



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 76 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бобылев А.В., Быченков В.Ю.,
Потапенко И.Ф.**

Численно-аналитическое
исследование нагрева
электронов плазменными
волнами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бобылев А.В., Быченков В.Ю., Потапенко И.Ф. Численно-аналитическое исследование нагрева электронов плазменными волнами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 76. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2017-76](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-76)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-76>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Бобылев, В.Ю. Быченков, И.Ф. Потапенко

Численно-аналитическое исследование
нагрева электронов плазменными волнами

Москва
2017

А.В. Бобылев, В.Ю. Быченков, И.Ф. Потапенко

Численное-аналитическое исследование нагрева электронов плазменными волнами

Численно исследуется нагрев и ускорение электронов плазменным кильватерным полем, создаваемым лазерным импульсом, на основе кинетического пространственно-неоднородного уравнения Фоккера-Планка. Релятивистски сильный лазерный импульс распространяется с заданными плотностью и квазистационарным спектром плазменных полей в плазме. Нагрев электронов учитывается в рамках взаимодействия волна-частица на основе квазилинейной диффузии в пространстве импульсов. В процессе распространения лазерного импульса вблизи за фронтом наблюдается формирование вытянутых хвостов распределения. Численное решение асимптотически совпадает с полученным аналитическим решением. Работа является продолжением и развитием предыдущей работы по данной теме.

Ключевые слова: релятивистский лазерный импульс, вынужденное комбинационное рассеяние, кинетическое уравнение Фоккера-Планка, стохастическая диффузия, хвосты электронной функции распределения, аналитическое асимптотическое решение

A.V. Bobylev, V. Yu. Bychenkov and I. F. Potapenko

Numerical and analytical study of the electron heating by plasma waves

Electron heating and acceleration by wakefield caused by the laser pulse is studied with help of the space nonuniform Fokker-Planck equation. Relativistic intense laser pulse propagates in a plasma with prescribed values of density and quasi stationary plasma wave spectrum. Electron heating is considered in a frame of plasma-wave interaction on the base of quasilinear theory. Previous to front, the extending distribution function tails is building-up in the course of impulse propagation. Numerical solution has the coincident asymptotic form with the obtained analytical solution. The paper proceeds and evelops the previous work on the subject.

Key words: relativistic laser pulse, induced Raman scattering, kinetic Fokker - Planck equation, stochastic diffusion, electron distribution function tails, analytic asymptotic solution

Работа выполнена при поддержке РФФИ: грант 16-01-00256 и грант 17-51-52007 МНТ.

Оглавление

Введение	3
Математическая постановка задачи	4
Приближенное аналитическое решение	7
Результаты численного моделирования	15
Заключение	22
Библиографический список.....	23

Введение

Данная работа является продолжением и развитием предыдущей работы [1], поэтому некоторые общие положения и общая постановка задачи повторяются. Новыми являются несколько другой аналитический подход к исследованию задачи и, соответственно, более детальные результаты численного моделирования. Лазерные методы ускорения заряженных частиц являются основным направлением исследований по взаимодействию коротких лазерных импульсов релятивистской интенсивности с плазмой. При этом, наибольший прогресс достигнут в ускорении электронов при распространении мощных световых импульсов в разреженной плазме. В этом случае получены максимальные энергии электронов, ускоряемых плазменным кильватерным полем, создаваемым фемтосекундным лазерным импульсом [2, 3]. Именно короткий лазерный импульс с продольным размером, сравнимым с длиной волны плазменных колебаний, эффективен для получения коротких моноэнергетических (квазимоноэнергетических) электронных пучков.

Вместе с тем, представляет интерес и получение распределенных по энергии электронных пучков высоких энергий, например, для моделирования астрофизических потоков электронов [4] или для радиационных испытаний космической электроники в лаборатории [5]. Такие пучки, например, можно получить при возбуждении плазменных волн более длинными лазерными импульсами в результате развития вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) [6] - [9]. В отличие от генерации квазимоноэнергетических сгустков ультракоротким лазерным импульсом, полный заряд релятивистских электронов с широким спектром, которые генерируются более длинным лазерным импульсом (когда длительность импульса превосходит длину плазменной волны), оказывается существенно выше, делая последнюю схему взаимодействия привлекательной для упомянутых выше приложений. Отметим, что для объяснения лазерной генерации электронов с широкими энергетическими спектрами привлекалось представление о стохастическом характере

нагрева электронов при взаимодействии лазерных импульсов как с газовыми, так и твердотельными мишенями [10] - [15].

Стохастический нагрев и ускорение электронов турбулентными плазменными полями, возникающими на нелинейной стадии ВКР, эффективные для ВКР в направлении вперед (ВКРВ) и для достаточно длинных лазерных импульсов, типичны на уровне времен порядка $1ps$. Возникновение высокоэнергетичных электронов объясняется рассеянием частиц на интенсивных ВКРВ плазменных волнах. Это диффузионное рассеяние электронов в пространстве импульсов может быть описано уравнением Фоккера-Планка в квазилинейном приближении с помощью диффузионного оператора, в котором коэффициент диффузии пропорционален плотности энергии нерегулярных (турбулентных) плазменных полей [14]. Такая диффузия приводит к нагреву электронов и формированию высокоэнергетических хвостов распределения релятивистски горячих электронов.

Следуя такой модели, в данной работе на основе численного решения кинетического уравнения с использованием явной конечно-разностной схемы расчета изучается распределение электронов при ВКРВ за фронтом релятивистски сильного лазерного импульса, распространяющегося в плазме с заданными плотностью и квазистационарным спектром плазменных полей.

Материал данной работы излагается далее в следующем порядке. Обсуждаются постановка задачи, кинетическое уравнение для электронов и анализ взаимодействия входящих в это уравнение операторов. Далее приводятся дискретная модель и алгоритм численного решения кинетического уравнения для электронов в $1D2V$ геометрии. Обсуждаются результаты численного моделирования для различных параметров расчета. Проведенное численное моделирование дополняется аналитической моделью, в которой рассматривается решение уравнения Фоккера-Планка при упрощающих предположениях. В заключение, численные результаты сравниваются с асимптотическими результатами приближенного аналитического подхода. Продемонстрировано их хорошее количественное и качественное совпадение.

Математическая постановка задачи

Стохастический нагрев электронов может быть исследован на основе квазилинейной диффузии [16], [17] с помощью кинетического уравнения Фоккера-Планка. Это уравнение описывает эволюцию электронной функции распределения как рассеяние частиц в пространстве импульсов, нагрев электронов и их ускорение: отрастание высокоэнергетических хвостов функции рас-

пределения. Для медленно меняющейся части функции распределения электронов, усредненной по периоду плазменного поля, кинетическое уравнение можно записать в форме квазилинейного оператора. Одномерное по геометрическому пространству и пространству импульсов 1D1V кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(p) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p} \left[D(x, p, t) \frac{\partial f}{\partial p} \right], \quad -\infty < p < \infty, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь $f(x, p, t)$ – функция распределения релятивистских электронов, нормированных на их плотность

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p, x, t) dp.$$

Скорость $v(p)$ электрона выражается через импульс p стандартным образом:

$$v(p) = \frac{cp}{(p^2 + m^2c^2)^{1/2}},$$

где m – масса электрона, c – скорость света в вакууме. Начальное распределение $f|_{t=0} = f_0(p)$ пространственно однородно.

Взаимодействие волна-частица в плазме рассматривается в рамках квазилинейной теории. Для коэффициента квазилинейной диффузии, в котором содержится информация о характере взаимодействия, $D(p, x, t)$ приближенная формула следует из выбранной нами физической модели (*ее обсуждение см. ниже*). Здесь для краткости мы просто приведем эту формулу без комментариев:

$$D(p, x, t) = \theta(p) \theta(v_g t - x) \frac{(mc)^2}{\tau} \frac{c}{|v|} \exp \left\{ \lambda \left(1 - \frac{c}{|v|} \right) \right\}, \quad (2)$$

где $\theta(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда. Постоянные

$$v_g, \tau = [\omega_{pe} a_p^2]^{-1}, \quad \lambda = \frac{k_p}{\delta_k}, \quad a_p = \frac{eE_p}{m\omega_{pe}c}, \quad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}$$

считаются заданными. Здесь, v_g – групповая скорость распространения лазерного импульса, ω_{pe} – плазменная частота, λ – отношение волнового вектора к ширине пакета, E_p – амплитуда поля.

