



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 65 за 2017 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Блонский А.В., Митрушкин Д.А.,  
[Савенков Е.Б.](#)**

Моделирование течений в  
дискретной системе трещин:  
физико-математическая  
модель

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Моделирование течений в дискретной системе трещин: физико-математическая модель // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 65. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2017-65](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-65)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-65>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

А.В. Блонский, Д.А. Митрушкин, Е.Б. Савенков

**Моделирование течений в дискретной системе трещин:  
физико-математическая модель**

Москва, 2017

*А.В. Блонский, Д.А. Митрушкин, Е.Б. Савенков*, Моделирование течений в дискретной системе трещин: физико-математическая модель

### **Аннотация**

В работе рассмотрены основные подходы к моделированию течений в трещиноватых и трещиновато-поровых коллекторах, на различных пространственных масштабах, сформулированы физико-математические модели однофазных и двухфазных течений в трещиноватой среде с учетом переменного раскрытия трещин, перетока между трещинами, капиллярных и гравитационных сил.

**Ключевые слова:** Дискретные системы трещин, многофазное течение, моделирование природного резервуара.

*A.V. Blonsky, D.A. Mitrushkin, E.B. Savenkov*, Discrete fracture network modelling: physical and mathematical model

**Abstract** The paper reviews essential approaches to describe multiphase flow in fractured and fractured porous media at different spatial scales. A DFN type single and two-phase flow models accounting for non-uniform fracture apertures, flow exchange between fractures, capillary and gravity forces are described in details.

**Key words and phrases:** Discrete fracture network, multiphase flow, reservoir simulation.

# 1 Введение

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных инструментов анализа процесса разработки нефтегазовых месторождений. Сложность строения коллекторов нефти и газа и многообразие физических эффектов, сопровождающих процесс вытеснения, приводят к необходимости рассмотрения различных математических моделей, описывающих течение.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с математическим моделированием многофазных течений в трещиноватых коллекторах. Заметим, что из трещиноватых и трещиновато-поровых карбонатных коллекторов добывается порядка 40% добываемых углеводородов в мире [1].

Характерной особенностью трещиноватых коллекторов является существенная анизотропия проницаемости, которая обусловлена наличием системы гидродинамически связанных или несвязанных трещин, расположенных в проводящей или непроводящей вмещающей среде — матрице.

Геологическая трещиноватость характеризуется существенной разномасштабностью. С точки зрения задач анализа процессов, сопровождающих разработку нефтегазовых месторождений, можно выделить три типа трещин:

- макротрещины (100 – 1000 метров);
- мезотрещины (1 – 10 метров);
- микротрещины (0.01 – 0.1 метра).

Трещины могут быть проводимыми и непроводимыми. Проводимые трещины вносят дополнительный вклад в течение жидкости, а непроводимые представляют собой барьеры для течения и создают дополнительное сопротивление.

Трещиноватость на различных масштабах оказывает различное влияние на течение в коллекторе. В случае чисто трещиноватых коллекторов макротрещины образуют основные каналы течения, а мезотрещины и микротрещины, связанные с макротрещинами, являются источником притока жидкости.

В случае трещиновато-поровых коллекторов наиболее распространена ситуация, когда трещиноватая система представляет собой сеть высокопроводимых каналов, а пористая матрица содержит основные запасы углеводородов. При этом трещины образуют путь течения жидкости, а пористая матрица является её источником. Также возможна ситуация, когда трещины и матрица коллектора имеют сравнимую проницаемость, тогда трещины просто вносят дополнительный вклад в течение и увеличивают общую проницаемость системы.

При моделировании течений флюида в трещиновато-поровых коллекторах выделяют три основных явления:

- течение в матрице;

- течение в трещинах;
- переток между трещинами и матрицей.

Основными механизмами обмена флюидами между матрицей и трещинами являются [2]:

- напорный обмен — переток под действием разницы давлений в средах;
- капиллярная пропитка — переток под действием капиллярных сил;
- гравитационный дренаж — переток из-за разницы плотностей флюидов;
- диффузионный обмен — переток под действием градиентов массовой концентрации.

При этом процесс перетока между трещинами и матрицей может быть описан по-разному в зависимости от масштаба рассматриваемой среды. Обычно выделяют три различных масштаба среды: микромасштаб (керна до 0.1 м), мезомасштаб (порядка 1 м), макромасштаб (ячейка ГД сетки порядка 50 м), см. рисунок 1.

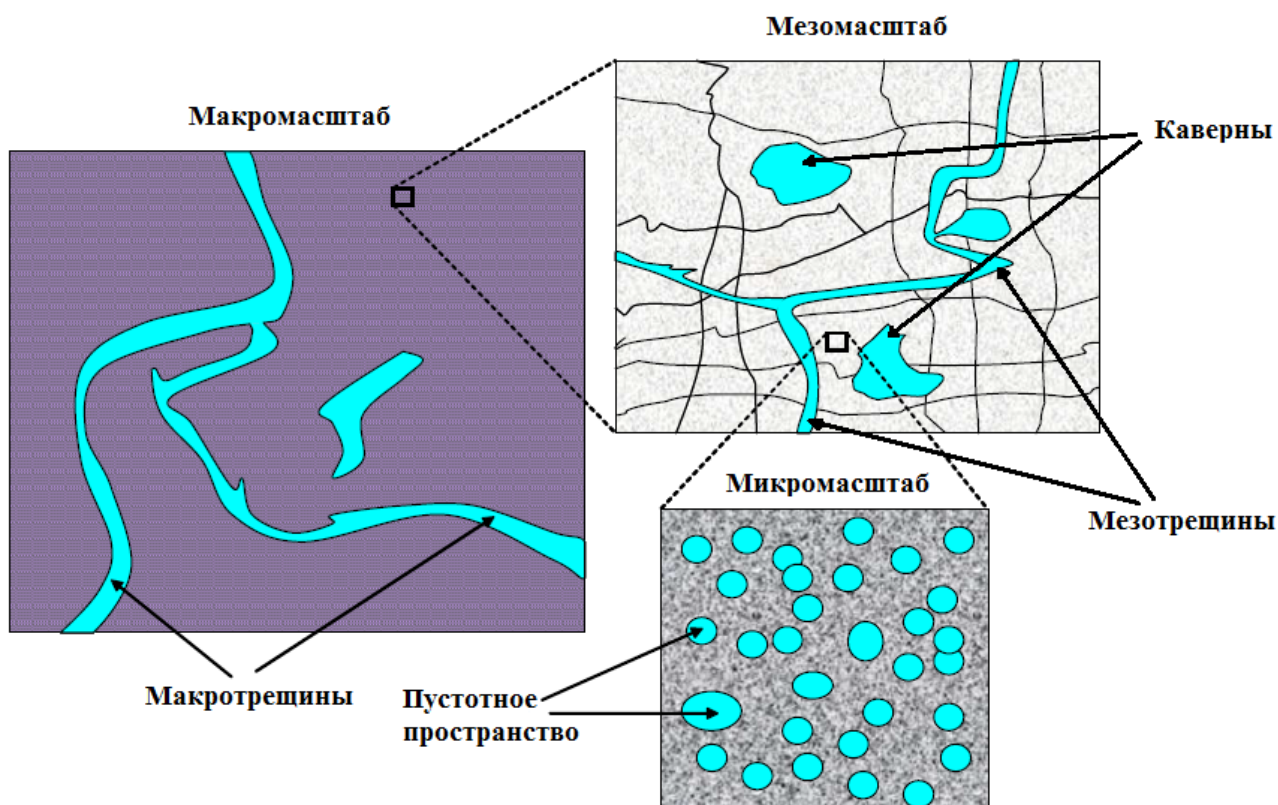


Рис. 1. Различные пространственные масштабы среды[3].

