



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 66 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Блонский А.В., Митрушкин Д.А.,
Савенков Е.Б.**

Моделирование течений в
дискретной системе трещин:
вычислительные алгоритмы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Моделирование течений в дискретной системе трещин: вычислительные алгоритмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 66. 30 с. doi:[10.20948/prepr-2017-66](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-66)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-66>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

А.В. Блонский, Д.А. Митрушкин, Е.Б. Савенков

**Моделирование течений в системе дискретных трещин:
вычислительные алгоритмы**

Москва, 2017

А.В. Блонский, Д.А. Митрушкин, Е.Б. Савенков, Моделирование течений в системе дискретных трещин: вычислительные алгоритмы

Аннотация

В работе рассмотрены вычислительные алгоритмы, применяемые для моделирования однофазных и двухфазных течений в дискретных системах сообщающихся трещин, с учетом переменного раскрытия трещин, перетока между трещинами, капиллярных и гравитационных сил. Вычислительные алгоритмы основаны на применении метода Петрова-Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями и кусочно-постоянными пробными.

Ключевые слова: Дискретные системы трещин, многофазные течения, метод Петрова-Галёркина.

A.V. Blonsky, D.A. Mitrushkin, E.B. Savenkov, Discrete fracture network modelling: A computational algorithms

Abstract The paper reviews computational algorithms with application to multiphase flow modelling in discrete fracture network, accounting for non-uniform fracture aperture, flow exchange between fractures, capillary and gravity forces. Computational algorithms are based on control volume finite element method.

Key words and phrases: Discrete fracture network, multiphase flow, control volume finite element method.

1 Введение

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных инструментов анализа процесса разработки нефтегазовых месторождений. Сложность строения коллекторов нефти и газа и многообразие физических эффектов, сопровождающих процесс вытеснения приводят к необходимости рассмотрения различных математических моделей, описывающих течение.

Характерными особенностями трещиноватых коллекторов, как следует из названия, является наличие системы гидродинамически связанных или несвязанных трещин, расположенных в проводящей или непроводящей вмещающей среде — матрице.

Геологическая трещиноватость характеризуется существенной разномасштабностью. С точки зрения задач анализа процессов, сопровождающих разработку нефтегазовых месторождений, можно выделить три типа трещин:

- макротрещины (100 – 1000 метров);
- мезотрещины (1 – 10 метров);
- микротрещины (0.01 – 0.1 метра).

Трещины могут быть проводимыми и непроводимыми. Проводимые трещины вносят дополнительный вклад в течение жидкости, а непроводимые представляют собой барьеры для течения и создают дополнительное сопротивление.

Трещиноватость на различных пространственных масштабах оказывает различное влияние на течение в коллекторе. В случае чисто трещиноватых месторождений макротрещины образуют основные каналы течения, а мезотрещины и микротрещины, связанные с макротрещинами, являются источником притока жидкости. Течение жидкости по трещинам может оказывать значительное влияние на процесс добычи углеводородов из нефтеносных коллекторов. Поэтому корректное моделирование течений в трещинах имеет высокое значение и является необходимым при построении прогнозов добычи углеводородов из трещиноватых коллекторов. В данной работе будут построены численные схемы расчета однофазного и двухфазного течения в трещинах, в рамках модели сети дискретных трещин (Discrete fracture network, DFN) [1].

Численная схема для расчета двухфазной фильтрации может быть записана в неявном или явно-неявном виде.

Метод IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation) [2] является явно-неявным, при этом неявно аппроксимируется уравнение для давления (параболического типа при заданных значениях полей насыщенности), а явно — уравнение для насыщенности, которое является гиперболическим (при заданных значениях поля давления). Из этого факта проистекает основной недостаток метода IMPES — он является условно-устойчивым (ввиду того, что уравнение для насыщенностей аппроксимируется явно) и не позволяет использовать произвольно большие шаги по времени. В методе FIM (Full Implicit Method)[2] оба

уравнения аппроксимируются неявно, в следствии чего он является абсолютно устойчивым.

Рассматриваемая задача моделирования течений двухфазного флюида по системе трещин с детальным учетом поверхностных (капиллярных) сил требует высокой точности расчета фронтов флюида в ходе вытеснения одной фазы другой. В рассматриваемой задаче, в силу большого разброса величины полей раскрытия трещин, образование множественных фронтов или фронтов со сложной структурой является типичным сценарием развития структуры течения. Хорошо известно, что метод IMPES позволяет более аккуратно разрешать фронты — в силу того, что явно-неявные схемы обладают лучшими дисперсионными свойствами и, как следствие, лучше сохраняют структуру фронта [2], [3].

В рассматриваемой задаче необходимо детальное качественное и количественное моделирование динамики течения. В связи с этим следует отметить тот факт, что для гиперболических задач за характерное время T особенности решения (фронты, возмущения и т. д.) распространяются на расстояние порядка $L \sim VT$, где V — скорость течения (движения фронта). Данное условие связано лишь с математическими свойствами соответствующего гиперболического уравнения.

Для достижения максимальной точности разрешения динамики фронтов флюида требуется, чтобы за шаг по времени фронт распространялся на расстояние порядка одного шага сетки (лучшего разрешение принципиально невозможно получить, в независимости от используемого вычислительного алгоритма). Тогда из предыдущего соотношения при $T=dt$, $L=dx$ получается стандартное условие типа Куранта: $dt \sim Vdx$. Для схемы типа IMPES данное условие совпадет с условием устойчивости. Однако, как условие фактической точности расчета, оно инвариантно относительно используемого численного алгоритма и должно выполняться и для полностью неявных аппроксимаций FIM. Другими словами, неявные аппроксимации позволяют использовать довольно большие шаги по времени, однако для обеспечения высокой точности расчета, в любом случае, необходимо выполнение условий типа курантовских. В данной ситуации, естественно, метод FIM неэффективен — время расчета по полностью неявной и явно-неявной схеме при равных шагах по времени могут существенно отличаться для FIM в большую сторону.

Для достижения оптимальной точности и устойчивости решения в данной работе будет использован метод SEQ (Sequential Solution)[2], в котором, также как и в методе IMPES, система уравнений разделяется на уравнение для давления и уравнение для насыщенности. При этом для конечно-разностной аппроксимации уравнения для насыщенности, в отличии от метода IMPES, используется неявная схема.

2 Модель течения однофазной жидкости

В качестве геометрической модели среды будет рассматриваться локально двумерная область \mathcal{F} , которая представляет собой объединение некоторого числа (пересекающихся)

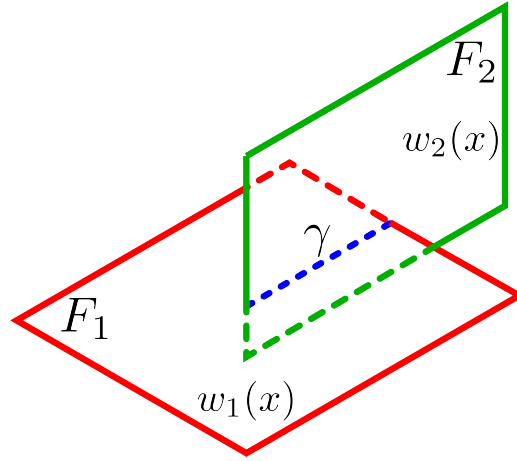


Рис. 1. Пример расчетной области: две трещины $\mathcal{F}_{1,2}$ и линия их пересечения γ .

трещин, расположенных внутри прямоугольного параллелепипеда,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_f} \mathcal{F}_n,$$

где N_f — число трещин. Каждая отдельная трещина \mathcal{F}_n представляет собой двумерное многообразие (поверхность) с краем. Пример области \mathcal{F} для случая двух трещин показан на рисунке 1. Предполагается, что:

- трещины плоские, либо слабо искривлены (средний радиус кривизны существенно больше характерного линейного размера трещины). При описании течения в трещине справедливо приближение смазочного слоя [4];
- поверхности \mathcal{F}_n представляют собой срединные поверхности трещин, т.е. математические поверхности, равноудаленные от берегов трещин. Раскрытие трещины является функцией точки срединной поверхности трещины,

$$w = w_0(x), \quad x \in \mathcal{F},$$

где \mathcal{F} — срединная поверхность трещины;

- любые две трещины \mathcal{F}_i и \mathcal{F}_j либо не имеют общих точек, либо пересекаются по отрезку $\gamma_{ij} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$ конечной длины;
- два отрезка пересечения γ_{ij} и γ_{kl} имеют не более одной общей точки.