Используя эти величины для нормировки, перейдем к безразмерным переменным

$$\tilde{x} = \frac{x}{c\tau}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{mc}, \quad \tilde{f}(\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{mc}{n_0} f(x, p, t), \quad \tilde{v}_g = \frac{v_g}{c},$$

$$n_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(p) dp, \quad \tilde{f}_0(\tilde{p}) = \frac{mc}{n_0} f_0(p),$$

и, опуская тильды в конечном результате, получим следующее уравнение в безразмерной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u(p) \frac{\partial f}{\partial x} = \theta(p) \theta(v_g t - x) \frac{\partial}{\partial p} \left[D_0(p) \frac{\partial f}{\partial p} \right], \quad (3)$$

где

$$u(p) = \frac{p}{(1+p^2)^{1/2}}; \quad D_0(p) = \frac{\exp[\lambda(1-|u|^{-1})]}{|u|} \quad (4)$$

и

$$f|_{t=0} = f_0(p), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad -\infty < p < \infty. \quad (5)$$

При этом

$$v_g \lesssim 1; \quad u(0) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} |u(p)| \rightarrow 1; \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} D_0(p) \rightarrow 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} D_0(p) \rightarrow 1.$$

Мы должны добавить граничное условие при $x = 0$. Предположим, что на этой границе частицы, входящие в область, отсутствуют, то есть имеется граница с вакуумом:

$$f(x, p, t)|_{x=0} = 0 \text{ при всех } p > 0. \quad (6)$$

Уравнение (3), (4) и условия (5), (6) полностью определяют постановку задачи. Обычно предполагается также, что $f_0(p) \geq 0$ и $f(x, p, t) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$, в соответствии с физическим смыслом функции распределения.

Решение задачи (3) - (6) разбивается на два этапа: (1) - для частиц с направлением скоростей, противоположным распространению лазерного импульса, $p < 0$ и (2) - для положительно направленных скоростей электронов $p \geq 0$.

Первый случай $p < 0$ тривиален, поскольку в этой области нагрев (квазилинейная диффузия) отсутствует, а распределение плазмы по пространству изначально пространственно однородно. Поэтому получаем для этого случая уравнение

$$f_t + u(p) f_x = 0, \quad f|_{t=0} = f_0(p), \quad p < 0.$$

Откуда следует, что для вылетающих электронов $p < 0$ решение очевидно:

$$f(x, p, t) = f_0(p), \quad p < 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Перейдем к исследованию решения уравнения при $p \geq 0$. В этой области решение $f(p, x, t)$, строго говоря, требует граничного условия при $p = 0$. Для

получения такого условия рассмотрим уравнение (2) при $p = 0$. При $p = 0$ функция $u(p) = 0$. Кроме того, коэффициент диффузии обращается в ноль при $p = 0$, то же верно и для его производной по p . Отсюда следует, что

$$f(p = 0, x, t) = f_0(0) = \text{const}. \quad (7)$$

Таким образом, это условие (7) замыкает постановку задачи (3) - (6) на полупрямой $p \geq 0$. Нам остается построить решение этой задачи (3) - (7).

План дальнейшего изложения материала состоит в следующем. В следующем разделе мы рассмотрим взаимодействие входящих в уравнение операторов, оценим функциональную зависимость параметров задачи, построим в аналитической форме приближенное решение задачи (3) - (7). Далее мы перейдем к численному решению этой задачи с помощью конечно-разностной схемы, обсудим некоторые аспекты расчета и затем проведем сравнение численных и аналитических результатов. Краткие выводы приводятся в заключительной части статьи.

Приближенное аналитическое решение

Мы рассматриваем задачу (3) - (7) для функции распределения электронов в области: $(0 \leq x \leq t, 0 \leq p < \infty)$. Изначально плазма предполагается холодной, начальная функция имеет вид узкого гауссовского распределения, не зависящего от пространства x . Оператор квазилинейной диффузии действует в пространстве $0 < x \leq x_f(t)$ за фронтом $x_f = v_g t$ лазерного импульса, вовлекающего новые области плазмы во взаимодействие волна-частица и приводя к стохастическому нагреву электронов. Эволюция распределения электронов к моменту времени t определяется взаимодействием транспортного оператора $u(p)\partial f/\partial x$ с оператором квазилинейной диффузии с движущейся во времени границей со скоростью v_g . В области $x > t$ функция распределения остается неизменной. На рис.1 показана область определения решения $f(x, p, t)$, где расчетная область (x, p) формально разбита на участки: $0 \leq x \leq x_f \leq t$. Линиями контура представлена начальная функция распределения. Для $x > t$ распределение электронов остается невозмущенным. Также показано наличие или отсутствие потоков на границах области. Справа дан общий вид 3D распределения, используемого в численных расчетах.

Уравнение (3) является уравнением в частных производных с переменными коэффициентами переноса $u(p)$ и диффузии $D_0(p)$ (4), причем фактор $D_0(p)$ имеет неустранимую особенность в нуле. Решение уравнения в общем виде представляется непростой задачей, поэтому проведение численных расчетов для исследования решения представляется необходимым. Однако сна-

чала мы проведем анализ влияния на решение входящих в задачу параметров исходя из общих соображений.

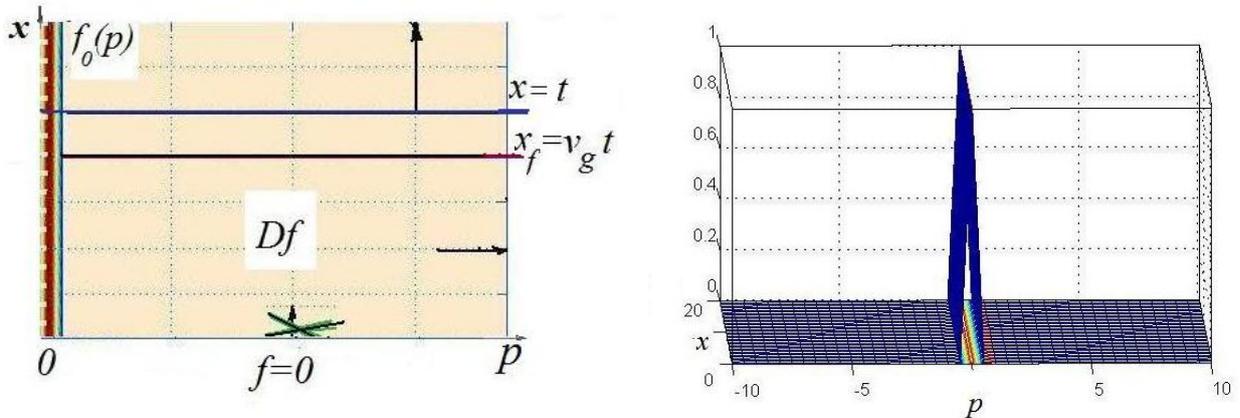


Рис. 1. Расчетная область (x, p) с разбиением на подобласти. Слева показаны линии уровня начальной функции распределения электронов, справа дан общий вид начального распределения в разностной аппроксимации.

В области малых значений p коэффициент $D_0(p)$, включающий параметр λ , и коэффициент $u(p)$ близки к нулю. В этой области коэффициент квазилинейной диффузии $D_0(p)$ зависит от p неравномерно (см. рис.2 слева).

