



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 54 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Аптекарев А.И., Туляков Д.Н.**

Координаты Хессе для  
одной алгебраической  
кривой третьего порядка

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Аптекарев А.И., Туляков Д.Н. Координаты Хессе для одной алгебраической кривой третьего порядка // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 54. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2017-54](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-54)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-54>

О р д е н а Л е н и н а  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.КЕЛДЫША  
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

Координаты Хессе  
для одной алгебраической кривой  
третьего порядка

Москва — 2017

УДК 517.53+517.9

**Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.**

*Координаты Хессе для одной алгебраической кривой третьего порядка.* Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2017

**Аннотация.** В работе рассматривается одна алгебраическая функция, задаваемая уравнением третьего порядка. Эта функция является спектральной кривой однородной системы рекуррентных соотношений для последовательности  $q$ -полиномов, возникающих в квантовой теории поля. Для нахождения асимптотического базиса решений этих рекуррентных соотношений, мы параметризуем точки спектральной кривой точками двулистного накрытия кубической кривой Хессе.

**Ключевые слова:** алгебраические функции, римановы поверхности, рекуррентные соотношения.

**Aptekarev A. I., Tulyakov D. N.**

*The Hesse coordinates for an algebraic cubic curve.* Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2017

**Abstract.** An algebraic function given by the cubic equation is studied. The function is the spectral curve for a homogenous system of recurrence relations for sequences of  $q$ -polynomials, appearing in quantum field theory. To find the asymptotics basis of the solutions of these recurrence relations, we parameterize the spectral curve by means of the double covering of the cubic Hesse curve.

**Key words:** Algebraic functions, Riemann surfaces, Recurrence relations.

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ №17-01-00614.

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2017

© А. И. Аптекарев, 2017, © Д. Н. Туляков 2017

## 1. Введение

**1.1. Постановка задачи и формулировка результата.** Дана алгебраическая кривая

$$\lambda(z) : \quad \lambda^3 + a_2(z)\lambda^2 + a_1(z)\lambda + z^7 = 0 , \quad (1.1)$$

где

$$a_2 = z^5 - z^4 + 2z^2 + 2z - 1 , \quad a_1 = -z^2(z^6 - 2z^4 - 2z^3 + z - 1) .$$

С целью нахождения удобной параметризации ветвей  $\{\lambda_j(z)\}_{j=0}^2$  кривой (1.1), мы хотим определить на ней координаты, удовлетворяющие уравнению кривой Хессе (см. [1])

$$(x, y) \in \mathcal{H} . : \quad x^3 + y^3 - 3xy + \text{Const} = 0 , \quad (1.2)$$

точки которой обладают замечательной симметрией

$$(x \varepsilon^j , y \varepsilon^{-j}) \in \mathcal{H} , \quad j = 0,1,2, \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} .$$

Непосредственно координаты (1.2) на  $\lambda(z)$  ввести нельзя, так как кривые (1.1) и (1.2) имеют разный род:

$$\text{gen } \mathcal{H} = 1 , \quad \text{gen } \lambda(z) = 2 .$$

Тем не менее, если координаты задать на двулистном накрытии кривой Хессе, то рассматриваемая задача имеет решение.

Справедлива

**Теорема 1.1.** Пусть  $(x, y, \text{sg}(d))$  точка принадлежит двулистному накрытию кривой Хессе, т.е.  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнению

$$x^3 + y^3 - 3xy + 28 = 0 , \quad (1.3)$$

а  $\text{sg}(d)$  обозначает знак аргумента величины  $d$

$$\text{sg}(d) := \text{sign } \arg(d) , \quad d = \left( \frac{r(xy) + 2}{r(xy) - 2} \right)^{1/2} , \quad (1.4)$$

где

$$r(X) := \frac{X(2\omega^3 + 3\omega^2 + 2\omega - 4) + (-2\omega^3 + 12\omega^2 + 16\omega + 10)}{X + (6\omega^3 + 6\omega^2 - 6\omega - 16)} , \quad (1.5)$$

а в качестве  $\omega$  можно взять любой из корней уравнения

$$\omega : \omega^4 + 2\omega^3 + \omega^2 - 2\omega - 1 = 0 . \quad (1.6)$$

Тогда для точек алгебраической кривой  $\lambda(z)$  имеем

$$\begin{cases} z = \frac{d+1}{d-1} \\ \lambda = L(z, s) = (s+1)z^2 - s(s+2)(s^2+s-1)z + s^2(s+2) \end{cases} , \quad (1.7)$$

где

$$s = S(x+y), \quad S(Y) := -(1+\omega) \frac{Y + (-3\omega^3 - 6\omega^2 + 7)}{Y + (3\omega^2 + 3\omega + 1)} , \quad (1.8)$$

при этом для ветвей  $\lambda(z)$  имеем

$$\lambda_j(z) = L(z, s_j), \quad s_j := S(\varepsilon^j x + \varepsilon^{-j} y), \quad j = 0, 1, 2. \quad (1.9)$$

Отметим, что Теорема 1.1 (см. (1.9), (1.7)) даёт более удобный для нас вариант формулы Кардано.