Сформулированные выше ограничения являются естественными при представлении трещин в виде плоских полигонов в концепции модели DFN. Другие виды взаимного расположения трещин (например пересечение 3-х отрезков γ_{ij} , γ_{ij} и γ_{ij} в одной точке) являются геометрически неустойчивыми, т.е. исчезают при малых «шевелениях» срединной поверхности.

Модель течения однофазной жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} M(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} [-T(p)(\nabla p + \rho \vec{g})] = 0, \\ -T(p)(\nabla p + \rho \vec{g}) \cdot \vec{n}_{\Gamma_N} |_{\Gamma_N} = Q_N, \\ p|_{\Gamma_D} = p_D, \\ p(x, t = 0) = p_0(x), \quad x \in \mathcal{F}, \end{cases} \quad (1)$$

где p — давление; $\rho = \rho(p)$ — массовая плотность флюида; $w = w(x)$ — раскрытие трещины; $\mu = \mu(p)$ — вязкость; $\vec{g} = g\vec{e}_g$, — проекция вектора ускорения свободного падения на плоскость трещины, g — ускорение свободного падения, $\vec{e}_g = P\vec{e}_z$, $P = I - \vec{n} \otimes \vec{n}$, I — единичная матрица, \otimes — тензорное произведение векторов, \vec{n} — единичный вектор нормали к границе расчетной области, Γ_N, Γ_D — границы области, с заданными граничными условиями Неймана (Q_N — заданный поток) и Дирихле (p_D — заданное давление), K — абсолютная проницаемость, выражение для которой, в соответствии с моделью смазочного слоя, имеет вид [4]:

$$K = K(x) = \frac{w^2(x)}{12},$$

$$M(p) = \rho w c_t(p), \quad T(p) = w \rho(p) \frac{K(p)}{\mu(p)}, \quad (2)$$

где $c_t(p)$ — коэффициент сжимаемости жидкости.

В системе (1) первое уравнение представляет собой закон сохранения массы жидкости, второе и третье уравнения описывают граничные условия Неймана и Дирихле, четвертое уравнение описывает начальное распределение давления.

Первое уравнение системы (1), заданное во внутренних точках трещин \mathcal{F}_i , дополняется условиями согласования на отрезках пересечений трещин γ_{ij} (индексами i и j обозначены параметры, отнесенные к трещинам \mathcal{F}_i и \mathcal{F}_j , соответственно):

- непрерывность полей давления:

$$p_i(x) = p_j(x), \quad \forall x \in \gamma_{ij}.$$

- непрерывность потоков массы:

$$\vec{Q}_i^{(+)} \cdot \vec{n}_i^{(+)} + \vec{Q}_i^{(-)} \cdot \vec{n}_i^{(-)} = \vec{Q}_j^{(+)} \cdot \vec{n}_j^{(+)} + \vec{Q}_j^{(-)} \cdot \vec{n}_j^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij},$$

где $\vec{n}_i^{(+)}, \vec{n}_i^{(-)}$ — вектора единичных нормалей к линии γ_{ij} , касательные к поверхности трещины \mathcal{F}_i , $\vec{Q}_i^{(+)}, \vec{Q}_i^{(-)}$ — векторы потоков массы флюида в трещине \mathcal{F}_i :

$$\vec{Q} = -w \rho \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}).$$

Таким образом, система (1) вместе с условиями согласования на пересечениях трещин и уравнениями состояния для плотности $\rho = \rho(p)$ и вязкости $\mu = \mu(p)$ образуют замкнутую систему уравнений относительно давления в области \mathcal{F} .

3 Модель течения двухфазной жидкости

Будем считать, что:

- флюид состоит из двух несмешивающихся фаз, то есть каждая фаза $\alpha = W, O$ («W» — жидкая водная фаза, «O» — жидкая углеводородная фаза) состоит из единственного (псевдо) компонента («w» — вода, «o» — нефть). В дальнейшем фаза будет отождествляться с соответствующим компонентом.
- фазы являются сжимаемыми, массовая плотность фазы является функцией ее давления p_α :

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha), \quad \alpha = W, O.$$

- давления фаз не равны, они связаны капиллярным давлением, которое определяется локально (в точке пространства) моделью, учитывающей раскрытие трещины и эффекты смачиваемости:

$$(p_O - p_W)(x) = \frac{2\sigma \cos(\gamma(x))}{w(x)}, \quad (3)$$

где w — раскрытие, γ — контактный угол (является заданной функцией взаимных свойств флюидов и скелета), σ — поверхностное натяжение.

В некоторых случаях капиллярное давление удобно считать явно заданной функцией водонасыщенности:

$$(p_O - p_W)(x) = p_c(S_W(x)). \quad (4)$$

Модель течения двухфазного флюида в трещинах, записанная в форме IMPES (опорное давление — давление водной фазы, опорная насыщенность — насыщенность водной фазы), имеет вид:

$$\begin{cases} c_t \frac{\partial p_W}{\partial t} + \operatorname{div} [-\lambda_T \nabla p_W - w \lambda_O \nabla p_C - \rho_T \vec{g}] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (w \rho_W S_W) + \operatorname{div} [w \rho_W \vec{v}_W] = 0, \\ S_W + S_O = 1, \\ (p_O - p_W)(x) = p_c(w(x), \gamma(x), \sigma), \end{cases} \quad (5)$$

где λ_O, λ_W — подвижности фаз, $\lambda_T = w(\lambda_O + \lambda_W)$, $\rho_T = w(\lambda_O \rho_O + \lambda_W \rho_W)$, $c_t = w \sum_{\alpha=W,O} c_\alpha S_\alpha$, где c_α — сжимаемости фаз.

На пересечениях трещин накладываются условия согласования по аналогии с однофазным течением:

- непрерывность полей давления:

$$p_{\alpha,i}(x) = p_{\alpha,j}(x), \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O$$

- непрерывность потоков массы компонент:

$$\vec{Q}_{\alpha,i}^{(+)} \cdot \vec{n}_i^{(+)} + \vec{Q}_{\alpha,i}^{(-)} \cdot \vec{n}_i^{(-)} = \vec{Q}_{\alpha,j}^{(+)} \cdot \vec{n}_j^{(+)} + \vec{Q}_{\alpha,j}^{(-)} \cdot \vec{n}_j^{(-)}, \quad \forall x \in \gamma_{ij}, \quad \alpha = W, O$$

Рассматриваемая система уравнений дополняется начальными и граничными условиями. Начальные условия имеют вид:

$$S_W|_{\mathcal{F}} = S_{W,0}, \quad p_W|_{\mathcal{F}} = p_{W,0}. \quad (6)$$

Поле нефтенасыщенности и давление нефтяной фазы на начальный момент времени могут быть вычислены с помощью последних двух уравнений системы (5).

В качестве граничных условий могут быть заданы либо условие Неймана (заданный поток), либо условие Дирихле (заданное давление). Граничное условие Дирихле имеет вид:

$$p_W|_{\Gamma_D} = p_D, \quad (7)$$

где Γ_D — часть границы расчетной области, на которой задано граничное условие Дирихле, p_D — заданное давление водной фазы.

Граничное условие Неймана имеет вид:

$$\vec{Q}_T|_{\Gamma_N} = (\vec{Q}_W + \vec{Q}_O)|_{\Gamma_N} = \vec{Q}_N, \quad (8)$$

где Γ_N — часть границы расчетной области, на которой задано граничное условие Неймана, Q_N — заданный поток.

