



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Абрашкин В.И., Воронов К.Е.,  
Пияков А.В., Дорофеев А.С.,  
Пузин Ю.Я., Сазонов В.В.,  
Семкин Н.Д., Филиппов А.С.,  
Чебуков С.Ю.

Определение  
вращательного движения  
малого космического  
аппарата «Аист-2Д» по  
данным научной аппаратуры  
КМУ-1

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Определение вращательного движения малого космического аппарата «Аист-2Д» по данным научной аппаратуры КМУ-1 / В.И.Абрашкин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 57. 37 с. doi:[10.20948/prepr-2017-57](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-57)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-57>

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК**  
**ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**им. М.В.Келдыша**

**В.И. Абрашкин, К.Е. Воронов, А.С. Дорофеев, А.В. Пияков, Ю.Я. Пузин,**  
**В.В. Сазонов, Н.Д. Сёмкин, А.С. Филиппов, С.Ю. Чебуков**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**  
**МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА «АИСТ-2Д»**  
**ПО ДАННЫМ НАУЧНОЙ АППАРАТУРЫ КМУ-1**

**Москва – 2017**

## Аннотация

Приведены результаты реконструкции вращательного движения малого спутника «Аист-2Д» по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ), полученным летом 2016 г. Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. В рамках этой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости интерполируются кусочно-линейными функциями, которые подставляются в кинематические дифференциальные уравнения для кватерниона, задающего переход от приборной системы координат спутника к инерциальной системе координат. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Решение этих уравнений, аппроксимирующее фактическое движение, находится из условия наилучшего (в смысле метода наименьших квадратов) согласования данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. При этом уточняются начальные условия аппроксимирующего решения, постоянные смещения в измерениях угловой скорости и углы, задающие матрицы перехода от собственных систем координат магнитометров к приборной системе координат спутника (в ней заданы измерения угловой скорости). Описанная методика позволяет реконструировать фактическое вращательное движение спутника одним решением кинематических уравнений на интервалах времени продолжительностью более 10 часов.

**V.I.Abrashkin, K.E.Voronov, A.S.Dorofeev, A.V.Piyakov, Yu.Ya.Puzin, V.V.Sazonov, N.D.Semkin, S.Yu.Chebukov. Determining the small spacecraft Aist-2D attitude motion by measurements of the equipment KMU-1.** The paper presents the results of reconstruction of the spacecraft Aist-2D attitude motion in summer 2016. The reconstruction is based on processing the measurements of two vectors: the spacecraft angular rate and the strength of the Earth magnetic field. The processing technique uses kinematical equations of the attitude motion of a rigid body. In its framework, the measurement data of both types, collected on a time interval, are processed jointly. The angular rate data are interpolated by piecewise linear functions and those functions are substituted in kinematical equations for components of the quaternion, which defines a transformation of the spacecraft coupled coordinate system to the inertial one. The equations obtained present the kinematical model of a spacecraft attitude motion. The solution of the equations, which approximates the real motion, is found by the least squares method from the condition of the best agreement between measured and calculated data of the magnetic strength. The technique allows reconstructing the attitude motion on time intervals more than 10 hours.

**1. Малый космический аппарат (МКА) «Аист-2Д»** был разработан АО «РКЦ «Прогресс» и выведен на орбиту 28.04.2016 г. в 05:01:21 декретного московского времени (ДМВ) с космодрома «Восточный» ракетой-носителем «Союз-2» этапа 1а с использованием блока выведения «Волга». Блоком выведения была сформирована целевая орбита МКА с параметрами: драконический период 5653.55 с, наклонение  $97.27^\circ$ , средняя высота 491.55 км, эксцентриситет 0.0004, угол между плоскостью орбиты и направлением на среднее Солнце  $348.75^\circ$ .

На борту МКА установлены: целевая оптико-электронная аппаратура дистанционного зондирования Земли «Аврора» среднего разрешения и комплекс научной аппаратуры (НА), включающий аппаратуру КМУ-1 (Компенсатор Микро Ускорений). Аппаратура КМУ-1 является результатом совместной разработки Института космического приборостроения Самарского университета им. С.П.Королева и АО «РКЦ «Прогресс».

Функционирование НА в орбитальном полете поддерживается бортовыми обеспечивающими системами: системой контроля и управления, системой энергопитания, системой обеспечения теплового режима, системой управления движением, бортовой кабельной сетью. Передача данных от НА осуществляется по высокоскоростной радиолинии на наземные средства управления, получения и обработки информации (НСУ ПОИ) АО «РКЦ «Прогресс».

Аппаратура КМУ-1 позволяет измерять магнитное поле на борту, определять остаточные низкочастотные микроускорения, отрабатывать способы управления ориентацией МКА. В состав аппаратуры входят блок электроники, три электромагнита, солнечный датчик, пять датчиков засветки и два трехкомпонентных магнитометра. Измерения магнитометров вместе со штатными измерениями угловой скорости и знанием орбитального движения позволяют реконструировать вращательное движение спутника и найти микроускорения. Аппаратура КМУ-1 получает измерения угловой скорости МКА и фазового вектора его центра масс, формирует пакеты программно-телеметрической информации, которая два раза в сутки передается в НСУ ПОИ.

Включение основного комплекта НА КМУ-1 было осуществлено в 09:40 ДМВ 9.06.2016 г. Основной комплект был выключен в 13:30 12.08.2016 г. Резервный комплект был включен в 14:30 ДМВ 12.08.2016 г. и работает до настоящего времени. Поступающая от НА информация ежедневно обрабатывается программными средствами автоматизированного рабочего места КМУ-1 для контроля оперативных параметров, характеризующих работоспособность НА и ее отдельных структурных элементов.

Состав данных, переданных НА, позволяет решать задачу реконструкции вращательного движения МКА с использованием методического и программного обеспечения, разработанного в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Ранее подобное программное обеспечение применялось для реконструкции вращательного движения спутников «Бион М-1» и «Фотон М-4» [1 – 3]. Его применение в случае МКА «Аист-2Д» потребовало доработки для определения матриц перехода от собственных систем координат магнитометров к приборной системе

координат спутника, в которой задаются измерения угловой скорости. Ниже приводятся первые результаты реконструкция вращательного движения МКА (для удобства называемого спутником), полученные по данным НА КМУ-1.

**2. Тестирование магнитных измерений.** Магнитометры, установленные на спутнике, будем называть магнитометр 1 и магнитометр 2. Магнитные измерения проводились на отрезках полета длиной около 10 часов. Оцифровка показаний магнитометров выполнялась в единые моменты времени с шагом  $21 \div 22$  с. Компоненты измеряемых векторов напряженности магнитного поля выдавались в собственных системах координат магнитометров. Собственные системы координат магнитометров 1 и 2 обозначим соответственно  $y_1 y_2 y_3$  и  $z_1 z_2 z_3$ . Система  $z_1 z_2 z_3$  – это штатная система координат магнитометра 2, система  $y_1 y_2 y_3$  переводится в штатную систему координат магнитометра 1 преобразованием  $y_1 \leftrightarrow y_2, y_3 \rightarrow -y_3$ . Оси системы  $y_1 y_2 y_3$  составляют углы менее  $5^\circ$  с одноименными осями приборной системы координат спутника  $x_1 x_2 x_3$  и острые углы с одноименными осями собственной системы координат магнитометра 2.

Результаты измерений обоих магнитометров, полученные на некотором интервале времени, обозначим

$$t_n, g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)}, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

Здесь  $g_i^{(n)}$  и  $h_i^{(n)}$  – результаты измерений  $i$ -х компонент магнитного поля магнитометрами 1 и 2 в их собственных системах координат в момент времени  $t_n$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . Тестирование измерений магнитометров выполнялось двумя способами.

*Первый способ* основан на предположении, что магнитометры измеряли в основном МПЗ. С учетом большого числа электрических цепей на борту спутника это предположение выглядит несколько наивным, однако, опыт магнитных измерений на двух предыдущих «Аистах» и ряде других спутников [1 – 6] позволял надеяться, что оно окажется адекватным. Этот способ состоял в сравнении модуля напряженности измеренного поля с модулем напряженности МПЗ, рассчитанной по аналитической модели IGRF. Сравнение модулей не требует знания ориентации магнитометра, надо знать только орбитальное движение спутника. Такой подход позволяет проверить данные измерений каждого магнитометра, используя минимальную дополнительную информацию.

Рассмотрим магнитометр 1. Будем считать, что его измерения (1) содержат две систематические ошибки. Одна ошибка вызвана неточным заданием масштабирующего коэффициента при оцифровке, другая – наличием постоянных смещений в измерениях. Правильные показания магнитометра в момент  $t_n$  должны были бы быть  $\bar{g}_i^{(n)} = \kappa_1 g_i^{(n)} - a_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Значения величин  $\kappa_1$  и  $a_i$  находились методом наименьших квадратов из условия минимума выражения

$$\Psi(\chi_1, a_1, a_2, a_3) = \sum_{n=1}^N \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\kappa_1 g_i^{(n)} - a_i]^2} - H^{(n)} \right\}^2,$$

где  $H^{(n)}$  – расчетные значения модуля напряженности МПЗ на спутнике в момент времени  $t_n$ . Величины  $H^{(n)}$  рассчитываются с использованием аналитической модели IGRF, модели орбитального движения SGP4 [7] и двухстрочных элементов орбиты спутника. Минимизация  $\Psi$  выполнялась методом Гаусса-Ньютона [8]. Найденное решение характеризовалось стандартным отклонением  $\sigma_H = \sqrt{\Psi_{\min}/(N-4)}$  ошибок согласования величин  $H^{(n)}$  и

$$g^{(n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\kappa_1 g_i^{(n)} - a_i]^2},$$

а также стандартными отклонениями определяемых параметров – квадратными корнями из соответствующих диагональных элементов матрицы  $\sigma_H^2 F^{-1}$ , где  $F$  – матрица системы нормальных уравнений, решаемых при реализации метода Гаусса – Ньютона. Матрица  $F$  вычисляется в точке минимума  $\Psi$  и приблизительно равна матрице квадратичной формы  $d^2\Psi/2$  в этой точке. Величины  $\bar{g}_i^{(n)} = \kappa_1 g_i^{(n)} - a_i$  с найденными  $\kappa_1$  и  $a_i$  будем считать скорректированными измерениями магнитометра 1.

Аналогичным образом находились скорректированные измерения второго магнитометра  $\bar{h}_i^{(n)} = \kappa_2 h_i^{(n)} - b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где корректирующие параметры  $\kappa_2$  и  $b_i$  находились из условия минимума выражения

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\kappa_2 h_i^{(n)} - b_i]^2} - H^{(n)} \right\}^2.$$

Найденное решение характеризовалось стандартным отклонением  $\sigma_H$  ошибок согласования величин  $H_n$  и

$$h^{(n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\kappa_2 h_i^{(n)} - b_i]^2},$$

а также стандартными отклонениями параметров  $\kappa_2$  и  $b_i$ .

Приведем результаты коррекции измерений на трех отрезках данных, перечисленных в табл. 1. Здесь указаны начальные точки  $t_1$  этих отрезков, числа  $N$  точек с измерениями и длины отрезков  $t_N - t_1$ . Корректирующие параметры  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  для этих отрезков и оценки точности их определения приведены в табл. 2, 3. Стандартные отклонения параметров указаны в скобках рядом с их значениями. Результаты сравнения модулей скорректированных измерений магнитного поля и расчетных значений модуля МПЗ иллюстрируются графиками на рис. 1, 2. Рис. 1 построен для магнитометра 1. Верхние графики на этом рисунке представляют собой ломаные. Здесь в каждой системе координат изображены две ломаные. Звенья одной из них соединяют соседние по времени точ-

ки  $(t_n, g^{(n)})$ , звенья другой ломаной аналогичным образом соединяют точки  $(t_n, H^{(n)})$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Эти ломаные практически совпадают, поэтому для наглядности на нижних графиках изображены ломаные, проходящие через точки  $(t_n, g^{(n)} - H^{(n)})$ . Рис. 2 аналогичным образом характеризует согласие величин  $h^{(n)}$  и  $H^{(n)}$ .

Данные в табл. 2, 3 и графики на рис. 1, 2 показывают, что измерения обоих магнитометров достаточно точно согласуются со значениями МПЗ из модели IGRF. При этом согласно значениям  $\sigma_H$  в табл. 2, 3 магнитометр 1 ока-

Таблица 1. Интервалы обработки магнитных измерений

№ инт.	Дата, 2016 г.	$t_1$ , UTC ч : мин : с	$N$	$t_N - t_1$ , мин
1	17 июня	19 : 03 : 04.0	1375	591.5
2	19 июня	05 : 12 : 54.0	1640	766.5
3	12 июля	18 : 53 : 31.0	1346	631.4

Таблица 2. Корректирующие параметры магнитометра 1

№ инт.	$\sigma_H, \gamma$	$\kappa_1(\sigma_{\kappa 1})$	$a_1(\sigma_{a1}), \gamma$	$a_2(\sigma_{a2}), \gamma$	$a_3(\sigma_{a3}), \gamma$
1	923	1.0026(0.0011)	294 (46)	4057 (147)	1205 (46)
2	971	1.0090(0.0007)	172 (44)	3586 (157)	1699 (39)
3	959	1.0108(0.0010)	347 (45)	3693 (147)	1324 (44)

Таблица 3. Корректирующие параметры магнитометра 2

№ инт.	$\sigma_H, \gamma$	$\kappa_2(\sigma_{\kappa 2})$	$b_1(\sigma_{b1}), \gamma$	$b_2(\sigma_{b2}), \gamma$	$b_3(\sigma_{b3}), \gamma$
1	1437	0.9585(0.0015)	2276 (118)	2350 (219)	3282 (65)
2	1384	0.9592(0.0010)	1654 (116)	4285 (183)	3642 (68)
3	1410	0.9723(0.0011)	1043 (134)	4541 (197)	3781 (74)

зался примерно в полтора раза точнее магнитометра 2. Однако исключение измерений магнитометра 2 из обработки было бы неосмотрительным. Как будет показано ниже, линейная комбинация измерений обоих магнитометров с правильно подобранными весами позволит точнее реконструировать движение спутника, чем использование показаний одного только магнитометра 1.

Из найденных корректирующих параметров ниже используются только параметры  $\kappa_1, \kappa_2$ . Во-первых, они определены с малой относительной ошибкой. Во-вторых, на последующих этапах обработки магнитных измерений используются более адекватные этим этапам способы оценки смещений. После того как параметры  $\kappa_1, \kappa_2$  найдены, величины  $g_i^{(n)}$  и  $h_i^{(n)}$  в (1) заменялись величинами  $\kappa_1 g_i^{(n)}$  и  $\kappa_2 h_i^{(n)}$ . Чтобы не вводить новых обозначений, последние ве-

личины будем обозначать  $g_i^{(n)}$ ,  $h_i^{(n)}$  и именно их считать измерениями магнитного поля.

*Второй способ* тестирования магнитных измерений используется в случае, когда оба магнитометра прошли первый тест. Это способ основан на следующих предположениях: 1) магнитометры измеряют одно и то же переменное поле, 2) постоянные составляющие поля в точках расположения магнитометров различны (или измерения магнитометров содержат постоянные смещения). В случае точной реализации этих предположений измерения магнитометра 2, пересчитанные в систему координат магнитометра 1, отличались бы от измерений последнего на постоянный вектор смещения. Из-за разного рода ошибок точного постоянства вектора смещения достичь невозможно, однако его вариации во времени должны быть малыми. Согласующие параметры – матрица перехода между системами координат магнитометров и постоянный вектор смещения – определялись методом наименьших квадратов. Методика определения этих параметров описана в [9] и состоит в следующем.

С высокой точностью должны выполняться соотношения

$$g_i^{(n)} = d_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} h_j^{(n)} \quad (i=1, 2, 3; n=1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

где  $d_i$  – компоненты постоянного вектора смещения в системе координат  $y_1 y_2 y_3$ ,  $c_{ij}$  – элементы матрицы перехода  $C$  от системы координат  $z_1 z_2 z_3$  к системе координат  $y_1 y_2 y_3$  ( $c_{ij}$  – косинус угла между осями  $y_i$  и  $z_j$ ). Если на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_N$  вектор магнитного поля совершал сложное вращательное движение относительно спутника, то для отыскания матрицы  $C$  и смещений  $d_i$  удобно воспользоваться методом наименьших квадратов. Применение этого метода означает принятие следующей гипотезы: ошибки в соотношениях (2) некоррелированы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии.

Следуя методу наименьших квадратов, ищем минимум выражения

$$Z = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 [g_i^{(n)} - \hat{g}_i^{(n)}]^2, \quad \hat{g}_i^{(n)} = d_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} h_j^{(n)}$$

по величинам  $c_{ij}$  и  $d_i$  при условии, что матрица  $C$  ортогональна и ее определитель равен 1. Эта задача решается с помощью стандартных процедур вычислительной линейной алгебры. Обозначим решение этой задачи  $C^\circ$ ,  $d^\circ = (d_1^\circ, d_2^\circ, d_3^\circ)^T$ . В линейном приближении окрестность решения параметризуется независимыми параметрами  $\xi_i, \theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):  $d_i = d_i^\circ + \xi_i$ ,  $C = E_\theta C^\circ$ , где

$$E_\theta = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Величины  $\theta_i$  представляют собой компоненты вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отличие матрицы  $C$  от ее оценки  $C^\circ$ . Эти компоненты относятся к системе координат  $y_1 y_2 y_3$ . Согласно методу наименьших квадратов параметры  $\xi_i, \theta_i$  образуют случайный вектор  $\eta \in R^6$  с нулевым математическим ожиданием. Ковариационная матрица  $K_\eta$  этого вектора выражается через матрицу  $P$  системы нормальных уравнений, получающейся линеаризацией исходной задачи по  $\eta$  в точке минимума выражения  $Z$ , и значение  $Z_{\min}$ :

$$K_\eta = \sigma_0^2 P^{-1}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{Z_{\min}}{3N-6}}.$$

Здесь  $\sigma_0$  – стандартное отклонение ошибок в соотношениях (2). Стандартные отклонения величин  $\xi_i$  и  $\theta_i$  – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы  $K_\eta$  – обозначим  $\sigma_{di}$  и  $\sigma_{\theta i}$ .

Сопоставление данных измерений магнитометров описанным методом было выполнено на трех интервалах времени, указанных в табл. 1. Ниже приводится решение описанной задачи для каждого интервала.

$$\text{Интервал 1: } d^\circ = \begin{vmatrix} 3367\gamma \\ -3930\gamma \\ -1278\gamma \end{vmatrix}, \quad C^\circ = \begin{vmatrix} 0.621768 & -0.783066 & -0.014565 \\ 0.556084 & 0.428293 & 0.712275 \\ -0.551520 & -0.450970 & 0.701749 \end{vmatrix};$$

$$\text{интервал 2: } d^\circ = \begin{vmatrix} 3248\gamma \\ -4542\gamma \\ -1276\gamma \end{vmatrix}, \quad C^\circ = \begin{vmatrix} 0.617691 & -0.786172 & -0.019766 \\ 0.560107 & 0.422152 & 0.712789 \\ -0.552031 & -0.451354 & 0.701100 \end{vmatrix};$$

$$\text{интервал 3: } d^\circ = \begin{vmatrix} 3612\gamma \\ -4131\gamma \\ -1330\gamma \end{vmatrix}, \quad C^\circ = \begin{vmatrix} 0.563216 & -0.785007 & -0.016598 \\ 0.563216 & 0.429375 & 0.705992 \\ -0.547082 & -0.446544 & 0.708025 \end{vmatrix}.$$

Оценки точности найденных решений приведены в табл. 4.

