



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 60 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Мануйлов К.К.

О коэффициенте черноты
полупрозрачных тел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мануйлов К.К. О коэффициенте черноты полупрозрачных тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 60. 17 с.
doi:[10.20948/prepr-2017-60](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-60)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-60>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

К.К. Мануйлов

**О коэффициенте черноты
полупрозрачных тел**

Москва — 2017

УДК:536.21: 536.48

Мануйлов К.К.

О коэффициенте черноты полупрозрачных тел

Для частного случая радиационного теплового баланса получено решение уравнения лучистого теплообмена, описывающее полупрозрачную среду как непрозрачное тело. Показано, что нарушение теплового контакта между слоями однородной среды качественно изменяет её оптические свойства. Предлагаемый аналитический подход может быть использован в агрономических исследованиях Земли и планет, а также в астрофизике.

Ключевые слова: диатермичность, парниковый эффект, тепловой баланс

Konstantin Konstantinovich Manuilov

On the coefficient of blackness of semitransparent bodies

For the particular case of radiative heat balance the solution of heat transfer equation is obtained describing the semi-transparent environment as an opaque body. It is shown that optical properties of the media are radically changed by thermal insulation of its composing layers.

Keywords: diathermancy, the greenhouse effect, the heat balance

Оглавление

Введение	3
1. Радиационный теплообмен с непрозрачным телом.....	4
2. Перенос излучения в диатермических телах.....	6
3. Закон Кирхгофа для полупрозрачных тел	11
4. Общее уравнение радиационного теплообмена.....	12
5. Заключение.....	16
Литература	17

*Аркадию Хвальковскому,
другу и учителю*

Введение

Идея работы возникла случайно. В ходе исследования экранно-вакуумной теплоизоляции автору понадобилась модель, объясняющая высокое значение коэффициента черноты экрана ЭВТИ частичной прозрачностью его покрытия (Мануйлов, 2015). Существование коэффициента черноты для полупрозрачных тел казалось вполне естественным: модель Кирхгофа, характеризующая излучение непрозрачных тел, должна иметь аналог в сопредельном классе полупрозрачных объектов.

В классических монографиях по теории радиационного теплообмена (Брамсон, 1964; Спэрроу, Сесс, 1971; Зигель, Хауэлл, 1975) отсутствует формула для расчёта коэффициента черноты полупрозрачного тела. Ограничиваясь утверждением о применимости к полупрозрачным телам закона Кирхгофа, эти авторы кардинально расходятся в предельном значении коэффициента черноты прозрачной среды. Так, Р. Зигель полагает этот предел равным нулю в связи с отсутствием эмиссии и поглощения излучения. М. Брамсон отмечает, что при определении излучающей способности регистрируется поток, испущенный поверхностью непрозрачных тел в полупространство. Излучение полупрозрачных тел доступно наблюдению в полном телесном угле, поэтому для сохранения закона Кирхгофа верхний предел значения коэффициента черноты должен равняться двум. Приведенные точки зрения кажутся антиподами, однако выглядят настолько убедительно, что ни от одной из них нельзя отказаться. Это связано с тем, что модель Кирхгофа для полупрозрачных сред до сих пор не построена.

Прикладные теории радиационного теплообмена (Журавлев, 1971; Суринов, 1972) обходят проблему, описывая непрозрачные оптические объекты коэффициентами черноты, а полупрозрачные тела и газы коэффициентами поглощения, пропускания и отражения. Однако принципиальное значение вопроса заключается, прежде всего, в том, что явление полупрозрачности неразрывно объединяет оптику и теорию теплопроводности. Так, игнорирование радиационного теплообмена в полупрозрачном поверхностном слое может быть внутренней причиной проблемы сингулярности решения параболического уравнения Фурье. Фундаментальность вопроса побудила автора обратиться к анализу основ теории радиационного теплообмена.

1. Радиационный теплообмен с непрозрачным телом

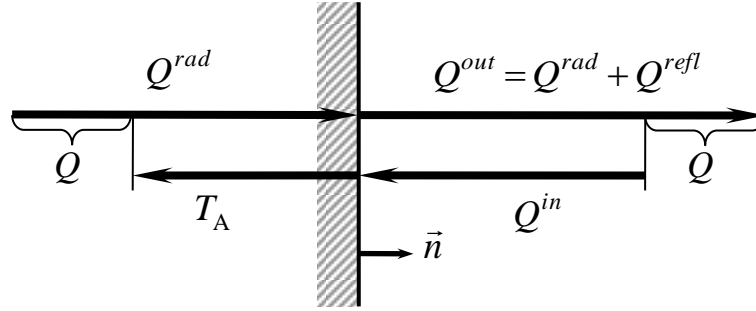


Рис. 1

Рассмотрим прежде всего баланс лучистых стационарных потоков на границе серого тела (рис. 1). Тепловой поток Q^{abs} , поглощённый поверхностью тела с коэффициентом поглощения ε , возвращается в систему в виде теплового излучения Q^{rad} и через границу переносится поток $Q = Q^{out} - Q^{in} = Q^{rad} - Q^{abs}$ в сторону внешней нормали \vec{n} . Возвратный лучистый поток Q^{out} равен

$$Q^{out} = Q + Q^{in} = Q + \frac{1}{\varepsilon} Q^{abs} = Q + \frac{1}{\varepsilon} (Q^{rad} - Q) = \frac{1}{\varepsilon} Q^{rad} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} Q.$$