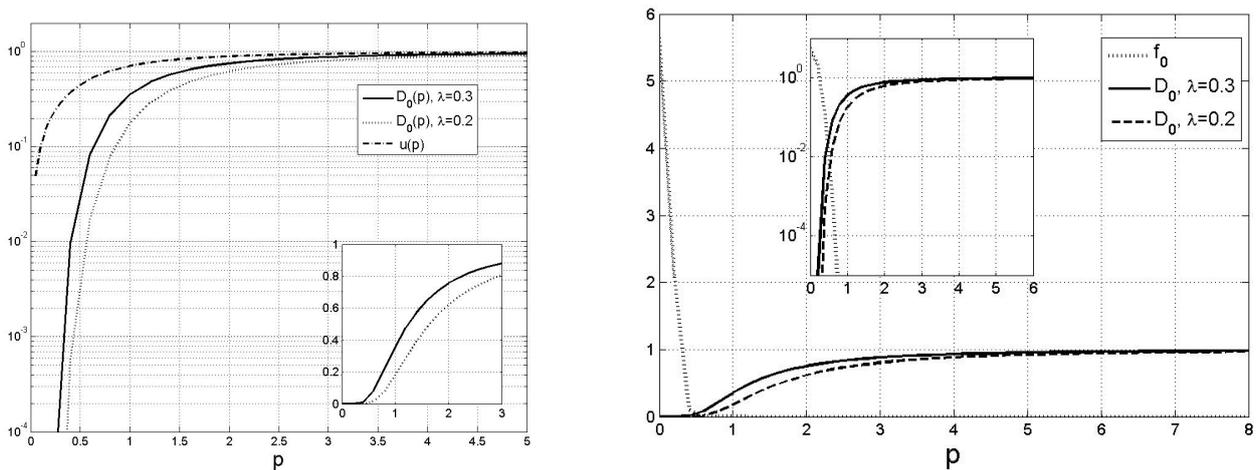


Рис. 2. Зависимость $u(p)$ и $D_0(p)$ для двух значений параметра λ слева в двух масштабах. Справа представлены начальная функция распределения $f_0(p)$ и коэффициент $D_0(p)$ в линейном и, более детально, в логарифмическом масштабах.

Зависимость от импульса как $u(p)$, так и $D_0(p)$ насыщается и близка к

единице уже для $p \gtrsim 3$. Ясно, что в области малых $p \gtrsim 0$, где $u \approx 0$, $D_0 \approx 0$, начальная функция распределения не должна практически меняться со временем. Время диффузионного отрастания хвостов можно оценить, грубо говоря, величиной, при которой пересекаются функции распределения f_0 и $D_0(p)$: $\tau \sim 1/D_0(p)$. Для начальной функции распределения, взятой в большинстве численных расчетов, это будут сотни характерных времен (см. рис.2, справа).

Для качественного анализа, который нам понадобится ниже, удобно разбить область определения решения, условно говоря, на две части по пространству импульсов: $u < v_g$ и $u > v_g$, и по пространству в лабораторной системе координат, выделив область фронта лазерного импульса $x_f(t) = v_g t$: $0 \leq x \leq x_f \leq t$ (слева на рис.3). Для наглядности (см. формулу (2)), введем переменную $\xi = x_f(t) - x$. Тогда в левой части уравнения (3), характеризующей перенос электронов, получим выражение $(v_g - u)f'_\xi$. На рис.3 справа приведена зависимость этого фактора для двух значений групповой скорости v_g . Для реальных значений групповой скорости этот фактор меняет знак, а следовательно, и направление переноса, принимая малые отрицательные значения, для $p \gtrsim 5$.

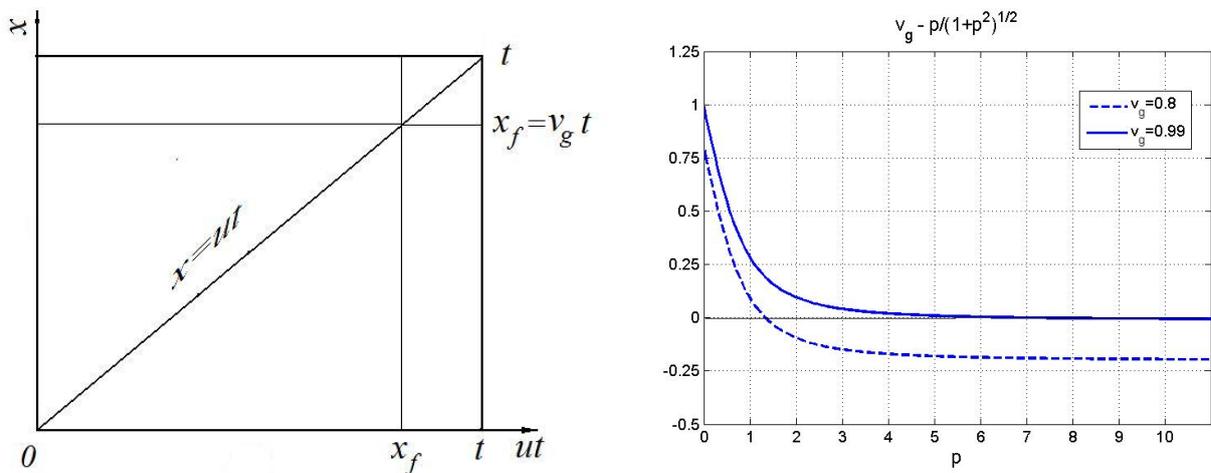


Рис. 3. Разбиение области определения решения задачи в координатах (x, u) слева; зависимость фактора $(v_g - u)$ от p для двух значений v_g справа.

Заменим приближенно уравнение (3) уравнением того же вида, где, однако, числа $0 < u < 1$, $0 < v_g < 1$, $\lambda > 0$ рассматриваются в уравнении (3), (4) как свободные параметры. Начальные и граничные условия имеют вид (см. (5) - (6))

$$f|_{t=0} = f_0(p), \quad f|_{x=0} = 0, \quad f|_{p=0} = f_0(0). \quad (8)$$

Рассмотрим уравнение (3) в области, где параметры u и D_0 имеют слабую зависимость от p . Можно считать, что это уравнение приближенно справедливо для всех $p \geq p_0$, где $p_0 \gg 1$ – фиксированная постоянная. В таком случае точное асимптотическое решение при $p > p_0$ должно получаться путем сшивки в точке $p = p_0$ с точным решением для $p \leq p_0$. Однако, как уже было сказано, нахождение в общем виде решения уравнения в частных производных с коэффициентами, являющимися достаточно сложными функциями, является непростой задачей.

Поэтому мы применим более грубую процедуру. Предположим, что уравнение (3) верно и для малых значений p_0 , взяв в пределе $p_0 = 0$. Тогда в этом пределе можно заменить "внутреннее" (на отрезке $0 \leq p \leq p_0$) решение просто граничным условием (5), т. е.

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} f(p, x, t) = f_0(0). \quad (9)$$

Получаем для $f(x, p, t)$ уравнение

$$f_t + uf_x = \theta(x_f - x)D(u) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \quad x \geq 0, t \geq 0, p \geq 0. \quad (10)$$

Решив уравнение (10) с таким граничным условием (9) и условиями (4), (5)

$$f|_{x=0} = 0, \quad f|_{t=0} = f_0(p), \quad p > 0, \quad (11)$$

мы получим искомое приближенное аналитическое решение.

Произведем следующую замену

$$f(x, p, t) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{t}), \quad \tilde{x} = D(u)x, \quad \tilde{t} = D(u)t \quad (12)$$

и, опуская тильды в конечных результатах, сведем уравнение (10) к случаю $D \equiv 1$:

$$f_t + uf_x = \theta(v_g t - x) f_{pp}, \quad (13)$$

(то есть, при малых значениях импульса мы формально заменяем сложную зависимость $D(p)$ на более гладкую). Как построить решение этой задачи?

Удобно перейти к новым переменным.

$$y = \frac{x + ut}{2}, \quad z = \frac{x - ut}{2}, \quad F(p, z, y) = f(x, p, t). \quad (14)$$

Тогда

$$y \geq 0, \quad x = y + z, \quad ut = y - zy \geq 0, \quad (15)$$

то есть расчетная область представляет собой часть плоскости (y, z) , заданную уравнениями (см. рис.4, рис.5)

$$y \geq 0, \quad -y \leq z \leq y. \quad (16)$$

Границы этой области (16), то есть прямые $y = z$ и $y = -z$, отвечают, соответственно, $t = 0$ и $x = 0$.