Таблица 4. Стандартные отклонения параметров согласования показаний магнитометров

№ инт.	$\sigma_0$	$\sigma_{d1}$	$\sigma_{d2}$	$\sigma_{d3}$	$\sigma_{\theta 1}$	$\sigma_{\theta 2}$	$\sigma_{\theta 3}$
	$\gamma$				град.		
1	1702	49	49	48	0.077	0.101	0.109
2	1633	43	42	40	0.065	0.086	0.090
3	1624	47	47	46	0.072	0.097	0.099

Наглядное представление о результатах сопоставления дают рис. 3 – 5. На рисунках (а) этой серии в каждой системе координат изображены две ломаные. Звенья одной из них последовательно соединяют точки  $(t_n, g_i^{(n)})$ , другая проходит через точки  $(t_n, \hat{g}_i^{(n)})$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . На вид эти ломаные очень близки. Чтобы наглядно показать их различие, на рисунках (б) изображены разности этих ломаных, т.е. ломаные с вершинами в точках  $(t_n, \Delta g_i^{(n)})$ , где  $\Delta g_i^{(n)} = g_i^{(n)} - \hat{g}_i^{(n)}$ . Анализ рисунков показывает, что различие между показаниями магнитометров достаточно велико.

Если из данных (1) сформировать взвешенную напряженность поля в системе  $y_1 y_2 y_3$ :

$$\tilde{g}_i^{(n)} = \frac{1}{1 + \rho} \left( \rho g_i^{(n)} + \sum_{j=1}^3 c_{ij} h_j^{(n)} \right) \quad (i = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

то полученные значения будут заметно лучше согласовываться со значениями IGRF в рамках первого теста, чем скорректированные данные обоих магнитометров, взятые по отдельности. Подставим величины  $\tilde{g}_i^{(n)}$  вместо  $g_i^{(n)}$  в выражение, задающее функцию  $\Psi$ , и положим

$$\sigma'_H = \sqrt{\frac{\Psi'_{\min}}{N-3}}, \quad \Psi'_{\min} = \min_{a_1, a_2, a_3} \Psi(1, a_1, a_2, a_3).$$

Для интервала 1 из табл.1 при  $\rho = 2$  получим  $\sigma'_H = 671\gamma$ , для интервала 2 при  $\rho = 1.7$  получим  $\sigma'_H = 673\gamma$ , в случае интервала 3 при  $\rho = 1.8$  будем иметь  $\sigma'_H = 654\gamma$ . Эти значения заметно лучше значений  $\sigma_H$  в табл. 2, 3.

Для решения задачи реконструкции движения спутника матрицу  $C$  параметризуем углами  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , которые введем посредством следующего условия. Система координат  $y_1 y_2 y_3$  может быть переведена в систему  $z_1 z_2 z_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\alpha$  вокруг оси  $y_2$ ; 2) на угол  $\beta$  вокруг оси  $y_3$ , получившейся после первого поворота; 3) на угол  $\gamma$  вокруг оси  $y_1$ , получившейся после первых двух поворотов и совпадающей с осью  $z_1$ . Элементы матрицы  $C$  выражаются через введенные углы с помощью формул

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos \alpha \cos \beta, & c_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ c_{21} &= \sin \beta, & c_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ c_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta, & c_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ c_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ c_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Углы, параметризующие указанные выше матрицы  $C^\circ$ , приведены в табл. 5. Здесь стандартные отклонения  $\sigma_\gamma$ ,  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_\beta$  (указаны в скобках рядом с оценками углов  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ ) вычислены по стандартным отклонениям  $\sigma_{\theta_i}$  на основании формул  $\theta_1 = c_{11}d\gamma + \sin\alpha d\beta$ ,  $\theta_2 = c_{21}d\gamma + d\alpha$ ,  $\theta_3 = c_{31}d\gamma + \cos\alpha d\beta$ .

Таблица 5. Оценки углов, задающих матрицу  $C^\circ$

№ инт.	$\gamma(\sigma_\gamma)$ , град.	$\alpha(\sigma_\alpha)$ , град.	$\beta(\sigma_\beta)$ , град.
1	- 58.981 (0.107)	41.574 (0.115)	33.785 (0.092)
2	- 59.364 (0.089)	41.787 (0.101)	34.063 (0.077)
3	- 58.693 (0.098)	41.459 (0.114)	34.279 (0.087)

**3. Методика реконструкции вращательного движения спутника.** Реконструкция вращательного движения спутника выполнялась по измерениям его угловой скорости и напряженности МПЗ. Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. Опишем математические модели и приведем основные соотношения, используемые в этой методике.

Для описания вращательного движения спутника используются две правые декартовы системы координат: приборная система  $x_1x_2x_3$ , в которой интерпретируются измерения угловой скорости, и система  $Y_1Y_2Y_3$ , в которой задаются двухстрочные элементы. Последняя переводится в гринвичскую систему координат поворотом по часовой стрелке вокруг оси  $Y_3$  на угол, равный среднему звездному времени. Таким образом, система  $Y_1Y_2Y_3$  весьма близка ко второй геоэквиаториальной системе координат эпохи даты. В частности, плоскость  $Y_1Y_2$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $Y_3$  – ось вращения Земли. Систему  $Y_1Y_2Y_3$  считаем инерциальной.

Положение приборной системы  $x_1x_2x_3$  относительно системы  $Y_1Y_2Y_3$  зададим нормированным кватернионом  $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ ,  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ . Кватернионная формула перехода между этими системами координат имеет вид

$$(0, Y_1, Y_2, Y_3) = Q \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ Q^{-1}.$$

Матрицу перехода от приборной системы к системе  $Y_1Y_2Y_3$  обозначим  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$ , где  $a_{ij}$  – косинус угла между осями  $Y_i$  и  $x_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты  $Q$  с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & a_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3), & a_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2), \\ a_{21} &= 2(q_2q_1 + q_0q_3), & a_{22} &= q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2, & a_{23} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1), \\ a_{31} &= 2(q_3q_1 - q_0q_2), & a_{32} &= 2(q_3q_2 + q_0q_1), & a_{33} &= q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2. \end{aligned}$$

Орбитальное движение спутника на представляющем интерес временном интервале описывается с помощью модели SGP4. Параметры модели определяются по данным двухстрочных элементов. Математическая модель вращательного движения спутника построена на основе кинематических уравнений, которым удовлетворяет кватернион  $Q$ . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2\dot{q}_0 &= -q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3\omega_3, \\ 2\dot{q}_1 &= q_0\omega_1 + q_2\omega_3 - q_3\omega_2, \\ 2\dot{q}_2 &= q_0\omega_2 + q_3\omega_1 - q_1\omega_3, \\ 2\dot{q}_3 &= q_0\omega_3 + q_1\omega_2 - q_2\omega_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – компоненты абсолютной угловой скорости спутника в приборной системе координат.

Измерения величин  $\omega_i$  выполнялись непрерывно в течение практически всего полета. Данные этих измерений представлены в цифровом виде на единой временной сетке с постоянным шагом 12 с. По этим данным построены непрерывные кусочно-линейные функции  $\Omega_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ), которые в узлах сетки совпадают с данными измерений величин  $\omega_i$ , а в промежутках между узлами линейны. Примеры графиков функций  $\Omega_i(t)$  приведены на рис. 6. Однако в уравнения (1) подставлялись не эти функции, а выражения

$$\omega_i = \Omega_i(t) + \chi_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (5)$$

где  $\chi_i$  – постоянные смещения в измерениях. Уравнения (4), (5) использовались на интервалах времени не более 12 часов, причем смещения  $\chi_i$  служили уточняемыми параметрами. В такой ситуации предположение о постоянстве этих величин оказалось вполне адекватным.

Опишем применение уравнений (4), (5) для обработки магнитных измерений, выполненных внутри отрезка  $I = \{t : t_a \leq t \leq t_b\}$ , на котором построены функции  $\Omega_i(t)$ . Узлы временной сетки с магнитными измерениями, как правило, не совпадают с узлами сетки, на которой заданы функции  $\Omega_i(t)$ . Пусть для определенности обрабатываются измерения магнитометра 1 из (1), причем  $[t_1, t_N] \subset (t_a, t_b)$ . Матрицу перехода от системы  $x_1x_2x_3$  к системе  $y_1y_2y_3$  обозначим  $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ , где  $b_{ij}$  – косинус угла между осями  $y_i$  и  $x_j$ . Эту матрицу параметризуем углами  $\gamma_1$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , по смыслу и формулам, принятым в п. 2 при параметризации матрицы  $C$  углами  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

Следуя методу наименьших квадратов, реконструкцией фактического движения спутника на отрезке  $I$  будем считать решение уравнений (4), (5), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=1}^N [g_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n)]^2 - N\Delta_i^2 \right\}, \quad (6)$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [g_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n)], \quad \hat{h}_i(t) = \sum_{k,j=1}^3 H_j(t) a_{jk}(t) b_{ik}.$$

Здесь  $\Delta_i$  – постоянные смещения в измерениях магнитометра 1,  $H_i(t)$  – расчетные значения компонент напряженности МПЗ в системе координат  $Y_1Y_2Y_3$  в момент времени  $t$ . Функции  $H_i(t)$  строятся с использованием модели орбитального движения SGP4 и аналитической модели МПЗ IGRF. Функционал (6) получен из функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений  $g_i^{(n)} \approx \hat{h}_i(t_n) + \Delta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ;  $n=1, 2, \dots, N$ ), посредством предварительной минимизации этого последнего функционала по смещениям  $\Delta_i$ . Минимизация  $\Phi$  выполняется по начальным условиям решения  $q_j(t_a)$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ), параметрам  $\chi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и углам  $\gamma_1$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . При этом учитывается условие нормировки

$$q_0^2(t_a) + q_1^2(t_a) + q_2^2(t_a) + q_3^2(t_a) = 1. \quad (7)$$

Для простоты письма все уточняемые величины объединим в один вектор  $z \in R^{10}$ . В принятых обозначениях  $\Phi = \Phi(z)$ ,  $z_* = \arg \min \Phi(z)$  – искомая оценка вектора  $z$ . Минимизация  $\Phi(z)$  выполнялась в несколько этапов разными методами. Начальные этапы, на которых  $\gamma_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 0$ , описаны в [1, 2]. Здесь ограничимся описанием заключительного этапа, когда эти углы уточняются.

Описание минимизации функции  $\Phi$  по  $z$  начнем с заключительного этапа, на котором применялся метод Гаусса – Ньютона [8]. На каждой итерации этого метода поправки  $\Delta q_j(t_a)$  к имеющимся значениям  $q_j(t_a)$  ищутся в виде (ср. уравнения (4))

$$\begin{aligned} \Delta q_0(t_a) &= -\frac{1}{2} [\theta_1 q_1(t_a) + \theta_2 q_2(t_a) + \theta_3 q_3(t_a)], \\ \Delta q_1(t_a) &= \frac{1}{2} [\theta_1 q_0(t_a) + \theta_3 q_2(t_a) - \theta_2 q_3(t_a)], \\ \Delta q_2(t_a) &= \frac{1}{2} [\theta_2 q_0(t_a) + \theta_1 q_3(t_a) - \theta_3 q_1(t_a)], \\ \Delta q_3(t_a) &= \frac{1}{2} [\theta_3 q_0(t_a) + \theta_2 q_1(t_a) - \theta_1 q_2(t_a)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Параметры  $\theta_i$  суть компоненты вектора бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения  $Q(t_a)$ . Эти пара-

метры и поправки  $\Delta\chi_i$  находятся из системы нормальных уравнений с матрицей  $\|G_{ij}\|_{i,j=1}^9$  и правой частью  $\|D_i\|_{i=1}^9$ :

$$G_{ij} = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial p_i} \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial p_j} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^3 B_{li} B_{lj},$$

$$D_i = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^3 [g_l^{(n)} - \hat{h}_l(t_n)] \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial p_i} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^3 \Delta_l B_{li},$$

$$\frac{\partial \hat{h}_1(t)}{\partial p_i} = \hat{h}_2(t) \frac{\partial \hat{\phi}_3(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_3(t) \frac{\partial \hat{\phi}_2(t)}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial \hat{h}_2(t)}{\partial p_i} = \hat{h}_3(t) \frac{\partial \hat{\phi}_1(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_1(t) \frac{\partial \hat{\phi}_3(t)}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial \hat{h}_3(t)}{\partial p_i} = \hat{h}_1(t) \frac{\partial \hat{\phi}_2(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_2(t) \frac{\partial \hat{\phi}_1(t)}{\partial p_i},$$

$$B_{li} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial p_i} \quad (l=1, 2, 3; i, j=1, 2, \dots, 9).$$

Здесь  $p_1, p_2, \dots, p_9$  – обозначения величин  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \gamma_1, \alpha_1, \beta_1$  в указанном порядке,  $\partial \hat{\phi}_l(t) / \partial p_i$  – псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных. Псевдопроизводная – это не частная производная некоторой функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами. Псевдопроизводная – это вектор, являющийся аналогом угловой скорости. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная используется для расчета производных по параметру. В обозначении  $\partial \hat{\phi}_l(t) / \partial p_i$  индекс  $l$  указывает векторную компоненту, индекс  $i$  – номер параметра, по которому выполняется дифференцирование. Приведем формулы для расчета псевдопроизводных в системе нормальных уравнений и расчета некоторых настоящих производных

$$\frac{\partial \hat{\phi}_l(t)}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^3 b_{lk} \frac{\partial \phi_k(t)}{\partial p_i}, \quad \left\| \frac{\partial \hat{\phi}_l}{\partial p_s} \right\| = - \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & 0 & \sin \alpha_1 \\ b_{21} & 1 & 0 \\ b_{31} & 0 & \cos \alpha_1 \end{array} \right\|$$

$$(l=1, 2, 3; i=1, 2, \dots, 6; s=7, 8, 9),$$

при этом (ср. выписанные выражения для  $\partial q_i / \partial p_j$  с кинематическими уравнениями в (4) и формулами (8))

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_0(t)}{\partial p_i} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_1(t) + \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_2(t) + \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_3(t) \right], \\ \frac{\partial q_1(t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_2(t) - \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_3(t) \right], \\ \frac{\partial q_2(t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_3(t) - \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_1(t) \right], \\ \frac{\partial q_3(t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} q_1(t) - \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} q_2(t) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{i1}(t)}{\partial p_j} &= a_{i2} \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_j} - a_{i3} \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_j}, & \frac{\partial b_{1k}(t)}{\partial p_s} &= b_{2k} \frac{\partial \hat{\varphi}_3(t)}{\partial p_s} - b_{3k} \frac{\partial \hat{\varphi}_2(t)}{\partial p_s}, \\ \frac{\partial a_{i2}(t)}{\partial p_j} &= a_{i3} \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_j} - a_{i1} \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_j}, & \frac{\partial b_{2k}(t)}{\partial p_s} &= b_{3k} \frac{\partial \hat{\varphi}_1(t)}{\partial p_s} - b_{1k} \frac{\partial \hat{\varphi}_3(t)}{\partial p_s}, \\ \frac{\partial a_{i3}(t)}{\partial p_j} &= a_{i1} \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_j} - a_{i2} \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_j}, & \frac{\partial b_{3k}(t)}{\partial p_s} &= b_{1k} \frac{\partial \hat{\varphi}_2(t)}{\partial p_s} - b_{2k} \frac{\partial \hat{\varphi}_1(t)}{\partial p_s}\end{aligned}$$

$$(i, k = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6; s = 7, 8, 9).$$

Значения псевдопроизводных  $\partial \varphi_l / \partial p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j} \omega_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_j} \omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_j} \omega_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j} \omega_3 + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_j} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j} \omega_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j} \omega_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial p_j}\end{aligned}$$

совместно с уравнениями (4), (5). Ненулевые начальные условия для  $\partial \varphi_l / \partial p_j$  в точке  $t_a$  равны 1 при  $p_j = \theta_l$  и равны 0 в остальных случаях.

Прибавление найденных поправок  $\Delta q_j(t_a)$  к имеющимся значениям  $q_j(t_a)$  нарушает условие (7), поэтому новый кватернион ориентации нормируется. Внесенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно  $\Delta q_j(t_a)$ .

Точность аппроксимации измерений и оценки  $z_*$  будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения оши-

бок в измерениях одной и той же векторной компоненты напряженности МПЗ равны. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (6). При сделанных допущениях  $z_*$  – случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению  $z$ . Вследствие условия (7) это распределение – несобственное, т. е. имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать характеризацию ошибок более наглядной, ошибки  $\Delta q_j(t_a)$  в задании компонент  $q_j(t_a)$  вектора  $z_*$  представим в виде (8), где теперь  $\theta_i$  образуют случайный вектор бесконечно малого поворота. Величины  $\theta_i$  имеют нулевые математические ожидания и вместе с ошибками остальных компонент  $z_*$  описываются ковариационной матрицей

$$K_z = \sigma^2 G^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^9, \quad \sigma^2 = \frac{\Phi(z_*)}{3N - 9}.$$

Здесь  $\sigma^2$  – оценка дисперсии ошибок в измерениях (1) магнитометра 1,  $G$  – матрица  $\| G_{ij} \|$ , вычисленная в точке  $z_*$ . Точность аппроксимации измерений будем характеризовать полученным значением  $\sigma$ , точность оценки  $z_*$  – стандартными отклонениями  $\sqrt{K_{11}}, \sqrt{K_{22}}, \dots, \sqrt{K_{99}}$ . Стандартные отклонения величин  $\theta_i, \chi_i, \gamma_1, \alpha_1$  и  $\beta_1$  обозначим соответственно  $\sigma_{\theta_i}, \sigma_{\chi_i}, \sigma_{\gamma_1}, \sigma_{\alpha_1}$  и  $\sigma_{\beta_1}$ .

Описанный подход практически без изменения применим в случае, когда вместо данных магнитометра 1 обрабатываются взвешенные данные (3) или данные магнитометра 2, пересчитанные в систему  $y_1 y_2 y_3$  по формулам (2). Реализован также вариант обработки данных магнитометра 2 без пересчета их в систему  $y_1 y_2 y_3$ . В этом варианте использовалась матрица перехода от системы  $x_1 x_2 x_3$  к системе  $z_1 z_2 z_3$  и уточнялись параметризирующие ее углы. Однако вариант обработки взвешенных данных дает наименьшее значение  $\sigma$ , и ниже приводятся результаты только этого варианта.

Вернемся к описанию методики. Чтобы обеспечить надежную сходимость описанного процесса, надо предусмотреть возможность его регуляризации. В данном случае регуляризация сводилась к предварительному использованию метода Левенберга – Марквардта [8] перед переходом к методу Гаусса – Ньютона. Почти всегда метод Левенберга – Марквардта плавно трансформировался в метод Гаусса – Ньютона, но иногда по окончании его работы метод Гаусса – Ньютона расходился. В таком случае в качестве  $z_*$  принимался результат, полученный методом Левенберга – Марквардта; он вполне обеспечивал требуемую точность реконструкции.