**1.2. Мотивация задачи.** Алгебраическая функция (1.1) возникает в качестве спектральной кривой при нахождении асимптотики одной последовательности "окрашенных" многочленов Джонса  $J_N(K, q)$ . Многочлен Джонса  $J(K, q) = J_2(K, q)$  является инвариантом узла  $K$  в шаре  $S^3$  и принадлежит кольцу многочленов Лорана от переменных  $q^{1/2}$  и  $q^{-1/2}$  с целыми коэффициентами  $J(K, q) \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$  (определение см. в [2]). В топологической квантовой теории поля (теории представлений)  $N$ -окрашенный многочлен Джонса  $J_N(K, q)$  получается "раскраской" узла  $K$  неприводимыми  $N$ -мерными представлениями квантовой группы  $U_q(\mathfrak{su}(2))$  (в теории представлений группы  $SU(2)$ ), см. [3]. Многочлены  $J_N(K, q)$  выражаются через многочлены Джонса для  $K^n$  – "сдвинутых" копий ( $n$ -cabling) узла  $K$ :

$$\begin{aligned} J_1(K, q) &= 1, \\ J_2(K, q) &= J(K, q), \\ J_3(K, q) &= J(K^2, q) - 1, \\ J_4(K, q) &= J(K^3, q) - 2J(K, q), \quad \dots \end{aligned}$$

С. Гарофолитис\* выписал для некоторого специального узла  $\tilde{K}$  неоднородные четырехчленные рекуррентные соотношения, определяющие  $J_N(\tilde{K}, q)$ :

$$\sum_{j=0}^3 A_j(n, q) J_{n+j}(\tilde{K}, q) + B(n, q) = 0 , \quad (1.10)$$

---

\*частное сообщение

где

$$\begin{aligned}
 A_0 &:= q^{7n+9} (q^{2n+4} - 1) (q^{2n+5} - 1); \\
 A_1 &:= q^{2n+5} (q^{2n+5} - 1) (q^{2n+2} - 1) (1 - q^{n+1} \\
 &\quad - (q - 1) (q^2 - 1) q^{2n+1} + (q^3 + 1) q^{3n+2} + 2 q^{4n+5} - q^{5n+6}); \\
 A_2 &:= q (q^{2n+4} - 1) (q^{2n+1} - 1) (q^{5n+9} - q^{4n+7} \\
 &\quad - (q - 1) (q^2 - 1) q^{3n+4} + (q^3 + 1) q^{2n+2} + 2 q^{n+2} - 1); \\
 A_3 &:= (q^{2n+1} - 1) (q^{2n+2} - 1); \\
 B &:= -q^{4+2n} (1 + q^{1+n}) (1 + q^{2+n}) (q^{1+2n} - 1) (q^{3+2n} - 1) (q^{5+2n} - 1).
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Задача нахождения для окрашенных многочленов Джонса узла  $K$  асимптотики в двойном масштабе при

$$q \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad q^n = z \in \mathcal{K} \Subset \overline{\mathbb{C}} \tag{1.12}$$

вызывает повышенный интерес. Знаменитая гипотеза Рината Кашаева [4] связывает эту асимптотику с гиперболическим объёмом  $M := S^3 \setminus K$  – дополнения узла в шаре. Говоря об объёме трехмерного многообразия  $M$ , уместно вспомнить доказанную Григорием Перельманом в знаменитой работе [5] гипотезу Уильяма Терстона о восьми геометрических структурах, допустимых для частей многообразия  $M$ , см. [6]. Причём, как ещё доказал сам Терстон в [6], дополнение к нетривиальному узлу (зацеплению) всегда имеет гиперболическую структуру, так что соответствующий гиперболический объём  $\text{Vol}(M)$  является определённым единственным образом топологическим инвариантом. Теперь мы можем сформулировать гипотезу объёма, см. [4, 7]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log |V_N(K, q = e^{\frac{2\pi i}{N}})| = \text{Vol}(M), \tag{1.13}$$

где

$$V_N(K, q) = \frac{J_N(K, q)}{J_N(O, q)}, \quad J_N(O, q) = \frac{q^{\frac{N}{2}} - q^{-\frac{N}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}. \tag{1.14}$$

Здесь  $O$  – "не узел" (тор), а нормировка в (1.14) выбрана таким образом, чтобы парировать зануление окрашенных многочленов Джонса в рассматриваемых точках. Обобщения гипотезы Кашаева об объёме см. в [7].