Замечая, что

$$\partial_t = \frac{1}{2}(\partial_y - \partial_z), \quad \partial_x = \frac{1}{2}(\partial_y + \partial_z), \quad v_g t - x = \left(\frac{v_g}{u} - 1\right) y - \left(\frac{v_g}{u} + 1\right) z,$$

получим уравнение для F в виде

$$uF_y = \theta[(v_g - u)y - (v_g + u)z] F_{pp}. \quad (17)$$

Следовательно, расчетная область (16) делится прямой

$$y = az, \quad a = \frac{v_g + u}{v_g - u} \quad (18)$$

на две подобласти, причем диффузионный член в уравнении (17) отличен от нуля только в одной из них. Очевидно, что $a > 0$ при $v_g > u$ (рис.4) и $a < 0$ при $v_g < u$ (рис.5). В обоих случаях диффузионный член отличен от нуля слева от прямой (18), эта область заштрихована на рис.4, рис.5.

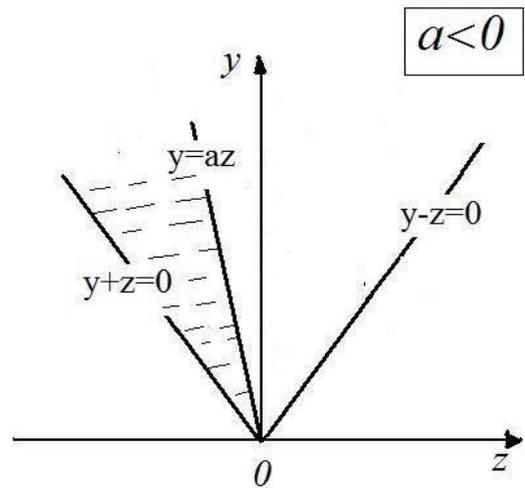
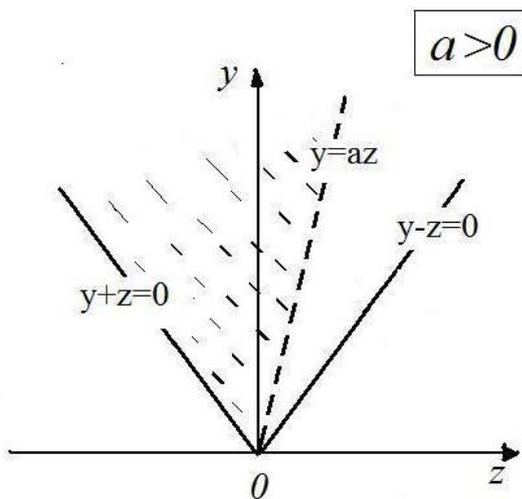


Рис. 4. Расчетная область для $a > 0$.

Рис. 5. Расчетная область для $a < 0$.

Заметим теперь, что на границах расчетной области (16) и в точке $p = 0$ функция $F(p, z, y)$ задана:

$$F(p, z, y)|_{z>0, y=z} = f_0(p), \quad F(p, z, y)|_{z<0, y=|z|} = 0, \quad F(0, z, y) = f_0(0). \quad (19)$$

Рассмотрим сначала более простой случай $a < 0$, то есть $u > v_g$, показанный на рис.5. Тогда при всех $z > 0$ мы имеем (тривиальную) задачу Коши

$$F_y = 0, \quad y \geq z > 0; \quad F|_{y=z} = f_0(p).$$

Осюда получаем

$$F(p, z, y) = f_0(p), \quad y \geq z > 0. \quad (20)$$

При $z < 0$ рассмотрим сначала заштрихованную область $|z| \leq y \leq |a||z|$, где $F(p, z, y)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} uF_y = F_{pp}; \quad z < 0, \quad y \geq |z|; \\ F|_{y=|z|} = 0, \quad F|_p = f_0(p). \end{aligned} \quad (21)$$

Положим для любого $z \leq 0$

$$F(p, z, y) = F^{(1)}(p, \tau), \quad \tau = \frac{y+z}{u} \geq 0. \quad (22)$$

Тогда задача Коши для $F^{(1)}(p, \tau)$ имеет вид

$$F_{\tau}^{(1)} = F_{pp}^{(1)}, \quad F^{(1)}|_{\tau=0} = 0, \quad F^{(1)}|_{p=0} = f_0(0); \quad \tau \geq 0, \quad p \geq 0.$$

Решение этой задачи хорошо известно. Оно имеет автомодельную форму (см., например, [18])

$$F^{(1)}(p, \tau) = f_0(0) G\left(\frac{p}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad G(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^{\infty} dr e^{-r^2}. \quad (23)$$

Таким образом,

$$F(p, z, y) = f_0(0) G\left[\frac{p}{2\sqrt{\frac{u}{y+z}}}\right], \quad \text{при } z < 0, \quad |z| \leq y \leq |a||z|. \quad (24)$$

Остается рассмотреть область ($z \leq 0, y > |a||z|$), примыкающую слева к оси (Oy) (рис.2). В этой области получаем следующую задачу для $F(p, z, y)$:

$$F_y = 0, \quad F|_{y=|a||z|} = F^{(1)} \left[p, \tau = \frac{(|a| - 1)|z|}{u} \right], \quad y \geq |a||z|.$$

Отсюда получаем решение

$$F(p, z, y) = f_0(0) G \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{u}{(|a| - 1)|z|}} \right], \quad z < 0, \quad y > |a||z|. \quad (25)$$

Возвращаясь к исходным переменным по формулам (14), (12), получаем для случая $u > v_g$ ($a < 0$ в уравнении (18)) следующее "составное" решение $f(x, p, t)$ задачи (10), (21) для фиксированных $x > 0$ и $t > 0$.

$I(A)$ В области $0 \leq x < v_g t$

$$f(x, p, t) = f_0(0) G \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{u}{D(u)x}} \right], \quad (26)$$

где использованы обозначения формул (10), (22).

$I(B)$ В области $v_g t \leq x < ut$

$$f(x, p, t) = f_0(0) G \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{2u}{D(u)(|a| - 1)(ut - x)}} \right], \quad a = \frac{v_g + u}{v_g - u} < 0. \quad (27)$$

$I(C)$ В области $x \geq ut$

$$f(x, p, t) = f_0(p). \quad (28)$$

Теперь построим решение задачи (17), (19) для $0 < u < v_g$, то есть для случая $a > 0$ (см. рис.4). Тогда при $z > 0$, $z \leq y \leq az$ получаем для $F(p, z, y)$

$$F_y = 0, \quad F|_{y=z} = f_0(p) \implies F(p, z, y) = f_0(p); \quad z > 0, \quad z \leq y \leq az.$$

Отсюда ясно, что на прямой $y = az$ (см. рис.4) мы получаем

$$F|_{y=az} = f_0(p).$$

Теперь остается решить уравнение $uF_y = F_{pp}$ в заштрихованной на рис.4 области между прямыми $y + z = 0$ и $y = az$ с нулевым граничным условием на левой границе $y = -z$.

То есть получаем следующую задачу для $F(p, z, y)$:

$$\begin{aligned} uF_y = F_{pp}; \quad y \geq 0, \quad -y \leq z \leq \frac{1}{a} y; \\ F|_{p=0} = 1, \quad F|_{y=-z \geq 0} = 0, \quad F|_{y=az \geq 0} = f_0(p). \end{aligned}$$

Эту задачу удобно решать отдельно для $z \geq 0$ и $z < 0$. Введем поэтому следующие обозначения для двух вспомогательных функций

$$F(p, z, y) = \begin{cases} F^{(2)}(p, z, y), & z < 0; \\ F^{(3)}(p, z, y), & z \geq 0. \end{cases}$$

Тогда для функции $F^{(2)}(p, z, y)$ мы получаем задачу, в точности совпадающую с решенной выше задачей (21). Поэтому можно использовать ее решение (24):

$$F^{(2)}(p, z, y) = f_0(0) G \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{u}{y+z}} \right], \quad \text{при } z < 0, \quad y + z > 0. \quad (29)$$

Остается найти $F^{(3)}(p, z, y)$. Задача для этой функции имеет вид

$$uF_y^{(3)} = F_{pp}^{(3)}; \quad y \geq az \geq 0; \quad F^{(3)}|_{p=0} = 0, \quad F^{(3)}|_{y=az} = f_0(p).$$