Для системы из двух параллельных поверхностей 1 и 2 с температурами T_1 , T_2 и площадью $S_1 = S_2 = S$ лучистый теплообмен задается условиями

$$\begin{aligned} Q_1^{out} &= \sigma S T_1^4 - M_1 Q = Q_2^{in}, \\ Q_2^{out} &= \sigma S T_2^4 + M_2 Q = Q_1^{in}, \end{aligned} \quad \text{где } M_{1,2} = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} - 1. \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-12} \text{ Вт см}^{-2} \text{ К}^{-4}$ – постоянная Стефана–Больцмана¹. Поскольку поток от поверхности 1 к 2 равен $Q = Q_1^{out} - Q_1^{in} = Q_2^{in} - Q_2^{out}$, имеем

$$Q = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sigma S (T_1^4 - T_2^4) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma S (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) можно получить статистически, рассматривая $\varepsilon_{1,2}$ как вероятности рождения и поглощения квантов излучения на границах тел. Произведение $P = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ является вероятностью переноса тепла от тела 1 к телу 2. Величина $R = 1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$ определяет вероятность гибели кванта

¹ Строго говоря, вывод Л. Больцмана о зависимости плотности излучения абсолютно чёрного тела от четвертой степени температуры сделан для равновесного излучения ($Q = 0$). Тем не менее, этот закон экспериментально подтверждается и для неравновесных систем.

при отражении. Из определения условной вероятности отношение P/R является вероятностью переноса тепла с учётом отражений.

Получим уравнение (1.1) другим способом. Заменяем поверхность серого тела (экрана) стохастической мозаикой из абсолютно чёрных и зеркальных фрагментов с соотношением площадей $(\varepsilon):(1-\varepsilon)$. Записав возвратный поток мозаики Q^{out} как суперпозицию потоков фрагментов

$$Q^{out} = \varepsilon S \sigma T^4 + (1-\varepsilon)Q^{in} = \varepsilon S \sigma T^4 + (1-\varepsilon)(Q^{out} - Q),$$

получаем соотношение (1.1) непосредственно после перегруппировки.

Таким образом, мозаика из областей с различными оптическими свойствами ведёт себя в среднем как серое тело, что вытекает из принципа эквивалентности Гюйгенса. Такое макроописание предполагает оценку однородности потока Q^{in} в области сопряжённого экрана. Для большого количества элементов мозаики перемешивание исходящих потоков происходит благодаря широкому спектру, ненаправленности и некогерентности теплового излучения. В случае значительной неоднородности потока Q^{in} требуется отдельный учёт теплообмена в пространственных, угловых или спектральных зонах.

В общем случае излучение в пространстве между поверхностями с различной температурой является неравновесным и анизотропным. Осреднение потоков по телесному углу 4π *стер* позволяет дать определение яркостной температуры излучения θ как температуры однородного, в том числе, полупрозрачного пробного тела, (например, газа) находящегося в равновесии с излучением

$$\theta^4 = \frac{Q_1^{out} + Q_2^{out}}{2\sigma S} = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} + \frac{M_2 - M_1}{2\sigma S} Q. \quad (1.3)$$

Подставив в (1.3) значение потока Q из (1.2), получим окончательно

$$\theta^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} + \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} \quad (1.4)$$

Формула (1.4) позволяет проверить правильность расчёта радиационного теплопереноса, как в непрозрачных, так и в полупрозрачных средах. Отметим замечательное свойство яркостной температуры. Используя (1.2), (1.3), можно получить следующие простые выражения

$$T_1^4 - \theta^4 = \frac{M_1 + 1/2}{\sigma S} Q, \quad \theta^4 - T_2^4 = \frac{M_2 + 1/2}{\sigma S} Q. \quad (1.5)$$

Из формулы (1.5) следует, что лучистый теплообмен между телами сводится к раздельному теплообмену каждого из тел с излучением в примыкающей к этому телу полости. Таким образом, в шкале T^4 параметр $(M + 1/2)/\sigma S$ имеет смысл присоединённого к экрану теплового сопротивления с величиной, определяемой параметрами экрана. В сложных системах можно использовать метод эквивалентного замещения слоёв и зон последовательно-параллельным соединением их тепловых сопротивлений.

Рассмотрим теперь одномерную задачу о переносе излучения системой тел. В качестве примера определим коэффициент черноты ε_1 одиночного экрана, эквивалентного группе из k одинаковых экранов с коэффициентом черноты ε_k .

Из (1.5) следует, что перепад значений $\theta_A^4 - \theta_B^4 = Q(2M + 1)/\sigma S$ яркостной температуры излучения по разные (А, В) стороны экрана определяется величиной сквозного, общего для всех слоёв, потока Q . Таким образом, справедливо соотношение $2M_1 + 1 = k(2M_k + 1)$, откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon_k}{k(2 - \varepsilon_k) + \varepsilon_k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1 = 0. \quad (1.6)$$

Обращение (1.6) позволяет решить задачу эквивалентной замены одиночного экрана с коэффициентом черноты ε_1 группой из k одинаковых экранов

$$\varepsilon_k = \frac{2k\varepsilon_1}{(k-1)\varepsilon_1 + 2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 2. \quad (1.7)$$

Итак, увеличение количества слоёв позволяет неограниченно приблизить оптические характеристики группы к свойствам идеального зеркала. Обратная операция имеет ограничение: группа, заменяющая экран с коэффициентом черноты ε_1 может содержать не более чем $k = 2/\varepsilon_1 - 1$ слоёв, поскольку для непрозрачных тел $\varepsilon \leq 1$. В частности, абсолютно чёрный экран нельзя заменить ни на что другое. Физический смысл необычного значения предела в (1.7) мы рассмотрим в следующем разделе.