Отметим, что гипотеза объёма была проверена для простейшего гиперболического узла – узла восьмёрки  $4_1$ , см. Рис. 1. В этом случае окрашенные

многочлены Джонса известны в явном виде [4]:

$$V_N(4_1; q = e^{2\pi i/N}) = \sum_{m=0}^{\infty} (q)_m (q^{-1})_m, \quad (q)_m = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^m).$$

В работе Людвига Дмитриевича Фадеева и Рината Мавлявичеа Кашаева [8] было доказано, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \log V_N(4_1; e^{2\pi i/N}) = \text{Vol}(S^3 \setminus 4_1) = 2\text{Vol}(\Delta),$$

где  $\Delta$  – правильный тетраэдр, гиперболический объём которого равен

$$\text{Vol}(\Delta) = \text{Im} \text{Li}_2(\exp\{i\pi/3\}) = \frac{1}{2} * 2.02988\dots, \quad \text{Li}_2(x) := - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt,$$

что, в этом простейшем случае, подтвердило гипотезу объёма. Таким образом, проверка гипотезы объёма и её обобщений для конкретных гиперболических узлов остаётся важной и актуальной задачей.

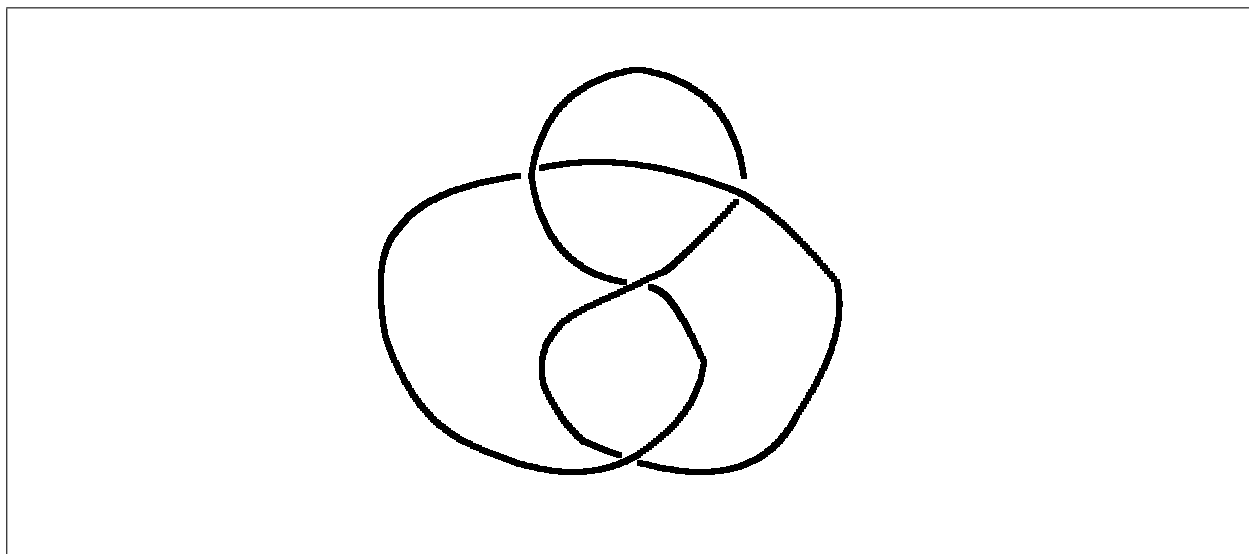


Рис. 1. Узел восьмёрки,  $4_1$ .

**1.3. Спектральная кривая однородной задачи.** Вернёмся к асимптотике окрашенных многочленов Джонса, определённых рекуррентными соотношениями (1.10), (1.11). В работах [9, 10, 11, 12, 13] развивались асимптотическая теория последовательностей многочленов, определяемых рекуррентными соотношениями. Для нахождения асимптотики последовательности многочленов, определяемых неоднородными рекуррентными соотношениями, мы, следуя

общему подходу [12], будем строить асимптотическое разложение базиса решений однородной задачи

$$\vec{Q}_{n+1} = \mathcal{A}_n \vec{Q}_n, \quad \vec{Q}_n := (Q_{n+2}, Q_{n+1}, Q_n) T, \quad (1.15)$$

где элементы матрицы перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{A_2}{A_3} & \frac{A_1}{A_3} & \frac{A_0}{A_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

заданы в (1.11). Подставляя в характеристическое уравнение

$$\det(\mathcal{A}_n - I \lambda) = 0 \quad (1.16)$$

предельные значения

$$q^n =: z, \quad q =: 1,$$

получим уравнение спектральной кривой (1.1), которая является основным объектом исследований настоящей работы.

В заключение введения отметим, что эта работа проводится в рамках совместного с Джеффри Геронимо и Ставросом Гарофолидисом из Технологического Института Джорджии (GATECH) проекта, посвящённого приложениям асимптотической теории решений разностных уравнений.

## 2. Параметризация спектральной кривой

В этой секции мы получим основной результат работы (см. сформулированную во Введении Теорему 1.1), т.е. введём координаты Хессе на спектральной кривой (1.1).