Совместно с граничными условиями Дирихле/Неймана (кроме случая граничного условия непротекания) на границе также должны быть заданы насыщенности фаз:

$$S_\alpha|_{\Gamma_{in}} = S_\alpha, \quad \alpha = W, O. \quad (9)$$

4 Пространства базисных и пробных функций

Для дискретизации расчетной области \mathcal{F} строится сетка состоящая из треугольников, на которой определяется пространство непрерывных кусочно-линейных базисных функций. Базисные функции $\phi(x)$ данного пространства строятся следующим образом [5]:

- в узле i сетки базисная функция равна единице, а в остальных узлах — нулю, то есть: $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = \overline{1, N_h}$, N_h — количество узлов сетки;
- в пределах каждого треугольника $\phi_i(x)$ является линейной.

Функции $\phi_i(x)$ называются базисными функциями, а их линейная оболочка — пространством базисных функций. Тогда для каждой непрерывной и достаточно гладкой функции $f(x)$, $x \in \mathcal{F}$ может быть поставлена в соответствие непрерывная кусочно-линейная функция из пространства базисных функций [6]:

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \phi_i(x), \quad x \in \mathcal{F}, \quad (10)$$

где f_i — значения функции $f(x)$ в узлах сетки x_i .

Также на построенной сетке определяется пространство пробных функций $\psi_i(x)$. В рамках метода Петрова–Галеркина [8] пробные функции являются константами внутри контрольных объемов, которые относятся к узлам сетки. Способ построения контрольных объемов заключается в следующем: для каждого треугольника сетки рассчитывается его центр тяжести и середины образующих границу треугольника отрезков. Затем посредством соединения центров треугольников с серединами отрезков строятся границы контрольных объемов (рисунок 2). Объединение контрольных объемов Ω_i , построенных описанным вы-

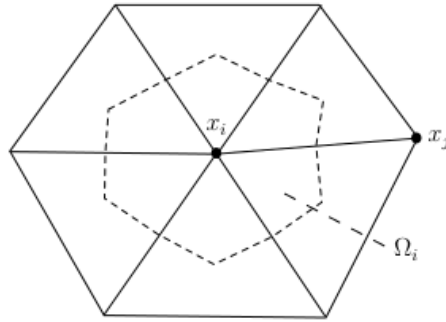


Рис. 2. Построение контрольного объема (x_i, x_j — вершины расчетной сетки, Ω_i — контрольный объём вокруг вершины x_i)

ше образом, составляет всю расчетную область:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{N_h} \Omega_n.$$

При этом пробная функция $\psi_i(x)$ определяется как:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \notin \Omega_i. \end{cases} \quad (11)$$

Каждой функции $f(x)$, $x \in \mathcal{F}$ может быть поставлена в соответствие кусочно-постоянная функция из пространства пробных функций [9]:

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} f_i \psi_i(x), \quad x \in \mathcal{F}, \quad (12)$$

где f_i — среднее значение функции $f(x)$ в пределах контрольного объёма Ω_i , которое определяется следующим образом:

$$f_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} f(x) dx,$$

где $|\Omega_i|$ — площадь контрольного объёма Ω_i .

5 Численная схема для однофазного течения

5.1 Аппроксимации по времени

Для аппроксимации первого уравнения системы (1) по времени могут быть использованы:

- Явно-неявная схема (в том случае, если коэффициенты уравнения слабо зависят от давления):

$$M(p) \frac{\hat{p} - p}{\Delta t} + \operatorname{div} [-T(p)(\nabla \hat{p} + \rho(p)\vec{g})] = 0.$$

В данном случае получается линейное дифференциальное уравнение относительно \hat{p} .

- Полностью неявная схема:

$$M(\hat{p}) \frac{\hat{p} - p}{\Delta t} + \operatorname{div} [-T(\hat{p})(\nabla \hat{p} + \rho(\hat{p})\vec{g})] = 0. \quad (13)$$

В данном случае получается нелинейное дифференциальное уравнение относительно \hat{p} .

В приведенных выше соотношениях Δt — шаг по времени, p — приближенное значение решения в момент времени t , \hat{p} — приближенное значение решения в момент времени $\hat{t} = t + \Delta t$.

В данной работе для решения системы (1) будет использована полностью неявная схема.

5.2 Аппроксимации методом Петрова-Галеркина (CV-FEM)

Аппроксимации уравнений будут выполнены с использованием метода конечных элементов-конечных объёмов. Важным свойством метода конечных объёмов является то,

что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе объёмов и, следовательно, на всей расчетной области [7].

Для построения дискретной задачи уравнение (13) умножается на ψ_i , $i = \overline{1, N_h}$ и интегрируется по всей расчетной области \mathcal{F} . Затем в полученных выражениях \hat{p} и p заменяются на кусочно-линейные приближения \hat{p}_h и p_h .

В результате получается эквивалентная система интегральных соотношений:

$$\int_{\mathcal{F}} M(\hat{p}_h) (\hat{p}_h - p_h) \psi_i d\sigma + \Delta t \int_{\mathcal{F}} \operatorname{div} (-T(\hat{p}_h) [\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h) \vec{g}]) \psi_i d\sigma = 0, \quad (14)$$

где $i = \overline{1, N_h}$.

В силу определения пробных функций система (14) примет вид:

$$\int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) (\hat{p}_h - p_h) d\sigma + \Delta t \int_{\Omega_i} \operatorname{div} (-T(\hat{p}_h) [\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h) \vec{g}]) d\sigma = 0. \quad (15)$$

Каждое из уравнений системы по теореме Остроградского-Гаусса преобразуется к следующему выражению:

$$\int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) (\hat{p}_h - p_h) d\sigma + \Delta t \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) (\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h) \vec{g}, \vec{n}_i) dl = 0, \quad (16)$$

где \vec{n}_i — единичная внешняя нормаль к границе контрольного объема $\delta\Omega_i$, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение векторов.

Система (16) может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h) [\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}] + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} + \Delta t \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) = 0, \quad (17)$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ и \mathbf{p} — вектор неизвестных и вектор значений давления с предыдущего временного слоя, \hat{p}_h — неизвестная функция давления, которая связана с вектором неизвестных формулой (10). $\mathbf{M}(\hat{p}_h)$ — матрица масс, $\mathbf{A}(\hat{p}_h)$ — матрица жесткости, $\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$ — вектор потоков, возникающих под действием гравитационных сил. Элементы указанных матриц и вектора определяются по следующим формулам:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h)_{[i,j]} = \int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma, \quad (18)$$

$$\mathbf{A}(\hat{p}_h)_{[i,j]} = \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) (\nabla \phi_j, \vec{n}_i) dl, \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)_{[i]} = \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) (\vec{g}, \vec{n}_i) dl. \quad (20)$$

Заметим, что, во-первых, номер строки матрицы соответствует номеру вершины в сетке и, во-вторых, каждая строка в данной матрице описывает потоки через границу контрольного объема соответствующей вершины сетки.

Далее в полученной системе уравнений необходимо учесть граничные условия Неймана и Дирихле. Подробное описание учета граничных условий в системе уравнений (17) будет рассмотрено ниже. Сейчас только заметим, что граничное условие Неймана выражается в виде источникового члена в правой части:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h) [\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}] + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} + \Delta t \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) = \Delta t \mathbf{f}, \quad (21)$$

где \mathbf{f} — вектор источников (стоков), который учитывает граничные условия Неймана.

Система (21) решается методом Ньютона, который сводится к итерационному решению специальной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\mathbf{J}(\hat{p}^k, \hat{p}^0) \Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}(\hat{p}^k, \hat{p}^0), \\ \hat{p}^{k+1} = \hat{p}^k + \Delta \mathbf{p}, \end{cases} \quad (22)$$

где \hat{p}^k — вектор давления на k -ой итерации, $\Delta \mathbf{p}$ — вектор поправок давления, $\mathbf{J}(\hat{p}^k, \hat{p}^0)$ — матрица Якоби, $\mathbf{F}(\hat{p}^k, \hat{p}^0)$ — вектор правой части. Для удобства записи, будем обозначать \hat{p}^{k+1} как \hat{p} , а \hat{p}^0 как \mathbf{p} .