Каждый из указанных масштабов имеет свои особенности, которые необходимо учитывать при исследовании свойств породы и течений.

Для прогнозирования добычи месторождений необходимо моделирование течений на макромасштабе. Модели течений микроуровня учитывают наибольшее количество физико-химических эффектов, однако их использование даже на мезомасштабе не представляется возможным из-за высокой вычислительной сложности. Важной задачей при моделировании течений на масштабе месторождения является перенос свойств с микро-масштаба на мезо- и макромасштабы и подготовка данных для моделей макроуровня. И если в случае чисто поровых коллекторов можно определить размеры представительного объёма среды (representative elementary volume, REV) и, проведя на нём экспериментальные исследования, ремасштабировать результаты на больший масштаб, то в случае трещиноватых пород REV может в принципе отсутствовать [4].

В данной работе приводится обзор существующих моделей для описания течений в трещиноватых и трещиновато-поровых средах на различных пространственных масштабах. Детально описывается геометрическая модель чисто трещиноватой среды и проводится физико-математическая формализация течения по системе пересекающихся трещин. В качестве модели трещин будет использована модель дискретной системы трещин (Discrete Fracture Network, DFN) [5], поскольку данная модель наиболее точно описывает геологию рассматриваемой среды, учитывает основные физические эффекты, которые появляются при течении в трещинах и является универсальной при моделировании течений на различных пространственных масштабах. В последующих разделах будет приведено описание разработанных алгоритмов построения дискретной модели трещиноватой среды в виде системы пересекающихся плоскостей и построения согласованной расчетной сетки. Также будут сформулированы физико-математические модели однофазных и двухфазных течений в трещиноватой среде с учетом перетоков между трещинами.

Вначале рассмотрим основные подходы и модели, используемые для описания течений в трещиноватых и трещиновато-поровых геологических средах. При этом отметим, что разделение моделей течений в трещиноватых и трещиновато-поровых средах на модели мезо- и макроуровня является условным, поскольку и те и другие модели могут быть использованы на обоих указанных масштабах. Разделение наиболее соответствует их применению в практике моделирования нефтегазовых месторождений.

## 2 Модели микроуровня

Данный уровень детализации соответствует явному пространственному разрешению геометрии пустотного пространства породы. В качестве геометрической модели образца породы обычно используется его микротомограмма, позволяющая описать структуру поровых каналов и трещиноватости с микрометрическим и выше разрешением.

В этом случае для описания течения флюида используются не усредненные фильтрационные модели (основанные на законе Дарси), а уравнения классической гидродинамики (уравнения Навье-Стокса).

Распространёнными моделями на данном пространственном масштабе являются модели на основе решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method/LBM) [6], модели поровых сетей (pore-network models) [7], модели на основе уравнений гидродинамики, включая метода функционала плотности [8], метода сглаженных частиц (smoothed particle hydrodynamics/SPH) или уравнений классической гидродинамики многофазных течений с учетом динамик межфазных границ [9] и т. д.

Все упомянутые подходы с той или иной степенью успешности можно применять для решения ряда частных задач моделирования течения флюида в поровом пространстве. Однако ни один из них не лишен недостатков как в части корректности математической модели и степени ее полноты, так и в части устойчивости вычислительных алгоритмов и возможности эффективной программной реализации.

Основное назначение моделей данного класса: определение методами вычислительного эксперимента параметров математических моделей мезоуровня, а также анализ степени влияния различных физико-химических механизмов, сопровождающих течение, на свойства макроскопического процесса течения.

## 3 Модели мезоуровня

### 3.1 Модель Дарси–Стокса

Модель Дарси–Стокса описывает трещиновато-кавернозно-поровую среду в виде объединения двух сред — поровой среды, в которой течение описывается стандартными уравнениями фильтрации (законами сохранения массы компонент, дополненных определяющими соотношениями в виде, например, закона Дарси), и трещин с кавернами, в которых течение описывается моделью Стокса [3].

На границе между средами задаются дополнительные условия согласования, которые имеют вид условий непрерывности потоков массы, импульса и энергии [3]. Среди данных условий особенно выделяется условие неприлипания жидкостей на границе, которое содержит в себе безразмерный коэффициент, характеризующий свойства породы на микроуровне, который определяется из результатов лабораторного эксперимента.

Модель Дарси–Стокса применяется на мезо- и макромасштабах. При этом для данной модели существуют методы ремасштабирования, которые позволяют в рамках модели перейти от мезо- к макроуровню [3].

### 3.2 Модель Стокса–Бринкмана

Данная модель, также как и модель Дарси–Стокса, предназначена для моделирования течений в трещиновато-кавернозно-поровой среде. Течение, как в поровой среде, так и в трещинах с кавернами, описывается так называемым уравнением Стокса–Бринкмана. Качественное отличие течений в указанных средах заключается в том, что в поровой среде

вязкие силы преобладают над инерционными, а в трещиноватой среде напротив инерционные силы преобладают над вязкими. Данное отличие выражается в выборе различных коэффициентов в уравнении Стокса–Бринкмана [3, 10].

Стоит отметить, что рассматриваемая модель легко может быть сведена к модели Дарси–Стокса. Но в отличие от модели Дарси–Стокса, в данной концепции нет необходимости в дополнительных условиях согласования, так как все типы сред описываются единой группой уравнений.

При этом в уравнении Дарси–Стокса, слагаемое, отвечающее за влияние трения слоев жидкости друг о друга содержит коэффициент «эффективной вязкости», который оказывает сильное влияние при моделировании течений в коллекторах с высоким значением пористости 0.5–0.8 [3]. Определение данного коэффициента в указанном типе коллекторов также представляет собой отдельную задачу.

Модель Стокса–Бринкмана, также как и модель Дарси–Стокса, может быть использована на мезо– и макромасштабах. Вопросы ремасштабирования данной модели рассмотрены в работе [3].

## 4 Модели макроуровня

### 4.1 Модели одинарной пористости и проницаемости

#### 4.1.1 Модель эффективной среды

В модели эффективной среды (в англоязычной литературе модель *single porosity*), происходит переход от рассмотрения двух различных по сути объектов — трещин и пористой матрицы к единой эффективной поровой среде, которую описывают осредненные параметры, учитывающие процессы течения как в матрице, так и в трещинах [11]. Течение в данной модели описывается стандартными уравнениями фильтрации [12], [13]. Модель эффективной среды предназначена для моделирования течений в трещиновато-поровых коллекторах на макромасштабе, но при этом данная модель может также быть использована при моделировании течения на образце керна, как показано в работе [14].

Сложность перехода к модели эффективной среды заключается в необходимости корректного определения ее макроскопических свойств (абсолютная проницаемость, ОФП). Поскольку исходная трещиновато-поровая среда является анизотропной из-за наличия трещин, для сохранения особенностей течения необходимо использовать тензорные абсолютные и относительные фазовые проницаемости (ОФП).

Существует два типа подходов осреднения абсолютной проницаемости и ОФП трещиновато-поровой среды. В первом случае основное внимание уделяется методу вычисления эффективных параметров трещиноватой среды, в то время как свойства матрицы считаются известными.