**2.1. Основные характеристики спектральной кривой.** Напомним уравнение (1.1) спектральной кривой

$$\lambda^3 + (z^5 - z^4 + 2z^2 + 2z - 1)\lambda^2 - z^2(z^5 - 2z^4 - 2z^3 + z - 1)\lambda + z^7 = 0.$$

Род алгебраической функции  $\lambda(z)$  равен 2, её дискриминант  $\Delta(z)$  имеет вид:

$$\Delta = z^4 (z^8 - 6z^7 + 11z^6 - 12z^5 - 11z^4 - 12z^3 + 11z^2 - 6z + 1) (z - 1)^6 (1 + z)^6 (-z^4 + 3z^3 - z^2 + 4z^2\sqrt{2} + 3z - 1)(z^4 - 3z^3 + z^2 + 4z^2\sqrt{2} - 3z + 1) z^4 (z - 1)^6 (1 + z)^6$$



Функция  $\lambda(z)$  имеет восемь точек ветвления, они принадлежат множеству

$$\left\{ z = \frac{3}{4} \mp \frac{1}{4} I \sqrt{\mp 13 + 16 \sqrt{2}} \mp \frac{\sqrt{6 \mp 6 I \sqrt{\mp 13 + 16 \sqrt{2}} \mp 16 \sqrt{2}}}{4} \right\},$$

и их численные значения равны

$$(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = \begin{bmatrix} 0.2396780140 & 0.3643164810 \\ 1.260321986 & -1.915720441 \\ 0.2396780140 & -0.3643164810 \\ 1.260321986 & 1.915720441 \\ -0.7422176660 & -0.6701588892 \\ -0.7422176660 & 0.6701588892 \\ 0.235344461 & 0. \\ 4.249090871 & 0. \end{bmatrix}$$

На Рис. 2 изображены линии равенства модуля у ветвей  $\lambda(z)$

$$\Gamma := \{z : |\lambda_i(z)| = |\lambda_j(z)|, i, j = 0, 1, 2, i \neq j\} \quad (2.1)$$

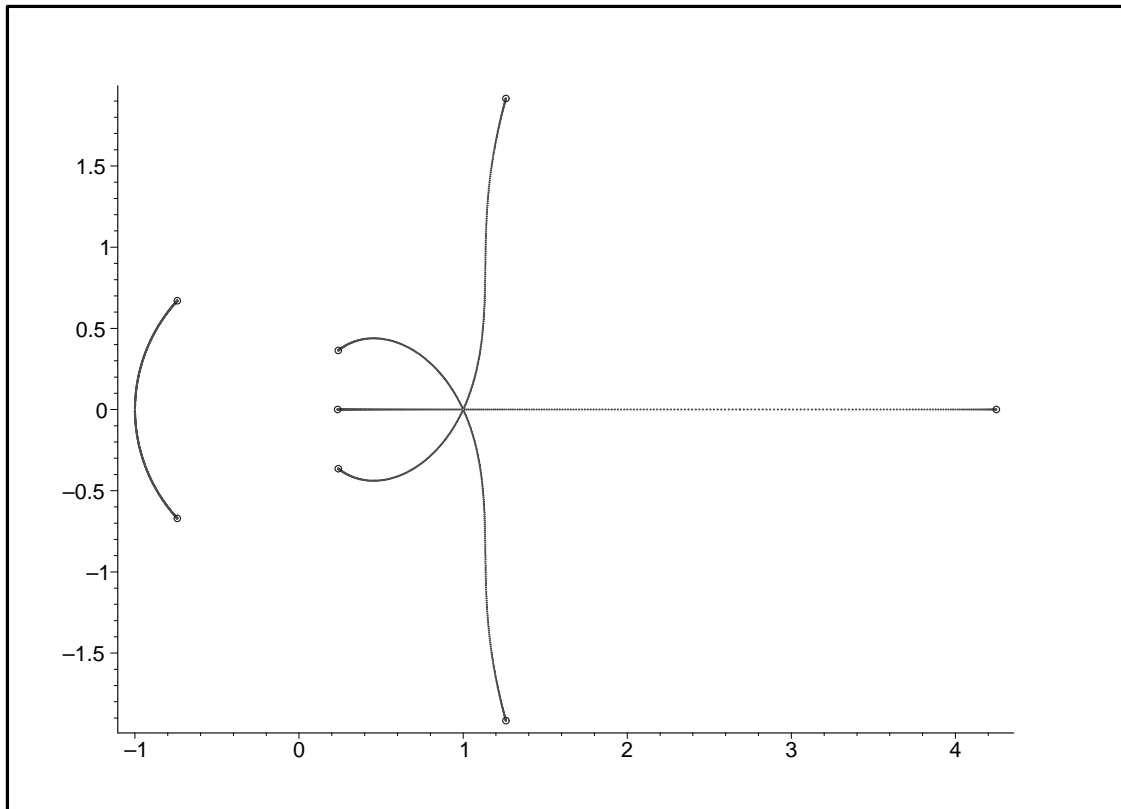


Рис. 2. Множество  $\Gamma$  и точки ветвления для  $\lambda(z)$ .