Вектор правой части $\mathbf{F}(\hat{p}, \mathbf{p})$ и матрица Якоби $\mathbf{J}(\hat{p}, \mathbf{p})$ имеют вид:

$$\mathbf{F}(\hat{p}, \mathbf{p}) = \mathbf{M}(\hat{p}_h) (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} + \Delta t \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) - \Delta t \mathbf{f}, \quad (23)$$

$$\mathbf{J}(\hat{p}, \mathbf{p}) = \mathbf{M}(\hat{p}_h) + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{M}(\hat{p}_h) (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) + \Delta t \mathbf{A}(\hat{p}_h) + \Delta t \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} + \Delta t \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h). \quad (24)$$

В соответствии с формулой (18) для элемента матрицы масс, который находится на i -ой строке в j -ом столбце, справедливо выражение:

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h)_{[i,j]} = \int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma = \sum_{\Delta_m \cap \Omega_i \neq \emptyset} \int_{\Delta_m \cap \Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma,$$

где Δ_m — треугольники, пересекающиеся с контрольным объемом Ω_i . Каждая часть контрольного объема, лежащая внутри треугольника, разбивается на два треугольника, как показано на рисунке (3). Таким образом интеграл по части контрольного объема Ω_i , лежащей внутри треугольника T , разбивается на два интеграла по треугольникам K_1, K_2 :

$$\mathbf{M}(\hat{p}_h)_{[i,j]} = \int_{\Omega_i} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma = \sum_{\Delta_m \cap \Omega_i \neq \emptyset} \left[\int_{K_{mi1}} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma + \int_{K_{mi2}} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma \right]. \quad (25)$$

В соответствии с формулой (19) для элемента матрицы проводимости, который нахо-

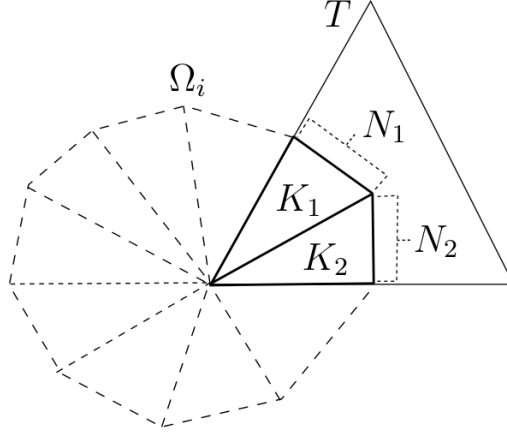


Рис. 3. Разбиение части контрольного объема на треугольники

дится на i -ой строке в j -ом столбце, справедливо выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\hat{p}_h)_{[i,j]} &= \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h)(\nabla\phi_j, \vec{n}_i) dl = \\ &= \sum_{\Delta_m \in \Omega_i} \left[\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h)(\nabla\phi_j, \vec{n}_{im1}) dl + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h)(\nabla\phi_j, \vec{n}_{im2}) dl \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Из формулы (26) следует, что интеграл по границе контрольного объема разбивается на интегралы по сегментам границ, которые лежат внутри треугольников сетки (Рис. 3).

Аналогично выражению для элемента матрицы проводимости получается выражение для элемента вектора $\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h)_{[i]} &= \int_{\partial\Omega_i} -T(\hat{p}_h)(\rho(\hat{p}_h)g, \vec{n}_i) dl = \\ &= \sum_{\Delta_k \in \Omega_i} \left[\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h)\rho(\hat{p}_h)(\vec{g}, \vec{n}_{im1}) dl + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_m} -T(\hat{p}_h)\rho(\hat{p}_h)(\vec{g}, \vec{n}_{im2}) dl \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае, когда треугольники примыкают к границе расчетной области, ребра треугольников, которые лежат на границе, образуют границы соответствующих контрольных объемов. Приграничные треугольники области изображены на Рис. 4, границы контрольного объема в приграничных треугольниках изображены на Рис. 5.

В случае, когда на рассматриваемой границе задано условие Дирихле, которое имеет вид постоянного давления, соответствующим элементам вектора \hat{p} присваивается значение p_D . А в соответствующих данным вершинам строках матрицы Якоби $\mathbf{J}(\hat{p})$ элементы, лежащие на главной диагонали, устанавливаются равными 1, а остальным элементам присваиваются нулевые значения. В векторе правой части \mathbf{F} в соответствующих строках также устанавливается нулевое значение. Таким образом, получается, что поправка давления в системе уравнений (22) для вершин сетки, на которых задано условие Дирихле,

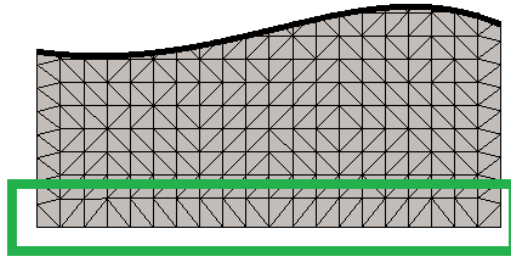


Рис. 4. Треугольники на границе области расчета

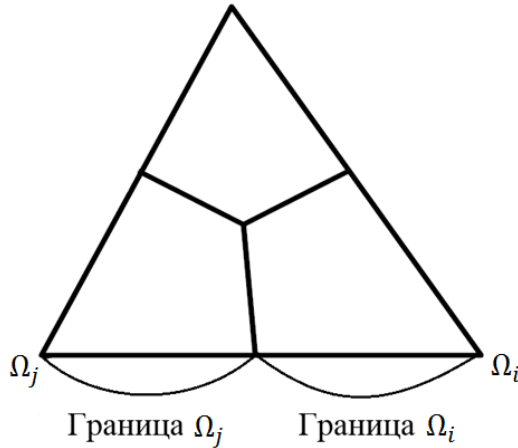


Рис. 5. Границы контрольных объемов на границе области

всегда равна нулю. В случае, когда на рассматриваемой границе задано условие Неймана, которое имеет вид:

$$-T(\hat{p}_h)(\nabla \hat{p}_h + \rho(\hat{p}_h)\vec{g}, \vec{n}_i) = Q_N.$$

В формулах (26), (27) для интегралов по границе области подынтегральное выражение заменяется на значение потока Q_N заданного на границе (в частности оно будет равно нулю для границ с условием непротекания). Данные слагаемые записываются в правую часть уравнения (21), образуя источниковый член \mathbf{f} . Таким образом, происходит учет граничных условий Неймана.

При расчете интегралов в формулах (25)–(27) используются формулы численного интегрирования внутри треугольника и на отрезке. В частности, для унификации расчета слагаемых при сборке матрицы масс, интегрирование по произвольному треугольнику сводится к интегрированию по прямоугольному треугольнику, путём преобразования координат, как показано на рисунке (6).

Далее будут описаны алгоритмы сборок всех матриц и векторов, которые участвуют в формировании матрицы Якоби и правой части системы (22).

Стоит отметить, что во всех описанных ниже алгоритмах сборок матриц и векторов номера элементов указаны в соответствии с локальными номерами вершин треугольников. В свою очередь номера вершин треугольников имеют однозначное отображение в глобальной нумерации сетки. То есть для номеров вершин любого треугольника существуют

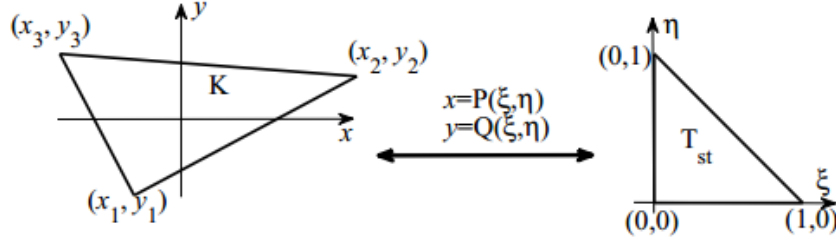


Рис. 6. Переход от произвольного треугольника к стандартному

глобальные индексы среди вершин сетки: $[1, 2, 3] \mapsto [i_1, i_2, i_3]$.

