

## ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

# Препринты ИПМ • Препринт № 78 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

## Маштаков Я.В., Ткачев С.С.

Построение опорного углового движения для обеспечения разгрузки маховиков

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение опорного углового движения для обеспечения разгрузки маховиков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 78. 32 с. doi:10.20948/prepr-2017-78
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-78

# Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша Российской академии наук

# Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

# Построение опорного углового движения для обеспечения разгрузки маховиков

#### Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

Построение опорного углового движения для обеспечения разгрузки маховиков

В работе рассматривается задача бестопливной разгрузки маховичной системы управления в режиме солнечной ориентации. Показано, что всегда можно подобрать такую ориентацию спутника, чтобы происходила разгрузка маховиков как при использовании момента сил давления солнечного излучения, так и при использовании гравитационного момента. Получены точные выражения для нахождения ориентации спутника, обеспечивающей оптимальную разгрузку маховиков, а также приведены простые формулы для построения близкой к оптимальной ориентации.

*Ключевые слова:* маховик, разгрузка кинетического момента маховика, момент сил давления солнечного излучения, гравитационный момент, ляпуновское управление

#### Yaroslav Mashtakov, Stepan Tkachev

Reference angular motion synthesis for reaction wheels desaturation

The paper considers the problem of fuelless reaction wheels desaturation for a satellite in solar acquisition mode. It is shown that there is always angular motion in the vicinity of required one when reaction wheels can be desaturated by either the solar radiation pressure torque or gravitational one. Optimal desaturation attitude is found in close form. Additionally, near optimal simplified expressions for desaturation attitude are also presented.

*Key words:* reaction wheel, desaturation, solar radiation pressure, gravitational torque, Lyapunov based attitude control

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект №14-11-00621)

#### Введение

Практически в каждой космической миссии необходимо обеспечивать заданную ориентацию космического аппарата, будь это солнечная ориентация для подзарядки аккумуляторных батарей или ориентация спутника на Землю для съемки некоторого участка поверхности. Как правило, для этих целей используются гироскопические системы управления ориентацией на базе маховиков и гиродинов. Обе эти системы обладают достаточно хорошими показателями по точности и величине выдаваемого управляющего момента, что делает возможным как точное наведение, так и быструю переориентацию космического аппарата. Однако обе эти системы имеют существенный недостаток: они не всегда способны обеспечить требуемое управляющее воздействие. В случае использования маховиков такое явление носит название насыщения, т.к. в маховиках накапливается избыточный кинетический момент: для гиродинов же это проблема сингулярности, когда невозможно создать момент вдоль некоторой оси. В данной работе мы не будем останавливаться на проблеме сингулярности, отметим лишь, что подробный обзор существующих методов решения этой проблемы приведен в работе [1]. Здесь мы будем рассматривать лишь проблемы насыщения маховиков.

В силу физических ограничений угловая скорость вращения маховика не может бесконечно возрастать, а значит, может наступить такой момент, когда он не будет способен раскрутиться до требуемой скорости и создать управляющий момент — маховик накопил избыточный кинетический момент. Следовательно, маховики необходимо «разгружать», что приводит к необходимости установки на аппарат вспомогательных систем, например реактивных или магнитных. Первые обладают очевидным недостатком: они требует запаса рабочего тела, что приводит к снижению предельной массы полезной нагрузки и/или снижает продолжительность миссии. Вторые же системы могут быть использованы лишь при наличии внешнего магнитного поля, что делает невозможным их использование на высоких орбитах.

Основной причиной накопления маховиками кинетического момента являются действующие на аппарат внешние моменты сил, такие как гравитационный момент и момент сил давления солнечного излучения (в дальнейшем для сокращения мы будем называть его солнечным моментом). Как правило, моменты внешних сил учитываются лишь при построении алгоритма управления ориентацией, и маховики должны обеспечить их парирование. При построения требуемого углового движения эти моменты не учитываются. В настоящей работе мы предлагаем алгоритм построения опорного углового движения КА, который учитывает влияние внешних моментов и позволял бы использовать именно их для разгрузки маховиков.