## 2.2. "Проекция" спектральной кривой на сферу. Справедливо

**Предложение 2.1.** Пусть

$$\begin{cases} \mathcal{L} := \lambda + \frac{1}{\lambda} \\ \mathcal{Z} := z + \frac{1}{z} \end{cases}, \quad (2.2)$$

тогда алгебраическая кривая  $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^3 + (\mathcal{Z}^5 + 6\mathcal{Z}^2 - \mathcal{Z}^4 - 5\mathcal{Z}^3 - 8 + 7\mathcal{Z})\mathcal{L}^2 + \\ & + (16 - 20\mathcal{Z}^3 + 2\mathcal{Z}^6 + 16\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^7 + 3\mathcal{Z}^2 + 8\mathcal{Z}^5 - 9\mathcal{Z}^4)\mathcal{L} - \\ & - 16\mathcal{Z}^5 + 64 + 34\mathcal{Z}^4 - 48\mathcal{Z} + 2\mathcal{Z}^7 - 4\mathcal{Z}^6 + 45\mathcal{Z}^3 - 88\mathcal{Z}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

имеет род 0:

$$\text{gen } \mathcal{L}(\mathcal{Z}) = 0, \quad (2.4)$$

и её рациональная униформизация может быть выбрана в виде

$$\begin{cases} \mathcal{L} = -\frac{-1 + 3s + 4s^2 - 5s^3 - 9s^4 + s^5 + 4s^6 + s^7}{s^2} \\ \mathcal{Z} = \frac{s^3 + 2s^2 - 1 + s}{s(s+1)} \end{cases}. \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Для получения уравнения (2.3) для алгебраической функции  $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$  мы рассматриваем систему из трех уравнений (1.1) и (2.2), и проводим исключение переменных  $z$  и  $\lambda$ . Использовалась процедура построения базисов Грёбнера в пакете Maple

```
> Groebner[Basis](map(numer, [Eq( 1.1), lambda+1/lambda-L, z+1/z-Z]), lexdeg([], []));
```

где при исключении применялось упорядочивание  $\text{lexdeg}([\mathcal{L}, \mathcal{Z}], [\lambda, z])$ . Проверка рода для (2.3)

```
> algcurves[genus](Eq(2.3), L, Z);
```

дает (2.4). Так как всякая кривая рода ноль допускает рациональную униформизацию, то с помощью

```
> factor(subs(t = 1/(t + 1) - 1, algcurves[parametrization]((Eq(2.3), L, Z, s))));
```

находим (2.5). Нетрудно проверить полученные формулы (2.3) и (2.5) с помощью обратных подстановок. Утверждение доказано.

**Следствия Утверждения 2.1.** Отметим сначала полезную формулу

$$\begin{aligned} & (z - 1/z)(L - 1/L) = \\ & = -\frac{(s-1)(s+1)(s^2+2s-1)(s^3+4s^2+3s-1)(s^3-s-1)}{s^3}, \end{aligned}$$

с помощью которой мы можем выбрать правильную ветвь квадратного корня для параметризации координат кривой (1.1) с помощью униформизирующей переменной  $s$ :

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{\sqrt{s^3+4s^2+3s-1}(1-s)(s+1)(s^2+2s-1)\sqrt{s^3-s-1}}{2s^2} - \\ & - \frac{-1+3s+4s^2-5s^3-9s^4+s^5+4s^6+s^7}{2s^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

и

$$z = \frac{(\sqrt{s^3-s-1} + \sqrt{s(s+2)^2-s-1})^2}{4s(s+1)}. \quad (2.7)$$

Отметим, что другой выбор ветвей приводит к

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = & -\frac{\sqrt{s^3+4s^2+3s-1}(1-s)(s+1)(s^2+2s-1)\sqrt{s^3-s-1}}{2s^2} - \\ & - \frac{-1+3s+4s^2-5s^3-9s^4+s^5+4s^6+s^7}{2s^2} \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{z} = \frac{(\sqrt{s^3-s-1} - \sqrt{s(s+2)^2-s-1})^2}{4s(s+1)}.$$

Заметим также, что уравнение предельной спектральной кривой (1.1) обладает симметрией относительно преобразования  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$ ,  $z \rightarrow 1/z$  в рекуррентных коэффициентах допредельной задачи, причем, что любопытно, эта симметрия является следствием аналогичной симметрии в допредельной задаче. Обращаясь к рекуррентным соотношениям (1.10) и (1.11) для окрашенных многочленов Джонса  $J$ , имеем для многочленов  $\tilde{J}$ :

$$J_n =: q^n \tilde{J}_{-3-n}$$

те же рекуррентные соотношения, что и для  $J$ .

Теперь (с помощью базисов Грёбнера) мы можем доказать второе соотношение в (1.7)

$$\lambda = L(z, s) = (s+1)z^2 - s(s+2)(s^2+s-1)z + s^2(s+2),$$

считая, что  $s$  есть униформизационная переменная.