Полагая

$$F^{(3)}(p, z, y) = \Psi(p, \tau), \quad \tau = \frac{y - az}{u} \geq 0,$$

получим стандартную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой $p \geq 0$:

$$\Psi_\tau = \Psi_{pp}, \quad \Psi_{\tau=0} = f_0(p), \quad \Psi_{p=0} = f_0(0).$$

Ее решение представляется в виде

$$\Psi(p, \tau) = f_0(0) G \left(\frac{p}{2\sqrt{\tau}} \right) + \tilde{\Psi}(p, \tau)$$

где $\tilde{\Psi}(p, \tau)$ - решение той же задачи, но с нулевым граничным условием $\tilde{\Psi}(0, \tau) = 0$. Это решение имеет вид (см. [18])

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p, \tau) &= \int_0^\infty dq f_0(q) K(p, q, \tau), \\ K(p, q, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \left[e^{-\frac{(p-q)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(p+q)^2}{4\tau}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{p^2+q^2}{4\tau}} \sinh \frac{pq}{2\tau}. \end{aligned}$$

Остается вернуться к старым переменным по формулам (14), (12), (22) и сформулировать результат для случая II : $0 < u < v_g$. Получаем следующее "составное" решение $f(x, p, t)$ задачи (10), (9), (11):

$II(A)$ В области $0 \leq x \leq ut$

$$f(x, p, t) = f_0(0) G \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{u}{D(u)x}} \right], \quad (30)$$

в обозначениях формул (6), (19).

$II(B)$ В области $ut < x < v_g t$

$$f(x, p, t) = f_0(0) G \left(\frac{p}{2\sqrt{\tau}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\infty dq f_0(q) \left[e^{-\frac{(p-q)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(p+q)^2}{4\tau}} \right], \quad (31)$$

в тех же обозначениях, где

$$\tau = \tau(x, t) = D(u) \frac{v_g t - x}{v_g - u}, \quad v_g > u.$$

$II(C)$ В области $x \geq v_g t$

$$f(x, p, t) = f_0(p). \quad (32)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение. Решение $f(x, p, t)$ задачи (10), (9), (11) представляется при $u \geq v_g$ равенствами (26), (27), (28), а при $u \leq v_g$ – равенствами (30), (31), (32).

Результаты численного моделирования

В этом разделе мы приводим результаты численного моделирования задачи (3), (4), (9), (11), которая выполнялась с помощью конечно-разностной явной схемы. Постановка задачи и область определения решения были приведены выше. Заметим, что полубесконечный интервал $[0 \leq p < \infty)$, $[0 \leq x < \infty)$ заменяется на конечный отрезок $p \in [0, p_{max}]$ и $x \in [0, x_{max}]$. Величина p_{max} должна быть достаточно большой, чтобы обеспечить равенство (машинному)

нулю функции распределения. Это условие обеспечивает выполнение сохранения плотности по импульсам при должной аппроксимации диффузионного оператора. Заметим, что поскольку, решая эволюционное уравнение, затруднительно заранее оценить необходимую величину p_{max} , в схеме расчета заложено условие равенства нулю потока на правой границе. Однако это условие, при недостаточном значении p_{max} , может приводить к дополнительному, численному вылаживанию распределения. Расчет проводится до момента времени t , который соответствует значению $x_{max} = 1 \cdot t$. Групповая скорость лазерного импульса в действительности близка к скорости света, равной единице, $v_g \simeq 0.97 \div 0.99$. Однако, мы берем меньшие значения $v_g \simeq 0.8, 0.9$, чтобы проанализировать структуру решения. В противном случае, придется использовать чрезвычайно мелкую сетку $\Delta t, \Delta x, \Delta p$, и численный расчет будет чрезвычайно затратным по времени. На данном этапе решения проблемы такого условия вполне достаточно, тем более что на качественном анализе задачи это никак не сказывается.

Поскольку изначально имеется холодная плазма, то начальное распределение может быть выбрано, например, достаточно узким гауссовым распределением. Из физических оценок следует, что времена в численном расчете динамики процесса должны соответствовать тысячам единиц. Мы выбираем для представленного ниже варианта численного расчета начальную функцию распределения равной

$$f(x, p, 0) = F\alpha^{-3} \exp\left(-\frac{p^2}{\alpha^2}\right), \quad \alpha = 0.04,$$

которая также приведена в виде графика на рис.2. Постоянная F выбрана в качестве нормировочного множителя (функция нормирована на единицу). Данная величина α , соответствующего температуре 0.02 и определяющего узость начального распределения, обеспечивает характерное изменение эволюции начального распределения временами до сотен единиц.

Аналитическое решение, построенное в предыдущем разделе, дает ответ на качественное поведение решения. Решение было получено на формальном уровне, когда значения гладких функций $D_0(p)$, $u(p)$ в точке $p = 0$ становятся равными нулю (приближение "ямы"), а функция распределения $f_0(0) = const$. То есть, аналитические формулы дают правильную асимптотику решения при больших значениях $p \gg 1$ и принципиальную структуру функции распределения. Поскольку сшивка реальной функции с асимптотикой представляется непростой задачей, функция в области $0 \leq p \leq p_0 \gtrsim 1$ может быть получена численно. Таким образом, результаты численного моделирования должны подтвердить правильность полученных асимптотик и определить границы их применимости. В свою очередь, аналитическое рассмотрение дает качественные оценки и дает направление исследования для

выявления особенностей решения, а численный расчет должен дать поправки количественного характера.

Как видно из рис.6, отношение $u/D \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow 0$ (см. (2)). Кроме того, как видно из правого графика на рис.6, зависимость аргумента $p_n(p)$ резко немонотонна в области $0 < p \sim 1$.

Рассмотрим сначала область ($0 < x < x_f = v_g t$) далеко за фронтом лазерного импульса. Эта область объединяет два случая (A)I : $u > v_g$, $0 < x < x_f$ и (A)II : $u < v_g$, $0 < x \leq ut$ (см. рис.3). Заметим, что значения u , например, для $v_g = 0.8$, $v_g = 0.9$ и $v_g = 0.98$ отвечают, соответственно, значениям $p_g = 1.33$, $p_g = 2.06$ и $p_g = 7$.

В этих двух областях автомодельная функция распределения электронов дается формулами (26) и (30) с аргументом $p_n = p\sqrt{u}/(2\sqrt{x}D)$. То есть решение не зависит ни от времени, ни от величины групповой скорости. Численное решение должно отвечать этому обстоятельству. Рассматривая асимптотическое решение, заменим u , D их значениями при $p \gg 1$ (а фактически, $p \gtrsim 3$), равными единице, и тогда p_n заменим на

$$p_n = \frac{p}{2\sqrt{x}}. \quad (33)$$

Заметим, что учет множителя $u/D(p)$ в области $p > 1$ (ср. с правым графиком на рис.6) слабо влияет на качественные особенности решения.

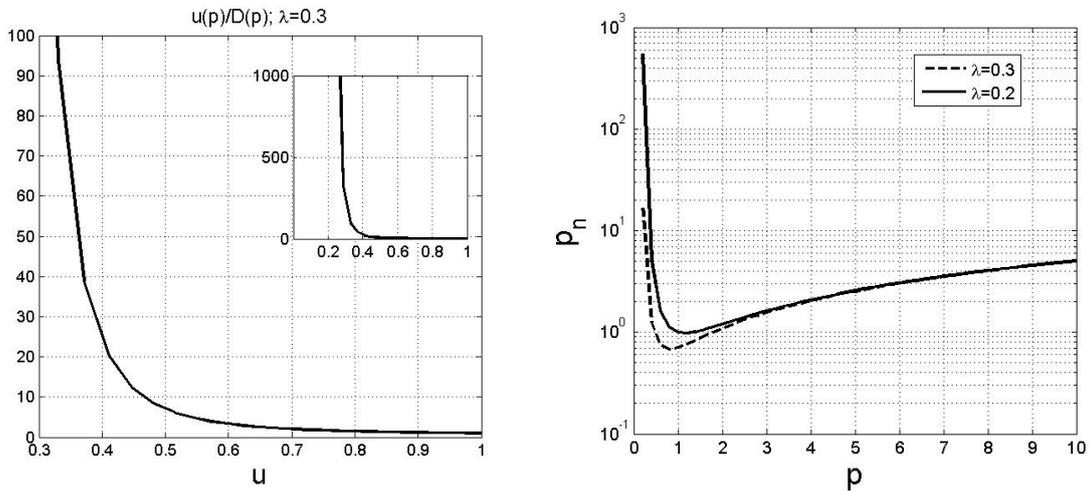


Рис. 6. Слева график зависимости отношения u/D от $u(p)$; справа зависимость аргумента $p_n = p\sqrt{u}/(2\sqrt{D}x)$ от p .