2. Перенос излучения в диатермических телах

Начнем анализ переноса излучения в плоском диатермическом² слое с его модели. По примеру и с оговорками предыдущего раздела построим эквива-

² Диатермичность – свойство частичного пропускания теплового излучения. В качественных описаниях является синонимом полупрозрачности. В количественных определениях термин используется как эквивалент коэффициента пропускания.

лент полупрозрачного тела с оптическими параметрами, заданными коэффициентами поглощения A , отражения R и пропускания D . Заполним поверхность эквивалентного экрана мозаикой из прозрачных и непрозрачных фрагментов с соотношением площадей $(D):(1-D)$. Для сохранения потоков Q^{abs} и Q^{refl} выберем коэффициент поглощения A^* (отражения R^*) сплошной части поверхности

$$\varepsilon^* = A^* = \frac{A}{1-D}, \quad R^* = \frac{R}{1-D}, \quad A^* + R^* = 1. \quad (2.1)$$

Заметим, что используемая модель полупрозрачного тела не является единственной. Такой же результат можно получить, рассматривая смесь прозрачных, абсолютно чёрных и зеркальных фрагментов с соотношением площадей $D:A:R$.

Выбрав за положительное направление вектор внешней нормали, запишем выражения для исходящих потоков Q_A^{out}, Q_B^{out} в виде суперпозиции возвратных потоков непрозрачных областей и транзитных потоков прозрачных элементов

$$\begin{cases} Q_A^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - M^*Q) + DQ_B^{in} \\ Q_B^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - M^*Q) + DQ_A^{in} \end{cases}, \quad \text{где } M^* = \frac{1-\varepsilon^*}{\varepsilon^*} = \frac{R^*}{A^*} = \frac{R}{A}. \quad (2.2)$$

Уравнения в (2.2) связаны между собой, однако перекрёстная подстановка Q_A^{out} и Q_B^{out} с учётом соотношений $Q_A^{in} = Q_A^{out} - Q$ и $Q_B^{in} = Q_B^{out} - Q$ позволяет разделить систему (2.2) на два независимых уравнения для потоков, исходящих от каждой стороны экрана

$$Q_A^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - M^*Q) + D[(1-D)(\sigma ST^4 - M^*Q) + D(Q_A^{out} - Q) - Q], \quad (2.3)$$

$$Q_B^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - M^*Q) + D[(1-D)(\sigma ST^4 - M^*Q) + D(Q_B^{out} - Q) - Q].$$

Для прозрачного тела ($D=1$) уравнения (2.3) переходят в тождества. В остальных случаях соотношения приводятся к виду (1.1)

$$\begin{cases} Q_A^{out} = \sigma ST^4 - \tilde{M}Q \\ Q_B^{out} = \sigma ST^4 + \tilde{M}Q \end{cases}, \quad \text{где } \tilde{M} = \frac{M^*(1-D) - D}{1+D}. \quad (2.4)$$

Итак, нам удалось описать полупрозрачный экран как непрозрачное тело. При выводе формул использовались только принцип Гюйгенса и классическая формулировка закона Кирхгофа о равенстве поглощательной и излучательной способности для непрозрачных тел. Тождественность описаний (1.1) и (2.4)

позволяет дать обобщённое определение коэффициентов черноты $\tilde{\varepsilon}$ и отражения $\tilde{R} = 1 - \tilde{\varepsilon}$ диатермической среды на основе характеристик непрозрачного тела, являющегося её теплофизическим эквивалентом. Введя по аналогии с (1.1) определение $\tilde{M} = (1 - \tilde{\varepsilon})/\tilde{\varepsilon}$, получаем требуемые выражения

$$\tilde{\varepsilon}(A, D) = \frac{A(1+D)}{(1-D)^2 + AD}, \quad \tilde{\varepsilon}(\varepsilon^*, D) = \frac{\varepsilon^*(1+D)}{1-D(1-\varepsilon^*)}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{R}(R, D) = \frac{R-D(1-D)}{1-D(1+R)}, \quad \tilde{R}(R^*, D) = \frac{R^* - D}{1 - R^* D}. \quad (2.6)$$

Семейства зависимостей коэффициентов $\tilde{\varepsilon}(A, D)$ представлены на рис. 2. Для непрозрачных сред обобщенное и классическое определение коэффициента черноты совпадают. С ростом прозрачности значения $\tilde{\varepsilon}$ начинают превышать значения параметров A и ε^* , приближаясь к пределу $\tilde{\varepsilon} = 2$. Такой результат не противоречит законам оптики. В соответствии с принципом Гюйгенса каждую точку прозрачной среды можно рассматривать как ретранслятор, поглощающий поток на входе и излучающий такую же энергию на выходе. Удвоенное значение коэффициента черноты объясняется совмещением прозрачной средой двух функций абсолютно чёрного тела (поглощение и эмиссия).