- Тензор абсолютной проницаемости проницаемости для трещиноватой среды может



быть вычислен как аналитически [15], так и с помощью численного моделирования течения в дискретной системе трещин в рамках модели DFN (раздел 4.3) [5, 16]. Заметим, что подход численного моделирования является более корректным, с точки зрения учета связности трещин.

- В качестве относительных фазовых проницаемостей в трещинах обычно используются линейные приближения. Тензор ОФП в трещиноватой среде может быть вычислен с помощью численного моделирования течения в рамках модели DFN (раздел 4.3) [17].

Эффективное значение проницаемости для трещиновато-поровой среды вычисляется как сумма проницаемостей поровой среды и эффективного значения трещиноватой среды, взвешенных по их объёму [11]. Эффективные кривые ОФП вычисляются в виде взвешенных сумм кривых в матрице и трещиноватой среде, где в качестве весов выступают абсолютные проницаемости и объёмы рассматриваемых сред.

Во втором случае тензор абсолютной проницаемости и ОФП могут быть определены в результате численного моделирования совместного течения в матрице и трещинах [16, 17]. Численное моделирование совместного течения может быть выполнено либо в рамках модели DFM (раздел 4.1.2), либо в рамках модели DFN (раздел 4.3). Применение данного метода, с вычислительной точки зрения, осложняется необходимостью построения сложных неструктурированных трёхмерных сеток, а также большим количеством расчетных ячеек.

Основным недостатком модели эффективной среды является невозможность детального описания перетоков жидкости между трещинами и поровой матрицей. Область применения данной модели ограничена классом трещиновато-поровых коллекторов, в которых проницаемость трещин сопоставима с проницаемостью поровой матрицы.

#### 4.1.2 Модель «Discrete fracture and matrix» (DFM)

В моделях данного класса геометрические свойства трещин (их форма и размер, положение и ориентация в пространстве, раскрытие и т. д.) задаются непосредственно. При этом трещины имеют конечное раскрытие и рассматриваются как трехмерные подобласти, наделенные соответствующими фильтрационно-емкостными свойствами. Течение как в трещинах, так и в матрице описывается трехмерными уравнениями фильтрации, при этом для определения проницаемости трещин используется приближение смазочного слоя [19, 4].

Данная модель позволяет детально описать течение как в матрицах, так и системе трещин, а также корректно учитывать перетоки между ними. Модель DFM не имеет ограничений на геометрию, степень гидродинамической связности и пространственную плотность системы трещин.

Основным недостатком модели является ее вычислительная сложность: так как трещины рассматриваются как трехмерные объекты, то для аппроксимации всей системы (трещины и матрица) необходимо использовать расчетные сетки, разрешающие трещины по толщине. Вместе с тем, геометрия таких сеток должна быть согласована с геометрией системы трещин.

На практике трещины описываются с помощью трехмерных ячеек гибридных неструктурированных сеток, состоящие из тетраэдров, призм, пирамид и шестигранников. Применение столь сложных сеток, вместо стандартных тетраэдных обусловлено тем, что алгоритмы построения тетраэдных сеток плохо работают в узких областях (в рассматриваемом случае — трещинах). Тетраэдная сетка для трещины становится сильно искривленной и, обычно, не обладает хорошими геометрическими свойствами, что может приводить к задачам с плохо обусловленными матрицами. В работе [19] показано, что использование гибридных сеток также приводит к уменьшению числа ячеек в модели на 15–20%. Численное моделирование течений на таким образом построенной сетке осложняется отличием свойств ячеек на несколько порядков и необходимостью построения аппроксимаций дифференциальных уравнений модели для сеток произвольной структуры.

## 4.2 Модель двойной пористости

В модели двойной пористости трещиновато–поровый коллектор рассматривается в виде системы двух взаимопроникающих сред: чисто трещиноватой, которая представляется в виде эффективной пористой среды, и чисто пористой, соответствующей проводящей матрице. Перетоки между трещинами и матрицей описываются с помощью функции перетока, входящей в уравнения модели.

Ключевыми особенностями данной модели являются:

- разделение течения в матрице и трещинах;
- наличие перетока между матрицей и трещинами;
- требование к связности и плотности трещин.

Функции перетока, описывающие механизмы миграции флюида, содержат параметр — геометрический фактор (*shape factor*), который учитывает связность трещин и поровой матрицы и, по сути, контролирует величину потока флюидов между средами. Параметры эффективной трещиноватой среды могут быть вычислены способами описанными в разделе 4.1.1.

Наибольшую сложность, связанную с применением модели двойной пористости, представляет идентификация корректного значения геометрического фактора, для определения которого необходимо проведение гидродинамических исследований скважин и адаптация модели на историю разработки месторождения. Неправильная идентификация гео-

метрического фактора и других параметров функции перетока может приводить к существенным ошибкам при моделировании [19].

Исходя из соотношения между проницаемостями трещин и матрицы, модель двойной пористости разделяется на две модели:

- *Модель двойной пористости/одинарной проницаемости:* в данной модели полагается, что скорость фильтрации по трещинам намного выше скорости фильтрации в матрице. И по этой причине течением флюида в пористой матрице можно пренебречь. Таким образом, течение флюида во всем резервуаре определяется проницаемостью трещин. Поровые блоки лишь поставляют жидкость в трещины.
- *Модель двойной пористости/двойной проницаемости:* в данной модели, в отличие от предыдущей, также учитывается течение в пористой матрице.

Модель двойной пористости может быть применена для решения задач моделирования течений в трещиновато–поровых коллекторах на макромасштабе.

### 4.3 Модель «Discrete fracture network» (DFN)

Модель DFN является, по сути, идеализацией реальной трещиноватой среды, в которой трещины предстают в виде двумерных объектов, например плоскостей. Данная модель может быть использована для описания как чисто трещиноватых, так и трещиновато–поровых коллекторов. В качестве модели течения в трещинах в данной концепции используется модель смазочного слоя [20], а в матрице — стандартные уравнения фильтрации.

Ключевыми особенностями моделей данного класса являются:

- прямой расчет многофазных течений по системе трещин и матрице коллектора;
- явный расчет перетоков между трещинами и пористой матрицей;
- отсутствие ограничений на геометрию, связность и плотность систем трещин;
- возможность учета капиллярных эффектов как феноменологически, путем задания кривых капиллярных давлений, так и на основе моделей, учитывающих угол смачиваемости флюида и породы (модели Юнга–Лапласа).

Основное ограничение, которое накладывает данная модель на геометрию трещин — характерная длина трещин намного больше величины характерного раскрытия.

В случае трещиновато–поровых коллекторов на практике для геометрического описания среды используется тетраэдная сетка. Тетраэдры описывают пористую матрицу, а грани тетраэдров — трещины. В случае чисто трещиноватых коллекторов трещины описываются двумерной треугольной сеткой, согласованной на линиях пересечения трещин.

Для описания перетока двухфазной жидкости между трещинами через линии их пересечения в моделях типа DFN изначально были предложены две различные модели. Разделение данных моделей основано на анализе числа Пекле, которое описывает отношение конвективного переноса к диффузионному. Модель *complete-mixing* [21] описывает течение при очень низких значениях числа Пекле. В рамках данной модели флюиды смешиваются на пересечениях трещин и из пересечения трещин вытекают жидкости с одинаковыми долями фаз. Модель *streamline-routing* [21] описывает течение при очень высоких значениях числа Пекле. В рамках данной модели доля фазы флюида вдоль преобладающего направления течения постоянна, а в остальных направлениях течения происходит смешивание флюидов.