**4. Примеры реконструкции** вращательного движения спутника интервалах времени, рассматривавшихся в п. 2, приведены на рис. 7 – 9. На рисунках (а) этой серии изображены графики углов, характеризующих ориентацию спут-

ника. Здесь  $\lambda$  и  $\vartheta$  – углы отклонения оси  $x_2$  от орта  $\mathbf{s}$  направления «Земля – Солнце»,  $\mathbf{s} = (S_1, S_2, S_3)$  в системе  $Y_1Y_2Y_3$ . Углы вычисляются по формулам

$$\lambda = \arcsin \frac{a_{22}S_1 - a_{12}S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, \quad \vartheta = \arcsin \left[ a_{32} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} - \frac{S_3(a_{12}S_1 + a_{22}S_2)}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \right].$$

Плоскость отсчета угла  $\vartheta$  содержит ось  $Y_3$  и прямую «Земля – Солнце». Направление отсчета этого угла – на север. Плоскость отсчета угла  $\lambda$  параллельна плоскости  $Y_1Y_2$ , направление отсчета угла  $\lambda$  – на восток. Угол  $\phi$  – это угол между осью  $x_1$  приборной системы и плоскостью орбиты; при  $0 < \phi < \pi$  эта ось лежит в полупространстве, в которое направлен кинетический момент орбитального движения спутника. Функция  $\zeta(t)$  (нижний график) характеризует тень Земли: в тени  $\zeta < 0$ , на свету  $\zeta > 0$ . Эта функция рассчитывается по формуле

$$\zeta(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s} + \sqrt{|\mathbf{r}(t)|^2 - R_E^2},$$

где  $\mathbf{r}(t)$  – радиус-вектор центра масс спутника,  $R_E = 6378.14$  км – радиус Земли, принятой шаром. Чтобы пояснить, на каких отрезках времени спутник находился в тени Земли, рядом с графиком функции  $\zeta(t)$  проведена прямая  $\zeta = 0$ . Как видно из графиков углов  $\lambda$  и  $\vartheta$ , спутник на большей части каждого обработанного интервала находился в режиме солнечной ориентации, совершая значительные развороты на коротких отрезках времени.

Рис. 7 – 9 (б) содержат графики функций (5). Рисунки (в) и (г) характеризуют построенную аппроксимацию магнитных измерений. На рисунках (в) в каждой системе координат изображены две линии, которые практически сливаются. Одна из них – график функции  $\hat{h}_i(t)$  (см. (б)), а другая – ломаная, звенья которой соединяют соседние по времени точки  $(t_n, \tilde{g}_i^{(n)} - \Delta_i)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Здесь  $\tilde{g}_i^{(n)}$  – включенные в обработку измерения (3) при значениях  $\rho$ , указанных в п. 2. На рисунках (г) изображены аналогичные ломаные, соединяющие точки  $(t_n, \Delta h_i^{(n)})$ ,  $\Delta h_i^{(n)} = \tilde{g}_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n) - \Delta_i$ . Рис. 7 – 9 (д), (е), (ж) и (з) в увеличенном масштабе воспроизводят фрагменты графиков на рисунках (а), (б). Рисунки (д) и (е) иллюстрируют развороты спутника, рисунки (ж) и (з) – режим солнечной ориентации. Судя по графикам углов  $\lambda$  и  $\vartheta$ , ориентация на Солнце оси  $x_2$  спутника поддерживалась с требуемой точностью.

Укажем некоторые числовые характеристики результатов реконструкции. Значения стандартного отклонения  $\sigma$  и смещений  $\Delta_i$  приведены в подписях к рисункам 7 – 9 и в табл. 6. В табл. 7, 8 приведены оценки смещений в измерениях угловой скорости и оценки углов, задающих матрицу  $B$  (в скобках рядом с оценками указаны их стандартные отклонения).

Таблица 6. Результаты обработки магнитных измерений и точность определения начальной ориентации спутника

№ инт.	$\sigma$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\sigma_{\theta_1}$	$\sigma_{\theta_2}$	$\sigma_{\theta_3}$
	$\gamma$				рад.		
1	579	1851	1825	-782	0.0024	0.0043	0.0033
2	574	1310	2094	-1165	0.0025	0.015	0.0055
3	531	1658	1959	-792	0.0012	0.0031	0.0033

Таблица 7. Оценки смещений в измерениях угловой скорости

№ инт.	$\chi_1(\sigma_{\chi_1}), 10^{-6} \text{ с}^{-1}$	$\chi_2(\sigma_{\chi_2}), 10^{-6} \text{ с}^{-1}$	$\chi_3(\sigma_{\chi_3}), 10^{-6} \text{ с}^{-1}$
1	-2.628 (0.046)	-0.423 (0.059)	0.494 (0.062)
2	-2.328 (0.023)	0.915 (0.037)	0.106 (0.039)
3	-2.524 (0.044)	0.275 (0.056)	0.596 (0.054)

Таблица 8. Оценки углов, задающих матрицу  $B$

№ инт.	$\gamma_1(\sigma_{\gamma_1}), \text{ рад.}$	$\alpha_1(\sigma_{\alpha_1}), \text{ рад.}$	$\beta_1(\sigma_{\beta_1}), \text{ рад.}$
1	0.019 (0.0022)	-0.047 (0.0044)	-0.037 (0.0031)
2	0.006 (0.0021)	-0.083 (0.015)	-0.051 (0.0054)
3	0.018 (0.0018)	-0.046 (0.0038)	-0.035 (0.0028)

Совместный анализ стандартных отклонений и собственных векторов матрицы  $G$  (см. п. 3), отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер неопределенности, которая возникает при реконструкции движения. Анализ основан на формуле

$$G^{-1} = \sum_{k=1}^9 \left( \frac{u_k}{\sqrt{\mu_k}} \right) \left( \frac{u_k}{\sqrt{\mu_k}} \right)^T,$$

где  $\mu_k$  и  $u_k$  – собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы  $G$ . Из этой формулы следует, что наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие компоненты векторов  $u_k / \sqrt{\mu_k}$ . Пусть собственные числа  $\mu_k$  упорядочены по возрастанию:  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_9$  и  $\mu_1 \ll \mu_2$ . В таком случае достаточно проанализировать только компоненты вектора  $u_1$ . Для обработанных интервалов собственные числа  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и компоненты вектора  $u_1$  приведены в табл. 9 (в расчетах использовались единицы измерения времени 1000с, напряженности магнитного поля 50000  $\gamma$ ; числа  $\mu_7, \mu_8, \mu_9$  имеют порядок 5). Как видно из этой таблицы,  $\mu_1 \ll \mu_2$ , компоненты  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  весьма малы, а компоненты  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  примерно совпадают с компонентами  $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$ . Эти соотношения поясняют малость стан-

дартных отклонений  $\sigma_{\chi_i}$  в табл. 7 и примерное совпадение стандартных отклонений  $\sigma_{\theta_1}$  и  $\sigma_{\gamma_1}$ ,  $\sigma_{\theta_2}$  и  $\sigma_{\alpha_1}$ ,  $\sigma_{\theta_3}$  и  $\sigma_{\beta_1}$  в табл. 6, 8. Такое совпадение говорит о связи ошибок в определении начальных условий  $q_j(t_a)$  и углов  $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$ .

Таблица 9. Минимальные собственные числа и отвечающие им собственные векторы матрицы

№ инт.	1	2	3
$\mu_1$	2.2487	0.2693	2.7409
$\mu_2$	22.501	16.577	39.487
$\theta_1$	-0.2623950	-0.0644294	0.0612275
$\theta_2$	0.5344448	0.6646836	0.4550442
$\theta_3$	0.3806833	0.2350053	0.4972072
$\chi_1$	-0.0008006	-0.0000295	0.0001163
$\chi_2$	0.0005695	-0.0000721	0.0018059
$\chi_3$	-0.0019524	-0.0001282	0.0019804
$\gamma_1$	-0.2516316	-0.0304608	-0.2397089
$\alpha_1$	0.5449980	0.6660038	0.5707202
$\beta_1$	0.3745020	0.2330840	0.3984744

Обработка сокращенных интервалов измерений показала, что для надежного определения углов  $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$  необходимо рассматривать интервалы, содержащие некоторое число интенсивных разворотов спутника.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00143).

### Литература

1. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника «Бион М-1» средствами аппаратуры ГРАВИТОН // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 4. С. 306–319.
2. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Вращательное движение спутника «Фотон М-4» // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 4. С. 315–322.
3. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Упрощенная методика определения вращательного движения спутника по бортовым измерениям угловой скорости и магнитного поля Земли // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 5. С. 402–414.
4. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое враща-

тельное движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 5. С. 450-470.

5. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков А.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Филиппов А.С., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение малого спутника «Аист» // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 5. С. 395–408.

6. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков А.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Филиппов А.С., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение опытного образца малого космического аппарата «Аист» // Космические исследования. 2017. Т. 55. № 2. С. 135–149.

7. Hoots F.R., Roehrich R.L. Models for propagation of NORAD element sets. Spacetrack report No. 3. 1988.

8. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., Мир, 1985.

9. Панкратов В.А., Сазонов В.В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 42.

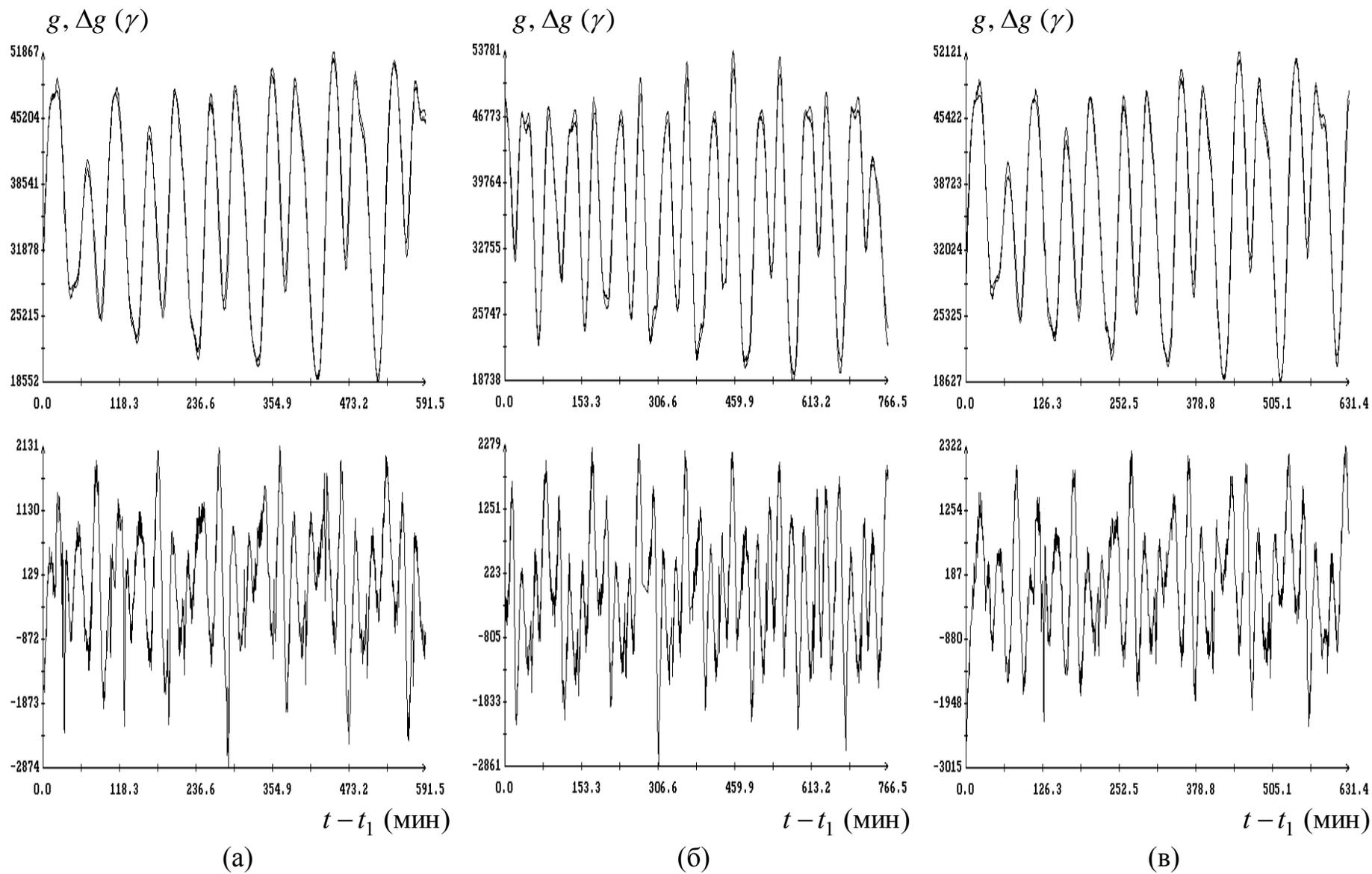


Рис. 1. Сравнение модуля измерений магнитометра 1 с модулем напряженности МПЗ (модель IGRF):  
 (а) – на интервале 1; (б) – на интервале 2, (в) – на интервале 3.

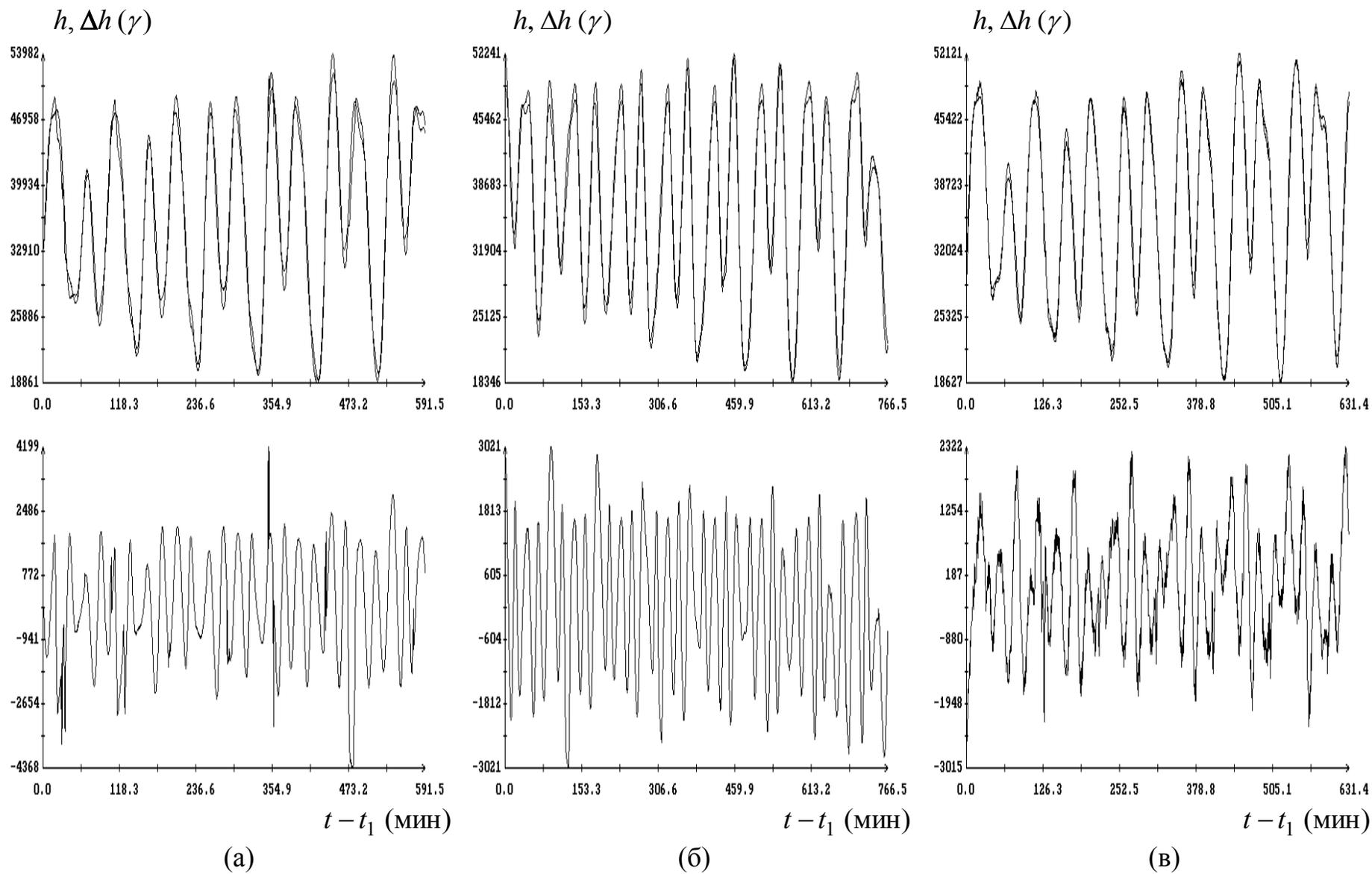
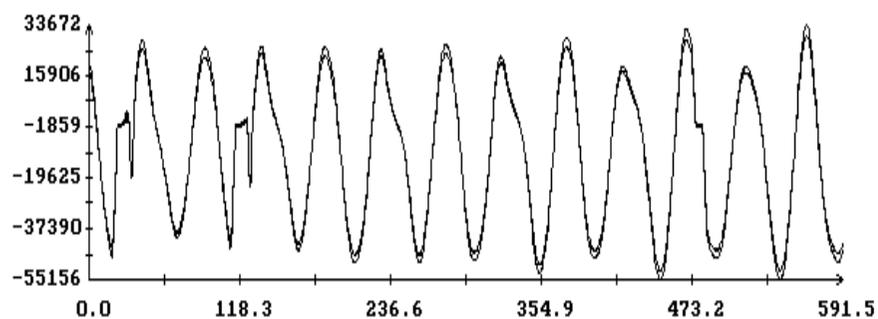
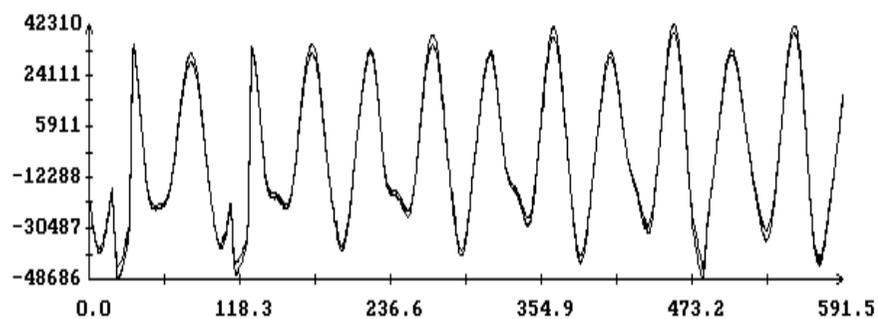
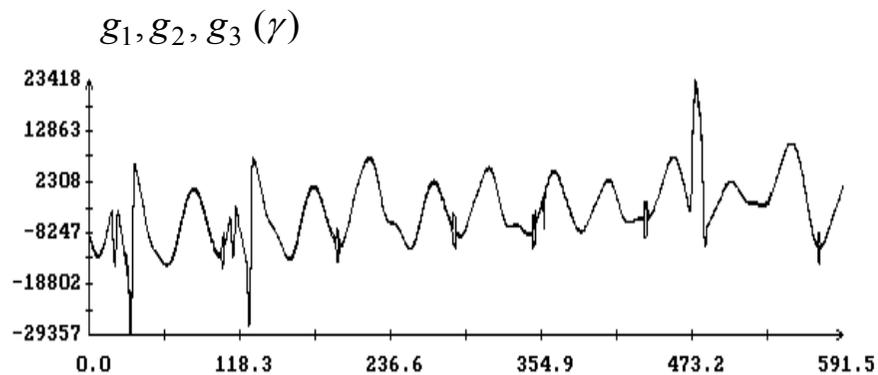
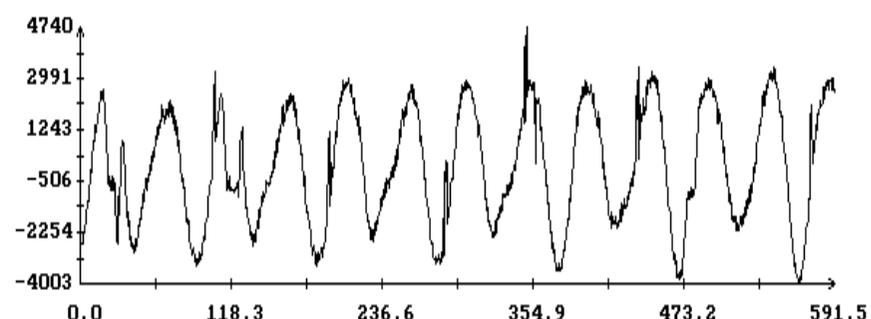
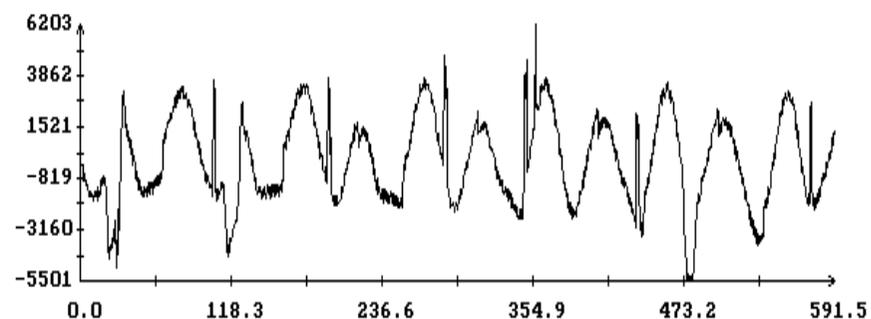
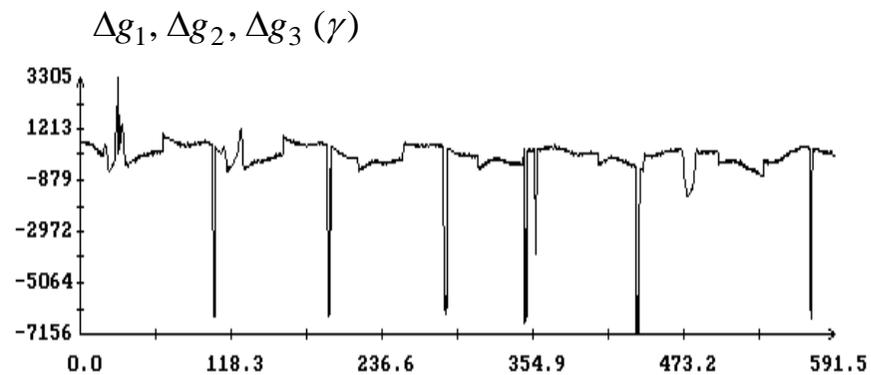


Рис. 2. Сравнение модуля измерений магнитометра 2 с модулем напряженности МПЗ (модель IGRF):  
 (а) – на интервале 1; (б) – на интервале 2, (в) – на интервале 3.