Введем функцию перехода от локальных номеров вершин треугольника к глобальным номерам вершины сетки:

$$G(j) = i_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (28)$$

Пусть i, j — номера вершин в локальной нумерации треугольника, тогда обозначим символами $G[i, j]$ и $G[i]$ номера элементов матриц и векторов, соответствующих глобальным номерам вершин i, j , которые определяются по формуле (28).

В соответствии с выражениями (18), (19), каждый элемент матриц $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{M}(\hat{p}_h)(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})$, $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{M}(\hat{p}_h)(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial p_j} M(\hat{p}_h) \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \hat{p}_h} M(\hat{p}_h) \frac{\partial \hat{p}_h}{\partial p_j} \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k) = \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \hat{p}_h} M(\hat{p}_h) \phi_j \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{\mathbf{p}} \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \frac{\partial \hat{p}_h}{\hat{p}_j} (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) dl \right] \hat{p}_k = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\Delta_m \in \Omega_i} \left(\int_{\partial \Omega_{i1} \in \Delta_m} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{im1}) dl + \int_{\partial \Omega_{i2} \in \Delta_m} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{im2}) dl \right) \right] \hat{p}_k. \end{aligned}$$

Алгоритмы сборки матриц и векторов, участвующих в построении матрицы Якоби и правой части системы уравнений (22), приведены на схемах 1 — 3.

5.3 Решение нелинейной системы уравнений

Система нелинейных уравнений (17) для определения значений давления в узлах сетки:

$$\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)^T \in \mathbb{R}^N, \quad \hat{p}_h = \sum_{i=1}^N \hat{p}_i \phi_i(x),$$

записывается в общем виде:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{p}, \Delta t) = 0, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^N; \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_N)^T \in \mathbb{R}^N, \quad (29)$$

где \mathbf{p} — известный вектор решения в момент времени t , Δt — шаг по времени. Полная схема алгоритма метода Ньютона решения системы нелинейных уравнений (29) приведена на схеме 4.

На каждой итерации метода новое $(k + 1)$ -е приближение решения определяется по известному приближенному решению на k -ой итерации с помощью решения линейной системы уравнений относительно поправки давления (22). Итерации продолжаются до достижения заданного критерия точности — до тех пор, пока максимальная по модулю поправка вектора решения не станет меньше наперед заданного ε .

6 Численная схема для двухфазного течения

6.1 Аппроксимация по времени

Система уравнений (5), описывающая течений двухфазной жидкости, записана в форме IMPES. Первые два уравнения (5) аппроксимируются по времени по неявной схеме:

$$c_t(\hat{p}_W) \frac{\hat{p}_W - p_W}{\Delta t} + \operatorname{div} [-\lambda_T(\hat{p}_W, S_W) \nabla \hat{p}_W - w \lambda_O(\hat{p}_W, S_W) \nabla p_C - \rho_T(\hat{p}_W) \vec{g}] = 0, \quad (30)$$

$$w \rho_W(\hat{p}_W) \frac{\hat{S}_W - S_W}{\Delta t} + \operatorname{div} \left[-w \rho_W(\hat{p}_W) \frac{K K_{r,W}(\hat{S}_W)}{\mu_W} (\nabla \hat{p}_W + \rho_W(\hat{p}_W) \vec{g}) \right] = 0, \quad (31)$$

где \hat{p}_W , \hat{S}_W — значения давления и насыщенности с верхнего временного слоя, а p_W , S_W — значения с нижнего временного слоя.

Таким образом, для моделирования двухфазного течения на одном временном слое необходимо сначала решить уравнение для давления опорной фазы (30) и пересчитать давление второй фазы через четвертое уравнение системы (5), затем рассчитать водонасыщенность, решив уравнение (31), и определить насыщенность нефти через третье уравнение системы (5). Заметим, что при решении уравнения (31), давление \hat{p}_W является известным.

6.2 Аппроксимации методом Петрова-Галеркина (CV-FEM)

Для построения конечномерной задачи в уравнениях (30), (31) производится замена функций p_W и S_W на их непрерывные, кусочно-линейные (10) и кусочно-постоянные аналоги (12) [10]–[12]:

$$c_t(\hat{p}_{Wh}) \frac{\hat{p}_{Wh} - p_{Wh}}{\Delta t} + \operatorname{div} [-\lambda_T(\hat{p}_{Wh}, S_{Wh}) \nabla \hat{p}_{Wh} - w\lambda_O(\hat{p}_{Wh}, S_{Wh}) \nabla p_C - \rho_T(\hat{p}_W) \vec{g}] = 0, \quad (32)$$

$$w\rho_W(\hat{p}_{Wh}) \frac{\hat{S}_{Wh} - S_{Wh}}{\Delta t} + \operatorname{div} [w\rho_W(\hat{p}_{Wh}) \vec{v}_W] = 0. \quad (33)$$

Таким образом получается постановка задачи в дискретном пространстве относительно неизвестных p_{Wi} , S_{Wi} $i = \overline{1, N_h}$.

Рассмотрим уравнение (32). Умножим его на $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, N_h}$ и проинтегрируем по всей расчетной области \mathcal{F} . Тогда, в соответствии с определением функций $\psi_i(x)$, получается система следующих соотношений:

$$\int_{\Omega_i} w c_t \frac{\hat{p}_{Wh} - p_{Wh}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\lambda_T \nabla \hat{p}_{Wh}] d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w\lambda_O \nabla p_C] d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\rho_T \vec{g}] d\sigma = 0. \quad (34)$$

Система (34) может быть переписана в матричном виде:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{p}}_W - \mathbf{p}_W) + \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh}) \hat{\mathbf{p}}_W + \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh}) + \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh}) = 0, \quad (35)$$

где $\hat{\mathbf{p}}_W = [\hat{p}_{W_1} \dots \hat{p}_{W_{N_h}}]^T$ — вектор неизвестных, $\mathbf{p}_W = [p_{W_1} \dots p_{W_{N_h}}]^T$ — вектор значений опорного давления с предыдущего временного слоя.

$$[\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} = \int_{\Omega_i} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma, \quad (36)$$

$$[\mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) \nabla \phi_j] d\sigma = \int_{\partial\Omega_i} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla \phi_j, \vec{n}_i) dl, \quad (37)$$

$$[\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) \nabla p_C] d\sigma = \int_{\partial\Omega_i} -w\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl, \quad (38)$$

$$[\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-\rho_T(\hat{p}_{Wh}) \vec{g}] d\sigma = \int_{\partial\Omega_i} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_i) dl, \quad (39)$$

где \vec{n}_i — единичный вектор внешней нормали к границе контрольного объема Ω_i .

Система уравнений (35) является нелинейной и для её решения будет применен метод Ньютона.