В случае трещиновато-поровой среды на границе матрица-трещина накладываются соответствующие условия согласования. Для двухфазных течений особенностью модели является условие непрерывности функции капиллярного давления на границе между средами [1].

Модель DFN может быть использована при моделировании течений на различных пространственных масштабах, с учетом различных по характерному размеру систем трещин (микро-, мезо- и макротрещин), однако эффективно работает только тогда, когда все трещины относятся к одному пространственному масштабу. Данное ограничение связано с тем, что вычислительная ресурсоемкость используемых алгоритмов напрямую зависит от количества рассматриваемых трещин. Кроме того, от рассматриваемого пространственного масштаба зависит и используемая физико-математическая модель. Например, для макротрещин учитывается их переменное раскрытие и капиллярные эффекты внутри трещин, в то время как для мезотрещин и макротрещин обычно используется постоянное вдоль всей поверхности трещины раскрытие, а капиллярными силами пренебрегают. Модель DFN может быть применена при решении задачи определения эффективных абсолютных и относительных фазовых проницаемостей образца керна и для определения параметров макроскопических моделей течения на масштабе ячейки гидродинамической сетки.

#### 4.4 Модель «Fracture-only»

Модель «Fracture-only» [22] представляет упрощенный вариант модели DFM. В рамках данного подхода трещины и течение в них описываются также как и в модели DFN, а матрица описывается некоторыми объемами среды, которые окружают трещины. Течение в матрице явно не разрешается, однако учитывается поток массы из матрицы в трещину. Для учета указанного перетока предполагается, что каждая трещина связана с определенным объемом матрицы («виртуальной ячейкой»), из которого происходит дренирование флюида в трещину. Взаимодействие сред определяется функцией перетока, которая используется в моделях двойной пористости. Подробное описание модели приведено в работах [22, 23].

## 5 Построение дискретной модели трещиноватой среды

При моделировании течений в чисто трещиноватом коллекторе корректное описание трещин особенно важно, поскольку геометрическое положение трещин и их связность определяют направление течения в коллекторе. Данные о геометрии макро- и мезотрещин трещин могут быть получены с помощью сейсморазведки или азимутального электрического микроимиджера (*FMI*). Геометрия микротрещин может быть получена с использованием средств микротомографии. В данной работе предполагается, что геометрия трещин известна и ниже будет приведено формальное математическое описание модели трещиноватой среды.

### 5.1 Геометрическая модель трещиноватой среды

В качестве геометрической модели среды будет рассматриваться локально двумерная область  $\mathcal{F}$ , которая представляет собой объединение некоторого числа (пересекающихся) трещин, внутри прямоугольного параллелепипеда,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_f} \mathcal{F}_n.$$

где  $N_f$  — число трещин. Каждая отдельная трещина  $\mathcal{F}_n$  представляет собой двумерное многообразие (поверхность) с краем. Пример множества  $\mathcal{F}$  для случая двух трещин показан на рисунке 2.

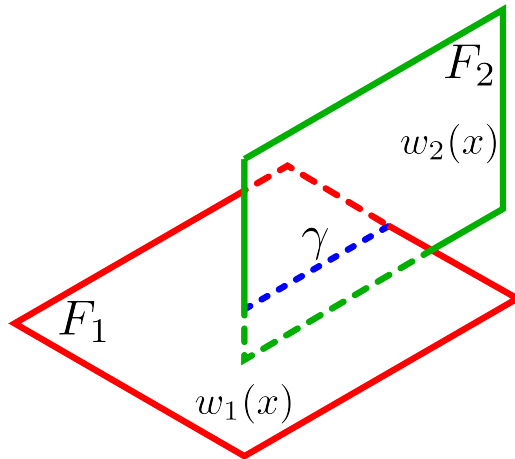


Рис. 2. Пример расчетной области: две трещины  $\mathcal{F}_{1,2}$  и линия их пересечения  $\gamma$ .

Предполагается, что:

- трещины плоские, либо слабо искривлены (средний радиус кривизны существенно больше характерного линейного размера трещины). При описании течения в трещине справедливо приближение смазочного слоя (см. ниже);

- поверхности  $\mathcal{F}_n$  представляют собой срединные поверхности трещин, т.е. математические поверхности, равноудаленные от берегов трещин. Раскрытие трещины является функцией точки срединной поверхности трещины,

$$w = w_0(x), \quad x \in \mathcal{F},$$

где  $\mathcal{F}$  — срединная поверхность трещины;

- любые две трещины  $\mathcal{F}_i$  и  $\mathcal{F}_j$  либо не имеют общих точек, либо пересекаются по отрезку  $\gamma_{ij} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$  конечной положительной длины;
- два отрезка пересечения  $\gamma_{ij}$  и  $\gamma_{kl}$  имеют не более одной общей точки.

Сформулированные выше ограничения являются естественными при представлении трещин в виде плоских полигонов в концепции модели DFN. Другие виды взаимного расположения трещин (например пересечение 3-х отрезков  $\gamma_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  и  $\gamma_{ij}$  в одной точке) являются геометрически неустойчивыми, т.е. исчезают при малых «шевелениях» срединной поверхности.

## 5.2 Построение расчетной сетки

Для построения сетки на системе трещин необходимо учитывать пересечения трещин и пересечения отрезков пересечений. Рассмотрим алгоритм построения согласованной расчетной сетки на примере двух пересекающихся трещин (рисунок 3).

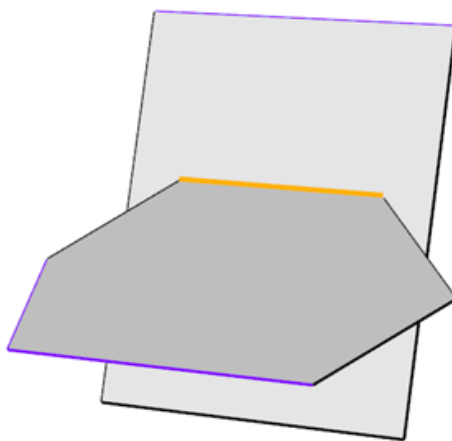


Рис. 3. Разбиение отрезка границ трещин и отрезка пересечений.

Алгоритм построения сетки состоит из следующих этапов:

1. Последовательное разбиение отрезков пересечений и границ трещины точками на отрезки заданного размера, которые впоследствии используются как ребра сетки.

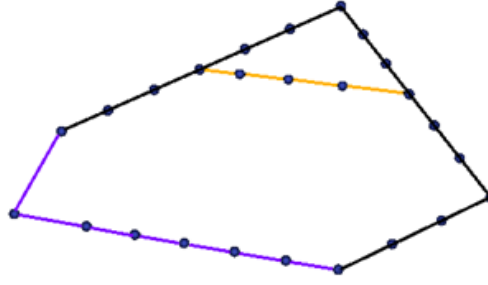


Рис. 4. Разбиение отрезка границ трещин и отрезка пересечений.

2. Равномерное заполнение точками областей трещин с ограничением на близость внутренних точек к граничным и к точкам на отрезках пересечений.

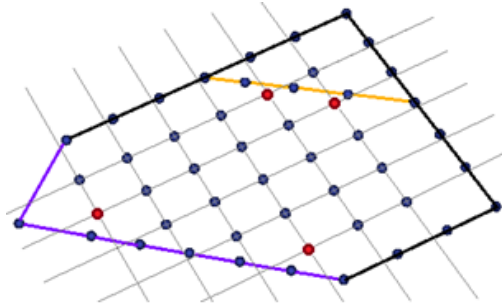


Рис. 5. Заполнение точками области трещины.