$t - t_1$  (МИН)

(а)



$t - t_1$  (МИН)

(б)

Рис. 3. Интервал 1; (а) – согласованные данные измерений магнитометров 1, 2 в системе координат магнитометра 1; (б) – разности компонент согласованных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1.

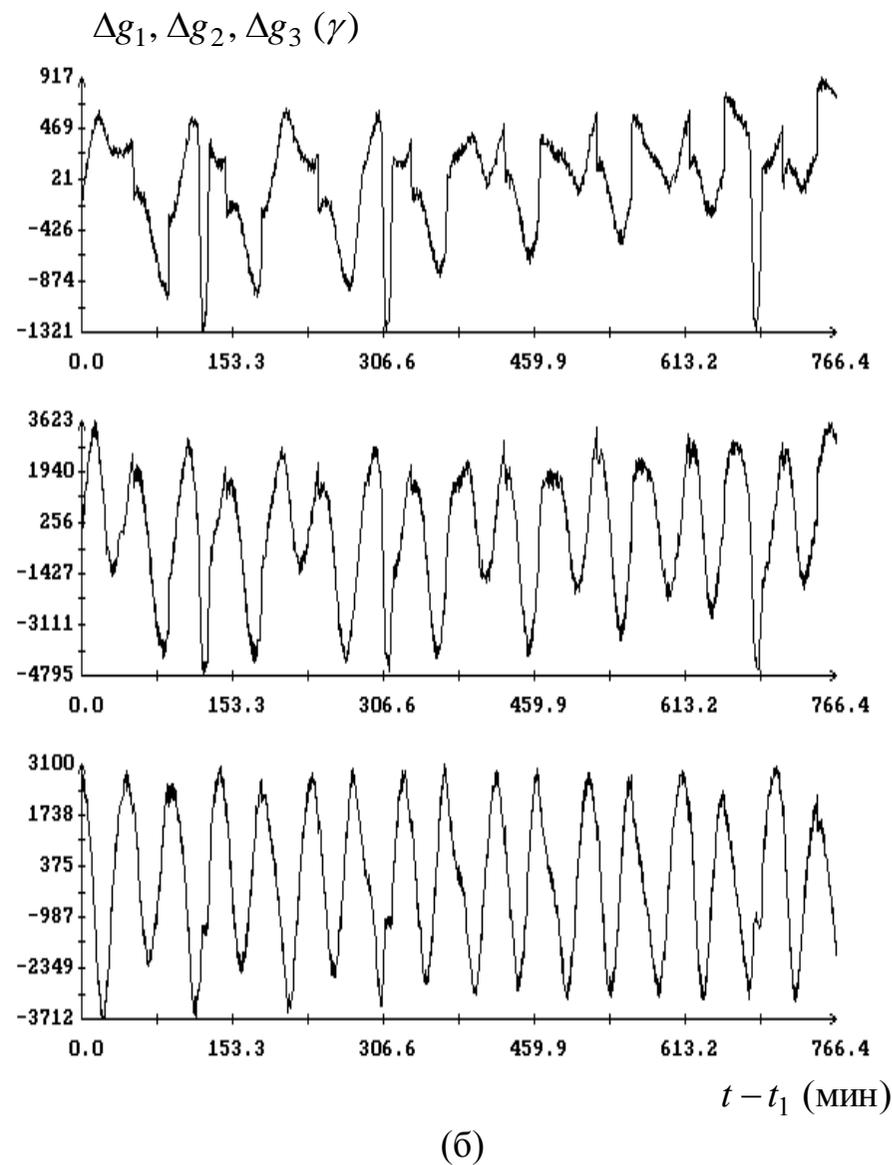
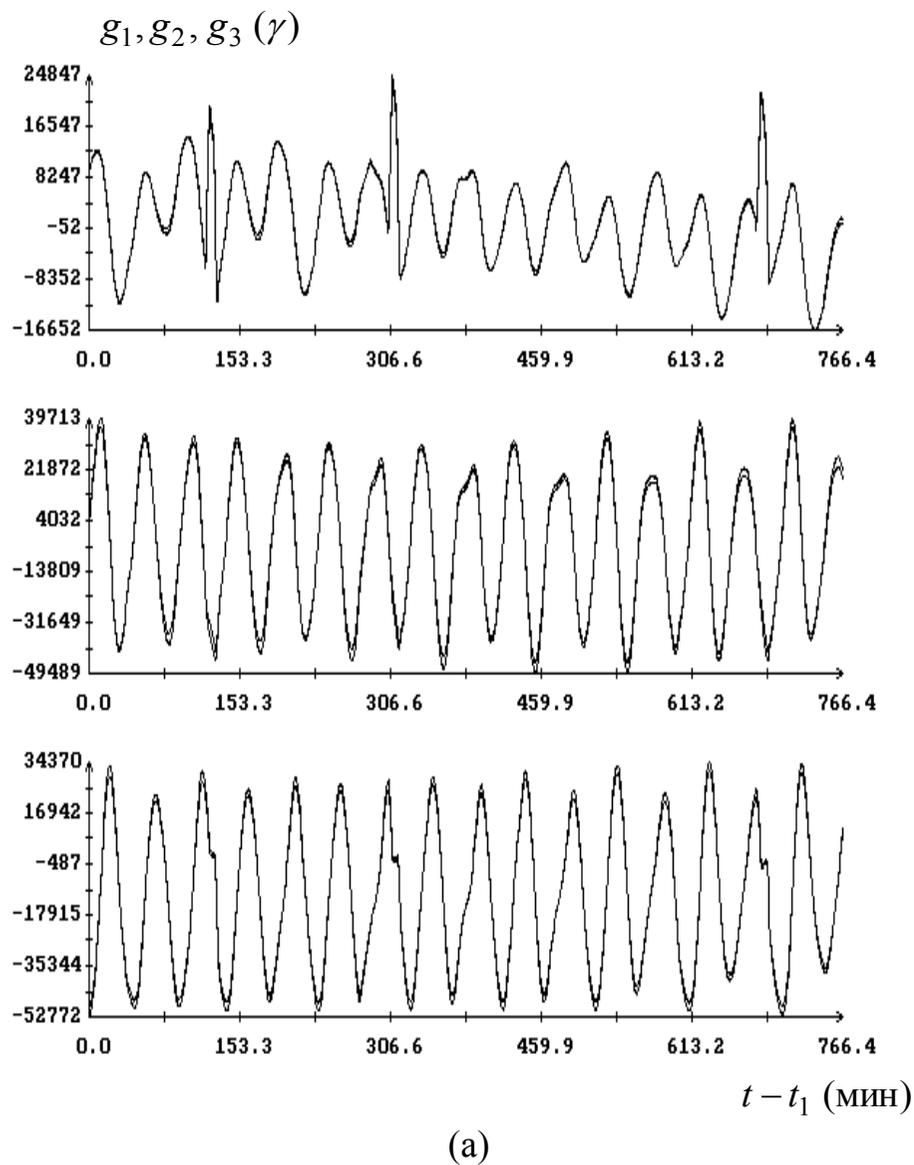
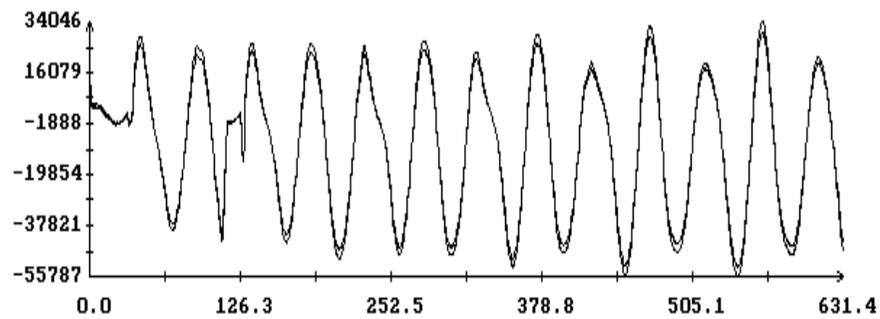
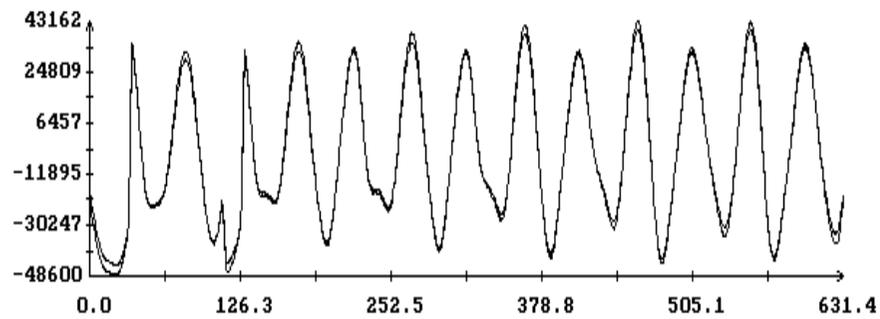
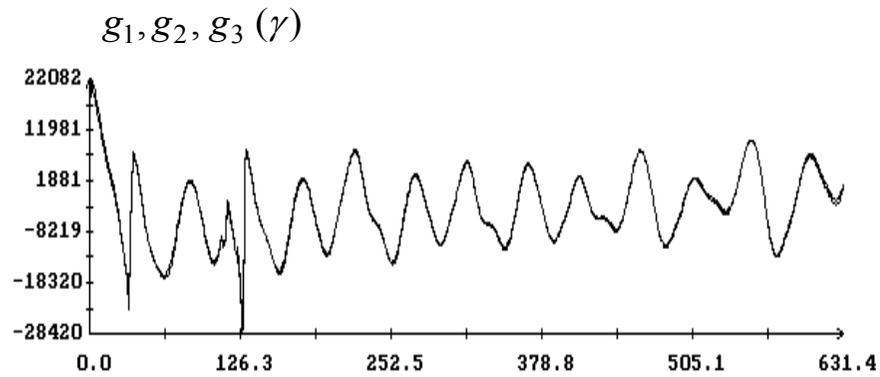
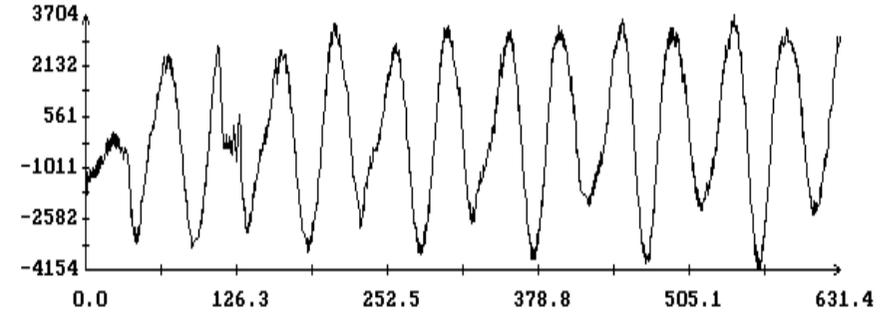
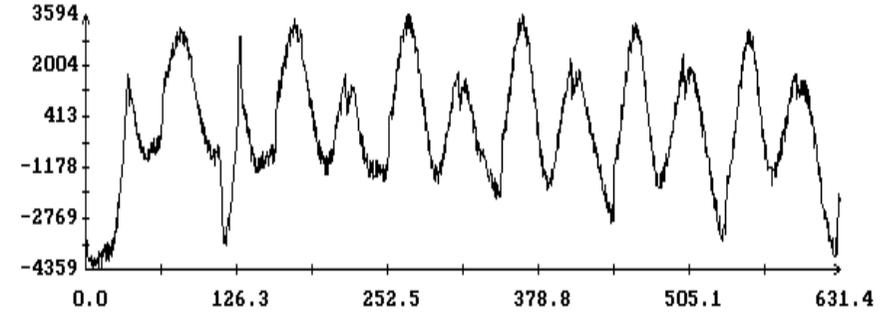
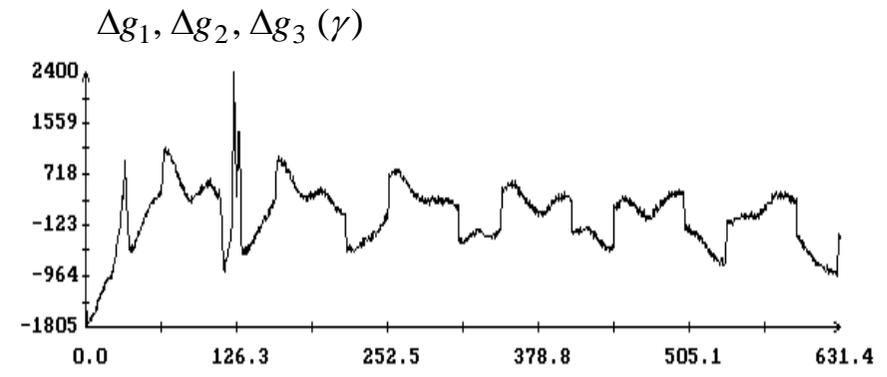


Рис. 4. Интервал 2; (а) – согласованные данные измерений магнитометров 1, 2 в системе координат магнитометра 1; (б) – разности компонент согласованных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1.



$t - t_1$  (МИН)

(а)



$t - t_1$  (МИН)

(б)

Рис. 5. Интервал 3; (а) – согласованные данные измерений магнитометров 1, 2 в системе координат магнитометра 1; (б) – разности компонент согласованных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1.