Отметим, что похожая задача уже решалась. Так, в работе [2] предложен алгоритм разгрузки маховиков при помощи гравитационного момента в режиме

солнечной ориентации, однако представленная там методика существенно отличается от предложенной в настоящей работе. В работах [3,4] представлен алгоритм разгрузки при помощи гравитационного момента, однако одним из требований его применимости является произвольность ориентации КА. Помимо этого, большое внимание уделяется разгрузке маховиков при помощи магнитного момента, например [5,6], в настоящей же работе эта задача не рассматривается.

#### 1. Постановка задачи

Одним из режимов ориентации, который присутствует практически в любой миссии, является режим солнечной ориентации для подзарядки аккумуляторных батарей, установленных на КА. В этом случае единственным условием на ориентацию аппарата является совпадение направления нормали к солнечным панелям и направления на Солнце.

На достаточно низких орбитах для разгрузки маховиков целесообразным является использование магнитных катушек. В то же время на высоких орбитах магнитное поле Земли значительно ослабевает, а значит, необходимо использовать другие инструменты разгрузки. В качестве примера таких орбит могут быть приведены геостационарные орбиты, а также высокоэллиптические орбиты, на которых исследуется взаимодействие земной магнитосферы с солнечным излучением, например миссии Cluster II и Magnetospheric MultiScale [7,8].

Мы будем рассматривать задачу при следующих предположениях:

- КА движется по высокой эллиптической кеплеровой орбите; выделяются два этапа движения: вблизи перицентра, где преобладает гравитационный момент, и вдали от перицентра, где преобладает солнечный момент.
- На КА установлены две идентичные солнечные панели с известными коэффициентами отражения и зеркальности, а также направлениями нормалей к ним. Панели предполагаются жестко закрепленными на аппарате.
- Известны инерционные параметры КА: тензор инерции, положение центра масс.
- Для обеспечения требуемого токосъема угол между нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце должен оставаться достаточно малым на всем рассматриваемом отрезке времени.
- Управление ориентацией осуществляется при помощи системы, состоящей из трех двигателей-маховиков.

Для миссии с этими предположениями необходимо построить алгоритм синтеза опорного углового движения, обеспечивающего разгрузку маховичной системы управления ориентацией.

#### 2. Солнечный момент

В качестве модели сил давления солнечного излучения рассмотрим модель, учитывающую поглощение, зеркальное отражение и отражение по закону косинусов Ламберта [9],

$$d\mathbf{F} = -\frac{\Phi_0}{c} (\mathbf{r}_s, \tilde{\mathbf{n}}) \left( (1 - \alpha) \mathbf{r}_s + 2\alpha \mu (\mathbf{r}_s, \tilde{\mathbf{n}}) \tilde{\mathbf{n}} + \alpha (1 - \mu) \left( \mathbf{r}_s + \frac{2}{3} \tilde{\mathbf{n}} \right) \right) dS,$$

где  $\Phi_0$  – солнечная постоянная, равная 1367 Вт/м², c – скорость света,  $\mathbf{r}_s$  – орт направления из центра масс КА на Солнце,  $\tilde{\mathbf{n}}$  – нормаль к элементарной площадке площадью dS,  $\alpha,\mu$  – коэффициенты отражения и зеркальности соответственно. В соответствии с этой моделью солнечный момент, действующий на КА от каждой из солнечных панелей, может быть записан в виде

$$\mathbf{M}_{i} = -S \frac{\Phi_{0}}{c} (\mathbf{r}_{s}, \mathbf{n}_{i}) \mathbf{R}_{i} \times \left( (1 - \alpha) \mathbf{r}_{s} + 2\alpha \mu (\mathbf{r}_{s}, \mathbf{n}_{i}) \mathbf{n}_{i} + \alpha (1 - \mu) \left[ \mathbf{r}_{s} + \frac{2}{3} \mathbf{n}_{i} \right] \right), \quad i = 1, 2,$$
(1)

где  $\mathbf{R}_i$  — радиус-вектор из центра масс КА в геометрический центр і-ой пластины, S — площадь пластины (мы рассматриваем две идентичных панели, следовательно, их площади, а также коэффициенты отражения и зеркальности одинаковы),  $\mathbf{n}_i$  — вектор нормали к і-ой солнечной панели. В общем случае эти нормали не совпадают (рис. 1), и угол между ними может быть достаточно произвольным, однако мы ограничимся лишь случаем, когда угол между ними мал.