При помощи аналогичных операций выполняется переход от дифференциального урав-

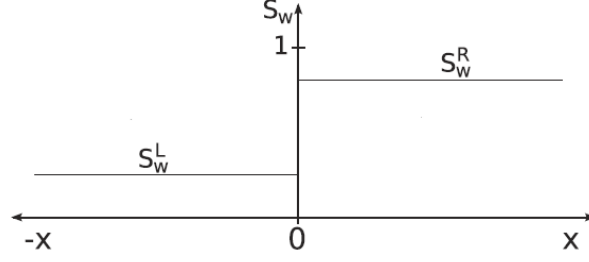


Рис. 7. Пример разрыва насыщенности на границе контрольного объема

нения (33) к системе интегральных:

$$\int_{\Omega_i} w\rho_w \frac{\hat{S}_{Wi} - S_{Wi}}{\Delta t} d\sigma + \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w\rho_w \vec{v}_w] d\sigma = 0, \quad i = \overline{1, N_h}. \quad (40)$$

Полученную систему аналогично можно записать в матричном виде:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{S}}_W - \mathbf{S}_W) + \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})\hat{\mathbf{p}}_W + \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}) = 0, \quad (41)$$

где $\hat{\mathbf{S}}_W$ — вектор неизвестных, \mathbf{S}_W — вектор значений водонасыщенности с предыдущего временного слоя.

$$[\mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})]_{[i]} = \int_{\Omega_i} w\rho_w(\hat{p}_{Wh}) d\sigma, \quad (42)$$

$$[\mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})]_{[i,j]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w\rho_w(\hat{p}_{Wh})\lambda_w(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})\nabla\phi_j] d\sigma, \quad (43)$$

$$[\mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})]_{[i]} = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} [-w\rho_w^2(\hat{p}_{Wh})\lambda_w(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})\vec{g}] d\sigma. \quad (44)$$

Таким образом, задача свелась к решению систем нелинейных уравнений (35), (41). Общая алгоритм решения поставленной задачи о течении двухфазного флюида представлен на схеме 5.

6.3 Расчет функций относительных фазовых проницаемостей

При построении систем численной схемы необходимо вычислять потоки через границы контрольных объёмов (рисунок 2). При расчете потоков, необходимо определить относительные фазовые проницаемости (ОФП) на границе контрольного объема. Насыщенность является кусочно-постоянной функцией (12) и на границе контрольного объема терпит разрыв (рисунок 7). Соответственно, функция относительной фазовой проницаемости также терпит разрыв.

Для определения значений функций относительных фазовых проницаемостей на границе контрольного объема используется метод направленных разностей (“upwind”) [10], которая заключается в том, что значение ОФП выбирается согласно критерию:

$$K_{r\alpha}|_{\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j} = \begin{cases} K_{r\alpha,i}, & (- (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \vec{n}_i) > 0, \\ K_{r\alpha,j}, & (- (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \vec{g}), \vec{n}_i) < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = W, O$; \vec{n}_i — единичный вектор внешней нормали к границе контрольного объема Ω_i .

6.4 Расчет градиента функции капиллярного давления

Как отмечалось ранее, капиллярное давление может быть задано в качестве функции раскрытия трещины или водонасыщенности. В первом случае предполагается, что функция угла смачиваемости является непрерывной и гладкой во всей области расчета, а раскрытие трещины задается непрерывной функцией вида (10). В результате функция капиллярного давления также является непрерывной и гладкой на границе контрольных объемов. Гладкость капиллярного давления необходима при построении численной схемы в выражении (38). Если раскрытие задается в виде зависимости от давлений фаз, то непрерывность и гладкость функции капиллярного давления полностью определяются характером данной зависимости.

Во втором случае (4), в силу того, что функция насыщенности разрывна (10), функция капиллярного давления также является разрывной. На границе контрольных объемов терпит разрыв и производная функции капиллярного давления. При расчете градиента капиллярного давления в выражении (38), предполагается что функция капиллярного давления задается функцией вида (10).

6.5 Решение уравнения давления

Система (35), по аналогии с однофазным случаем, решается методом Ньютона, который сводится к итерационному решению специальной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W^k, \hat{\mathbf{p}}_W^0) \Delta \mathbf{p}_W = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W^k, \hat{\mathbf{p}}_W^0), \\ \hat{\mathbf{p}}_W^{k+1} = \hat{\mathbf{p}}_W^k + \Delta \mathbf{p}_W, \end{cases} \quad (45)$$

где $\hat{\mathbf{p}}_W^k$ — вектор давления на k -ой итерации, $\Delta \mathbf{p}_W$ — вектор поправок давления, $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W^k, \hat{\mathbf{p}}_W^0)$ — матрица Якоби, $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W^{k+1}, \hat{\mathbf{p}}_W^0)$ — вектор правой части. Для удобства записи, будем обозначать $\hat{\mathbf{p}}_W^k$ как $\hat{\mathbf{p}}_W$, а $\hat{\mathbf{p}}_W^0$ как \mathbf{p}_W .

Вектор правой части $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W)$ и матрица Якоби $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W)$ имеют вид:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{p}}_W - \mathbf{p}_W) + \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})\hat{\mathbf{p}}_W + \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh}) + \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh}), \quad (46)$$

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{p}}_W, \mathbf{p}_W) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh}) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} (\hat{\mathbf{p}}_W - \mathbf{p}_W) + \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh}) + \frac{\partial \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \hat{\mathbf{p}}_W + \frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} + \frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W}. \quad (47)$$

Алгоритм метода Ньютона приведен выше в разделе 5.3.

6.6 Решение уравнения насыщенности

Как отмечалось ранее, для решения уравнения насыщенности также применяется неявная схема расчета. При решении системы нелинейных уравнений (41) будет использован метод Ньютона.

$$\begin{cases} -\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0) \Delta \mathbf{S}_W = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0), \\ \hat{\mathbf{S}}_W^{k+1} = \hat{\mathbf{S}}_W^k + \Delta \mathbf{S}_W, \end{cases} \quad (48)$$

где $\hat{\mathbf{S}}_W^k$ — вектор водонасыщенности на k -ой итерации, $\Delta \mathbf{S}_W$ — вектор поправок водонасыщенности, $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0)$ — матрица Якоби, $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W^k, \hat{\mathbf{S}}_W^0)$ — вектор правой части. Для удобства записи, будем обозначать $\hat{\mathbf{S}}_W^k$ как $\hat{\mathbf{S}}_W$, а $\hat{\mathbf{S}}_W^0$ как \mathbf{S}_W .

Вектор правой части $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W, \mathbf{S}_W)$ и матрица Якоби $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_W, \mathbf{S}_W)$ имеют вид:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{S}}_W, \mathbf{S}_W) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{S}}_W - \mathbf{S}_W) + \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}) \hat{\mathbf{p}}_W + \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh}), \quad (49)$$

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{S}}_W, \mathbf{S}_W) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh}) + \frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_W} \hat{\mathbf{p}}_W + \frac{\partial \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_W}. \quad (50)$$

6.7 Алгоритмы сборки матриц линейризованных систем уравнений

Для описания сборки СЛАУ в методе Ньютона для уравнения давления необходимо рассмотреть матрицы и векторы, представленные в формулах (46), (47).

Матрицы $\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})$ и векторы $\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})$ были описаны ранее формулами (36)–(39). С учетом полученных выражений, остается описать способ вычисления производных $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})(\hat{\mathbf{p}}_W - \mathbf{p}_W)$, $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh}) \hat{\mathbf{p}}_W$, $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})$, $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})$.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} (\hat{\mathbf{p}}_W - \mathbf{p}_W) \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{Wj}} \phi_k \, d\sigma \right] [\hat{p}_{Wj} - p_{Wj}] = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{Wj}} \phi_k \, d\sigma \right] [\hat{p}_{Wj} - p_{Wj}] = \\ &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\Omega_i} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j \phi_k \, d\sigma \right] [\hat{p}_{Wj} - p_{Wj}]. \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \hat{\mathbf{p}}_W \right]_{[i,j]} &= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \lambda_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{Wj}} (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) dl \right] \hat{p}_{W_k} = \\
&= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -w \left[\frac{\partial \lambda_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{Wj}} + \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Oh})}{\partial \hat{p}_{Oh}} \frac{\partial \hat{p}_{Oh}}{\partial p_{Wj}} \right] (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) dl \right] \hat{p}_{W_k} = \\
&= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\int_{\partial \Omega_i} -w \left[\frac{\partial \lambda_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} + \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Oh})}{\partial \hat{p}_{Oh}} \right] \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_i) dl \right] \hat{p}_{W_k}. \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \right]_{[i,j]} &= \int_{\partial \Omega_i} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{Wj}} (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl = \\
&= \int_{\partial \Omega_i} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{Wj}} (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl = \int_{\partial \Omega_i} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl. \quad (53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_W} \right]_{[i,j]} &= \int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial p_{Wj}} (\vec{g}, \vec{n}_i) dl = \int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Whj}} \frac{\partial \hat{p}_{Wh}}{\partial p_{Wj}} (\vec{g}, \vec{n}_i) dl = \\
&= \int_{\partial \Omega_i} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\vec{g}, \vec{n}_i) dl. \quad (54)
\end{aligned}$$

Легко заметить, что каждый контрольный объем (граница контрольного объема) может быть представлен в виде объединения частей (границ) контрольных объема, лежащих в треугольниках (рисунок 2):

$$\Omega_i = \bigcup_k (\Delta_k \cap \Omega_i), \quad \partial \Omega_i = \bigcup_k (\Delta_k \cap \partial \Omega_i),$$

где Δ_k — треугольники сетки.