**2.3. Координаты Хессе для параметра униформизации  $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ .** В этом пункте мы получим ключевое соотношение Теоремы 1.1: формулу (1.8), (1.9). Рассмотрим второе соотношение в (2.5)

$$\mathcal{Z} = R_3(s) := \frac{s^3 + 2s^2 + s - 1}{s(s+1)}. \quad (2.8)$$

Стоящая в правой части рациональная функция имеет порядок 3, следовательно,

$$\forall \mathcal{Z} \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{s_k\}_{k=0}^3 : \mathcal{Z}(s_0) = \mathcal{Z}(s_1) = \mathcal{Z}(s_2). \quad (2.9)$$

Мы будем решать следующую задачу. Выберем многообразие, кривую  $\{(x, y)\}$ , такую, чтобы тройки точек  $\{s_k\}_{k=1}^3$ , удовлетворяющие (2.9), параметризовались бы следующим образом:

$$S_j = F(\varepsilon^j x + \varepsilon^{-j} y), \quad j = 0, 1, 2. \quad (2.10)$$

Необходимым условием для этой кривой является то, что для любой её точки  $(x, y)$  ей также принадлежат точки  $(\varepsilon^j x, \varepsilon^{-j} y)$ ,  $j = 1, 2$ . Как уже отмечалось во Введении, кандидатом такой кривой может быть кривая Хессе (1.2).

Ввиду (2.9) рассмотрим уравнение

$$R_3(\tilde{x}) - R_3(\tilde{y}) = 0.$$

Подставляя в левую часть из (2.8) явный вид  $R_3$ , и приравнивая числитель нулю, получим

$$\tilde{x}^2 \tilde{y}^2 + \tilde{x}^2 \tilde{y} + \tilde{x} \tilde{y}^2 + \tilde{x} \tilde{y} + \tilde{x} + \tilde{y} + 1 = 0.$$

Итак, нам нужно найти преобразование  $F$  в (2.10) и константу  $\text{Const}$  в (1.2), такие, чтобы удовлетворялась следующая система:

$$\begin{cases} \tilde{x} = F(x + y) \\ \tilde{y} = F(\varepsilon x + \varepsilon^{-1} y) \\ \tilde{x}^2 \tilde{y}^2 + \tilde{x}^2 \tilde{y} + \tilde{x} \tilde{y}^2 + \tilde{x} \tilde{y} + \tilde{x} + \tilde{y} + 1 = 0 \\ x^3 + y^3 - 3xy + \text{Const} = 0 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Можно проверить, что для этого достаточно взять отображение  $F$  дробно-линейным, а константу  $\text{Const} = 28$ . Коэффициенты дробно-линейного отображения определяются из (2.11) и дают (1.8), (1.6).

**2.4. Двухлистное накрытие кривой Хессе.** Для доказательства Теоремы нам осталось получить параметризацию переменной  $z$ , см. первое соотношение в (1.7). Отметим, что для этого мы вводим двухлистное покрытие (1.4), (1.5) кривой Хессе (1.3). Происходит это следующим образом. Мы знаем (см. (2.8)), что

$$z + \frac{1}{z} = R_3(s) .$$

Обратное преобразование Жуковского можно записать в виде

$$z = \frac{R_3}{2} + \frac{R_3 - 2}{2} \sqrt{\frac{R_3 + 2}{R_3 - 2}} , \quad \sqrt{\frac{R_3 + 2}{R_3 - 2}} =: d .$$

Тогда

$$z d - d = \frac{R_3}{2} d + \frac{R_3}{2} + 1 - d = \frac{R_3}{2} + \frac{R_3 - 2}{2} d + 1 = z + 1 ,$$

т.е.

$$d = \frac{z + 1}{z - 1} , \quad \text{и} \quad z = \frac{d + 1}{d - 1} .$$

Осталось с помощью (1.8) проверить, что

$$R_3(s(xy)) = r(xy) ,$$

где  $r$  задано в (1.5). Теорема доказана.

**2.5. Рациональные функции на  $\mathcal{H}$  и сокращение множителей.** Алгебраические функции  $x(y)$  и  $y(x)$ , определяемые уравнением Хессе (1.3):

$$x^3 + y^3 - 3xy + 28 = 0 , \tag{2.12}$$

являются мероморфными (рациональными) функциями третьего порядка на своих римановых поверхностях (трехлистных разветвленных накрытиях комплексной плоскости). В точках римановых поверхностей с конечными проекциями эти функции принимают конечные значения ввиду (2.12). Поэтому функции  $x$  и  $y$  на кривой Хессе обращаются в  $\infty$  в трех точках:  $\infty^{(0)}$ ,  $\infty^{(1)}$ ,  $\infty^{(2)}$ . Это простые полюса ввиду линейного роста  $x$  и  $y$  на бесконечности, и поэтому функции  $x$  и  $y$  описываются следующими дивизорами:

$$x = \frac{(z_1), (z_2), (z_3)}{(\infty^{(0)}), (\infty^{(1)}), (\infty^{(2)})} , \quad y = \frac{(\zeta_1), (\zeta_2), (\zeta_3)}{(\infty^{(0)}), (\infty^{(1)}), (\infty^{(2)})} .$$

Отметим, что любая линейная функция  $ax + by + c$  имеет степень (порядок дивизора) не выше третьей. Возможно понижение степени до второй, когда один из свободных нулей приходит в одну из бесконечностей и сокращает полюс. Вот характерные примеры линейных функций, которые на кривой Хессе являются рациональными функциями второго порядка :