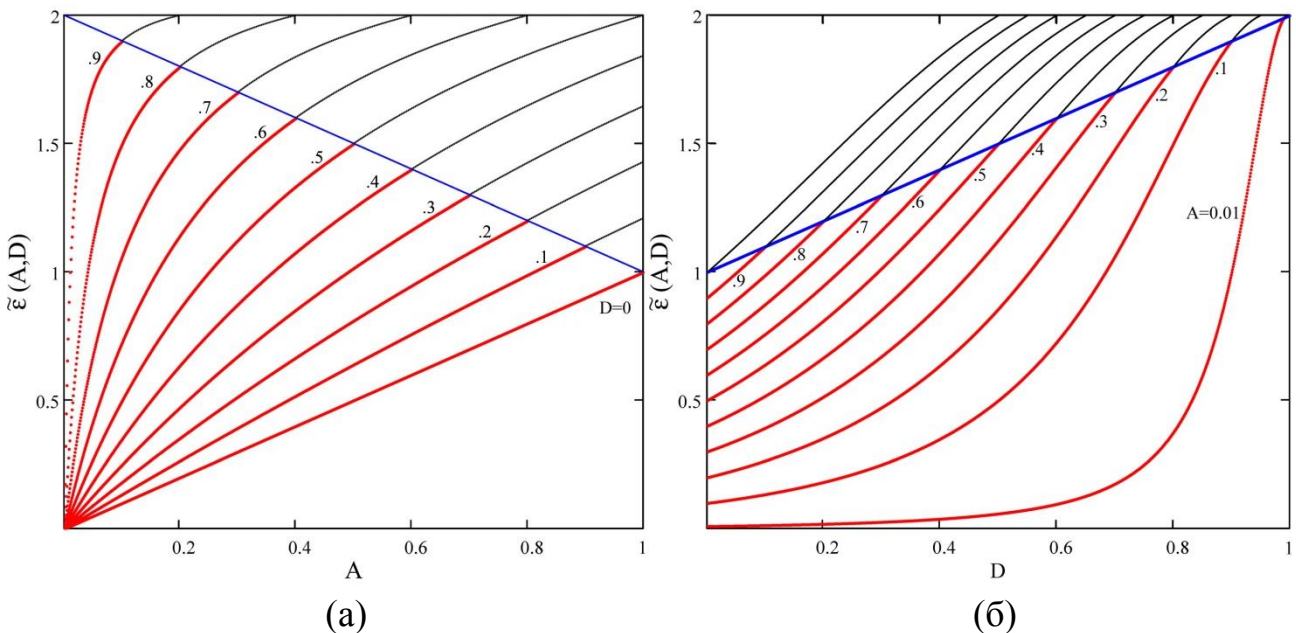


Рис. 2. Семейства зависимостей обобщённых коэффициентов черноты $\tilde{\varepsilon}(A, D)$. Красным цветом отмечены участки кривых, отвечающие условию $A + D \leq 1$.

В качестве иллюстрации представим расчёты теплообмена в заключённом между массивными пластинами нагревателя и холодильника образце экранно-вакуумной теплоизоляции (ЭВТИ), состоящем из 19 изолированных полупрозрачных экранов с коэффициентом черноты $\varepsilon^* = 0,04$.