3. Построение триангуляции для каждой трещины по заданным каркасам (точкам, отрезкам).

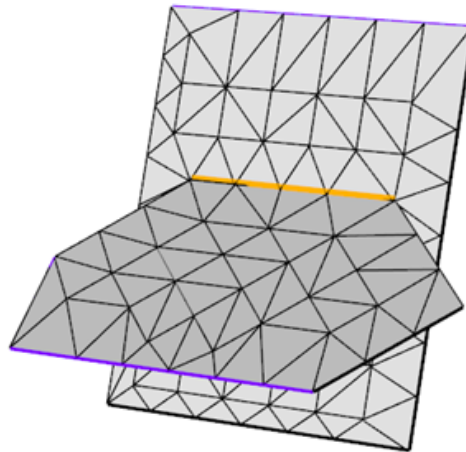


Рис. 6. Построение триангуляции.

Построенная таким образом сетка полностью охватывает всю двумерную область геометрической модели:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_e} \omega_n,$$

где  $\omega_n$  —  $n$ -й треугольник сетки.

Также построенная сетка удовлетворяет следующим условиям:

- любые два треугольника имеют либо пустое пересечение, либо одну общую вершину, либо одно общее ребро;
- границы трещин и отрезки их пересечения являются объединением ребер треугольников.

Таким образом сетка внутри каждой трещины образуется подмножеством треугольников сетки системы трещин:

$$\mathcal{F}_i = \bigcup_{n \in I_i} \omega_n,$$

где  $I_i$  — множество треугольников, образующих трещину  $\mathcal{F}_i$ .

Сетка для сгенерированной случайным образом системы трещин, построенная по описанному выше алгоритму представлена на рисунке. 7.

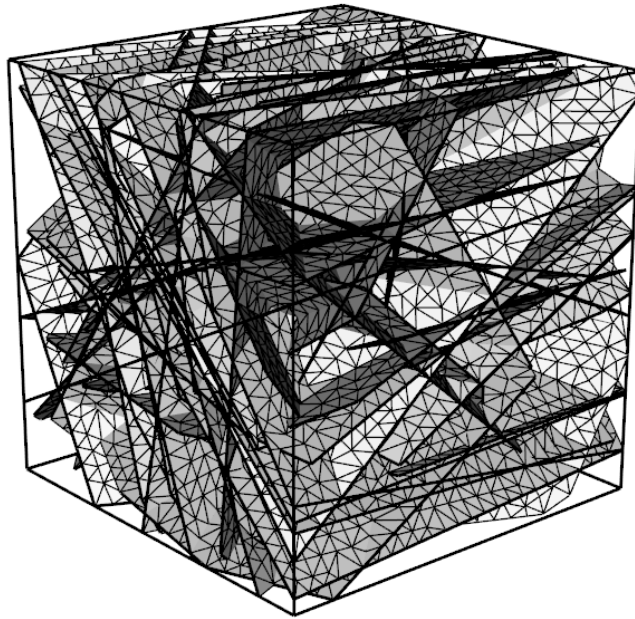


Рис. 7. Пример построенной сетки для системы трещин.

## 6 Математическая модель однофазного течения

Уравнение однофазной фильтрации в трещине имеет вид [12]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\rho) + \operatorname{div} \left[ -w\rho \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}) \right] = 0, \quad (1)$$

где  $p$  — давление;  $\rho = \rho(p)$  — массовая плотность флюида;  $w = w(x)$  — раскрытие трещины;  $\mu = \mu(p)$  — вязкость;  $\vec{g} = g\vec{e}_g$ , — проекция направляющего вектора ускорения свободного



падения на плоскость трещины,  $g$  — ускорение свободного падения,  $K$  — абсолютная проницаемость, выражение для которой, в соответствии с моделью смазочного слоя, имеет вид:

$$K = K(x) = \frac{w^2(x)}{12}, \quad (2)$$

где  $x$  — точка расчетной области. Можно отметить, что раскрытие трещины  $w$ , вообще говоря, есть функция от давления, но в данной работе этой зависимостью пренебрежём.

Уравнение (1) решается в замкнутой ограниченной области  $\mathcal{F}$  с границей  $\Gamma$ . Для уравнения (1) задаются начальные и граничные условия. Граничные условия могут быть заданы либо в виде заданного давления, либо в виде заданного потока на границе:

- граничное условие Дирихле:

$$p|_{\Gamma_D} = p_D, \quad (3)$$

где  $\Gamma_D \subset \Gamma$  — граница области, на которую наложено условие Дирихле,  $p_D$  — давление, заданное на границе;

- граничное условие Неймана:

$$-\rho w \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_N} = Q_N, \quad (4)$$

где  $\Gamma_N \subset \Gamma$  — граница области, на которую наложено условие Неймана,  $Q_N$  — поток массы, заданный на границе,  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе.

Начальное условие представляет собой распределение давления в области расчета на начальный момент времени:

$$p(x, t = 0) = p_0(x), \quad x \in \mathcal{F}. \quad (5)$$

Уравнение (1), заданное во внутренних точках трещин  $\mathcal{F}_n$ , должно быть дополнено условиями согласования на отрезках пересечений трещин  $\gamma_{ij}$  (индексами  $i$  и  $j$  обозначены параметры, отнесенные к трещинам  $\mathcal{F}_i$  и  $\mathcal{F}_j$ , соответственно):

- непрерывность полей давления:

$$p_i(x) = p_j(x), \quad \forall x \in \gamma_{ij}.$$

- непрерывность потоков массы:

$$\vec{Q}_i^{(+)} \cdot \vec{n}_i^{(+)} + \vec{Q}_i^{(-)} \cdot \vec{n}_i^{(-)} = \vec{Q}_j^{(+)} \cdot \vec{n}_j^{(+)} + \vec{Q}_j^{(-)} \cdot \vec{n}_j^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}.$$

где  $\vec{n}_i^{(+)}$ ,  $\vec{n}_i^{(-)}$  — вектора единичных нормалей к линии  $\gamma_{ij}$ , касательные к поверхности трещины  $\mathcal{F}_i$ ,  $\vec{Q}_i^{(+)}$ ,  $\vec{Q}_i^{(-)}$  — вектора плотности потока массы флюида в трещине  $\mathcal{F}_i$ :

$$\vec{Q} = -\rho w \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}).$$

Уравнение (1) имеет дивергентный вид. Для удобства записи данного уравнения производная по времени преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\rho) = w \frac{\partial \rho}{\partial t} = w\rho' \frac{\partial p}{\partial t} = \rho w \left( \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho w c_t(p) \frac{\partial p}{\partial t},$$

где  $c_t(p) = \rho'(p)/\rho(p)$  — коэффициент сжимаемости флюида. Введем обозначения:

$$M(p) = \rho w c_t(p), \quad T(p) = w\rho(p) \frac{K}{\mu(p)}. \quad (6)$$

С использованием определенных выше величин уравнение (1) записывается в виде:

$$M(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} [-T(p)(\nabla p + \rho \vec{g})] = 0 \quad (7)$$

Таким образом, уравнение (7) вместе с начальными и граничными условиями (3)–(5), условиями согласования на пересечениях трещин и уравнениями состояния для плотности  $\rho = \rho(p)$  и вязкости  $\mu = \mu(p)$  образуют замкнутую систему уравнений относительно давления в области  $\mathcal{F}$ .