Каждая часть контрольного объема, лежащая внутри треугольника, разбивается на два треугольника, как показано на рисунке (3). Соответственно каждый из интегралов в представленных ранее формулах может быть представлен в виде суммы интегралов по частям контрольного объема (по частям границы).

Согласно последнему утверждению выражения (36)–(39) могут быть представлены в

ВИДЕ:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} &= \int_{\Omega_i} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j \, d\sigma = \sum_{\Delta_k \cap \Omega_i \neq \emptyset} \int_{\Omega_i \in \Delta_k} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j \, d\sigma = \\
&= \sum_{\Delta_k \cap \Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\Omega_{i1} \in \Delta_k} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j \, d\sigma + \int_{\Omega_{i2} \in \Delta_k} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j \, d\sigma \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} &= \int_{\partial\Omega_i} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) \, dl = \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \int_{\partial\Omega_i \in \Delta_k} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) \, dl = \\
&\sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_k} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) \, dl + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_k} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla\phi_j, \vec{n}_i) \, dl \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} &= \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_k} -w\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_i) \, dl + \right. \\
&\left. + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_k} -w\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_i) \, dl \right),
\end{aligned}$$

$$[\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} = \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left(\int_{\partial\Omega_{i1} \in \Delta_k} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_i) \, dl + \int_{\partial\Omega_{i2} \in \Delta_k} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_i) \, dl \right).$$

Для описания алгоритмов сборки матриц $\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{s}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W}$, $\frac{\partial \mathbf{A}_{GS}(\hat{s}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W}$ вводятся обозначения $W_N(\hat{p}_{Wh}) = \frac{Kw\rho_W(\hat{p}_{Wh})}{\mu_W(\hat{p}_{Wh})}$, $W_G(\hat{p}_{Wh}) = W_N(\hat{p}_{Wh})\rho_W$. С учетом формулы (43) и преобразований для выражений (36)–(39) строка матрицы $\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{s}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W}$ прини-

мает вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega_i} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{W,i}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_i) dl = \\
& \sum_{\Delta_k \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset} \left[\int_{\partial\Omega_{i_1} \in \Delta_k} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \frac{\partial \hat{S}_{Wh}}{\hat{S}_{W,up_1}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_i) dl + \right. \\
& \left. + \int_{\partial\Omega_{i_2} \in \Delta_k} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \frac{\partial \hat{S}_{Wh}}{\hat{S}_{W,up_2}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_i) dl \right] = \sum_{up_k} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{s}}_W} \right]_{[i, up_k]}
\end{aligned}$$

где up_k — номера ячеек, из которых осуществляется перенос значения насыщенности на границу ячейки.

Алгоритмы сборки матриц и векторов, необходимые для построения матрицы Якоби и вектора правой части системы уравнений (45), приведены на схемах 6–8. Алгоритмы сборки матриц и векторов, необходимые для построения матрицы Якоби и вектора правой части системы уравнений (48), приведены на схемах 9, 10.

Таким образом, после сборки всех матриц и векторов можно получить матрицы Якоби и правые части систем линейных уравнений в формулах (46), (47) и (49), (50).

7 Заключение

В работе представлены модели однофазного и двухфазного течения в сети дискретных трещин с учетом переменного раскрытия, капиллярных и гравитационных сил. Подробно описан процесс построения численных схем для расчета течений в трещинах, основанный на применении метода конечных элементов-конечных объёмов. Рассмотрены алгоритмы построения систем нелинейных уравнений, методы их линеаризации и решения.

8 Схемы основных алгоритмов

Алгоритм 1 Алгоритм сборки матриц $\mathbf{M}(\hat{p}_h)$, $\mathbf{A}(\hat{p}_h)$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1, 3}$:

$$[\mathbf{M}(\hat{p}_h)]_{G[i,j]} += \sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} M(\hat{p}_h) \phi_j d\sigma = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{k=1}^3 M(\hat{p}_h)|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_k)} \phi_j(\xi_k) w_k \frac{|J_{i\gamma}|}{2},$$

где $\{w_k, \xi_k\}$ — веса и координаты квадратурных точек, J_{i1}, J_{i2} — определители матриц Якоби перехода от произвольных треугольников к «стандартным» (Рис. 6),

$$[\mathbf{A}(\hat{p}_h)]_{G[i,j]} += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -T(\hat{p}_h) (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} -T(\hat{p}_h)|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}),$$

где $\{w_r, \xi_r\}$ — веса и координаты квадратурных точек на сегментах границ N_1 и N_2 (Рис. 3), N_p — количество точек взятых на сегменте.

Алгоритм 2 Алгоритм сборки матриц $\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{M}(\hat{p}_h) (\hat{p} - p)$, $\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{p}$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по производным $j = \overline{1, 3}$
4. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $k = \overline{1, 3}$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{M}(\hat{p}_h) (\hat{p} - p) \right]_{G[i,j]} += \sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} \frac{\partial M(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j \phi_k d\sigma \right] (\hat{p}_k - p_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial M(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \Big|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) \phi_k(\xi_r) w_r \frac{|J_{i\gamma}|}{2} \right] (\hat{p}_k - p_k),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \mathbf{A}(\hat{p}_h) \hat{p} \right]_{G[i,j]} += \sum_{k=1}^{N_h} \sum_{\gamma=1,2} \left[\int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i1}) dl \right] \hat{p}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N_h} \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial T(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \Big|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r \phi_j(\xi_r) (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i\gamma}) \right] \right] \hat{p}_k.$$

Алгоритм 3 Алгоритм сборки вектора $\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$ и матрицы $\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h)$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по базисным функциям (производным), отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1, 3}$:

$$[\mathbf{A}_G(\hat{p}_h)]_{G[i]} += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) (\vec{g}, \vec{n}_{i1}) dl =$$

$$\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h) \Big|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right],$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \mathbf{A}_G(\hat{p}_h) \right]_{G[i,j]} += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \phi_j(\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) dl$$

$$= \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial T(\hat{p}_h) \rho(\hat{p}_h)}{\partial \hat{p}_h} \Big|_{\hat{p}_h=\hat{p}_h(\xi_r)} w_r \phi_j(\xi_r) (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right].$$

Алгоритм 4 Метод Ньютона

1. **Инициализация:** Выбрать шаг по времени Δt , начальное приближение p_0 , максимальное число итераций k_{max} и коэффициент уменьшения шага по времени $\delta < 1$.
 2. Положить $k = 0$, $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k = \mathbf{p}^0$.
 3. Вычислить $\mathbf{J}^{(k)}$ и $\mathbf{F}^{(k)}$.
 4. Определить поправку $\Delta \mathcal{P}$ путем решения СЛАУ $-\mathbf{J}^{(k)} \Delta \mathcal{P} = \mathbf{F}^{(k)}$.
 5. По найденной поправке $\Delta \mathcal{P}$ определить скорректированную поправку $\Delta \mathbf{p}$. В простейшем случае $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathcal{P}$.
 6. Положить $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \Delta \mathbf{p}$, $k = k + 1$.
 7. Если удовлетворяется критерий сходимости, то перейти к шагу 9.
 8. **Рестарт:** Если $k \geq k_{max}$, то уменьшить шаг по времени Δt : $\Delta t = \delta \cdot \Delta t$, и перейти к шагу 2, иначе перейти к шагу 4.
 9. **Выход:** Искомое решение это вектор \mathbf{p}^{k+1} .
-