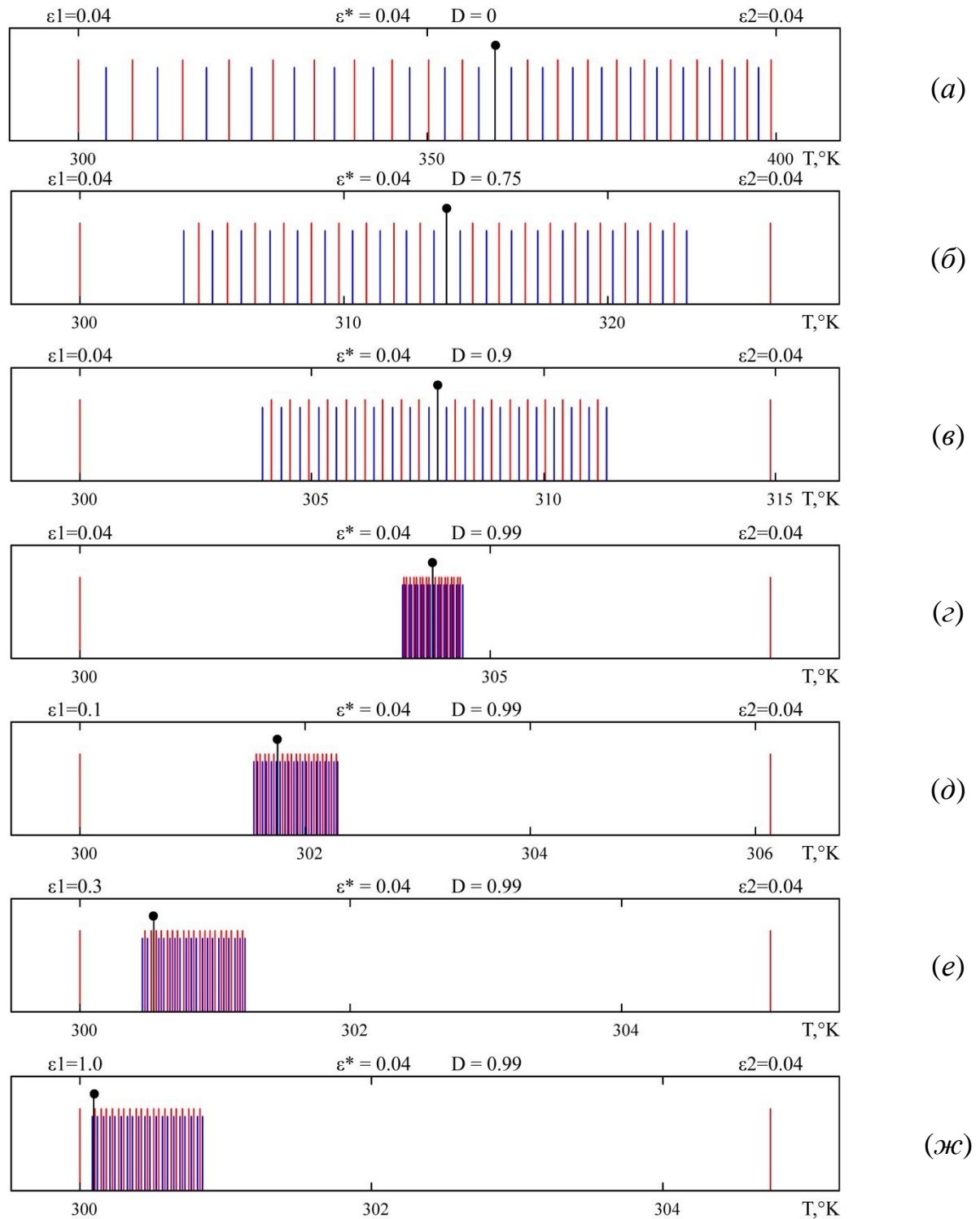


Рис. 3. К расчёту теплопереноса в образце ЭВТИ. В верхней строке приведены параметры границ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) и слоёв ЭВТИ (ε^*, D). Обозначения: — температура слоёв; — яркостная температура θ ; —• расчёт θ^* для модели без ЭВТИ.

Для температуры холодной границы $T_1 = 300^0\text{C}$ и потока $\dot{Q} = 1 \text{ Вт/м}^2$ подстановкой коэффициентов $\tilde{\epsilon}$ в (1.7) определяются значения температуры промежуточных слоёв и горячей границы T_2 , а также температура излучения θ для смежных слоёв. Температуры T_1 и T_2 используются для расчёта контрольного значения яркостной температуры θ^* в модели без ЭВТИ. Результаты расчётов в виде линейчатых диаграмм приводятся на рис. 3.

Рост прозрачности ЭВТИ в диапазоне $D = 0..0,99$ (рис. 3, *a - z*) приводит к уменьшению перепада температур $T_2 - T_1$. Температуры диатермических слоёв концентрируются вокруг контрольного значения θ^* . Диатермические слои всё меньше искажают тепловые потоки, постепенно превращаясь в пробные тела. Увеличение коэффициента черноты левой границы от значения $\epsilon_1 = 0,04$ до 1 (рис. 3, *z - ж*) смещает положение яркостной температуры θ^* . Эту же эволюцию повторяет диатермическая группа.

Таким образом, представление системы тел цепочкой эквивалентных радиационных сопротивлений правильно описывает лучистый перенос в средах, состоящих из перемежающихся теплопроводящих и теплоизолирующих слоёв. Хорошо изученными примерами таких композитных материалов являются экранно-вакуумная и порошковая теплоизоляция (Каганер, 1966). Результаты работы расширяют область применения классической теории на класс полупрозрачных тел.

В рассмотренной задаче об эквивалентности слоёв введение обобщённого коэффициента черноты снимает ограничение на операцию разбиения слоёв и позволяет перейти к описанию сплошных сред с низкой теплопроводностью. Несложно показать, что непрозрачность $1 - D$ среды для её оптически тонкого слоя ($D \rightarrow 1$) является линейной мерой толщины. Пропорциональность между перепадом яркостной температуры на границах слоя и его толщиной

$$\theta_A^4 - \theta_B^4 = \frac{2\tilde{M} + 1}{\sigma S} Q = \frac{2M^* + 1}{\sigma S} \cdot \frac{1 - D}{1 + D} Q, \quad (2.7)$$

полученная подстановкой (2.5) в (1.5) показывает сходимость суммы радиационных сопротивлений при неограниченном росте их числа.

* * *

Для развития общего подхода необходимо исследовать процессы теплообмена в теплопроводных средах, поскольку выводы разделов 1 и 2 неявно предполагают, что в процессе измерения оптических параметров выполняется изотермическое условие $T_A = T_B = T$.

3. Закон Кирхгофа для полупрозрачных тел

Постулируя равенство излучательной и поглощательной способности тел, закон Кирхгофа исключает возможность кругового процесса Томсона-Планка, то есть создания вечного двигателя второго рода, что является переводом второго начала термодинамики на язык оптики. В связи с этим вызывает недоумение утверждение [https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон излучения Кирхгофа](https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_излучения_Кирхгофа) о том, что закон Кирхгофа справедлив только для случаев теплового равновесия.

Модель Кирхгофа рассматривает процесс смешанного теплопереноса в теплопроводной оптической среде, состоящей из контактирующих непрозрачных слоев. Межслойный теплообмен осуществляется исключительно за счёт теплопроводности. Из уравнения (1.5) следует, что равновесное и изотропное излучение на внутренних границах имеет яркостную температуру, равную термодинамической температуре тела. При этом коэффициент черноты для группы слоёв полностью определяется оптическими свойствами наружной поверхности.

Казалось бы, что эти же рассуждения в равной степени могут относиться к системе связанных полупрозрачных слоёв с произвольным значением коэффициента черноты. Однако это заведомо не так, иначе мы не смогли бы видеть объекты внешнего мира. Парадоксальный результат следует из закона Кирхгофа, не допускающего перенос излучения между телами с равной температурой. Таким образом, закон Кирхгофа в классической формулировке принципиально несовместим с явлением полупрозрачности.

Рассмотренный ранее процесс радиационного переноса не изменяет термодинамического состояния тела и должен рассматриваться отдельно от энергозависимых процессов эмиссии и поглощения излучения. Равенство излучательной и поглощательной способности для этого режима теплообмена связано не с законами термодинамики, а с изотропностью пространства. Это дает основание для вывода о существовании двух коэффициентов черноты как специфической особенности полупрозрачных, а значит, и любых тел.