## 7 Математическая модель двухфазного течения

### 7.1 Уравнения в консервативном виде

Будем считать, что:

- флюид состоит из двух несмешивающихся фаз, то есть каждая фаза  $\alpha = W, O$  («W» — жидкая водная фаза, «O» — жидкая углеводородная фаза) состоит из единственного (псевдо) компонента («w» — вода, «o» — нефть). В дальнейшем фаза будет отождествляться с соответствующим компонентом.
- фазы являются сжимаемыми, массовая плотность фазы является функцией ее давления  $p_\alpha$ :

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha), \quad \alpha = W, O.$$

- давления фаз не равны, они связаны капиллярным давлением, которое определяется локально (в точке пространства) моделью, учитывающей раскрытие трещины и

эффекты смачиваемости:

$$(p_O - p_W)(x) = p_c(w(x), \gamma(x), \sigma), \quad (8)$$

где  $w$  — раскрытие,  $\gamma$  — контактный угол (является функцией взаимных свойств флюидов и скелета),  $\sigma$  — поверхностное натяжение.

На пересечениях трещин накладываются условия согласования по аналогии с однофазным течением:

- Непрерывность полей давления:

$$p_{\alpha,i}(x) = p_{\alpha,j}(x), \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O$$

- Непрерывность потоков массы компонент:

$$\vec{Q}_{\alpha,i}^{(+)} \cdot \vec{n}_i^{(+)} + \vec{Q}_{\alpha,i}^{(-)} \cdot \vec{n}_i^{(-)} = \vec{Q}_{\alpha,j}^{(+)} \cdot \vec{n}_j^{(+)} + \vec{Q}_{\alpha,j}^{(-)} \cdot \vec{n}_j^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O$$

Дифференциальные уравнения законов сохранения масс компонент в рассматриваемых допущениях имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\rho_\alpha S_\alpha) + \operatorname{div} \vec{Q}_\alpha = 0, \quad \alpha = W, O, \quad (9)$$

где  $S_\alpha$  — насыщенность фазы,  $\vec{Q}_\alpha$  — вектор плотности потока массы компонента, для которых справедливы следующие соотношения:

$$S_W + S_O = 1, \quad (10)$$

$$\vec{Q}_\alpha = -\rho_\alpha w \frac{K K_{r,\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \quad \alpha = W, O, \quad (11)$$

где  $K$  — абсолютная проницаемость, которая определяется выражением (2),  $K_{r,\alpha} = K_{r,\alpha}(S_w)$  — относительные фазовые проницаемости фаз,  $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_\alpha)$  — вязкость фазы,  $\vec{g}$  — определяется аналогично случаю однофазного течения.

При рассмотрении двухфазных течений обычно вводятся термины подвижность фазы и проводимость фазы:

$$\lambda_\alpha = \frac{K K_{r,\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad T_\alpha = w\rho_\alpha \lambda_\alpha, \quad \alpha = W, O.$$

С использованием введенных обозначений определяющее соотношение для потока принимает вид:

$$\vec{Q}_\alpha = -\lambda_\alpha w\rho_\alpha (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}) = -T_\alpha (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}).$$

Скорость Дарси фазы  $\alpha$  определяется следующим выражением:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha(\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \quad \alpha = W, O,$$

откуда выражение для потока принимает вид:

$$\vec{Q}_\alpha = w\rho_\alpha \vec{v}_\alpha, \quad \alpha = W, O.$$

Введем величину  $v_T$ , которую будем называть полной скоростью смеси (*total velocity*):

$$\vec{v}_T = \vec{v}_W + \vec{v}_O.$$

Система уравнений (9) совместно с нормировочным соотношением (10) и определяющим уравнением для давлений (8) (всего — 4 уравнения) является системой уравнений относительно 4-х неизвестных  $S_\alpha, p_\alpha$ .

Рассматриваемая система уравнений дополняется начальными и граничными условиями. Начальные условия имеют вид:

$$S_W|_{\mathcal{F}} = S_{W,0}, \tag{12}$$

$$P_W|_{\mathcal{F}} = P_{W,0}. \tag{13}$$

Поле нефтенасыщенности и давление нефтяной фазы на начальный момент времени могут быть посчитаны по формулам (10), (8).

В качестве граничных условий для могут быть заданы либо условие Неймана (заданный поток массы), либо условие Дирихле (заданное давление). Граничное условие Дирихле имеет вид:

$$P_W|_{\Gamma_D} = P_D, \tag{14}$$

где  $\Gamma_D$  — граница расчетной области, на которой задано граничное условие Дирихле,  $P_D$  — заданное давление водной фазы.

Граничное условие Неймана имеет вид:

$$(Q_O + Q_W)|_{\Gamma_N} = Q_N, \tag{15}$$

где  $\Gamma_N$  — граница расчетной области, на которой задано граничное условие Неймана,  $v_N$  — заданная скорость смеси.

Совместно с граничными условиями Дирихле/Неймана (кроме граничного условия непротекания) на границе также должны быть заданы насыщенности фаз:

$$S_\alpha|_\Gamma = S_\alpha, \alpha = W, O \tag{16}$$

Таким образом, в описанных допущениях относительно пространственного положения трещин и условий согласования на пересечениях, с учетом определения проницаемости по модели смазочного слоя, система дифференциальных уравнений (8) – (11) относительно 4-х неизвестных  $S_\alpha$ ,  $p_\alpha$ , совместно с начальными и граничными условиями (12) – (16) и уравнениями состояния фаз  $\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha)$ ,  $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_\alpha)$  описывает модель двухфазного течения по системе пересекающихся трещин.

## 7.2 Уравнения в переменных давления и насыщенности воды

В данном разделе будет описан процесс приведения уравнений (9) к уравнениям с неизвестными  $p_W$ ,  $S_W$  — давление и насыщенность водной фазы.

Для получения уравнения для давления водной фазы в каждом из уравнений (9) вычисляются производные по времени, после чего уравнения (9) принимают вид:

$$w\rho_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + S_\alpha w \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0, \quad \alpha = W, O.$$

Затем уравнение для фазы  $\alpha$  умножается на  $\rho_\alpha^{-1}$ :

$$w \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + w S_\alpha \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0, \quad \alpha = W, O.$$

Полученные уравнения складываются с учетом условия нормировки для насыщенностей (10):

$$w \sum_{\alpha=W,O} S_\alpha \left[ \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha} \right] \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha=W,O} \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0. \quad (17)$$

Выражения в квадратных скобках в последнем уравнении являются сжимаемостями фаз:

$$c_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha}, \quad \alpha = W, O.$$

Таким образом, с учетом последних обозначений, уравнение (17) принимает вид:

$$w \sum_{\alpha=W,O} S_\alpha c_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha=W,O} \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div}(\vec{Q}_\alpha) = 0. \quad (18)$$

Из уравнения (8) следует, что скорости изменения давлений фаз равны:

$$\frac{\partial p_O}{\partial t} = \frac{\partial p_W}{\partial t}. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) принимает следующий вид:

$$w c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \sum_{\alpha=W,O} \frac{1}{\rho_\alpha} \operatorname{div} \vec{Q}_\alpha = 0, \quad (20)$$

где  $c_t = \sum_{\alpha=W,O} c_\alpha S_\alpha$  — полная сжимаемость.