Мы сравниваем численные расчеты функции распределения для одного фиксированного значения x в различные моменты времени $t > x_f > x$ (рис.7, рис.8). Сначала происходит процесс установления распределения и постепенно формируется стационарное распределение, свое для каждого значения x

в соответствии с аналитическим решением. Это стационарное решение уже не меняется практически во времени. На рис.7 представлен общий вид зависимости стационарной функции распределения от импульса p для значений $x = 20$ и $x = 30$ и для различных моментов времени. Эти значения x лежат в области $x < x_f = 0.8 \cdot t$. Начальная функция распределения отмечена точками. Зависимость стационарного распределения от импульса представлена в детальном масштабе в более холодной области p для $x = 20, 30, 50$. Там же приведена функция распределения для $x = 20$ в момент времени $t \approx 20$, при котором распределение электронов в области $0 < p < 1$ совпадает с начальным распределением. Таким образом, показан процесс формирования стационарного решения, когда происходит установление баланса между стохастическим нагревом и переносом электронов. Видно, что чем больше x , тем больше отрастают в области $x < x_f(t)$ горячие хвосты распределения, которые затем остаются неизменными для данного x .

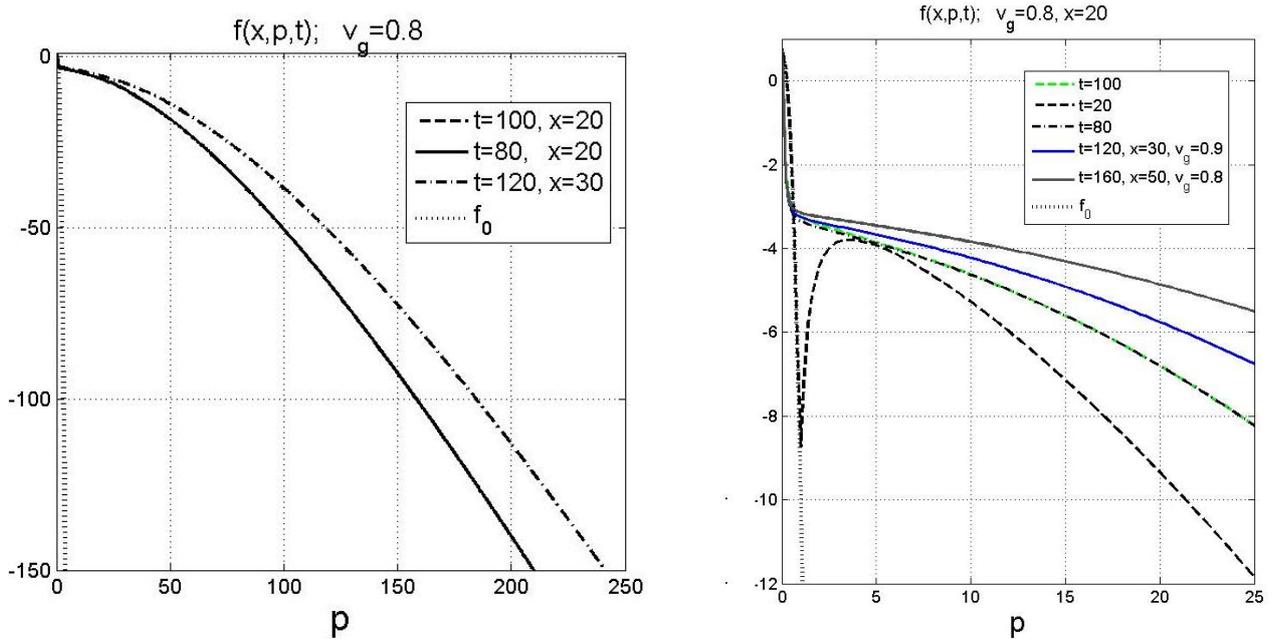


Рис. 7. Стационарное решение $f(x, p, t)$ для фиксированных значений $x = 20$ и $x = 30$ в зависимости от p слева. Установление во времени распределения для $x = 20$ и стационарные распределения для $x = 30, x = 50$ справа.

Далее приведем подобные же графики на рис.8, но для автомобильного аргумента p_n . Видно, что стационарные решения для разных значений x , а также различных моментов времени t и групповой скорости v_g совпадают (пренебрежимо малые отличия зависят лишь от ошибок разностной аппроксимации). Интересно отметить, что в области значений $0 < p \lesssim 1$ ($0 < p_n \lesssim 0.1$) стационарная функция распределения меньше, чем начальное

распределение. Это можно объяснить двумя обстоятельствами. Справа на рис.8 детально показаны кривые зависимости $u/D(p)$, функции начального распределения $f_0(p)$ и стационарных распределений $f(x, p, t)$. Видно, что хвосты начинают отрастать, начиная с $p \gtrsim 0.5$, где коэффициент квазилинейной диффузии начинает расти. На границе $x = 0$ мы имеем условие $f(0, p, t) = 0$ – вакуум, и в этой области происходит обеднение распределения по сравнению с $f_0(p)$. В области $0 \leq p \sim 0.5$ происходит сшивка с граничным условием $f_0(0)$.

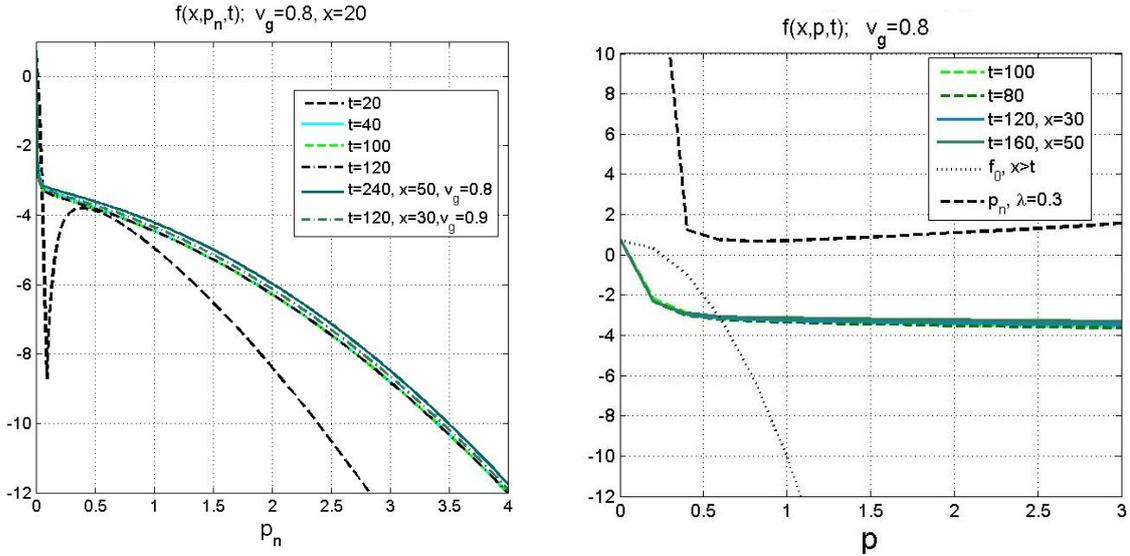


Рис. 8. Установление решения и стационарная функция распределения в зависимости от аргумента p_n (33) слева. Справа графики $f_0(p)$, $u/D(p)$ и $f(x, p, t)$ в зависимости от p для различных x и t .