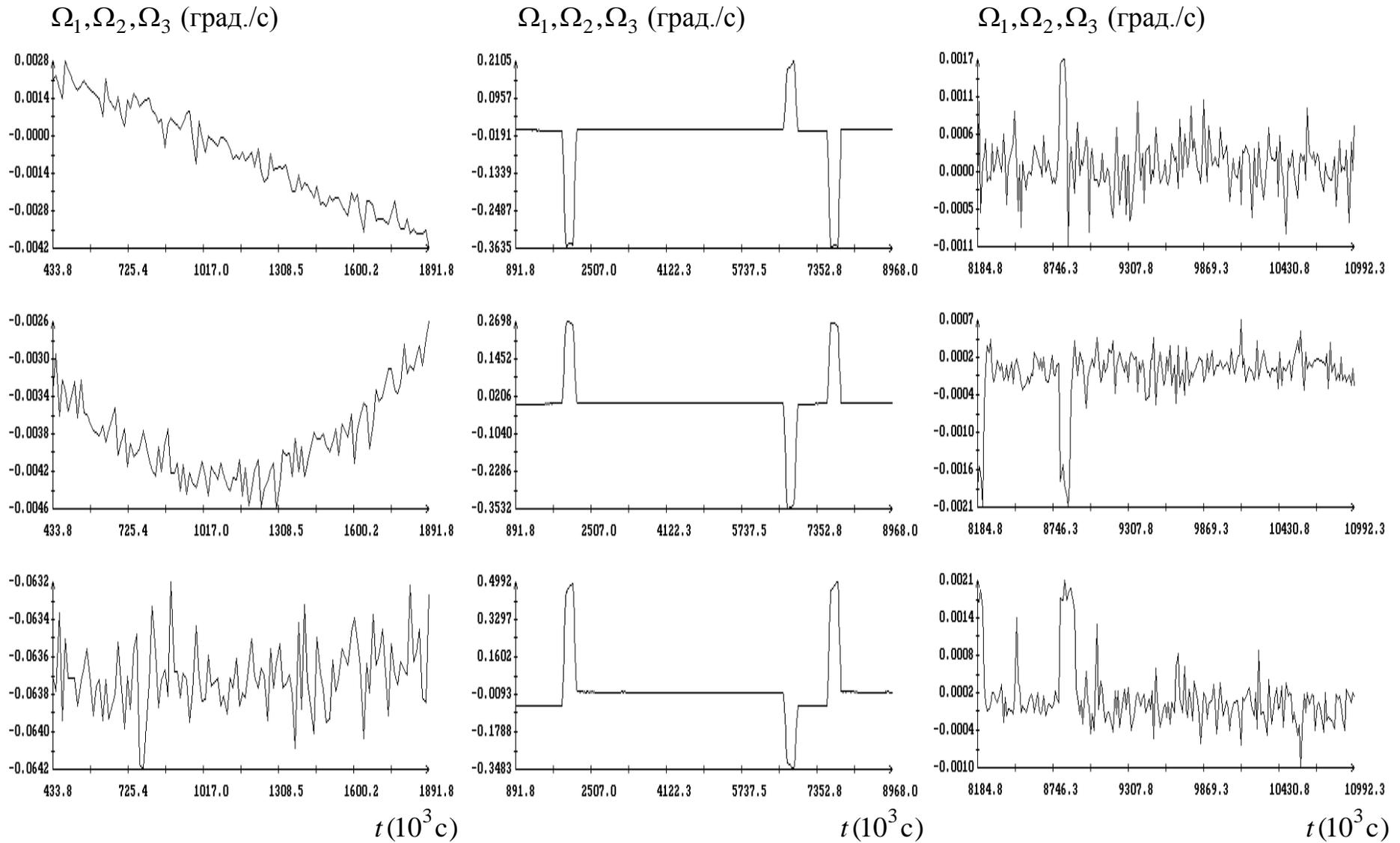
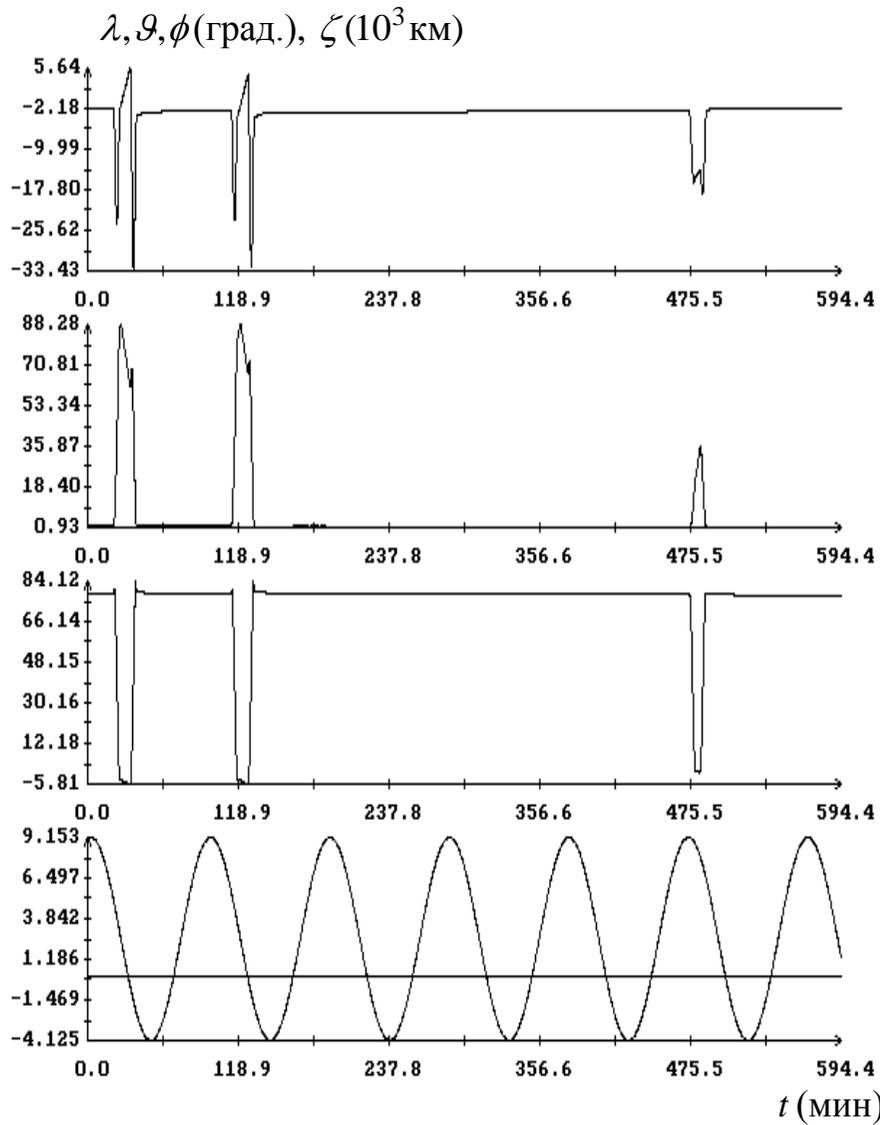
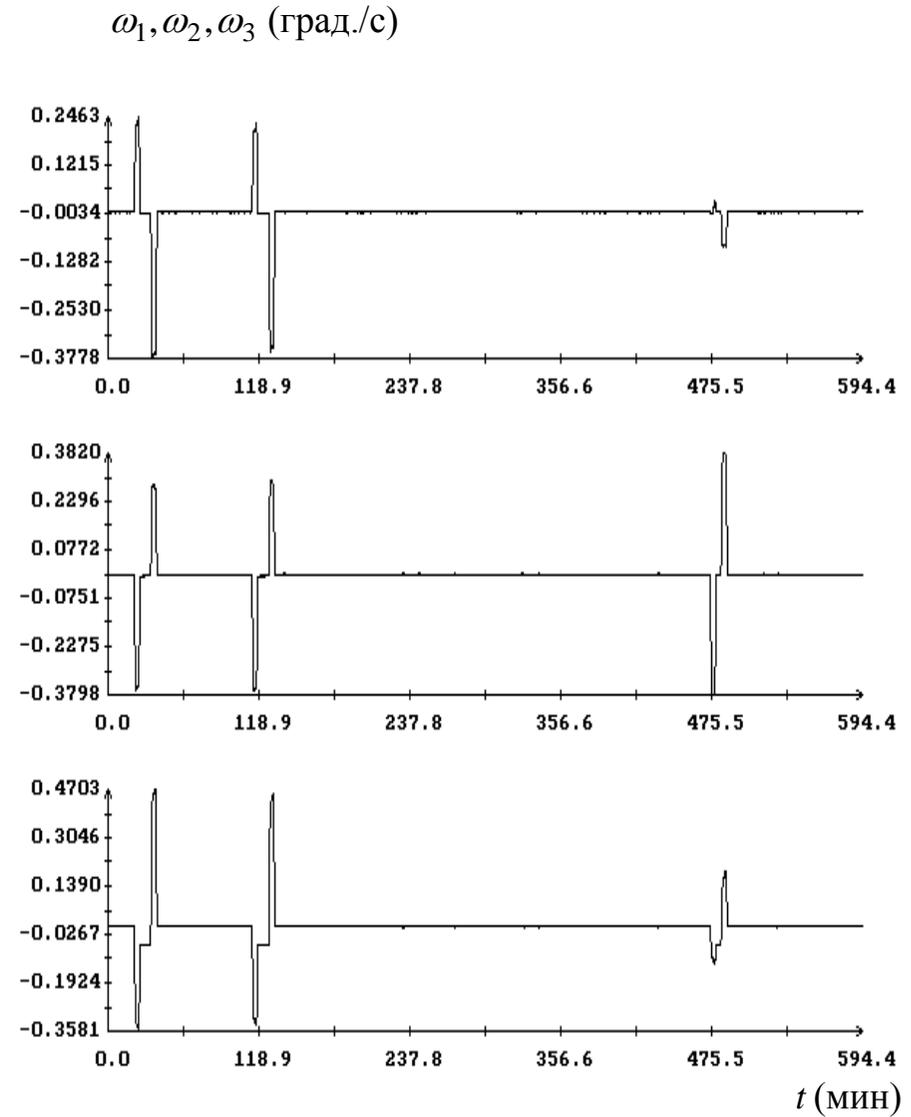


Рис. 6. Примеры функций  $\Omega_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), интерполирующих измерения угловой скорости. Момент  $t = 0$  соответствует 18:53:28.7 UTC 12.07.2016.

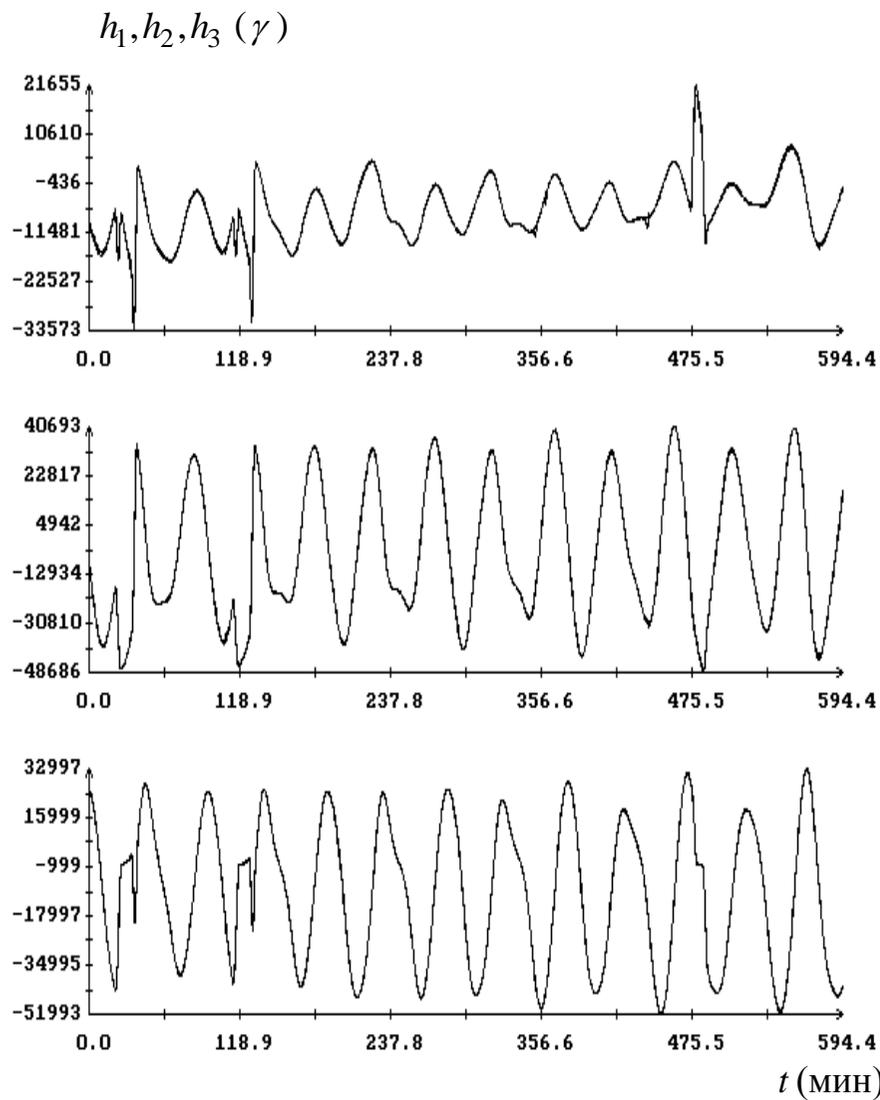


(a)

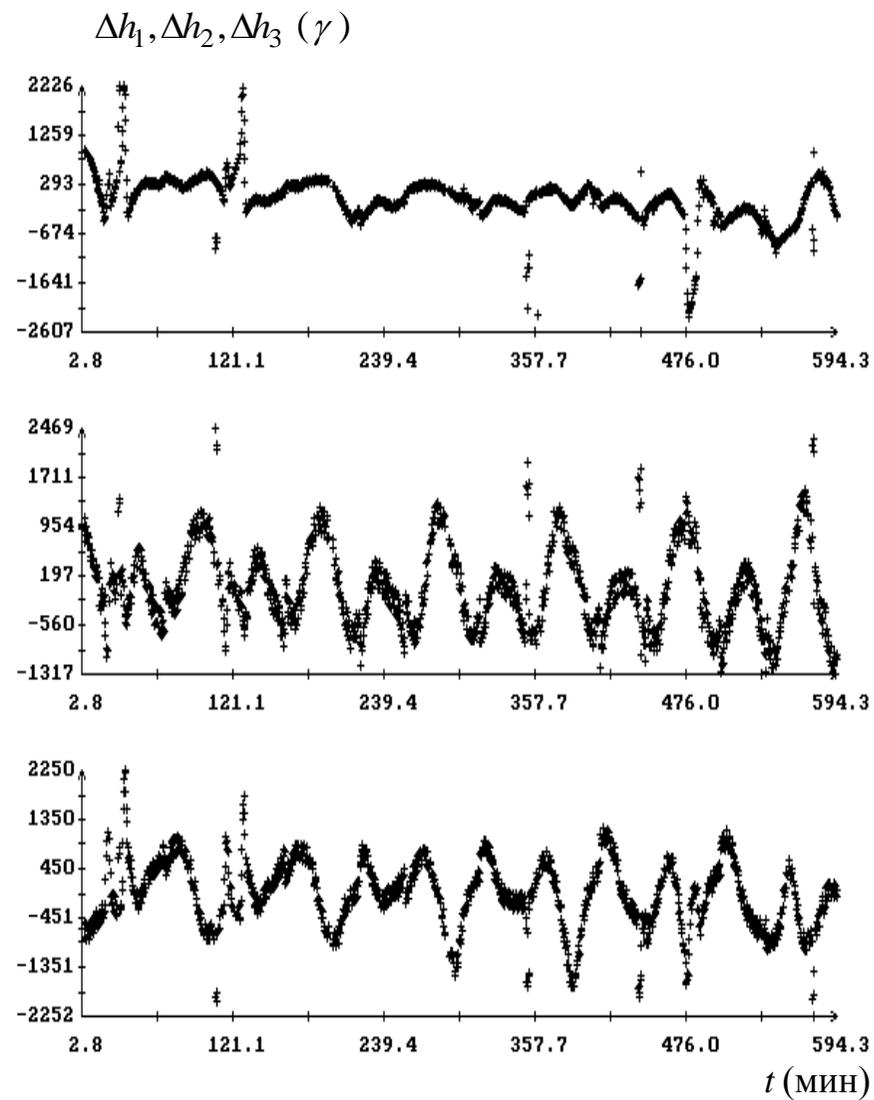


(б)

Рис. 7. Движение КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 19:00:18.7 UTC 17.06.2016.

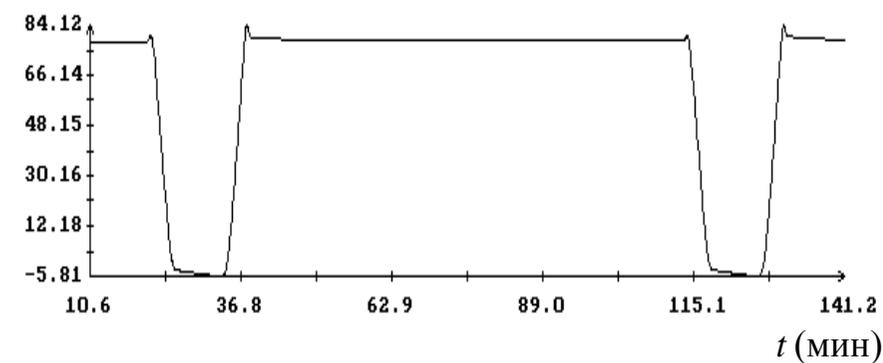
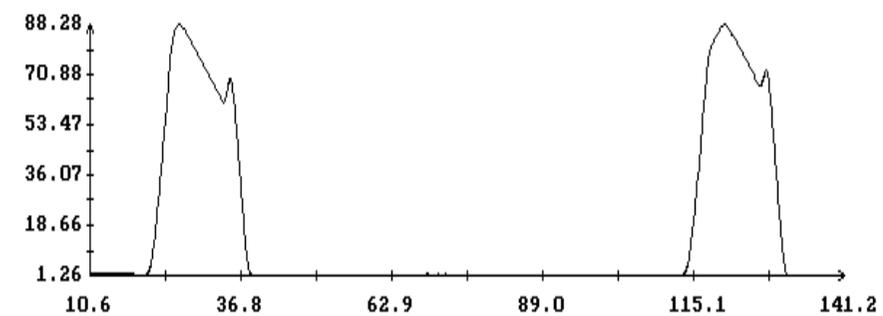
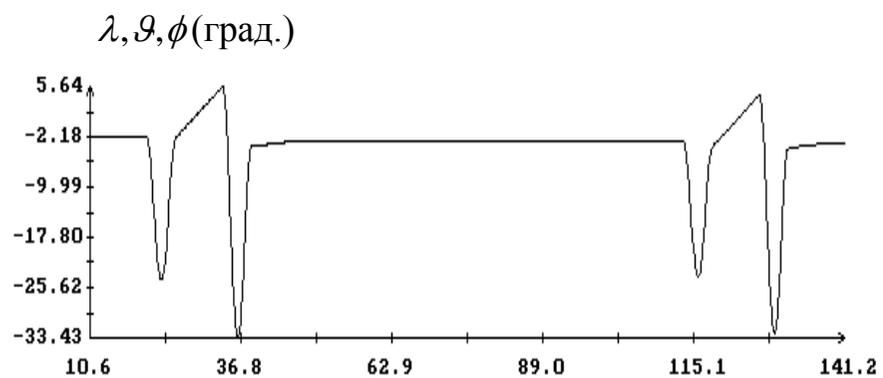


(В)

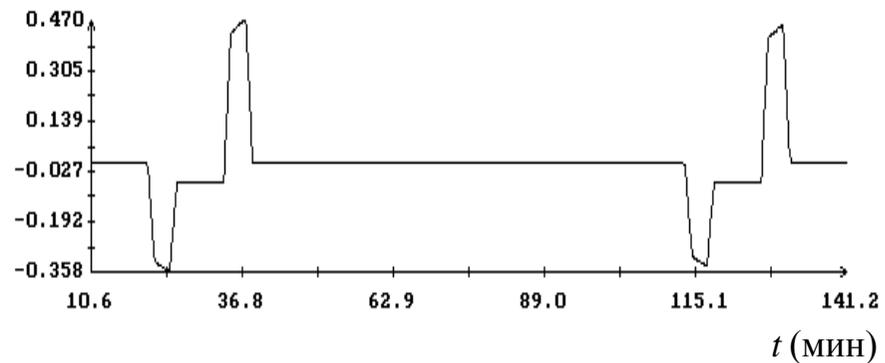
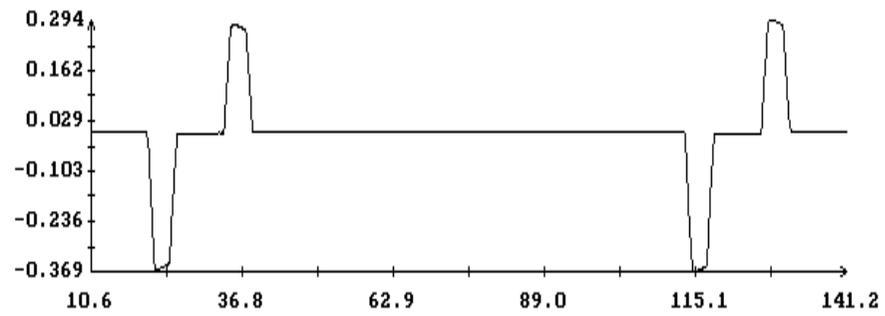
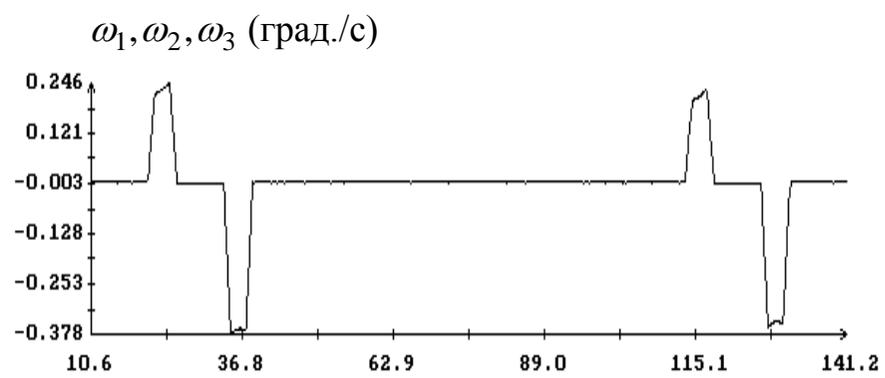


(Г)

Рис. 7. Движение КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 19:00:18.7 UTC 17.06.2016,  $\sigma = 579\gamma$ , смещения магнитных измерений:  $\Delta_1 = 1851\gamma$ ,  $\Delta_2 = 1825\gamma$ ,  $\Delta_3 = -782\gamma$ .