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= \frac{(\infty^{(0)})^2}{(\infty^{(1)}), (\infty^{(2)})}, & \varepsilon x + \bar{\varepsilon} y + 1 &= \frac{(\infty^{(1)})^2}{(\infty^{(0)}), (\infty^{(2)})}, \\ \bar{\varepsilon} x + \varepsilon y + 1 &= \frac{(\infty^{(2)})^2}{(\infty^{(1)}), (\infty^{(0)})}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Действительно, из представления кривой Хессе (2.12) в виде

$$(x + y + 1)(\varepsilon x + \bar{\varepsilon} y + 1)(\bar{\varepsilon} x + \varepsilon y + 1) = -27,$$

мы видим, что ноль одной из скобок должен компенсироваться полюсом другой скобки (ввиду ограниченности каждой скобки над конечной частью комплексной плоскости), что доказывает (2.13). Кстати, соотношения (2.13) фиксируют нумерацию ветвей кривой Хессе, в частности

$$(\infty^{(0)}) : \frac{x}{y} \rightarrow -1, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Мы будем представлять рациональные функции на кривой (2.12) в виде отношения  $P/Q$  специальных рациональных функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , у которых все полюсы вырождаются в кратный полюс, сосредоточенный в одной точке, скажем в точке  $\infty^{(0)}$ . Базисом таких "полиномов" могут быть:

$$1, (\deg = 0); \quad \frac{1}{x + y + 1}, (\deg = 2); \quad \frac{x}{x + y + 1}, (\deg = 3); \quad \frac{1}{(x + y + 1)^2}; \dots$$

Чтобы получить такое представление на кривой Хессе для рациональных функций с дивизором  $\frac{(z_1), \dots, (z_n)}{(p_1), \dots, (p_n)}$ , мы выбираем на ней точку  $(x_0, y_0)$ , чтобы

$$\sum_{j=1}^n z_j + (x_0, y_0) = \sum_{j=1}^n p_j + (x_0, y_0) = (n + 1)\infty^{(0)}, \quad \text{mod}(\text{periods}), \quad (2.15)$$

по модулю параллелограмма периодов. Тогда

$$\frac{(z_1), \dots, (z_n)}{(p_1), \dots, (p_n)} = \frac{P_1(x, y)(x - x_0) + P_2(x, y)(y - y_0)}{Q_1(x, y)(x - x_0) + Q_2(x, y)(y - y_0)}. \quad (2.16)$$

Ввиду (2.12) степени  $P_j$  и  $Q_j$  по  $y$  могут быть сделаны не выше 2, поэтому не единственное представление (2.16) можно привести к канонической форме

$$\frac{(z_1), \dots (z_n)}{(p_1), \dots (p_n)} = \frac{\widetilde{P}_1(x)(x - x_0) + (\widetilde{P}_2(x)y + \widetilde{P}_3(x))(y - y_0)}{\widetilde{Q}_1(x)(x - x_0) + (\widetilde{Q}_2(x)y + \widetilde{Q}_3(x))(y - y_0)}.$$

Общий вид линейных функций, являющихся рациональными второго порядка на  $\mathcal{H}$  (с точностью до умножения на константы), следующий:

$$x + y + \text{Const}; \quad \varepsilon x + \bar{\varepsilon} y + \text{Const}; \quad \bar{\varepsilon} x + \varepsilon y + \text{Const}.$$

Нули этих функций симметрично расположены. Например,  $x + y + \text{Const}$  имеет нуль в точке  $(x_0, y_0) \in$  кривой Гессе. Тогда это функция  $x + y - x_0 - y_0$ , и второй нуль у неё в точке  $(y_0, x_0)$ . Такие точки противоположны относительно операции сложения точек на эллиптической кривой, если в качестве начала координат взять  $\infty^{(0)}$ .

Нам придется работать на двулистом накрытии кривой Хессе, где рациональные функции имеют вид  $P/Q + d\tilde{P}/\tilde{Q}$ . Здесь  $d$  определено в (1.4), а  $P, Q, \tilde{P}, \tilde{Q}$ , как и выше, – рациональные функции на (2.12) с кратным полюсом в т.  $\infty^{(0)}$ . Для компактификации выражений, возникающих при проведении итерационных процедур для получения асимптотических разложений многочленов (1.10) (при больших степенях), нам нужно научиться сокращать общие нули у функций  $P$  и  $Q$ , а также у функций  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$  (при их наличии). Отметим, что даже если  $P$  и  $Q$  имеют общие нули, то после их сокращения (по теореме Абеля) числитель и знаменатель рациональной функции уже не будут "многочленами" (т.е. с кратным полюсом в т.  $\infty^{(0)}$ ). Тем не менее, как это следует из (2.15), два нуля можно сократить, заменив их на третий, равный их сумме по модулю периодов. Рассмотрим эту операцию подробнее. Пусть точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  – совпадающие нули полиномов числителя и знаменателя. Проводим через них линейную функцию  $ax + by + c$ :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c \\ ax_1 + by_1 + c \end{cases}.$$