К этому выводу можно прийти и другим путем. В общем случае теория радиационного теплообмена должна рассматривать взаимодействие вещества с двумя системами потоков по разные стороны тела. В силу линейной независимости этих систем можно заранее утверждать о существовании двух коэффициентов черноты, а также о том, что явление полупрозрачности должно являться результатом различия этих коэффициентов по величине.

Подчеркнем, что ограничение сферы влияния закона термодинамическими рамками восстанавливает значение закона Кирхгофа как фундаментальной теории, а не экспериментальной зависимости.

4. Общее уравнение радиационного теплообмена

Вывод общего уравнения повторяет ход рассуждений второго раздела с той лишь разницей, что результирующие потоки не равны друг другу.

* * *

Задав значения результирующих потоков Q_A, Q_B , исходящих от каждой поверхности экрана (А, В) в направлении внешней нормали, запишем выражения для исходящих потоков Q_A^{out}, Q_B^{out} в виде суперпозиции возвратных потоков серых областей и транзитных потоков прозрачных элементов

$$\begin{cases} Q_A^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - \tilde{M} Q_A) + D Q_B^{in} \\ Q_B^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - \tilde{M} Q_B) + D Q_A^{in} \end{cases}, \quad \text{где } \tilde{M} = \frac{1-\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} = \frac{R}{A}. \quad (4.1)$$

Уравнения в (4.1) связаны между собой, однако перекрёстная подстановка Q_A^{out} и Q_B^{out} с учётом соотношений $Q_A^{in} = Q_A^{out} - Q_A$ и $Q_B^{in} = Q_B^{out} - Q_B$ позволяет разделить систему (4.1) на два независимых уравнения для потоков, исходящих от каждой стороны экрана

$$\begin{cases} Q_A^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - \tilde{M} Q_A) + D[(1-D)(\sigma ST^4 - \tilde{M} Q_B) + D(Q_A^{out} - Q_A) - Q_B] \\ Q_B^{out} = (1-D)(\sigma ST^4 - \tilde{M} Q_B) + D[(1-D)(\sigma ST^4 - \tilde{M} Q_A) + D(Q_B^{out} - Q_B) - Q_A] \end{cases} \quad (4.2)$$

Для того, чтобы разобраться в полученном результате, заменим результирующие потоки в (4.2) суперпозицией симметричной и антисимметричной пар

$$\begin{cases} Q_A = Q_s + Q_a \\ Q_B = Q_s - Q_a \end{cases}, \quad \text{где } \begin{cases} Q_s = (Q_A + Q_B)/2 \\ Q_a = (Q_A - Q_B)/2 \end{cases} \quad (4.3)$$

и в результате простых преобразований (4.2) получим окончательно

$$\begin{cases} Q_A^{out} = \sigma ST^4 - M_s Q_s - M_a Q_a \\ Q_B^{out} = \sigma ST^4 - M_s Q_s + M_a Q_a \end{cases}, \quad (4.4)$$

где

$$M_s = \frac{\tilde{M}(1-D) + D}{1-D}, \quad M_a = \frac{\tilde{M}(1-D) + D}{1+D}.$$

Сравнение (1.1) и (4.4) показывает, что для симметричного ($Q_a = 0$) и антисимметричного ($Q_s = 0$) теплообмена полупрозрачный экран можно рассматривать как непрозрачное тело. Для каждого из этих частных случаев тождественность описаний (1.1) и (4.4) позволяет дать свое обобщенное определение

коэффициента черноты диатермической среды на основе характеристик её непрозрачного эквивалента. Введя по аналогии с (1.1) определения

$$M_s = \frac{1 - \varepsilon_s}{\varepsilon_s}, \quad M_a = \frac{1 - \varepsilon_a}{\varepsilon_a},$$

с учетом (2.2) получаем требуемые выражения

$$\varepsilon_s(A, D) = \frac{A(1 - D)}{(1 - D)^2 + AD}, \quad \varepsilon_a(A, D) = \frac{A(1 + D)}{(1 - D)^2 + AD}. \quad (4.5)$$

Результат (4.5) показывает, что несовпадение обобщённых коэффициентов черноты ε_s и ε_a является принципиальной особенностью диатермических тел. Семейства зависимостей $\varepsilon_s(A, D)$ и $\varepsilon_a(A, D)$ представлены на рис. 4. Для непрозрачной среды обобщённые коэффициенты черноты совпадают с классическим определением. С увеличением прозрачности значения коэффициента ε_s устремляются к нулю, а величина ε_a приближается к предельному значению 2.

=====

Физический смысл полученных результатов понятен. Антисимметрии результирующих потоков (рис. 4, а) соответствует перенос излучения при нулевом тепловом балансе поглощающего тела. При симметричном поглощении (рис. 4, б) энергия излучения полностью преобразуется в тепловой поток и отдается открытой системе посредством молекулярной теплопроводности. В обратном процессе тепловая энергия, полученная извне, в соответствии с законом Кирхгофа спонтанно и обратимо преобразуется в тепловое излучение. Таким образом, казалось бы, чисто оптическое явление диатермичности связывает теории радиационного теплообмена и молекулярной теплопроводности.

