФ. 2015. Т. 55. № 11. С. 120–136.
- [2] Бахолдин И. Б. Применение теории обратимых разрывов для исследования уравнений, описывающих волны в трубах с упругими стенками // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 4.
- [3] Волобуев А. Н. Течение жидкости в трубках с эластичными стенками // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. № 2. с. 177–186.
- [4] Epstein M., Johnston J. W. On the exact speed and amplitude of solitary waves in fluid-filled elastic tubes // Proc. Roy. Soc. London. A. 2001. V. 457. I. 2009. P. 1195–1213.
- [5] Fu Y. B., Pearce S. P. Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes // IMA J. Appl. Math. 2010. V. 75. № 4. P. 581–602.
- [6] Fu Y. B., Il'ichev A. Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement // IMA J. Appl. Math. 2010. V. 75. № 2. P. 257–268.

- [7] Il'ichev A. T., Fu I.B. Stability of aneurism solutions in fluid-filled elastic membrane tube // *Acta Mech. Sinica*. 2012. V. 28. № 4. P. 1209–1218.
- [8] Il'ichev A. T., Fu I.B. Localized standing waves in a hyperelastic membrane tube and their stabilization by a mean flow // *Math. Mech. Solids*. 2015. V. 20. I. 10. P. 1198–2014.
- [9] Бахолдин И. Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
- [10] Бахолдин И. Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега–де Вриза // *Изв. РАН. МЖГ*. 1999. № 4. С. 95–109.
- [11] Бахолдин И. Б. Структуры гидравлических прыжков при наличии ледового покрытия // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 4. С. 139–146.
- [12] Бахолдин И. Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега—Бюргера // *ПММ*. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
- [13] Бахолдин И. Б. Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 833–852.
- [14] Ogden R. W. *Non-linear Elastic Deformations*. N. Y.: Dover, 1997.
- [15] Лурье А.В. Нелинейная теория упругости. М.:Наука, 1980. 512 с.
- [16] Адамов А. А. Сравнительный анализ двухконстантных обобщений закона Гука для изотропных упругих материалов при конечных деформациях // *ПМТФ*. 2001. Т. 42. № 5. С. 183–192.
- [17] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей. 1998. 412 с.
- [18] Haughton D. M., Ogden R.W. Bifurcation of inflated circular cylinders of elastic material under axial loading. I. Membrane theory for thin-walled tubes // *J. Mech. Phys. Solids*. 1979. V. 27. № 3. P. 179–212.
- [19] Gent A. N. A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chem. Technol*. 1996. V. 69. I. 1. P. 59–61.
- [20] Ильичев А. Т. , Марченко А. В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1989. № 1. С. 88–95.

- [21] Саченков А. А. Цикл лекций по теории изгиба пластин.// Уч. пособие. Казань: Казанский федер. ун-т, 2012. 53 с. http://repository.kpfu.ru/?p_id=51751
- [22] Коробейников С. Н., Олейников А. А., Ларичкин А. Ю., Бабичев А. В., Алехин В. В. Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки// Дальневост. мат. ж. 2013. Т. 13. № 2. С. 222—249.
- [23] Бахолдин И.Б., Егорова Е.Р., Исследование магнитозвуковых уединенных волн для уравнений электронной магнитной гидродинамики// ЖВММФ. 2011. Т. 51. № 3. С. 515–528.
- [24] Roach P. J. Computational Fluid Dynamics. Albuquerque, NM: Hermosa, 1976 = Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
- [25] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

Содержание

1	Введение	3
2	Основные уравнения, предлагаемые обобщения, анализ дисперсионных ветвей	4
3	Решение задачи о распаде произвольного разрыва для случаев заполнения трубы жидкостью и газом	10
4	Используемые численные методы	18
5	Упрощенные уравнения	26
6	Вывод уравнений волн малой амплитуды без учета упругих продольных волн	27
7	Заключение	30