(д)



(е)

Рис. 7. Развороты КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 19:00:18.7 UTC 17.06.2016.

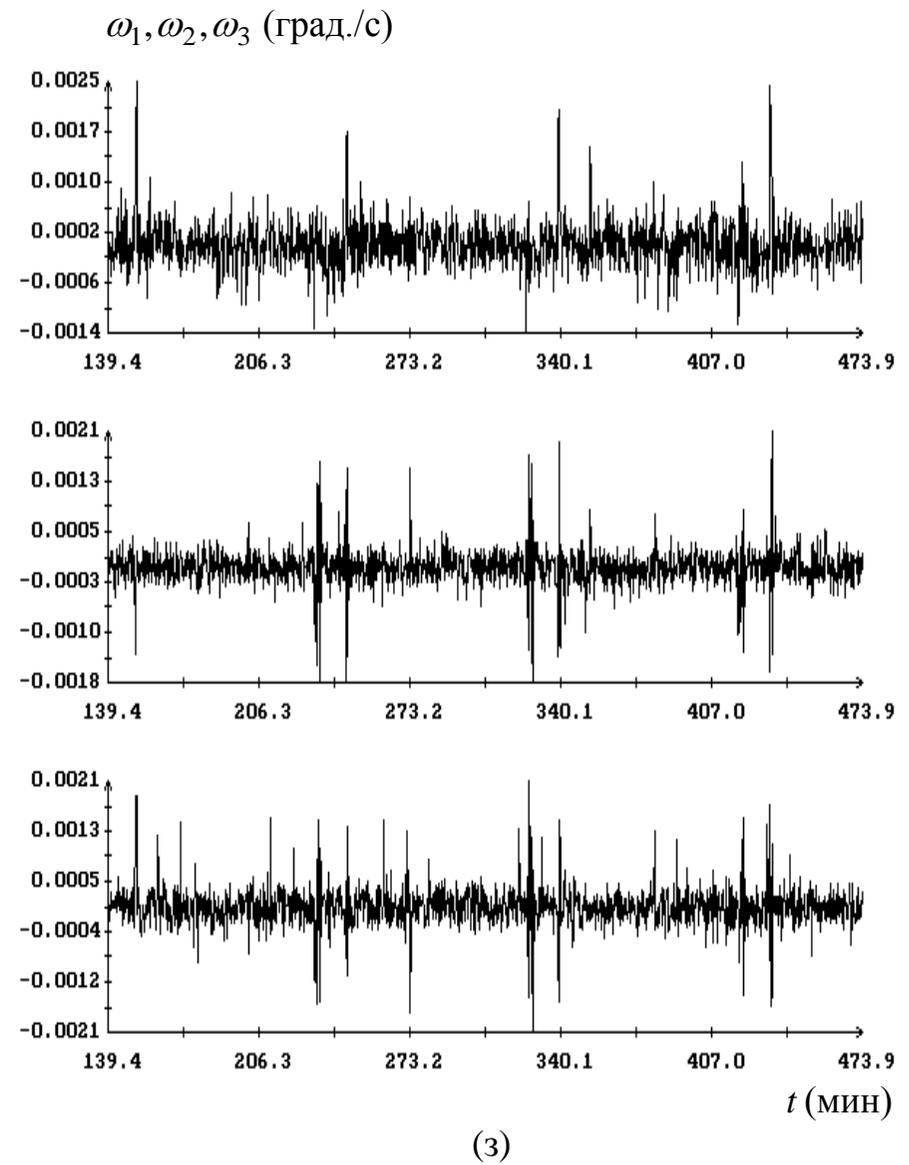
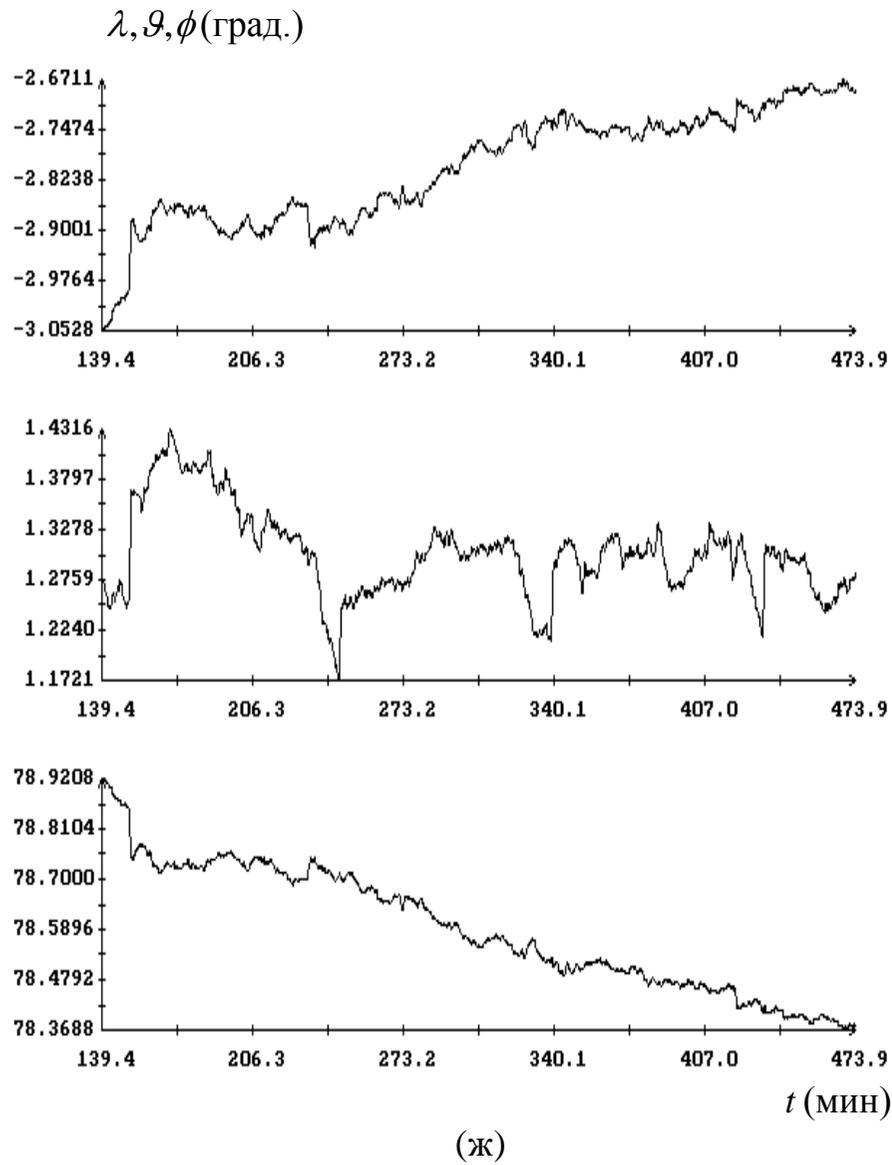
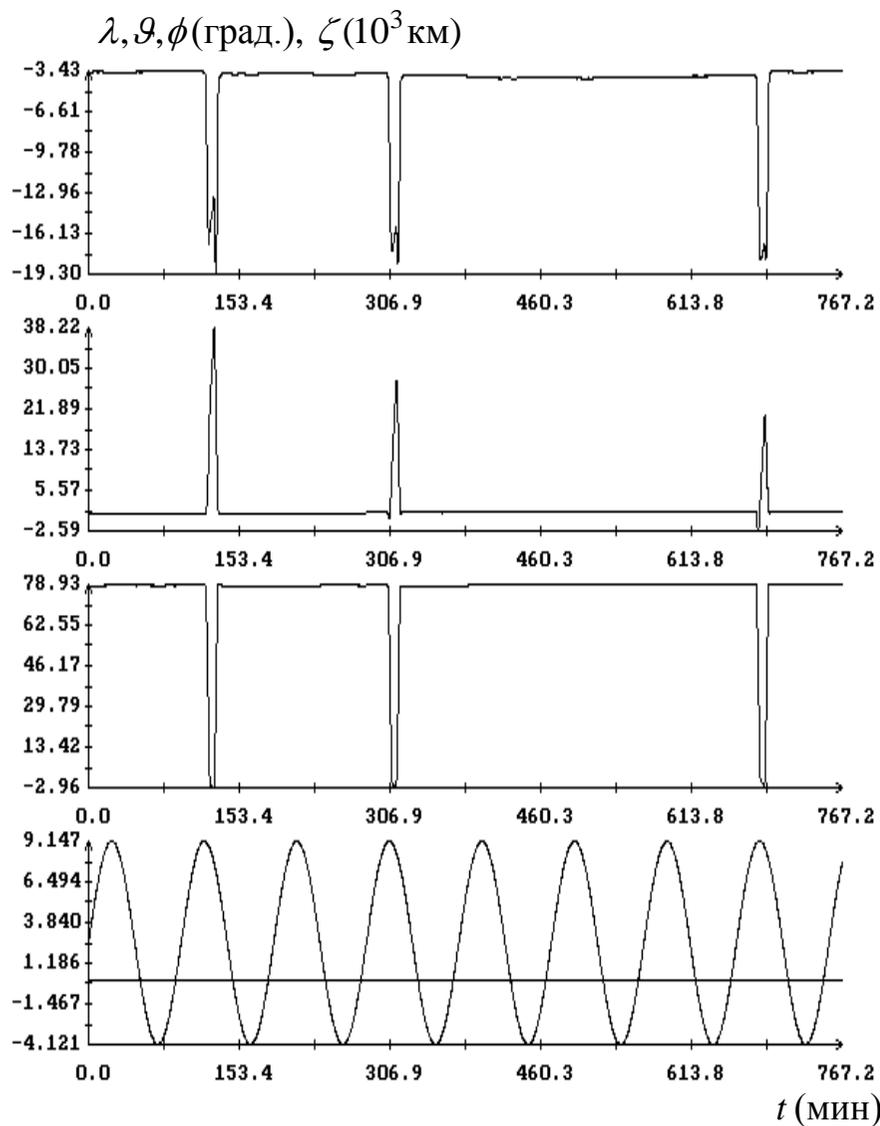
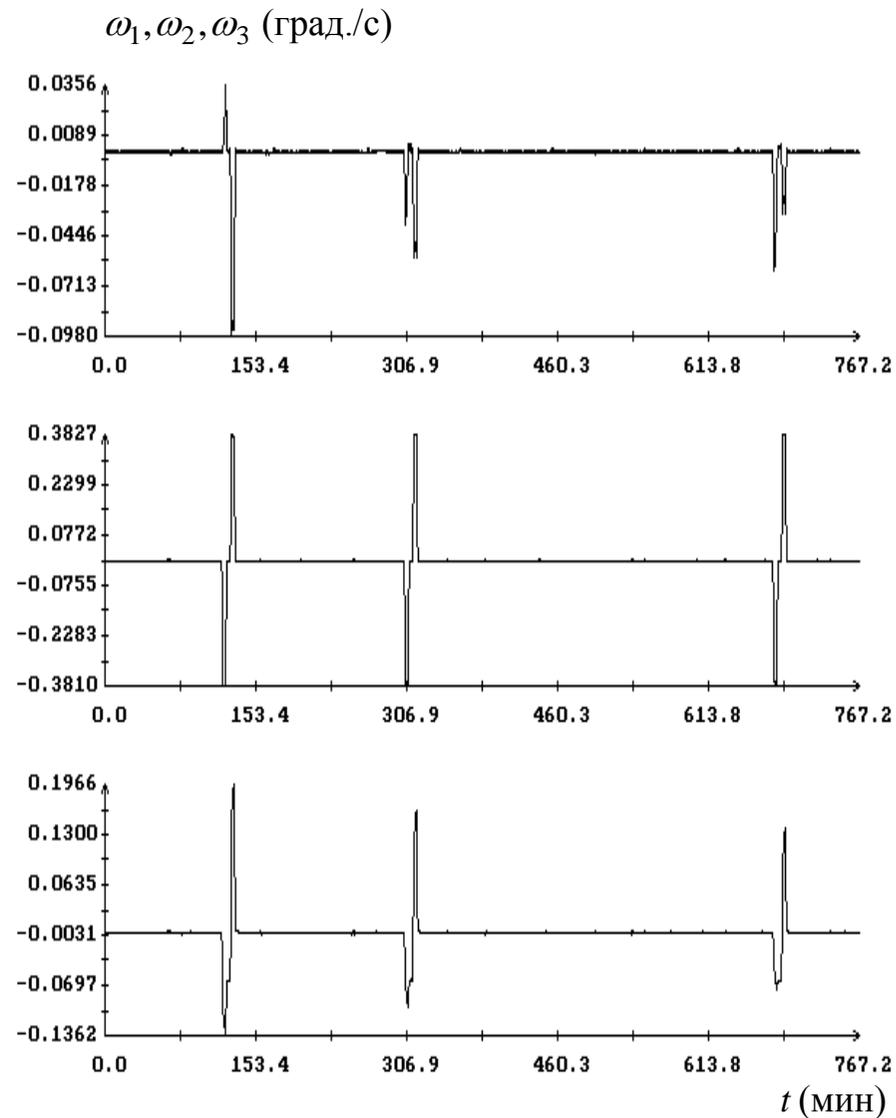


Рис. 7. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 19:00:18.7 UTC 17.06.2016.

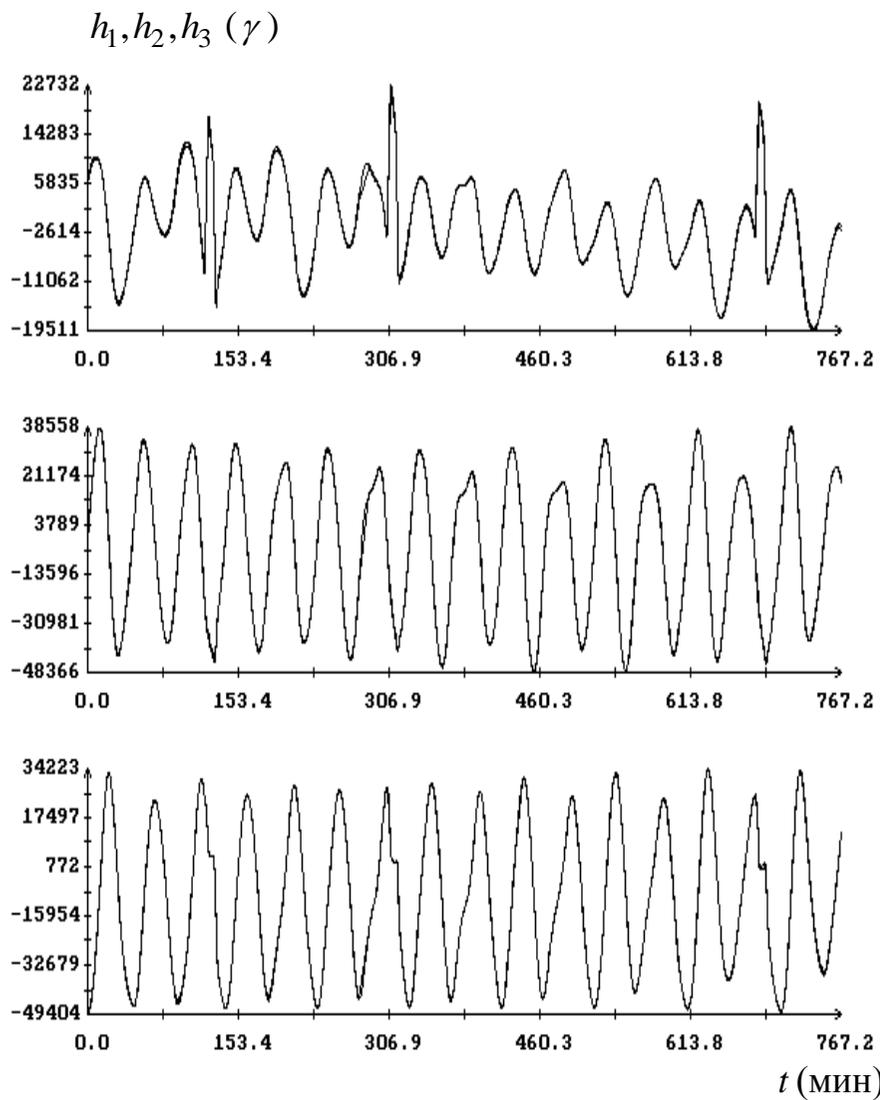


(а)

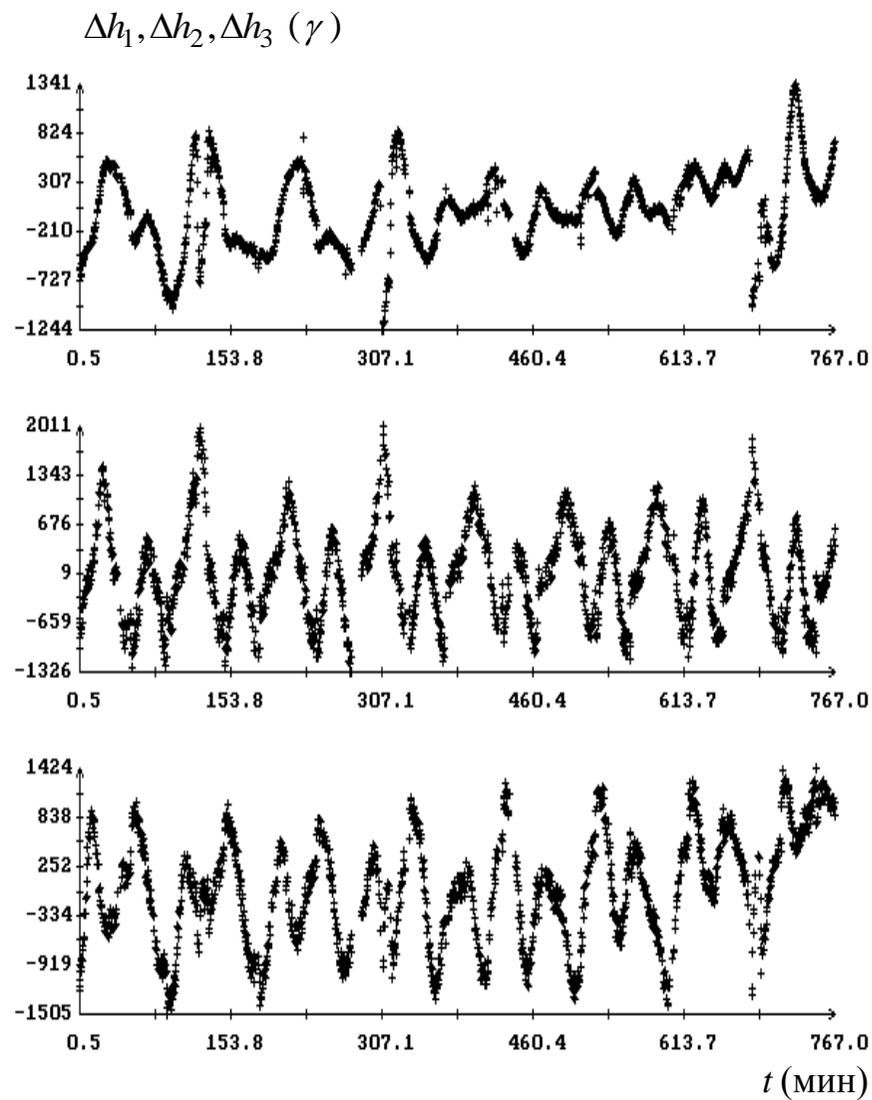


(б)

Рис. 8. Движение КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 05:12:22.2 UTC 19.06.2016.