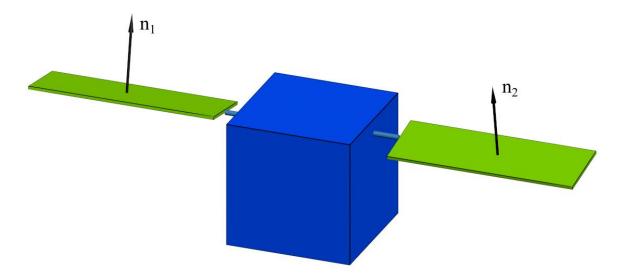


Рис. 1. Схематичная модель КА

Суммарный солнечный момент записывается в виде

$$\mathbf{M}_{s} = \mathbf{M}_{1} + \mathbf{M}_{2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2), \quad \mathbf{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2),$$

$$a = -S \frac{\Phi_0}{c} (1 - \alpha \mu), \quad b = -S \frac{2\Phi_0}{3c} \alpha (1 - \mu), \quad d = -2S \frac{\Phi_0}{c} \alpha \mu.$$

Учтем малое отклонение нормалей  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  друг от друга:

$$|\mathbf{n}| = \cos \delta \approx 1 - \delta^2 \approx 1, \quad |\mathbf{v}| = \sin \delta \approx \delta,$$
 (2)

где  $0 \le \delta \le \pi/2$  — угол между **n** и **n**<sub>1</sub> (он же угол между **n** и **n**<sub>2</sub>) (рис. 2). В дальнейшем мы будем полагать, что условие, накладываемое на ориентацию аппарата — близость нормалей к **r**<sub>s</sub> — будет накладываться именно на вектор средней нормали **n**, иными словами

$$(\mathbf{r}_{s},\mathbf{n}) \ge \cos \theta_{max}, \tag{3}$$

где  $\theta_{max}$  <<1 — максимально допустимый угол между направлением на Солнце и нормалью.

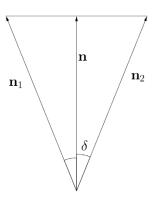


Рис. 2. Нормали

С использованием введенных обозначений момент, действующий на каждую из панелей,

$$\mathbf{M}_{i} = (\mathbf{R} \pm \mathbf{\rho}) \times \left[ a\mathbf{r}_{s}(\mathbf{r}_{s}, \mathbf{n} \pm \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \pm \mathbf{v})(\mathbf{r}_{s}, \mathbf{n} \pm \mathbf{v})(b + d(\mathbf{r}_{s}, \mathbf{n} \pm \mathbf{v})) \right], i = 1, 2,$$

где знак «+» выбирается для первой панели (i=1), знак «-» — для второй (i=2). Заметим, что

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4} (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) = \frac{1}{4} (|\mathbf{n}_1|^2 - (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + (\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) - |\mathbf{n}_2|^2) = 0.$$

Следовательно,  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{v})$  — величина второго порядка малости, т.к. по условию угол между  $\mathbf{r}_s$ ,  $\mathbf{n}$  много меньше единицы, а также, согласно (2),  $|\mathbf{v}| << 1$ . Далее, отбрасывая величины второго и выше порядков малости, запишем выражение для солнечного момента:

$$\mathbf{M}_{s} \approx \mathbf{R} \times 2a\mathbf{r}_{s} + [\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}](b+d). \tag{4}$$

Таким образом, солнечный момент состоит из двух слагаемых. Первое из них отвечает за поглощенное излучение и существенно зависит от орта направления на Солнце. Второе же слагаемое возникает лишь в случае наличия отражения (зеркального и/или по закону косинусов), и его направление относительно КА всегда остается фиксированным. Необходимо отметить, что этот результат получен в рамках описанных выше условий, когда угол между средней нормалью **n** и направлением на Солнце достаточно мал, а также что сами нормали к солнечным панелям практически совпадают.