Выражение для потока фазы ( $\alpha = O$ ) с учетом (8) преобразуется к следующему виду:

$$\vec{Q}_O = -T_O(\nabla p_O - \rho_O \vec{g}) = -T_O(\nabla p_W + \nabla p_C - \rho_O \vec{g}).$$

С учетом всех полученных выше выражений уравнение для давления фазы  $p_W$  принимает вид:

$$w c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \frac{1}{\rho_W} \operatorname{div} [-T_W(\nabla p_W - \rho_W \vec{g})] + \frac{1}{\rho_O} \operatorname{div} [-T_O(\nabla p_W + \nabla p_C - \rho_O \vec{g})] = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет тип уравнения сохранения объёма. Далее предполагается, что сжимаемость фаз учитывается в коэффициенте  $c_t$ , а при рассмотрении конвективных членов уравнения (21) изменением плотностей  $\rho_O$ ,  $\rho_W$  — можно пренебречь. Тогда уравнение (21) можно переписать в виде:

$$w c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \operatorname{div} [-\lambda_T \nabla p_W - w \lambda_O \nabla p_C - \rho_T \vec{g}] = 0, \quad (22)$$

где

$$\lambda_T = w(\lambda_O + \lambda_W), \quad \rho_T = w(\lambda_O \rho_O + \lambda_W \rho_W).$$

Вторым уравнением, как уже отмечалось, является уравнение для насыщенности водной фазы, которое, с использованием введенных соотношений, принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w \rho_W S_W) + \operatorname{div} [w \rho_W \vec{v}_W] = 0. \quad (23)$$

## 8 Определяющие соотношения

При моделировании течений в трещиноватых коллекторах важным является корректное определение свойств жидкостей и породы. Такие свойства флюидов, как плотность или вязкость, определяются точно также, как и при моделировании течений в поровых коллекторах [12]. Ниже будут рассмотрены определяющие соотношения свойств жидкостей и породы, которые являются характерными для трещиноватых коллекторов и подчеркивают особенности течения в трещинах.

### 8.1 Относительные фазовые проницаемости

В абсолютном большинстве работ, посвященных DFN, считается, что кривые относительных фазовых проницаемостей в трещинах являются линейными. В частности, в [24] отмечается, что для достаточно широких трещин (сотни микрон и более), экспериментальные данные указывают на то, что:

- в пределах одной трещины флюиды препятствуют движению друг друга, и относительные проницаемости в этом случае должны описывать снижение общей подвижности;
- в системе связанных трещин флюиды быстро (по сравнению с характерными временами течения в поровой матрице) разделяются и текут по разным каналам.

Этими фактами обосновывается выбор кривых относительных фазовых проницаемостей в виде прямых линий — подвижность одной фазы меняется линейно при изменении второй, присутствующей в течении. В силу того, что для трещин размера сто микрон и более считается, что капиллярные эффекты малы и ими можно пренебречь, считается, что значения связанной водонасыщенности и остаточной нефтенасыщенности близки к нулю. Отличающиеся от нуля значения остаточной нефтенасыщенности могут быть использованы для учета «защемления» нефти вследствие особенностей структуры системы трещины (переменное раскрытие, цементирование отдельных протоков, наличие мелкомасштабной «закрытой» трещиноватости, не разрешенной геометрической моделью системы трещин и т. д.).

В ряде экспериментов по определению кривых ОФП [25], [26], [27] отмечается, что кривые ОФП не являются линейными и хорошо описываются распространенными степенными корреляциями типа Брукса и Кори или ван Генухтена ([28], [29], [30], [31]):

- модель Брукса и Кори:

$$k_{rw} = \left(\hat{S}_w\right)^{3+\frac{2}{\lambda}}, k_{ro} = \left(1 - \hat{S}_w\right)^2 \left[1 - \left(\hat{S}_w\right)^{1+\frac{2}{\lambda}}\right],$$

где  $\lambda$  — заданный параметр,

$$\hat{S}_w = \frac{S_w - S_{w,cr} - S_{or}}{1 - S_{w,cr} - S_{or}}$$

— так называемая эффективная водонасыщенность,  $S_{w,cr}$  — остаточная насыщенность воды,  $S_{or}$  — остаточная насыщенность нефти;

- модель ван Генухтена:

$$k_{rw} = \hat{S}_w^2 \left[1 - \left(1 - \hat{S}_w^m\right)^{\frac{1}{m}}\right], k_{ro} = \left(1 - \hat{S}_w^2\right) \left(1 - \hat{S}_w^m\right)^{\frac{1}{m}},$$

где  $m$  — заданный параметр.

Отметим, что для использования описанных моделей необходимо определить значения соответствующих параметров ( $\lambda$  или  $m$ ), которые могут быть получены из лабораторных экспериментов на образце керна, содержащего уединенную трещину.

## 8.2 Капиллярное давление и смачиваемость

Для трещин с большим раскрытием (сотни микрометров и более) часто принимается, что капиллярными давлениями можно пренебречь (в этом случае давления фаз совпадают) [24]. В том случае, когда это необходимо, разница в давлении водной и нефтяной фаз может быть учтена двумя основными способами. В первом из них считается, что функция капиллярного давления в пределах одной трещины может с хорошей точностью описываться стандартными для пористых сред корреляциями типа Брукса-Кори или ван Генухтена [31]:

- модель Брукса и Кори:

$$p_c = p_{c,\min} \hat{S}_w^{-1/\lambda},$$

где  $\lambda$  — заданный параметр,  $p_{c,\min}$  — минимальное капиллярное давление;

- модель ван Генухтена:

$$p_c = \frac{1}{\alpha} \left( \hat{S}_w^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}}$$

где  $\alpha$  и  $n$  — заданные параметры.

Как и при определении относительных фазовых проницаемостей, данный подход требует проведения соответствующих лабораторных экспериментов с целью определения параметров корреляций.

При использовании второго подхода капиллярное давление вычисляется локально (в точке) в зависимости от свойств флюидов и породы, а также величины раскрытия на основе аналитических моделей, например, классического уравнения Юнга-Лапласа:

$$p_c(w) = \frac{2\sigma \cos(\theta)}{w},$$

где  $\sigma$  — величина поверхностного натяжения (является свойством пары флюидов, находящихся в контакте),  $\theta$  — величина контактного угла (определяется взаимными свойствами подвижных фаз и стенок трещины),  $w$  — величина раскрытия трещины в заданной точке. Необходимые для использования такого подхода параметры  $\sigma$  и  $\theta$  должны быть определены, например, в лабораторных экспериментах. Пример использования такого подхода приведен в [32].

Отметим, что анализу вида кривых ОФП и капиллярных давлений для течения многофазного флюида в уединенных трещинах посвящено достаточно мало работ (среди которых см., например, [25, 26, 27, 33]).

Оба представленных способа вычисления функции капиллярного давления учитывают эффекты смачиваемости и поверхностного натяжения. В том случае, когда кривые относительных фазовых проницаемостей и капиллярных давлений задаются исходя из результатов лабораторного эксперимента (для одной трещины), указанные эффекты учитываются неявно (именно они определяют вид кривой, получаемой в эксперименте). В



другом случае, в ходе лабораторного эксперимента определяется величина непосредственно контактного угла (угла смачиваемости)  $\theta$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  (определяется свойствами пары флюидов). Предпочтительность той или иной модели определяется различными факторами, в том числе доступностью информации об углах смачиваемости или возможностью проведения соответствующих лабораторных экспериментов.