Мы подробно рассмотрели формирование стационарных решений в области $I(A)$: $u > v_g, 0 < x < x_f$ и в области $II(A)$: $u < v_g, 0 < x < ut$ (26),(30). Теперь рассмотрим распределение электронов вблизи фронта лазерного импульса. В качестве реперной оценки возьмем оценку (27) для области значений $x_f < x < ut$. В отличие от формулы (33) здесь уже появляется зависимость p_n от групповой скорости и от времени. Заменим в (27) $u = 1$, $D = 1$, тогда $a = (1 + v_g)/(1 - v_g)$. В результате получим

$$p_n = \frac{p}{2} \sqrt{\frac{1 - v_g}{v_g(t - x)}}. \quad (34)$$

На самом фронте $x_f = v_g t$ зависимость (34) принимает вид

$$p_n = \frac{p}{2\sqrt{x_f(t)}}.$$

Приведем графики функции распределения для $x = x_f$ в различные моменты времени в зависимости от p и p_n на рис.9 и рис.10. В данном случае также можно наблюдать процесс установления автомодельного решения в начале процесса. Динамика данного процесса схожа с вышеприведенным, отличие заключается в постоянном отращивании сверхгорячего хвоста распределения на фронте движущегося лазерного импульса (рис.9). В данном случае можно говорить о стационарном распределении в холодной области $0 < p \lesssim p_g$ (см. рис.9 справа) и квазистационарном распределении прифронтовых электронов в горячей области (ср. рис.10). Для сравнения на рисунках приводится начальное распределение $f_0(p)$.

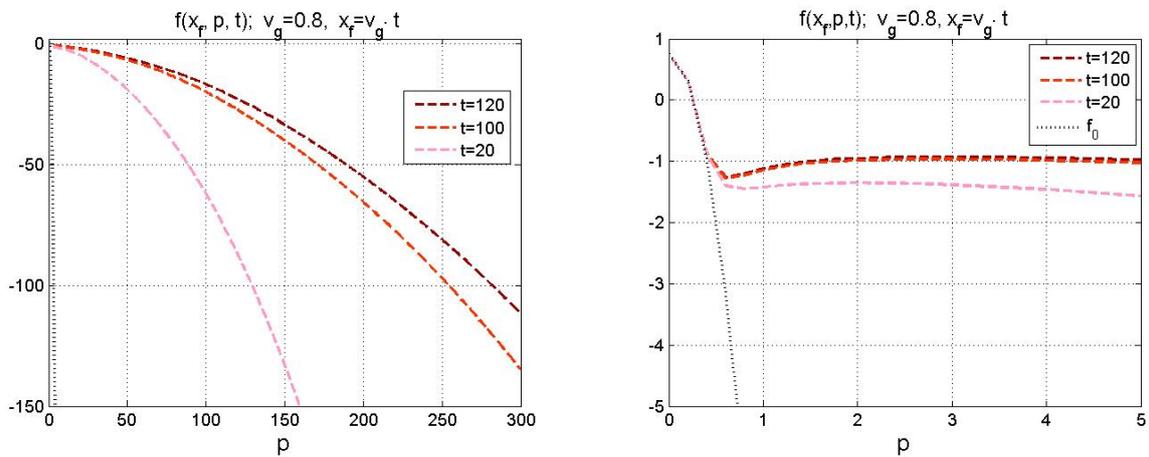


Рис. 9. Функция распределения $f(x_f, p, t)$ для $x = x_f(t)$ в зависимости от аргумента p ; справа общий вид, слева – более детально для $p \leq 5$.

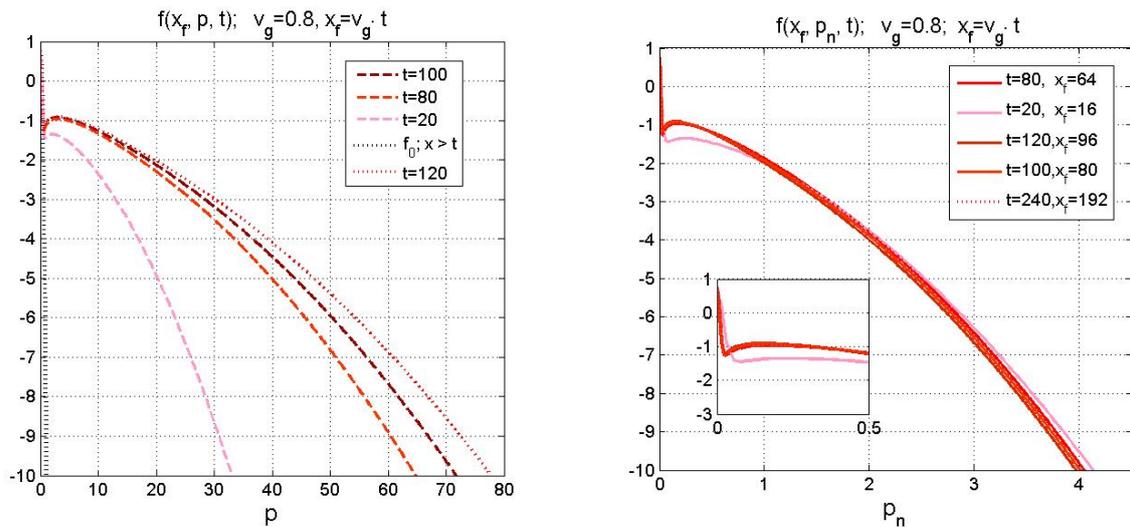


Рис. 10. Функция распределения $f(x_f, p, t)$ и $f_0(p)$ слева. Справа приведен график зависимости $f(x_f, p_n, t)$ в двух масштабах.

Видно хорошее совпадение с аналитическим результатом.

Перейдем к результатам, иллюстрирующим решение в области $x > ut > x_f$, данной формулами (28),(32). Это область $x_f < x \leq t$, в которой скорости равны $v_g < v < 1$ (нормированная скорость света равна единице). В этой области диффузионный нагрев плазмы уже не действует, однако транспортируется из подлежащих областей. Мы представляем результаты расчетов функции распределения $f(x, p, t)$ для различных моментов времени при значениях $x_1 = 0.5 \cdot (x_f + t)$ и $x_2 = 0.99t$ для $v_g = 0.9$.

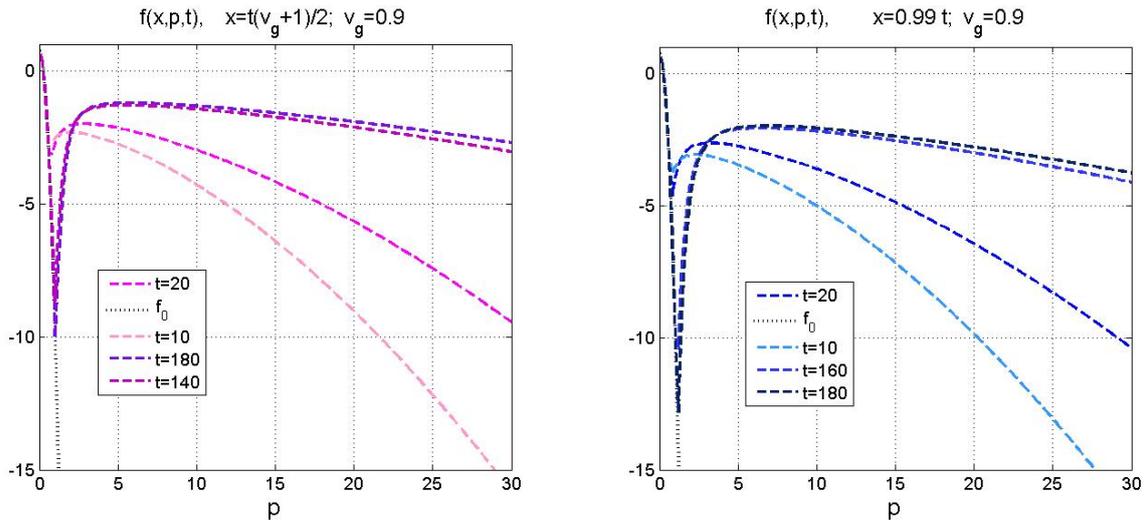


Рис. 11. Функция распределения $f(x, p, t)$ и $f_0(p)$ в различные моменты времени для $x_1 = 0.5 \cdot (x_f + t)$ и $x_2 = 0.99t$; $v_g = 0.9$.