#### 3. Построение опорного движения

При построении опорного углового движения будем отталкиваться от следующих предпосылок. Во-первых, принцип действия маховичной системы ориентация основан на законе сохранения суммарного кинетического момента системы «спутник-маховик», а значит, в случае отсутствия внешних моментов или же на достаточно малых промежутках времени (например, во время быстрой переориентации КА при помощи маховиков) можно считать суммарный кинетический момент постоянным. Во-вторых, в режиме солнечной стабилизации, когда КА не вращается вокруг направления на Солнце, кинетический момент аппарата (без учета маховиков) практически равен нулю. Таким образом, если удастся привести кинетический момент всей системы «спутник-маховик» к нулевому значению, то в режиме солнечной стабилизации кинетический момент маховиков также будет равен нулю.

Рассмотрим теперь эволюцию суммарного кинетического момента системы «спутник-маховики»

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M},\tag{5}$$

где K — суммарный кинетический момент системы «спутник-маховик», M — суммарный момент внешних сил, действующих на систему, который при движении KA вдали от перицентра соответствует солнечному моменту, а при движении в окрестности перицентра равен гравитационному моменту. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(K^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = 2(\mathbf{K}, \mathbf{M}).$$

Следовательно, для уменьшения кинетического момента всей системы будет достаточно потребовать  $(\mathbf{M}, \mathbf{K}) < 0$ .

Как уже упоминалось выше, момент внешних сил зависит от текущей ориентации КА. Естественно, не всегда можно реализовать такую ориентацию КА, чтобы достигалось желаемое неравенство, однако в случае если в каждый момент времени будет выполняться

$$(\mathbf{M}, \mathbf{K}) \to \min,$$
 (6)

можно ожидать, что в режиме солнечной ориентации избыточный кинетический момент маховиков будет, по крайней мере, накапливаться медленно. При этом условие (6) вместе с ограничением на угол между средней нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце позволяет найти требуемую ориентацию КА.

Полученный результат может быть распространен и на более общую задачу. В случае, когда солнечная ориентация является лишь временной, а у самого аппарата есть некоторый номинальный режим движения, подразумевающий постоянство вектора кинетического момента корпуса КА инерциальная стабилизация (например, ИЛИ собственным вращением), к началу номинального режима будет достаточно обеспечить равенство кинетического момента системы «спутник-маховик» **К** и  $\mathbf{K}_{\scriptscriptstyle 0}$ , чтобы в номинальном режиме движения маховики были полностью разгружены.

Покажем, что для достижения целевого значения кинетического момента достаточно будет потребовать выполнения неравенства  $(\mathbf{M}, \mathbf{K} - \mathbf{K}_0) < 0$ , так как

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{K} - \mathbf{K}_0|^2 = \frac{d}{dt}(K^2 + K_0^2 - 2(\mathbf{K}_0, \mathbf{K})) = \frac{d}{dt}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) - 2(\mathbf{K}_0, \frac{d}{dt}\mathbf{K}) =$$

$$= 2(\mathbf{K}, \mathbf{M}) - 2(\mathbf{K}_0, \mathbf{M}) = 2(\mathbf{M}, \mathbf{K} - \mathbf{K}_0).$$

Таким образом, при наличии достаточного запаса кинетического момента в маховиках может быть достигнуто любое значение целевого кинетического момента, и к началу номинального движения маховики будут полностью разгружены.