Считаем  $a \neq 0$ . Делим  $P(x, y)$  на  $ax + by + c$  с остатком по переменной  $x$ .

$$P(x, y) = P_1(x, y) \cdot (ax + by + c) + \tilde{P}(y).$$

Тогда  $\tilde{P}(y_0) = \tilde{P}(y_1) = 0$ , т.е.  $\tilde{P}(y) : (y - y_0)(y - y_1)$ . Если сумма точек  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$  на кривой равна  $(x_2, y_2)$ , то третий нуль  $ax + by + c$  будет  $(y_2, x_2)$ . Умножаем  $P(x, y)$  на  $x + y - x_2 - y_2$  и преобразуем остаток:

$$(y - y_0)(y - y_1)(x + y - x_2 - y_2) + \tilde{c} \cdot (x^3 + y^3 - 3xy + 28) = (ax + by + c) \cdot (\dots).$$

Теперь множитель  $ax + by + c$  можно сократить.

## Список литературы

- [1] M. Artebani, I. Dolgachev, *The Hesse pencil of plane cubic curves*, L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. 2e Série 55 (2009), 235–273. (arXiv:math/0611590 [math.AG])
- [2] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, М.: МЦНМО, 1997. – 352 с.
- [3] Edward Witten. *Quantum field theory and the jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121 (1989), no.3, 351-399.
- [4] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. 39 (1997), 269-275, arXiv: q-alg/9601025v2.
- [5] Grisha Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, (2003), arXiv: math/0303109v1.
- [6] William P. Thurston, *Three dimensional manifolds, kleinian groups, and hyperbolic geometry*, Bull. AMS 6 (1982), no.3, 357-381.
- [7] Tudor Dimofte and Sergei Gukov, *Quantum Field Theory and the Volume Conjecture*, Contemporary Mathematics, Volume 541, 2011, p. 41-67.
- [8] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Modern Phys. Lett. A9 (1994), no. 5, 427-434, arXiv: hep-th/9310070v1.
- [9] А. И. Аптекарев, *Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности концов интервала ортогональности*, Матем. сб., 183:5 (1992), 43–62; англ. пер.: А. И. Aptekarev, *Asymptotics of orthogonal polynomials in a neighborhood of the endpoints of the interval of orthogonality*, Russian Acad. Sci. Sb. Math., 76:1 (1993), 35–50.
- [10] Д. Н. Туляков, *О локальной асимптотике отношения ортогональных полиномов в окрестности крайней точки носителя меры ортогональности*, Матем. сб., 192:2 (2001), 139–160; англ. пер.: D. N. Tulyakov, *Local asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials in the neighbourhood of an end-point of the support of the orthogonality measure*, Sb. Math., 192:2 (2001), 299–321.
- [11] Д. Н. Туляков, *Разностные уравнения с базисами степенного роста, возмущенные спектральным параметром*, Матем. сб., 200:5 (2009), 129–158; англ. пер.: D. N. Tulyakov, *Difference equations having bases with powerlike growth which are perturbed by a spectral parameter*, Sb. Math., 200:5 (2009), 753–781.



- [12] Д. Н. Туляков, *Асимптотика типа Планшереля–Ротаха для решений линейных рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами*, Матем. сб., 201:9 (2010), 111–158; англ. пер.: D. N. Tulyakov, *Plancherel–Rotach type asymptotics for solutions of linear recurrence relations with rational coefficients*, Sb. Math., 201:9 (2010), 1355–1402.
- [13] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, *Асимптотики многочленов Мейкснера и ядер Кристоффеля–Дарбу*, Тр. ММО, 73, МЦНМО, М., 2012, 87–132; англ. пер.: A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, *Asymptotics of Meixner polynomials and Christoffel–Darboux kernels*, Trans. Moscow Math. Soc., 2012, 2012, 67–106.

**Alexander I. Aptekarev** (*aptekaa@keldysh.ru*)

Keldysh Institute of Applied Mathematics,  
Russian Academy of Science,  
Miusskaya Pl.4, Moscow 125047, Russian Federation

**Dmitrii N. Tulyakov** (*dntulyakov@gmail.com*)

Keldysh Institute of Applied Mathematics,  
Russian Academy of Science,  
Miusskaya Pl.4, Moscow 125047, Russian Federation

## Оглавление

1	Введение . . . . .	3
1.1	Постановка задачи и формулировка результата . . . . .	3
1.2	Мотивация задачи . . . . .	4
1.3	Спектральная кривая однородной задачи . . . . .	6
2	Параметризация спектральной кривой . . . . .	7
2.1	Основные характеристики спектральной кривой . . . . .	7
2.2	"Проекция" спектральной кривой на сферу . . . . .	9
2.3	Координаты Хессе для параметра униформизации $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ . . . . .	11
2.4	Двулистное накрытие кривой Хессе . . . . .	12
2.5	Рациональные функции на $\mathcal{H}$ и сокращение множителей . . . . .	12
	Список литературы . . . . .	15