Из графиков видно, что в горячей области наблюдается относительное установление распределения горячих хвостов. В холодной области функция распределения для фиксированного момента времени совпадает с $f_0(p)$ (рис.11). При этом в один и тот же момент в области $0 < p < p_g$ разница между функциями распределения $f(x_1, p, t)$ и $f(x_2, p, t)$ отличается на порядки величин. Детальнее эта разница представлена для $t = 180$ на рис.12. С течением времени функция распределения в области $p \gg 1$ нагревается. В холодной же области импульсов функция распределения опускается все ниже, совпадая с $f_0(p)$. Это легко понять из рис.3, где область определения решения структурирована в координатах (x, ut) .

На рис.12 (справа) сравниваются функции распределения $f(x_2, u, t)$ для $x_2 = 0.99t$, в два момента времени и для двух значений групповой скорости $v_g = 0.8$ и $v_g = 0.9$. Поскольку перенос для $v_g = 0.8$ меньше, чем для $v_g = 0.9$, а, следовательно, диффузия сильнее, можно видеть более сильное уширение распределения. Функция распределения для $v_g = 0.9$ горячее, что соответствует формуле (34).

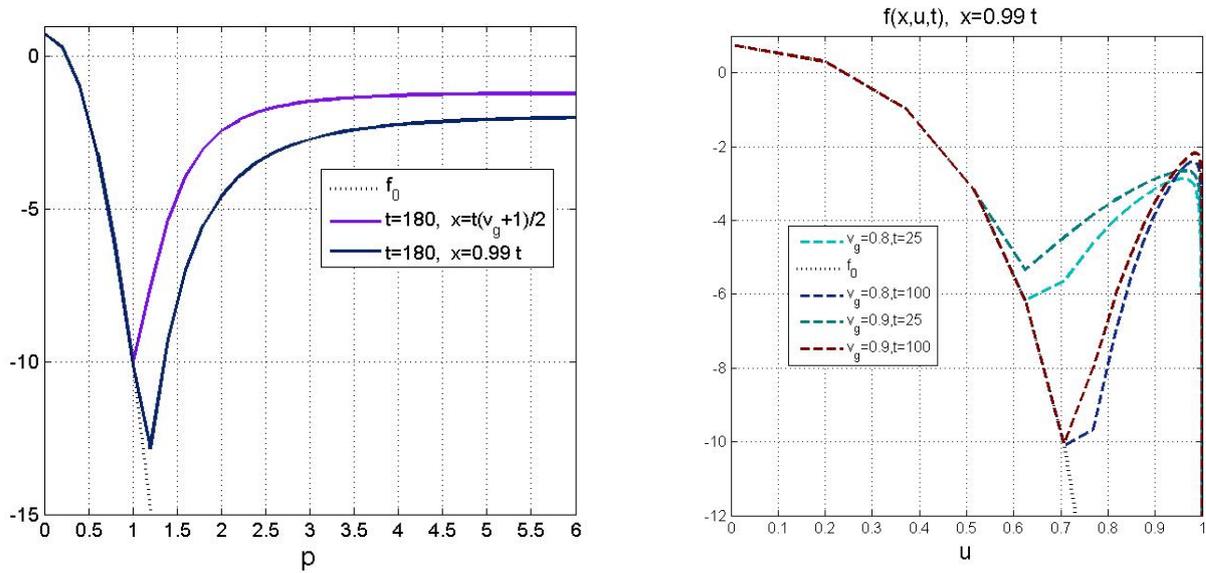


Рис. 12. Функция распределения $f(x, p, t)$ и $f_0(p)$ в области $x_f < x \leq t$ слева для двух значений x . Справа зависимость от u функций распределения $f(x, u, t)$ и $f_0(u)$ для двух значений групповой скорости $v_g = 0.8$ и $v_g = 0.9$.

Заключение

Рассмотрено эволюционное 1V1D уравнение типа Фоккера-Планка, описывающее взаимодействие лазерного импульса с холодной плазмой.

Дан анализ взаимодействия оператора переноса и оператора квазилинейной диффузии, описывающего стохастический нагрев электронов.

Показано, что изначально узкая функция распределения электронов (холодная плазма) уширяется со временем и отрастают горячие хвосты распределения. Даны оценки характерных масштабов динамики процесса.

Построено аналитическое решение и проанализирована структура функции распределения.

Проведенные численные расчеты качественно подтвердили аналитические результаты и детализировали решение количественно в различных областях импульсного пространства $0 < p \lesssim 1$, $1 < p < p_g$ и $p_g < p < p_{max}$ в зависимости, в частности, от $v_g(p_g)$, x_f . Численные результаты проиллюстрированы подробными графиками.

Библиографический список

- [1] Бобылев А.В., Быченков В.Ю., Потапенко И.Ф. Численное исследование стохастического ускорения электронов плазменными ВКР волнами// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2016. – № 99. 24 с.
- [2] Hyung Taek Kim, Ki Hong Pae, Hyuk Jin Chael et al. Laser vacuum acceleration of a relativistic electron bunch // Phys. Rev. Lett. 111, 165002 (2013).
- [3] Leemans W.P., Gonsalves A.J., Mao H.-S. et al. Staging of laser-plasma accelerators// Phys. Rev. Lett. 113, 245002 (2014).
- [4] Kuramitsu Y., Sakawa Y., Kato T., Takabe H. Nonthermal Acceleration of Charged Particles due to an Incoherent Wakefield Induced by a Large-Amplitude Light Pulse// Astrophys. J. 682, L113 (2008).
- [5] Hidding B., Konigstein T., Willi O., et al. // Nuclear Instr. Methods Phys. Res. A 31, 636 (2011); Konigstein T., Karger O., Pretzler G., et al. Laser-plasma-accelerator's potential to radically transform space radiation testing // J. Plasma Phys. 78, 383 (2012).
- [6] Андреев Н.Е., Горбунов Л.М., Кирсанов В.И. и др. О возможности возбуждения нелинейных плазменных колебаниях релятивистским электронным пучком// Письма в ЖЭТФ 55, 551 (1992).
- [7] Antonsen T.M., Mora P. Numerical modeling of multi-GeV laser wakefield electron acceleration // Phys. Rev. Lett. 69, 2204 (1992).
- [8] Sprangle P., Esarey E. Interaction of ultrahigh laser fields with beams and plasmas // Phys. Fluids B. 4, 2241 (1992).
- [9] Krall J., Ting A., Esarey E., Sprangle P. Enhanced acceleration in a self-modulated-laser wake-field accelerator// Phys. Rev. E. 48, 2157 (1993).
- [10] Sentoku Y., Bychenkov V.Yu., Flippo F., et al. Comparative study of ion acceleration by linearly polarized laser// Appl. Phys. B 74, 207 (2002).
- [11] Mangles S.P.D., Walton B.R., Tzoufras M., et al. Relativistic Electron Acceleration in a Wake Field// Phys. Rev. Lett. 94, 245001 (2004).
- [12] Walton B.R., Mangles S.P.D., Najmudin Z., et al. Measurements of forward scattered laser radiation from intense sub-ps laser interactions with underdense plasmas // Phys. Plasmas 13, 113103 (2006).

- [13] Paradkar B.S., Krashennnikov S.I., and Beg F. N. Enhancement of laser-driven electron acceleration in an ion channel // Phys. Plasmas 19, 060703 (2012).
- [14] Бочкарев С.Г., Брантов А.В., Быченков В.Ю. и др. К теории нелинейного пикосекундного лазерного импульса// Физика плазмы 40, 265 (2014).
- [15] Bulanov S.V., Yogo A., Esirkepov T. Zh., et al. Ion Acceleration via "Nonlinear Vacuum Heating" by the Laser Pulse// Phys. Plasmas 22, 063108 (2015).
- [16] Веденов А.А., Рютов Д.Д. Квазилинейные эффекты в потоковых неустойчивостях. Вопросы теории плазмы. Вып. 6 // Под ред. Леонтовича М.А. М.: Госатомиздат, 1972. с. 3 - 68.
- [17] Chen P., Tajima T., Takahashi Y. Plasma wakefield acceleration for ultrahigh-energy cosmic rays// Phys. Rev. Lett. 89, 161101 (2002).
- [18] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: "Наука" , 1977. – 798с.