# 3.1 Используемые системы координат

Прежде чем приступить к решению минимизационной задачи (6) при условии (3), введем следующие правые ортонормированные системы координат:

 $O_a Y_1 Y_2 Y_3$  – инерциальная система координат (ИСК): начало  $O_a$  расположено в центре масс Земли,  $O_a Y_1$  направлена в точку весеннего

равноденствия эпохи J2000,  $O_a Y_3$  направлена перпендикулярно плоскости эклиптики;

 $Ox_1x_2x_3$  — связанная с KA система координат (ССК): начало O расположено в центре масс KA, оси являются главными центральными осями инерции аппарата. Сделаем дополнительное предположение, что средняя нормаль к солнечным панелям **n** направлена вдоль  $Ox_3$ ;

 $Oz_1z_2z_3$  — солнечная система координат (СолСК):  $Oz_3$  направлена вдоль направления на Солнце  $\mathbf{r}_s$ ,  $Oz_1$  сонаправлен с векторным произведением  $\mathbf{r}_s \times \mathbf{K}$  (если  $\mathbf{r}_s \times \mathbf{K} = \mathbf{0}$ , то  $Oz_1$  сонаправлен с нормалью к плоскости эклиптики), следовательно, в этой СК  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & K_2 & K_3 \end{pmatrix}^T$ ;

 $Oy_1y_2y_3$  — система координат, связанная с солнечными панелями (СПСК):  $Oy_3$  сонаправлена с  $\mathbf{n}$ ,  $Oy_1$  сонаправлен с  $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$ , где  $\mathbf{p} = 2\mathbf{R}a$  (если  $\mathbf{n} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , то СПСК выбирается совпадающей с ССК), следовательно, в этой СК  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}^T$ ;

 $OZ_1Z_2Z_3$  — орбитально-солнечная система координат (ОССК):  $OZ_3$  направлена вдоль направления на Солнце,  $OZ_2$  сонаправлен с  $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{sat}$ , где  $\mathbf{r}_{sat}$  — радиус-вектор из центра Земли в центр масс КА (если  $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{sat} = \mathbf{0}$ , то  $OZ_2$  совпадает с нормалью к плоскости эклиптики), следовательно, в этой СК  $\mathbf{r}_{sat} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & r_3 \end{pmatrix}^T$ ,  $r_1 \ge 0$ .

Вектор, записанный в соответствующей системе координат, в дальнейшем будет помечаться верхним индексом:  $\mathbf{a}^{Y}, \mathbf{a}^{x}, \mathbf{a}^{z}, \mathbf{a}^{y}, \mathbf{a}^{z}$  для ИСК, ССК, СолСК, СПСК и ОССК соответственно. Переходы между системами координат задаются при помощи матриц направляющих косинусов  $\mathbf{D}_{ij}$ , причем

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{D}_{ij}\mathbf{a}^j,$$

где i, j могут принимать значения Y, x, z, y, Z.

# 3.2 Разгрузка при помощи солнечного момента

Рассмотрим более подробно задачу разгрузки маховиков при движении аппарата вдали от перицентра, где преобладает солнечный момент. Выпишем в явном виде выражение для матрицы перехода из СолСК в СПСК  $\mathbf{D}_{zy}$  с использованием углов Эйлера (последовательность поворотов 3-1-3 на углы  $\psi, \theta, \varphi$  соответственно):

$$D_{11} = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \cos(\theta)\sin(\varphi)\sin(\psi),$$

$$D_{21} = -\cos(\psi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\psi),$$

$$D_{31} = \sin(\psi)\sin(\theta),$$

$$\begin{split} D_{12} &= \cos(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi), \quad D_{13} = \sin(\varphi)\sin(\theta), \\ D_{22} &= \cos(\varphi)\cos(\psi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\psi), \quad D_{23} = \cos(\varphi)\sin(\theta), \\ D_{32} &= -\cos(\psi)\sin(\theta), \quad D_{33} = \cos(\theta). \end{split}$$

Легко видеть, что угол между  $\mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{n}$  равен  $\theta$ , соответственно, ограничение (3) может быть переписано в виде

$$-\theta_{max} \le \theta \le \theta_{max}.\tag{7}$$

В дальнейшем мы будем использовать ограничения именно в форме (7). Введем еще одно обозначение

$$\mathbf{q} = [\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}](b+d).$$

Тогда выражение для солнечного момента можно переписать в виде

$$\mathbf{M}_{s} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}_{s} + \mathbf{q}.$$