Алгоритм 5 Схема метода SEQ

1. **Инициализация:** Выбрать шаг по времени Δt , начальное распределение поля насыщенности опорной фазы и опорного давления. Вычислить распределение полей насыщенности и давления второй фазы. Положить $t = t_0$.
 2. Цикл по временным шагам:
 - (a) Определить значение давления опорной фазы путем решения (35), при этом входящие в уравнение значения насыщенностей берутся с предыдущего временного слоя. Пересчитать давление нефтяной фазы.
 - (b) При вычисленных выше полях давлений вычислить поле водонасыщенности на новом временном слое путем решения системы нелинейных уравнений (41). Определить значение насыщенности нефтяной фазы.
 - (c) Положить $t := t + \Delta t$.
 - (d) Если $t < T$, то перейти к шагу (2a), иначе расчет окончен.
-

Алгоритм 6 Алгоритм сборки матриц $\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})$ и векторов $\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) (\nabla p_C, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\lambda_O(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\nabla p_C, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\rho_T(\hat{p}_{Wh}) (g, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\rho_T(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (g, \vec{n}_{i\gamma}) \right]. \end{aligned}$$

3. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1, 3}$:

$$[\mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} += \sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} c_t(\hat{p}_{Wh}) \phi_j d\sigma = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{k=1}^3 c_t(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_k)} \phi_j(\xi_k) w_k \frac{|J_{i\gamma}|}{2},$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\lambda_T(\hat{p}_{Wh}) |_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм 7 Алгоритм сборки матриц $\frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}(\hat{p}_W - p_W)$, $\frac{\partial \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \hat{p}_W$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по производным $j = \overline{1, 3}$
4. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $k = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}(\hat{p}_W - p_W) \right]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{K_{i\gamma}} \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j \phi_k d\sigma = \\ & = \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^3 \frac{\partial c_t(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) \phi_k(\xi_r) w_r \frac{|J_{i\gamma}|}{2} \right] [\hat{p}_{W,k} - p_{W,k}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_W(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \hat{p}_W \right]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial \lambda_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i\gamma}) dl \\ & = \left[\sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial \lambda_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) w_r (\nabla \phi_k, \vec{n}_{i\gamma}) \right] p_{W,k} \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм 8 Алгоритм сборки матриц $\frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}$, $\frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W}$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$
3. Цикл по производным $j = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_C(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \right]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\nabla p_C, \vec{n}_i) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-w \frac{\partial \lambda_O(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) w_r (\nabla p_C, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_G(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_W} \right]_{G[i,j]} & += \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \phi_j (\vec{g}, \vec{n}_i) dl = \\ & = \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-\frac{\partial \rho_T(\hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{p}_{Wh}} \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \phi_j(\xi_r) w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм 9 Алгоритм сборки вектора и матриц $\mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_S(\hat{p}_{Wh})$, $\mathbf{A}_{GS}(\hat{p}_{Wh})$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$:

$$[\mathbf{M}_S(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} += \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^3 \left[-\rho_W(\hat{p}_{Wh}) \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r \frac{|J_{i\gamma}|}{2} w(\xi_r) \right],$$

3. Цикл по базисным функциям, отнесенным к вершинам треугольника $j = \overline{1, 3}$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_S(\hat{p}_{Wh})]_{G[i,j]} &+= \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -w \rho_W \lambda_W(\hat{p}_{Wh}) (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ &= \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-w(\xi_r) [\rho_W(\hat{p}_{Wh}) \lambda_W(\hat{p}_{Wh})] \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\nabla \phi_j, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{GS}(\hat{p}_{Wh})]_{G[i]} &+= \sum_{\gamma=1,2} \int_{N_{i\gamma}} -w \rho_W^2 \lambda_W(\hat{p}_{Wh}) (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ &= \sum_{\gamma=1,2} \sum_{r=1}^{N_p} \left[-w(\xi_r) [\rho_W^2(\hat{p}_{Wh}) \lambda_W(\hat{p}_{Wh})] \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм 10 Алгоритм сборки матриц $\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_W}$, $\frac{\partial \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_W}$

1. Цикл по треугольникам сетки
2. Цикл по вершинам треугольника $i = \overline{1, 3}$, $\gamma = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_S(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_W} \right]_{G[i, up_\gamma]} &+= \int_{N_{i\gamma}} -W_N(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ &= \sum_{r=1}^{N_p} \left[-W_N(\hat{p}_{Wh}) \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \Big|_{\hat{S}_{Wh}=\hat{S}_{W, up_\gamma}} w_r (\nabla \hat{p}_W, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_{GS}(\hat{S}_{Wh}, \hat{p}_{Wh})}{\partial \hat{\mathbf{S}}_W} \right]_{G[i, up_\gamma]} &+= \int_{N_{i\gamma}} -W_G(\hat{p}_{Wh}) \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) dl = \\ &= \sum_{r=1}^{N_p} \left[-W_G(\hat{p}_{Wh}) \Big|_{\hat{p}_{Wh}=\hat{p}_{Wh}(\xi_r)} \frac{\partial K_{rW}(\hat{S}_{Wh})}{\partial \hat{S}_{Wh}} \Big|_{\hat{S}_{Wh}=\hat{S}_{W, up_\gamma}} w_r (\vec{g}, \vec{n}_{i\gamma}) \right], \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Unsal, E., Matthäi, S.K., Blunt, M.J., Simulation of multiphase flow in fractured reservoirs using a fracture-only model with transfer functions, *Comput Geosci* (2010) 14: 527. doi:10.1007/s10596-009-9168-4
- [2] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 407 с., 2004.
- [3] Fanchi J.R., Principles of Applied Reservoir Simulation, Third Edition, Gulf Professional Publishing. 532 p., 2005.
- [4] Басниев К.С, Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М., Подземная гидромеханика, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 488 с., 2006.
- [5] O.C. Zeinkiewicz, The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Elsevier, 752 p., 2005.
- [6] Chen Z. Huan G. Ma Y., Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media, Society for Industrial and Applied Mathematics, 549 p., 2007.
- [7] С. Патанкар, Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости, М.:Энергоатомиздат, 152 с., 1984
- [8] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Том II. М.: Наука, 400 с., 1977.
- [9] Chen Z. On the control volume finite element methods and their applications to multiphase flow, networks and heterogeneous media, American Institute of Mathematical Sciences, 2006.
- [10] J. E. P. Monteagudo, A. Firoozabadi, Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two- and three-dimensional discrete-fractured media, *Water Resources Research*, 2004.
- [11] S.K. Matthai, A. Mezentsev, M. Belayneh, Control-Volume Finite-Element Two-Phase Flow Experiments with Fractured Rock Represented by Unstructured 3D Hybrid Meshes, SPE, 2004.
- [12] H.M. Nick, S.K. Matthai, Comparison of Three FE-FV Numerical Schemes for Single- and Two-Phase Flow Simulation of fractured porous media, Springer, 2011.

Содержание

1	Введение	3
2	Модель течения однофазной жидкости	4
3	Модель течения двухфазной жидкости	7
4	Пространства базисных и пробных функций	8
5	Численная схема для однофазного течения	10
5.1	Аппроксимации по времени	10
5.2	Аппроксимации методом Петрова-Галеркина (CV-FEM)	10
5.3	Решение нелинейной системы уравнений	16
6	Численная схема для двухфазного течения	16
6.1	Аппроксимация по времени	16
6.2	Аппроксимации методом Петрова-Галеркина (CV-FEM)	17
6.3	Расчет функций относительных фазовых проницаемостей	18
6.4	Расчет градиента функции капиллярного давления	19
6.5	Решение уравнения давления	19
6.6	Решение уравнения насыщенности	20
6.7	Алгоритмы сборки матриц линеаризованных систем уравнений	20
7	Заключение	23
8	Схемы основных алгоритмов	24