## 9 Заключение

В данной работе были проанализированы современные подходы моделирования течений в трещиноватой среде на трех характерных пространственных масштабах: микро-, мезо- и макромасштабе. Также был определен наиболее перспективный подход для моделирования течений на мезо- и макромасштабах, с точки зрения сохранения анизотропии, вводимой трещинами, учёта переменного раскрытия трещин и эффектов смачиваемости. В рамках выбранной концепции DFN было проведено формальное математическое описание геометрии трещин и разработан алгоритм построения согласованной расчетной сетки. Была выполнена физико-математическая формализация процесса однофазного и двухфазного течения, а также рассмотрены характерные особенности многофазных течений в трещинах.

## Список литературы

- [1] Monteagudo, J. E. P., and A. Firoozabadi (2004), Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two- and three-dimensional discrete-fractured media, *Water Resour. Res.*, 40, W07405, doi:10.1029/2003WR002996.
- [2] Eclipse Technical Description 2010.1, Geoquest, Schlumberger.
- [3] P. Popov, Y. Efendiev, G. Qin, Multiscale modelling and simulations of flows in naturally fractured karst reservoirs, *Communications in computational physics*, 2009
- [4] S.K. Matthai, A. Mezentsev, M. Belayneh, Finite element-node-centered finite-volume two-phase-flow experiments with fractured rock represented by unstructured hybrid-element meshes, *SPE*, 2007
- [5] N. Koudina, R. Gonzalez Garcia, and J.-F. Thovert, *Permeability of three-dimensional fracture networks*, The American Physical Society, 1998
- [6] A. Gunde, T. Babagadi, S. K. Mitra, Lattice-Boltzmann method to estimate relative permeabilities for Matrix-Fracture Interaction in Naturally Fractured Reservoirs, *SPE*, 2010

- [7] M. T. Balhoff, M.F. Wheeler, A predictive poro-scale model for Non-Darcy flow in porous media, SPE, 2009
- [8] Demianov A., Dinariev, O., Evseev, N., Density functional modelling in multiphase compositional hydrodynamics, The Canadian Journal of Chemical Engineering, vol. 89, Issues 2, pp. 206-226. 2011.
- [9] Meakin, P., Tartakovsky, A., Modelling and simulation of pore-scale multiphase transport in fractured and porous media. Reviews of Geophysics, vol. 47, Issue 3. 2009.
- [10] He, J., Killough, J. E., Fadlelmula F., M. M., Fraim, M., Unified Finite Difference Modeling of Transient Flow in Naturally Fractured Carbonate Karst Reservoirs - A 3D Case Study, SPE, 2015, doi:10.2118/175098-MS
- [11] T. Samardzioska, V. Popov, Numerical comparison of the equivalent continuum, non-homogeneous and dual porosity models for flow and transport in fractured porous media, Elsevier, 2005
- [12] Басниев К.С, Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М., Подземная гидромеханика, М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006, 488 с.
- [13] Азиз Х., Сеттари Э., Математическое моделирование пластовых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 407 с.
- [14] Ishibashi, T., N. Watanabe, N. Hirano, A. Okamoto, and N. Tsuchiya, GeoFlow: A novel model simulator for prediction of the 3-D channeling flow in a rock fracture network, 2012, Water resources research, 48, W07601, doi:10.1029/2011WR011226.
- [15] M. Oda, Permeability tensor for discontinuous rock masses, Geotechnique, 1985
- [16] L. J. Durlofsky, Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation, International Forum on Reservoir Simulation Iles Borromees, Stresa, Italy, 2005
- [17] С.П. Родионов, Л.Н. Соколюк, Расчёт и использование модифицированных относительных фазовых проницаемостей при преобразовании геологической модели в гидродинамическую, Труды МФТИ, 2010
- [18] P. Lingen, M. Sengul etc., Single medium simulation of reservoirs with conductive faults and fractures, SPE, 2001
- [19] S.K. Matthai, A. Mezentsev, M. Belayneh, Control-Volume Finite-Element Two-Phase Flow Experiments with Fractured Rock Represented by Unstructured 3D Hybrid Meshes, SPE, 2005
- [20] J. R. Murphy, N. R. Thomson, Two-phase flow in a variable aperture fracture, Water resources research, 1993

- [21] Young-Jin Park and Kang-Kun Lee, Analytical solutions for solute transfer characteristics at continuous fracture junctions, *Water resources research*, Vol. 35, No. 5, Pages 1531-1537, May 1999
- [22] E. Unsal, S. K. Matthai, M. J. Blunt, Simulation of multiphase flow in fractured reservoirs using a fracture-only model with transfer functions, Springer, 2009
- [23] P. Lang, S. Matthai, Fracture-Matrix Interface Area Contacted by Injected Fluid as a Function of Average Saturation, Mechanical Aperture and Counter-Current Imbibition, IAMG, 2011
- [24] Райсс, Л., Основы разработки трещиноватых коллекторов. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012, 118 с.
- [25] Reynolds, D.A., Multiphase flow and transport in fractured geological environments, Queen's University Kingston, Canada, 2001.
- [26] Persoff, P., Pruess, K., Two-Phase Flow Visualization and Relative Permeability Measurement in Natural Rough-Walled Rock Fractures. *Water resources research*, 3 1(5), p 1175-1186. 1995.
- [27] Pruess, K., Tsang, Y. W., On Two-Phase Relative Permeability and Capillary Pressure of Rough Walled Rock Fractures, *Water resources research*, 26(9), p 19 15-1926. 1990.
- [28] Corey, A. T., The interrelation between gas and oil relative permeabilities, *Producers Monthly* 19 (November): 38-41. 1954.
- [29] Brooks, R.H., Corey, A.T Hydraulic Properties of Porous Media. *Hydrology Papers*, No. 3, Colorado State U., Fort Collins, Colorado. 1964.
- [30] Corey, A.T., The interrelation between gas and oil relative permeabilities, *Producers Monthly* 19 (November): 38-41. 1954.
- [31] van Genuchten, M. T., A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil. Sci. Soc. Am.*, 44, 892-898. 1980.
- [32] Kueper, B.H., D.B. McWhoner, The Behaviour of Dense, Nonaqueous Phase Liquids in Fractured Clay and Rock, *Ground Water*, 29(5). 1991.
- [33] L. P. Franca, A. Russo, Deriving Upwinding, Mass Lumping and Selective Reduced Integration by Residual-Free Bubbles, Pergamon, Great Britain, 1996

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Модели микроуровня</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Модели мезоуровня</b>	<b>6</b>
3.1	Модель Дарси–Стокса . . . . .	6
3.2	Модель Стокса–Бринкмана . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Модели макроуровня</b>	<b>7</b>
4.1	Модели одинарной пористости и проницаемости . . . . .	7
4.1.1	Модель эффективной среды . . . . .	7
4.1.2	Модель «Discrete fracture and matrix» (DFM) . . . . .	8
4.2	Модель двойной пористости . . . . .	9
4.3	Модель «Discrete fracture network» (DFN) . . . . .	10
4.4	Модель «Fracture-only» . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Построение дискретной модели трещиноватой среды</b>	<b>12</b>
5.1	Геометрическая модель трещиноватой среды . . . . .	12
5.2	Построение расчетной сетки . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Математическая модель однофазного течения</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Математическая модель двухфазного течения</b>	<b>17</b>
7.1	Уравнения в консервативном виде . . . . .	17
7.2	Уравнения в переменных давления и насыщенности воды . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Определяющие соотношения</b>	<b>21</b>
8.1	Относительные фазовые проницаемости . . . . .	21
8.2	Капиллярное давление и смачиваемость . . . . .	23
<b>9</b>	<b>Заключение</b>	<b>24</b>