Учитывая малость  $\theta_{max}$ , линеаризуем выражение для матрицы  $\mathbf{D}_{zy}$ :

$$\mathbf{D}_{zy} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & \sin(\varphi + \psi) & \theta \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & \theta \cos(\varphi) \\ \theta \cos(\psi) & -\theta \cos(\psi) & 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к записи выражения  $(\mathbf{M}_s, \mathbf{K})$ . Наиболее простой вид векторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{r}_s$  имеют в СолСК, а векторы  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  – в СПСК. Следовательно,

$$(\mathbf{M}_{s},\mathbf{K}) = (\mathbf{K},\mathbf{p}\times\mathbf{r}_{s}+\mathbf{q}) = (\mathbf{D}_{zy}[\mathbf{r}_{s}^{z}\times\mathbf{K}^{z}],\mathbf{p}^{y}) + (\mathbf{D}_{zy}\mathbf{K}^{z},\mathbf{q}^{y}).$$

После приведения подобных слагаемых и их группировки это выражение преобразуется в

$$(\mathbf{M}_{s}, \mathbf{K}) = q_{3}K_{3} + K_{2} \left[ q_{2}\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)(q_{1} + p_{2}) \right] + \theta \left[ K_{3} \left( q_{1}\sin(\varphi) + q_{2}\cos(\varphi) \right) - K_{2} \left( p_{3}\sin(\psi) + q_{3}\cos(\psi) \right) \right].$$

В итоге, задача сводится к следующей:

$$q_{3}K_{3} + K_{2}(q_{2}\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)(q_{1} + p_{2})) + \theta(K_{3}(q_{1}\sin(\varphi) + q_{2}\cos(\varphi)) - K_{2}(p_{3}\sin(\psi) + q_{3}\cos(\psi))) \rightarrow \min_{\psi,\theta,\varphi},$$
(8)

$$-\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max}$$
.

Для ее решения воспользуемся методом множителей Лагранжа, а также условием Каруша-Куна-Таккера. Функция Лагранжа этой системы записывается в виде

$$L = q_3 K_3 + K_2 (q_2 \cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)(q_1 + p_2)) +$$

$$+ \theta (K_3 (q_1 \sin(\varphi) + q_2 \cos(\varphi)) - K_2 (p_3 \sin(\psi) + q_3 \cos(\psi)))$$

$$+ \lambda_1 (\theta_{max} - \theta) + \lambda_2 (\theta_{max} + \theta) + q_3 K_3,$$

где  $\lambda_i$  — множители Лагранжа. Соответствующие необходимые условия минимума тогда принимают вид

$$\begin{split} &\frac{\partial L}{\partial \theta} = K_3 \Big( q_1 \sin(\varphi) + q_2 \cos(\varphi) \Big) - K_2 \Big( p_3 \sin(\psi) + q_3 \cos(\psi) \Big) + \lambda_2 - \lambda_1 = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \varphi} = K_2 \Big( (q_1 + p_2) \cos(\varphi + \psi) - \sin(\varphi + \psi) q_2 \Big) + \theta K_3 \Big( q_1 \cos(\varphi) - q_2 \sin(\varphi) \Big) = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \psi} = K_2 \Big( (q_1 + p_2) \cos(\varphi + \psi) - \sin(\varphi + \psi) q_2 \Big) - \theta K_2 \Big( p_3 \cos(\psi) - q_3 \sin(\psi) \Big) = 0, \\ &\lambda_1 \Big( \theta_{max} - \theta \Big) = 0, \\ &\lambda_1 \Big( \theta_{max} + \theta \Big) = 0, \\ &\lambda_1 \Big( \theta_{max} + \theta \Big) = 0, \end{split}$$

Таким образом, получена система уравнений, которая позволяет найти все экстремумы задачи (8). В общем случае решение ее затруднительно, поэтому мы рассмотрим лишь ее частный случай. Обратим внимание, что вектор  ${\bf q}$  состоит из двух слагаемых, по крайней мере одно из которых, а именно

$$\rho \times 2\mathbf{v}(b+d)$$

в рамках сделанных ранее предположений о малости угла между нормалями к солнечным панелям, по модулю много меньше единицы. Помимо этого, коэффициент отражения солнечных панелей является малой величиной. Следовательно, это слагаемое имеет второй порядок малости и можно пренебречь им. Безусловно, решение в рамках этого допущения уже не будет доставлять минимум задачи (8), однако, учитывая малость поправки, полученное решение будет близко к оптимальному.