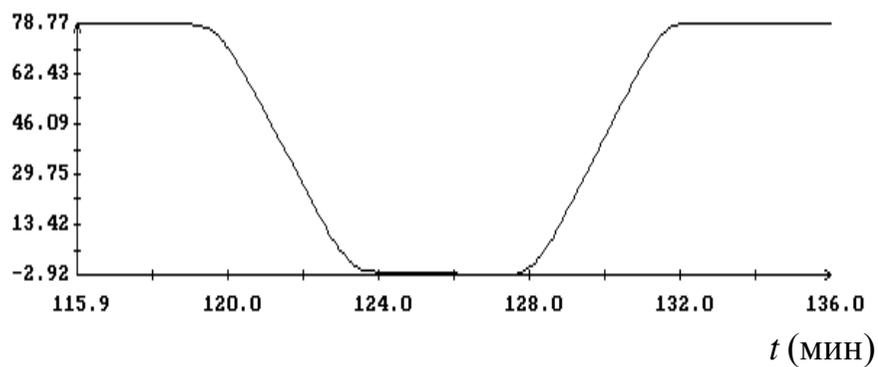
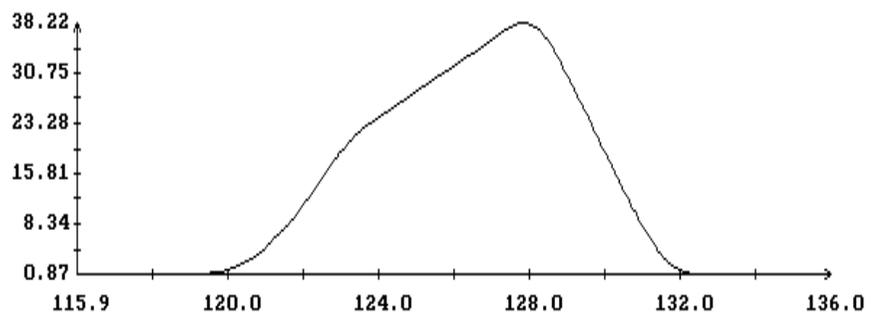
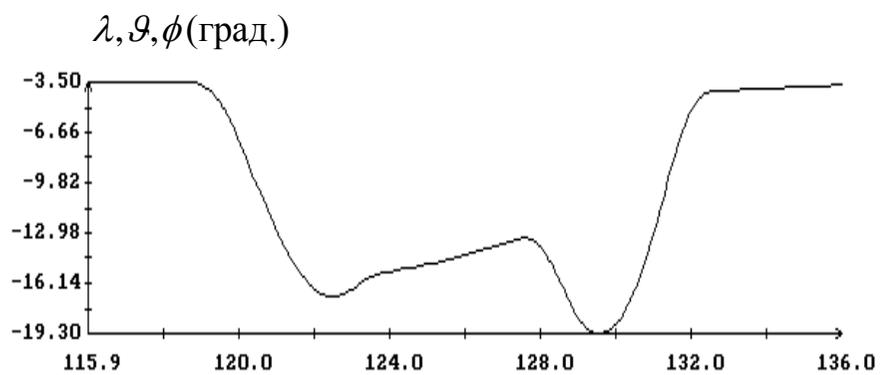


(В)

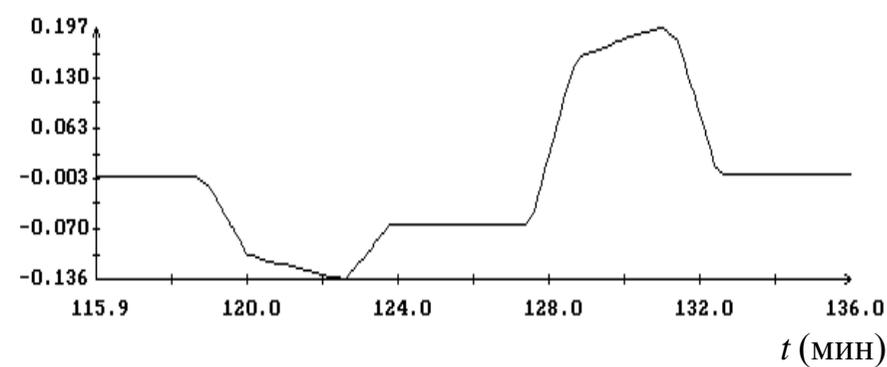
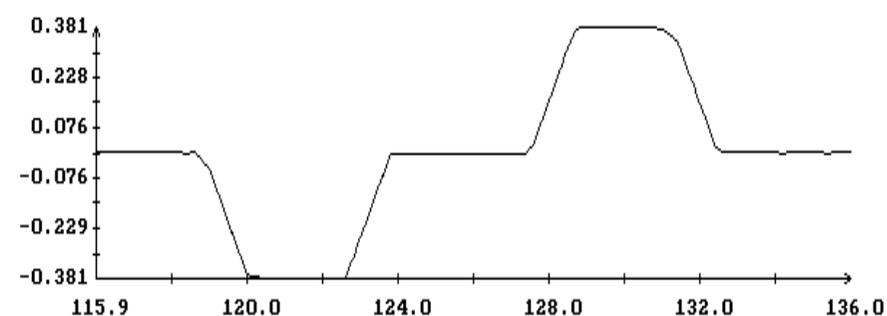
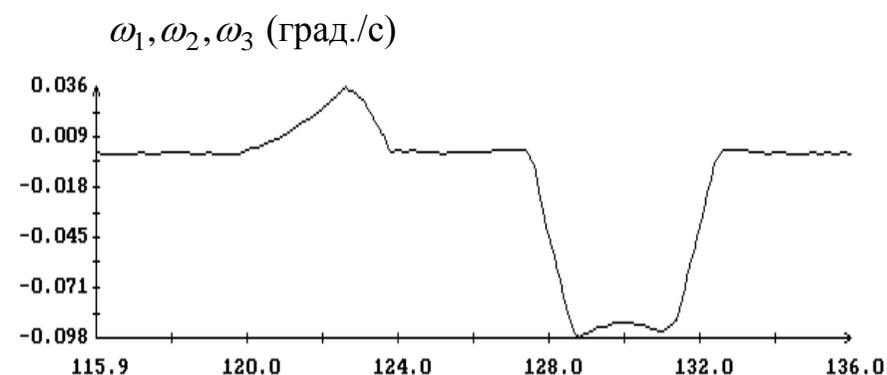


(Г)

Рис. 8. Движение КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 05:12:22.2 UTC 19.06.2016.  
 $\sigma = 574\gamma$ , смещения магнитных измерений:  $\Delta_1 = 1310\gamma$ ,  $\Delta_2 = 2094\gamma$ ,  $\Delta_3 = -1165\gamma$ .

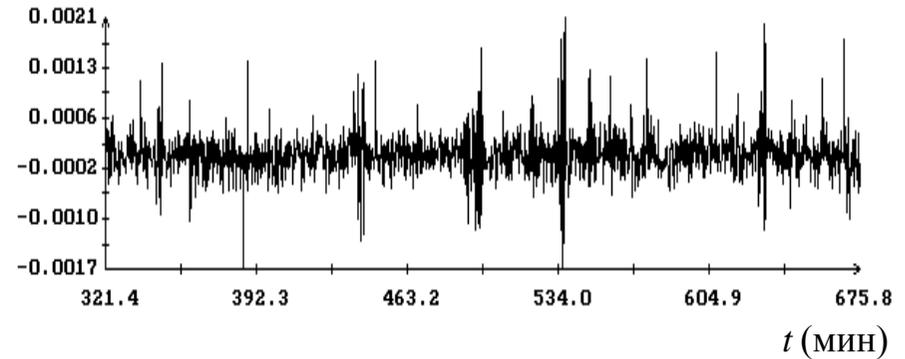
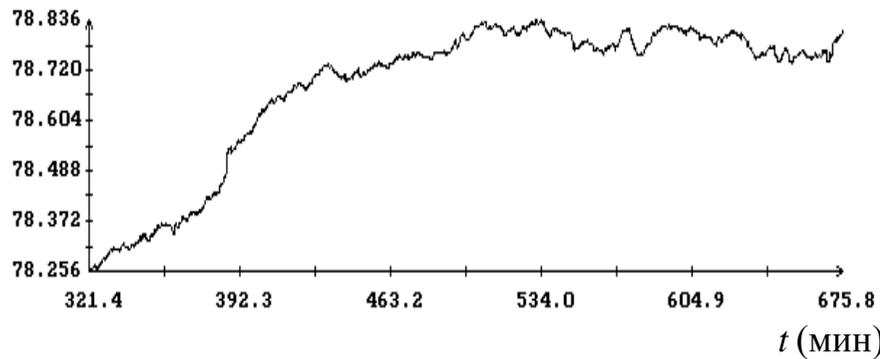
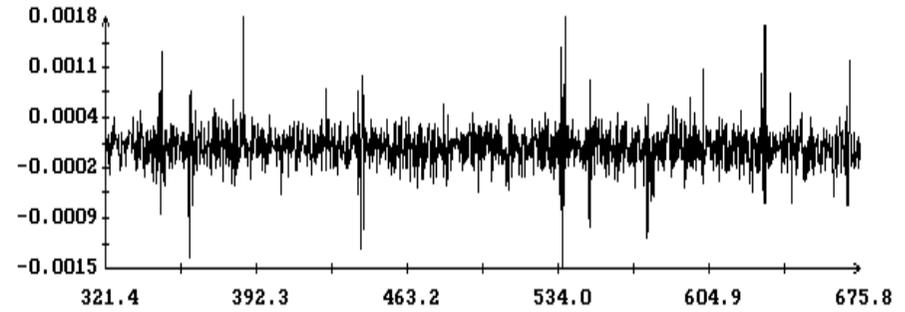
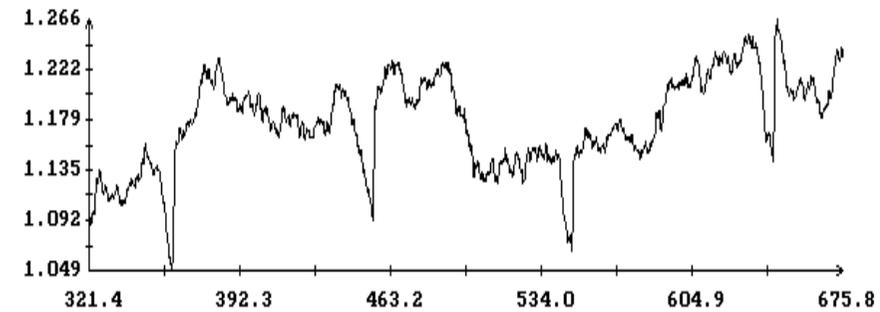
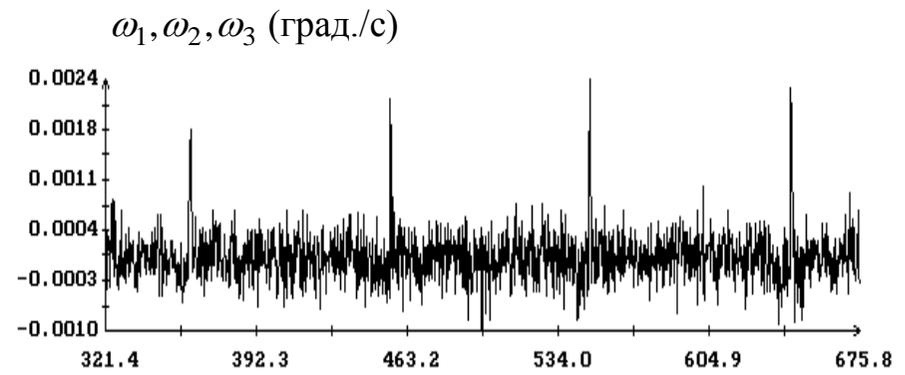
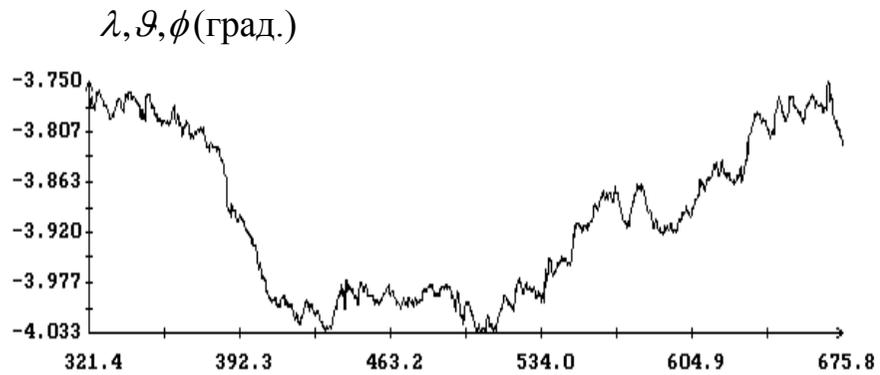


(B)



(Г)

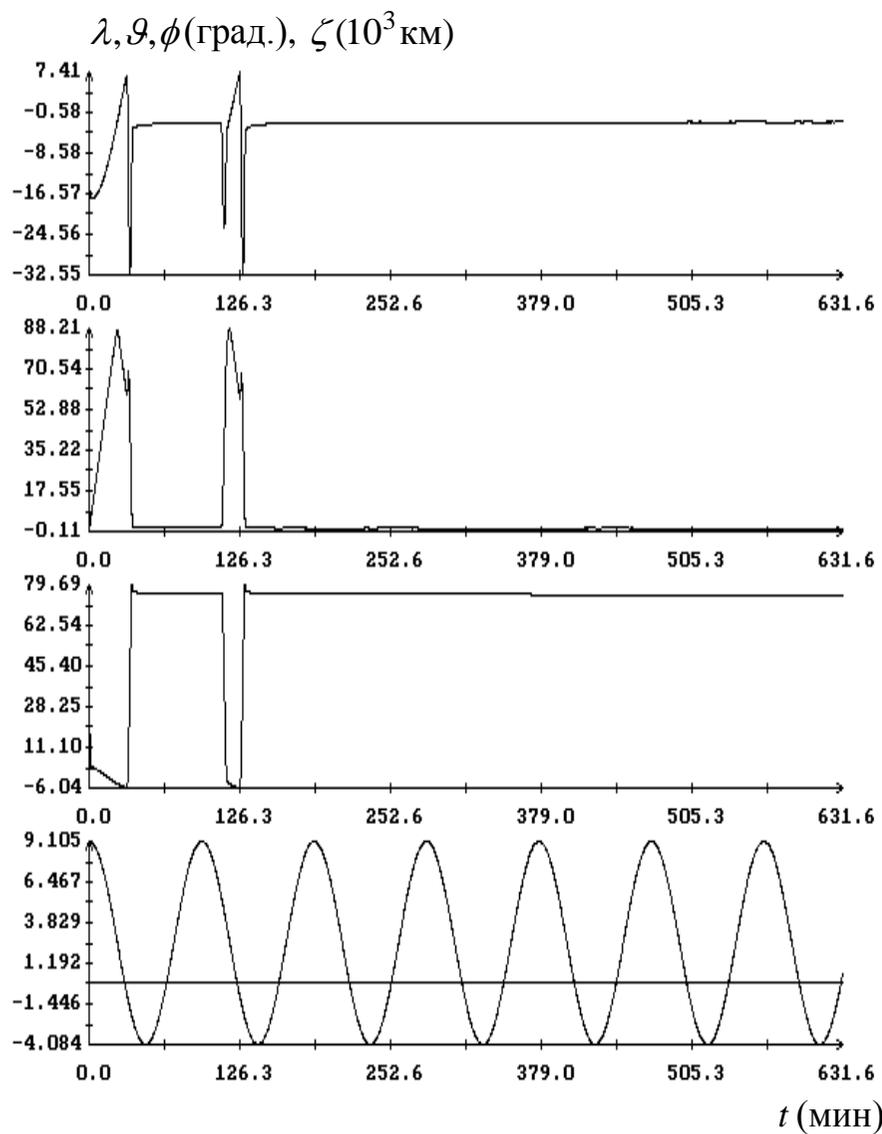
Рис. 8. Разворот КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 05:12:22.2 UTC 19.06.2016.



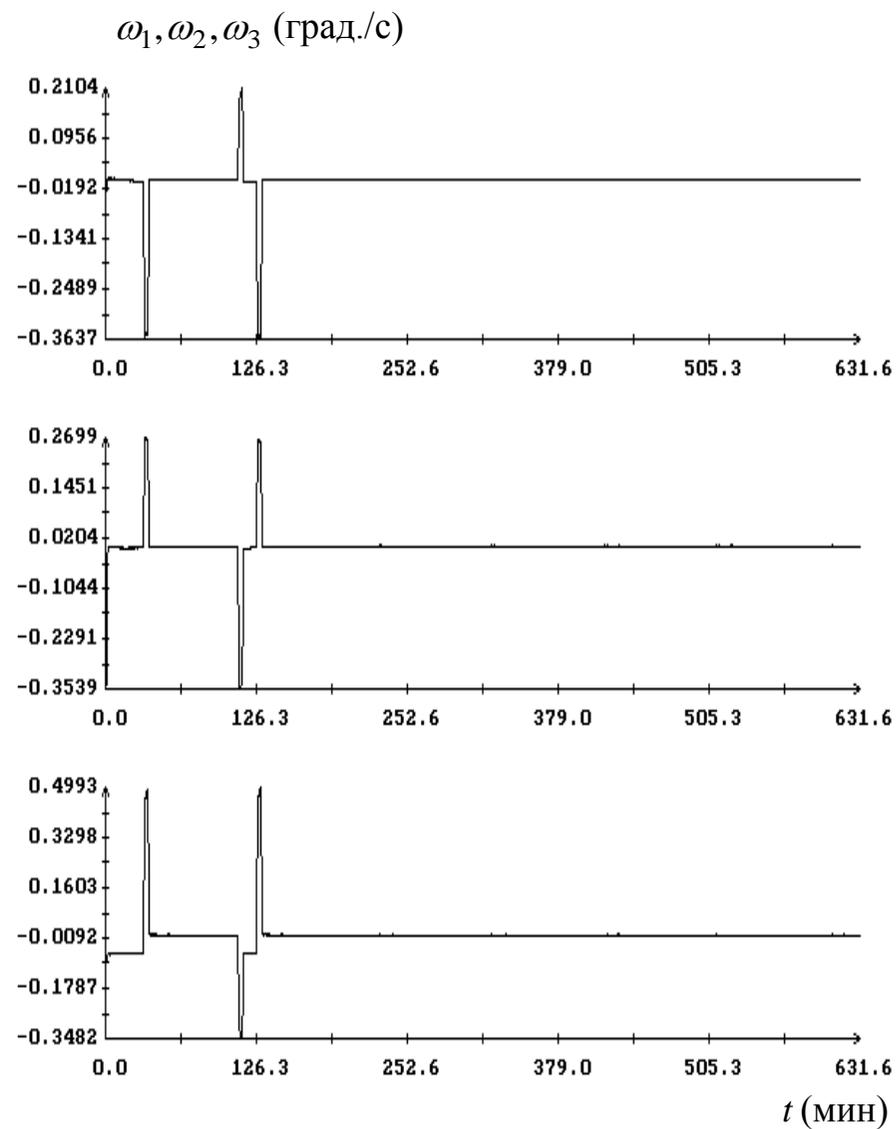
(Ж)

(З)

Рис. 8. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 05:12:22.2 UTC 19.06.2016.