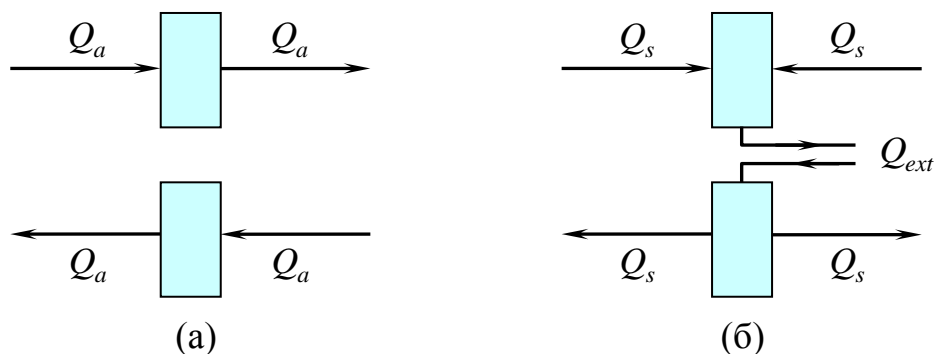


Рис. 4. Антисимметрия (а) и симметрия (б) результирующих потоков Q .

Построим теперь модель явления, заменив полупрозрачное тело эквивалентным четырехполюсником с набором радиационных и тепловых сопротивлений. Для этого зададимся значениями результирующих потоков Q_A, Q_B , яркостной температуры излучения θ_A, θ_B и термодинамической температуры среды T_A, T_B для каждой стороны полупрозрачного слоя. Заметим, что, несмотря на четырехсторонний обмен потоками, уравнение (2.4) содержит всего две линейно независимые переменные благодаря двум дополнительным связям

$$Q_A^{ext} + Q_B^{ext} = -2Q_s, \quad Q_A + Q_B = 2Q_s,$$

накладываемым законом сохранения энергии.

В дальнейшем символом R мы будем обозначать введённый в уравнении (1.5) коэффициент при результирующем лучистом потоке (радиационное сопротивление), а символом r – коэффициент при тепловом потоке в уравнении теплопроводности $T_A - T_B = r \cdot Q$, т. е. тепловое сопротивление.³

На самом деле излучение в приповерхностном объёме является неравномерным и анизотропным, а яркостная температура есть нелинейная функция глубины, для непрозрачного тела асимптотически стремящаяся к значению термодинамической температуры (рис. 5).

Концепция абсолютно чёрного тела, представленная Кирхгофом в 1860 году, предписывала идеально поглощающему излучение слою поверхности бесконечно малую толщину. Позже Планк выдвинул серьёзные аргументы против этой идеи, заметив, что тело должно:

- (а) позволить излучению войти, но не отразиться;
- (б) обладать минимальной толщиной, достаточной для поглощения падающего потока;
- (в) соответствовать жёстким ограничениям на рассеяние.

Сочетание операций разбиения и объединения слоёв позволяет определить $\tilde{\epsilon}_0, \tilde{\epsilon}_1$ и для рациональных значений $k > 0$. Заменим в (1.7) переменные $\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_k$ на \tilde{R}, \tilde{R}_k , используя определение $\tilde{R} = 1 - \tilde{\epsilon}$; тогда

³ Выводы разделов 1 и 2 неявно предполагают, что в процессе измерения оптических параметров выполняется изотермическое условие $T_A = T_B = T$. В этом разделе мы также ограничимся этим случаем, положив $r = 0$. Впоследствии предполагается рассмотреть примеры, когда изотермическое условие не соблюдается.

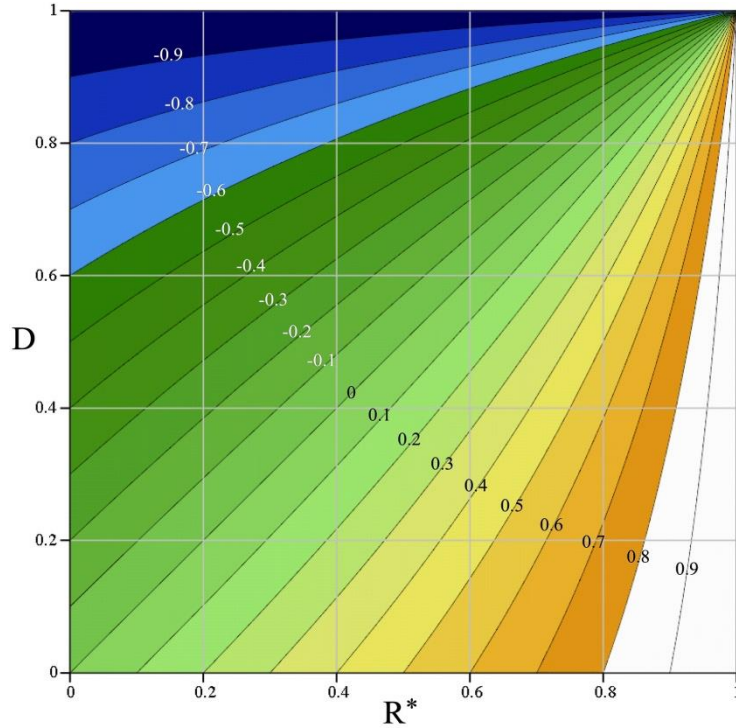


Рис. 5. Изолинии поверхности $\tilde{R}(R^*, D)$

$$\tilde{R} = \frac{k(\tilde{R}_k + 1) + \tilde{R}_k - 1}{k(\tilde{R}_k + 1) - \tilde{R}_k + 1}. \quad (4.6)$$

Преобразуем теперь (4.6) к более удобному виду, приняв за единицу диатермической толщины число слоев K , эквивалентное абсолютно черному экрану ($\tilde{R} = 0$, $\tilde{\epsilon} = 1$); тогда

$$\tilde{R}(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \text{где } x = \frac{k}{K}, \quad K = \frac{\tilde{R}_1 - 1}{\tilde{R}_1 + 1}. \quad (4.7)$$

Обобщённый коэффициент черноты связывает независимые оптические характеристики, что обусловлено разной природой механизмов передачи теплового потока. Их роль показывают изолинии поверхности $\tilde{R}(R^*, D)$ на рис. 5. При взаимодействии с веществом поглощенный поток преобразуется в тепло и переносится через объём тела за счёт теплопроводности. В соответствии с законом Кирхгофа на другой стороне тела происходит обратимое преобразование тепла в лучистую энергию. Этот механизм характерен для тел с параметром $\tilde{R} > 0$. Для диатермических сред с $\tilde{R} < 0$ перенос тепла происходит, в основном, за счёт разности транзитных потоков. Изолиния $\tilde{R} = 0$ соответствует переходу от преимущественного пропускания к отражению излучения.