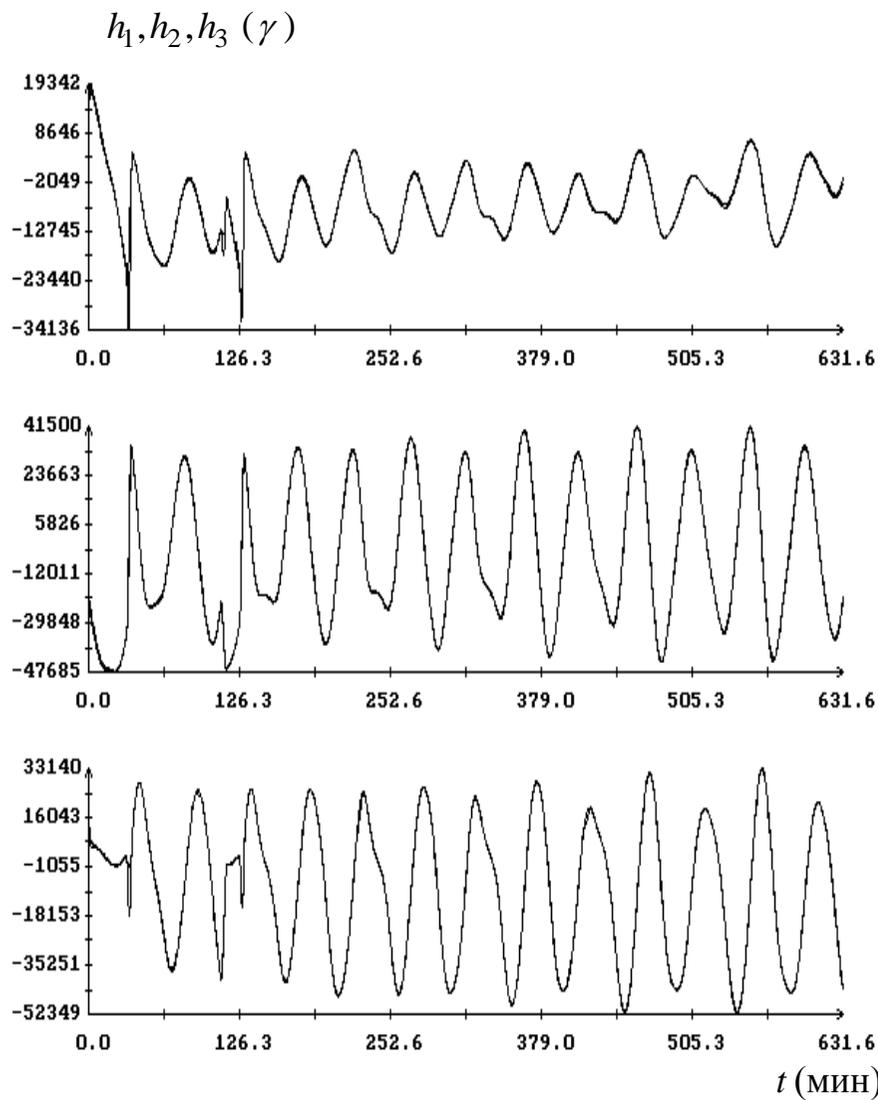


(а)

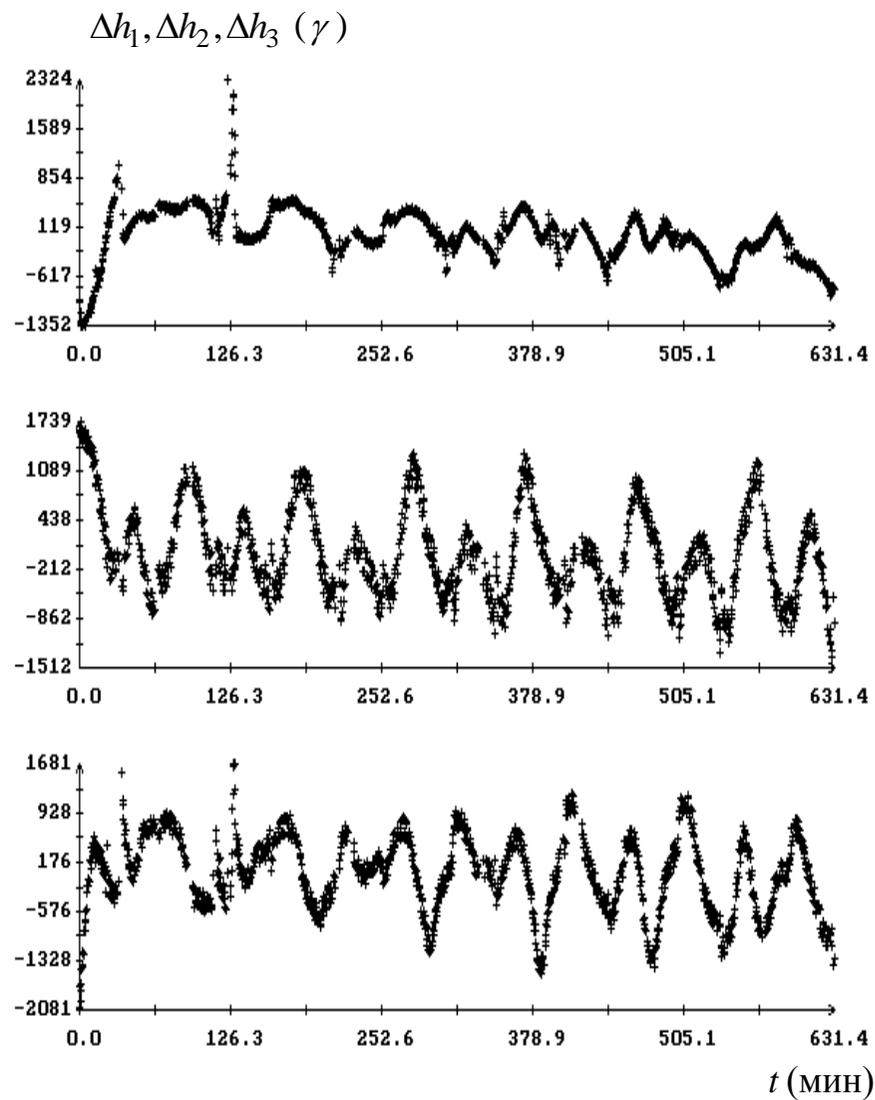


(б)

Рис. 9. Движение КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 18:53:28.7 UTC 12.07.2016.

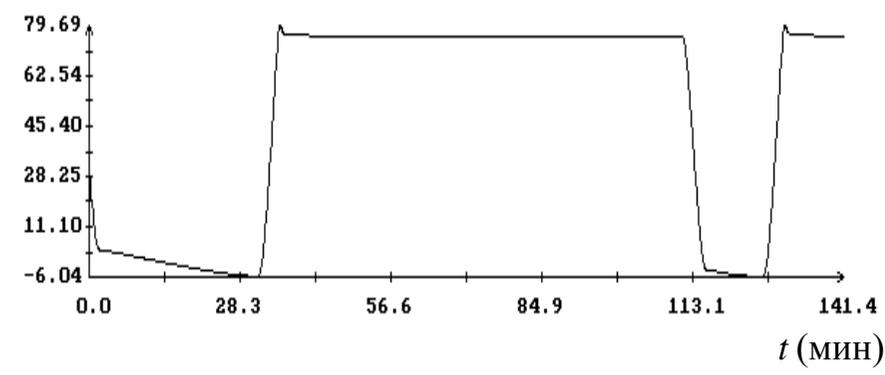
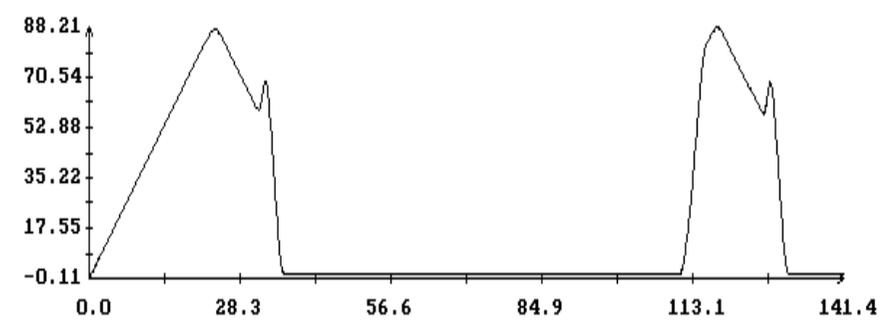
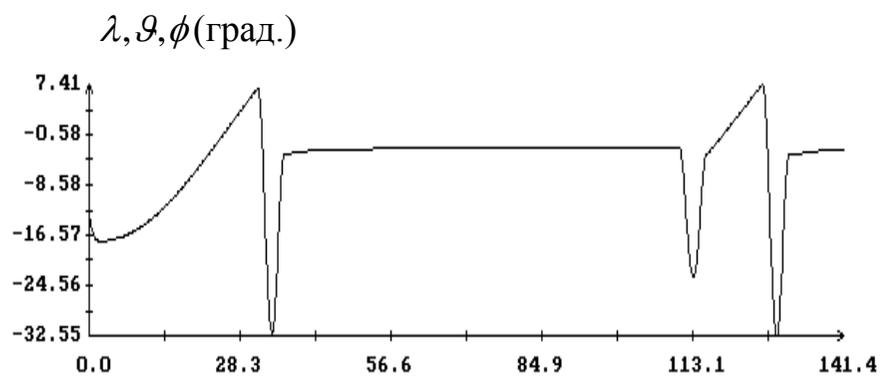


(В)

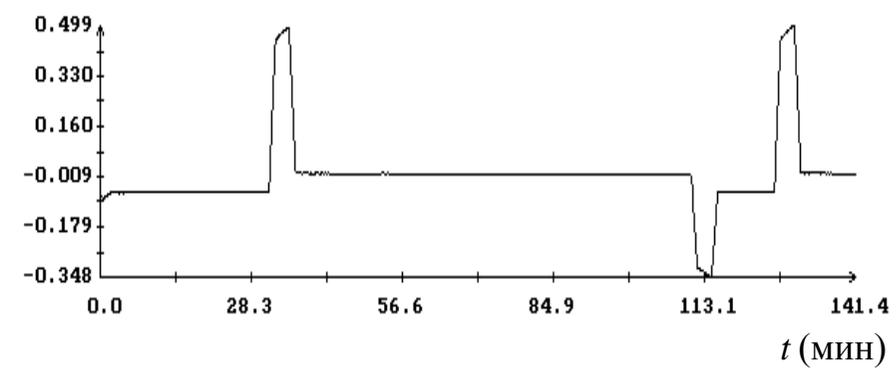
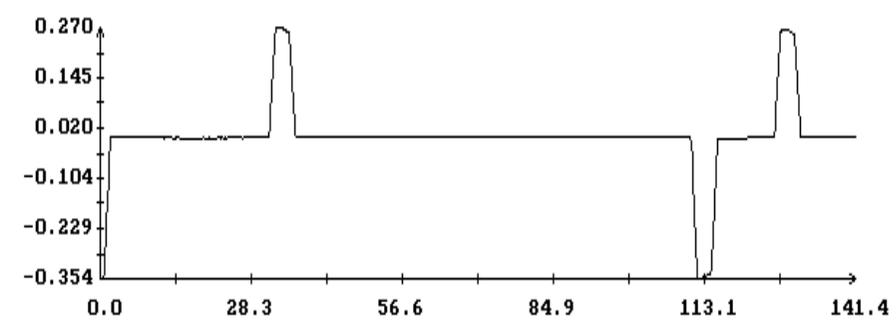
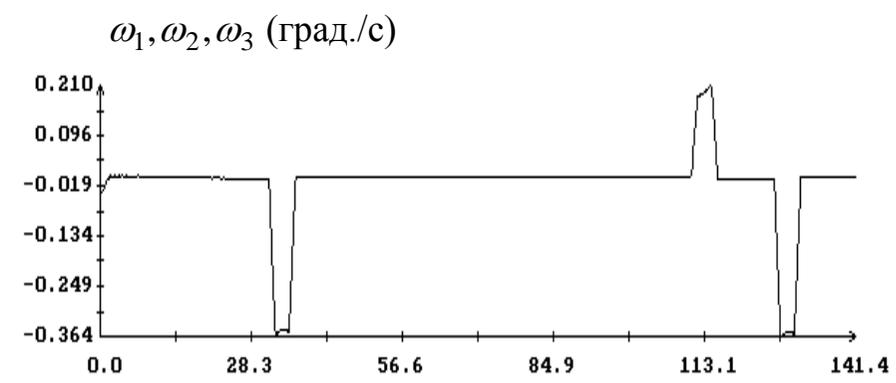


(Г)

Рис. 9. Движение КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 18:53:28.7 UTC 12.07.2016,  $\sigma = 531\gamma$ , смещения магнитных измерений:  $\Delta_1 = 1658\gamma$ ,  $\Delta_2 = 1959\gamma$ ,  $\Delta_3 = -792\gamma$ .



(д)



(е)

Рис. 9. Развороты КА. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 18:53:28.7 UTC 12.07.2016.

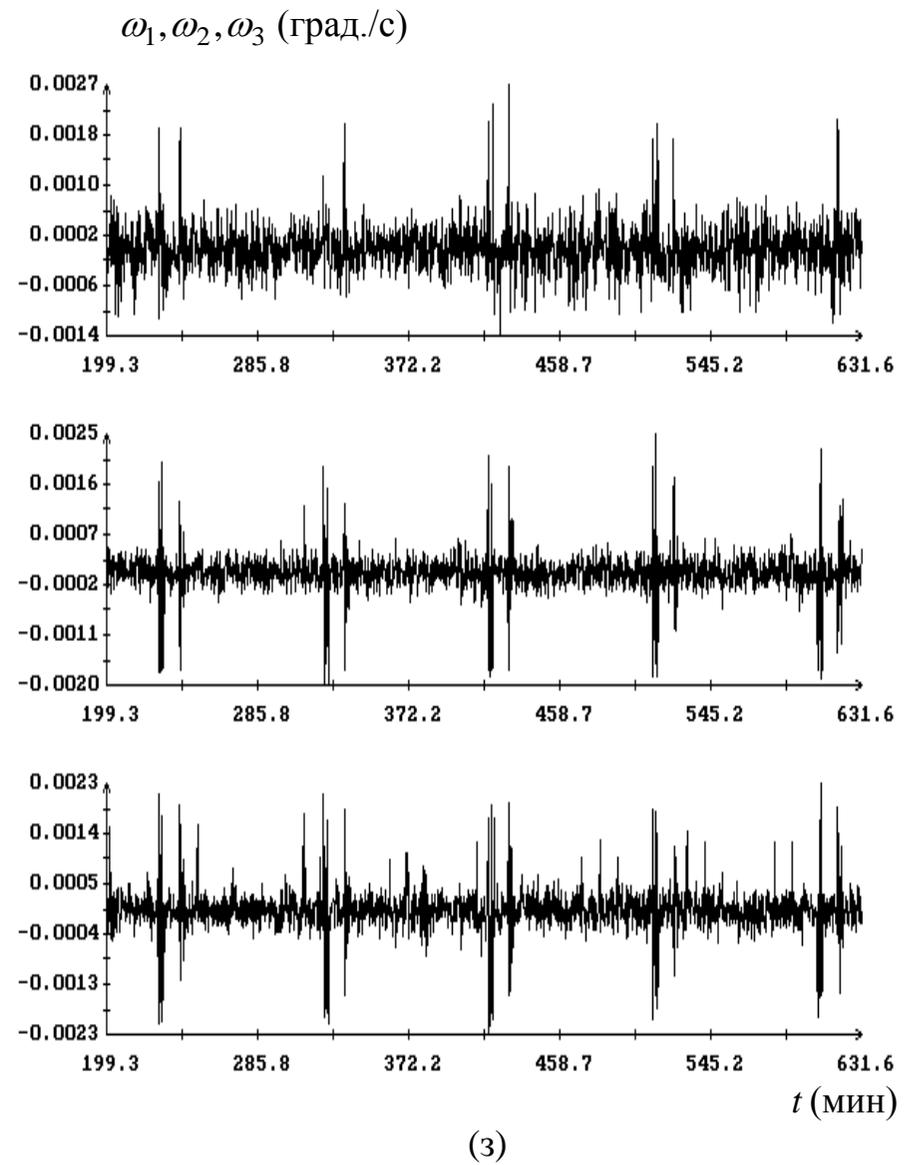
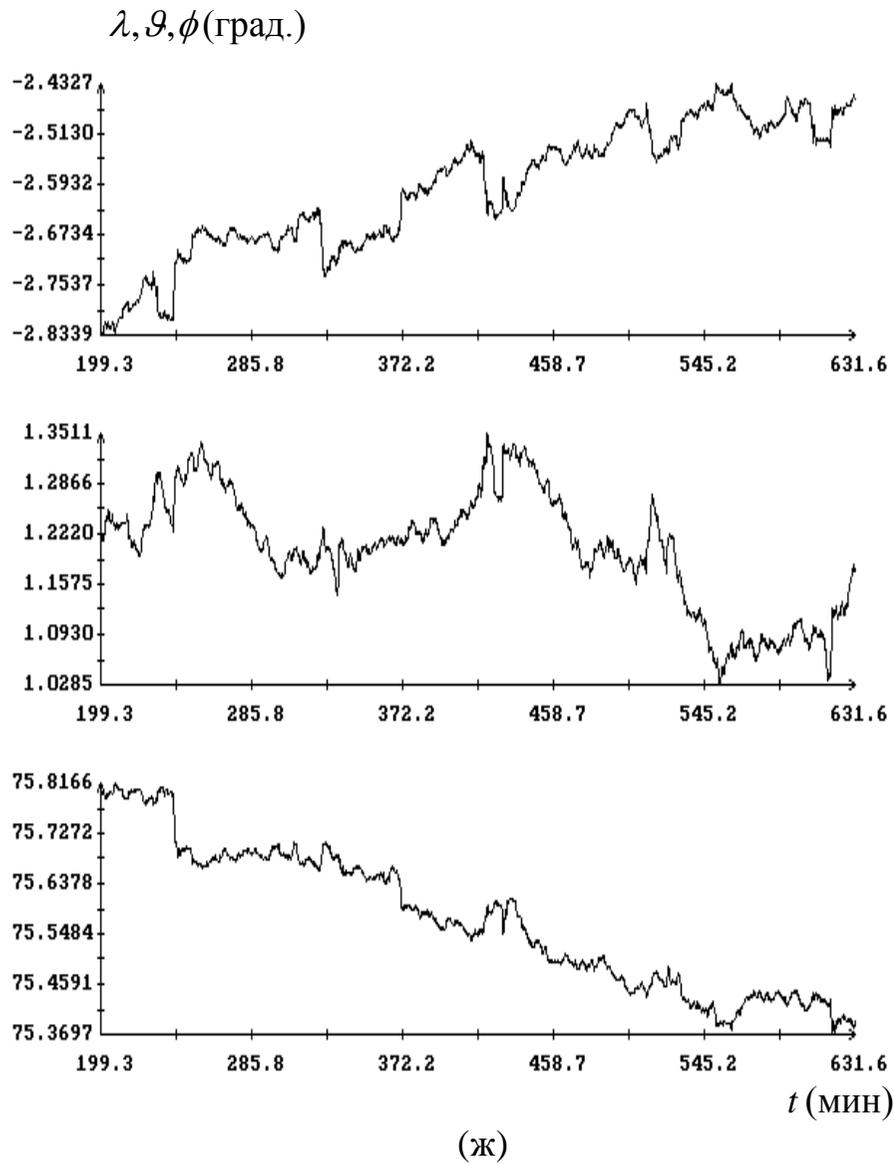


Рис. 9. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 18:53:28.7 UTC 12.07.2016.