Единая для всех оптических сред зависимость обобщённого коэффициента отражения $\tilde{R}(x)$ от толщины диатермического слоя приведена на рис. 6. Сим-

метричный вид функции $\tilde{R}(R^*, D)$ позволяет ввести комплементарное определение обобщенного коэффициента пропускания $\tilde{D} = -\tilde{R}$.

Вид зависимости $\tilde{D}(x)$ показывает, что при переносе излучения в диатермических системах с большой оптической толщиной закон Буге-

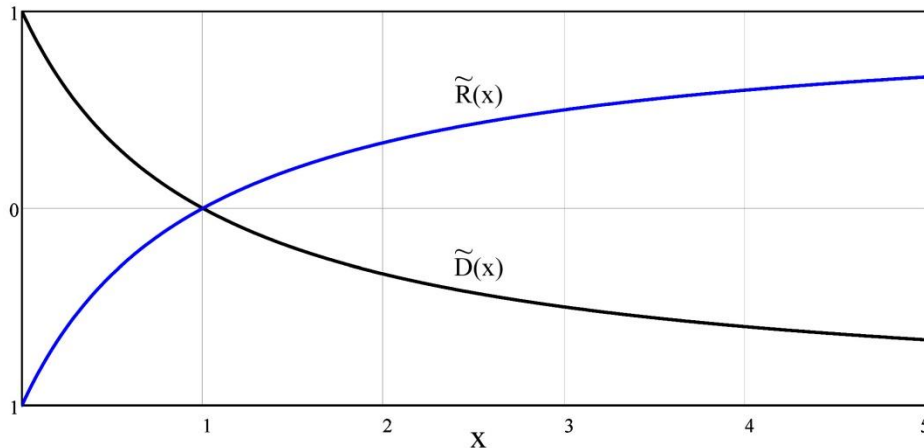


Рис. 6. Зависимость обобщенного коэффициента отражения \tilde{R} и обобщенного коэффициента пропускания \tilde{D} от диатермической толщины слоя x .

ра–Ламберта–Бера не соблюдается. Это связано с явлениями многократного отражения и переизлучения (диффузией) первичного лучистого потока.

5. Заключение

В работе разработан метод расчёта лучистого теплопереноса, который применим как к непрозрачным, так и к диатермическим средам. Его универсальный алгоритм сводится к замене оптических характеристик тела (коэффициентов поглощения, отражения и пропускания) обобщенным коэффициентом черноты $\tilde{\epsilon}$, описывающим полупрозрачную среду как непрозрачную. В частности, представление системы полупрозрачных тел цепочкой эквивалентных радиационных сопротивлений правильно описывает лучистый перенос в средах, состоящих из перемежающихся теплопроводящих и теплоизолирующих слоёв. В задаче об эквивалентности полупрозрачных слоёв введение обобщенного коэффициента черноты снимает ограничение на операцию разбиения слоёв и позволяет перейти к описанию сплошных сред с низкой теплопроводностью. Хорошо изученными примерами таких композитных материалов являются экранно-вакуумная и порошковая теплоизоляция. Предложенный метод является точным макроскопическим описанием, позволяющим обойти сложный анализ взаимодействия излучения с веществом на микрофизическом уровне. Результа-

ты работы расширяют область применения классической теории на класс полупрозрачных тел.

Работа проведена на инициативной основе. Автор выражает признательность проф. А.В. Колесниченко за обсуждение материала и ценные замечания.

Литература

Брамсон М.А. Инфракрасное излучение нагретых тел. М.: Наука, 1964, 223 с.

Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 535 с.

Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 165 с.

Гуди Р. Атмосферная радиация. М.: Мир, 1966, 522 с.

Журавлев Ю.А., Лисиенко В.Г., Китаев Б.И. Совершенствование алгоритма зонального расчета теплообмена в пламенной печи. Инженерно-физический журнал, 1971, т. 21, № 5, с. 829 – 835.

Mayerhöfer T.G., Mutschke H. and Popp J. Employing theories far beyond their limits—the case of the Boguer-Beer-Lambert law, ChemPhysChem, 2016, 17, p. 1-9.

Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975, 936 с.

Каганер М.Г. Тепловая изоляция в технике низких температур. М.: Машиностроение, 1966. 275 с.

Соболев В.В. Курс теоретической астрофизики. 3-е изд. М.: Наука, 1985, 504 с.

Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971, 296 с.

Суринов Ю.А. Об итерационно-зональном методе исследования и расчета локальных характеристик лучистого теплообмена. Инженерно-физический журнал, 1972, т. 10. № 4. с. 844-852.

Зуев В.Е., Креков Г. М. Современные проблемы атмосферной оптики, т. 2. Оптические модели атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1986, 256 с.

Rothman L.S., Gordon I.E., Babikov Y. et al., The HITRAN 2012 Molecular Spectroscopic Database, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. v. 130, 2013, p. 4-50. [[PDF](#)]