Рассмотрим разложение вектора **q** (с уже откинутым малым слагаемым) по базису СПСК. Согласно определению этой системы координат, верны следующие выражения:

$$\mathbf{R}^{y} = \begin{pmatrix} 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{n}^{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

В то же время

$$\mathbf{q}^{y} = 2\mathbf{R}^{y} \times \mathbf{n}^{y} (b+d) = (2R_{2}(b+d) \quad 0 \quad 0)^{T}.$$

Таким образом,  $q_3 = q_2 = 0$ . Введем дополнительные обозначения

$$f = K_2(q_1 + p_2), g = K_3q_1, h = K_2p_3.$$

Тогда минимизационная задача принимает вид

$$f \sin(\varphi + \psi) + \theta(g \sin(\varphi) - h \sin(\psi)) \to \min_{\psi, \theta, \varphi},$$

$$-\theta_{max} \le \theta \le \theta_{max},$$
(9)

а необходимые условия минимума записываются в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) + \lambda_2 - \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = f \cos(\varphi + \psi) + \theta g \cos(\varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = f \cos(\varphi + \psi) - \theta h \cos(\psi) = 0,$$

$$\lambda_1(\theta_{max} - \theta) = 0,$$

$$\lambda_2(\theta_{max} + \theta) = 0.$$
(10)

Общее решение полученной системы уравнений представлено в Приложении. Здесь мы отметим лишь, что минимальное значение функция (9) будет принимать на границе области допустимых параметров, т.е. при  $|\theta| = \theta_{max}$ . В случае, когда ни один из коэффициентов f,g,h не равен нулю, общее количество точек, претендующих на экстремальное значение, не превышает двадцати четырех. Более того, легко видеть, что функция обладает симметрией, а именно, при замене  $\theta$  на  $-\theta$  и одновременном сдвиге  $\varphi$  и  $\psi$  на  $\pi$  значение функции не изменится. Это связано с тем, что при такой замене линеаризованная матрица перехода  $\mathbf{D}_{zy}$  не изменяется, т.е. два набора углов, с точностью до величин второго порядка малости по  $\theta$ , отвечают одному и тому же положению КА. Таким образом, является целесообразным проводить минимизацию этой функции лишь при одном фиксированном  $\theta = \theta_{max}$ , и общее количество возможных экстремумов тогда сокращается до двенадцати.

Заметим также, что при

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \gamma_0, \quad \theta = \theta_{max}, \quad \varphi = \left(1 - \operatorname{sign}(f)\right) \frac{\pi}{2} + \gamma_0, \tag{11}$$

где для  $\gamma_0$  выполнено

$$\sin(\gamma_0) = \frac{-g \operatorname{sign}(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \cos(\gamma_0) = \frac{-h}{\sqrt{g^2 + h^2}},$$
 (12)

функция (9) принимает значение

$$-|f|-\theta_{max}\sqrt{g^2+h^2}$$
.

Это значение не является минимальным для исследуемой функции в общем случае, что может быть легко проверено подстановкой в систему уравнений (10), однако показывает, что всегда можно выбрать ориентацию аппарата таким образом, чтобы осуществлялась разгрузка маховиков при помощи солнечного момента.

Покажем, что приведенное здесь приближенное решение достаточно близко к оптимальному. Легко видеть, что

$$0 \leq \frac{\min(f\sin(\varphi+\psi) + \theta(g\sin\varphi - h\sin\psi))}{-|f| - \theta_{max}\sqrt{g^2 + h^2}} \leq \frac{|f| + \theta_{max}(|g| + |h|)}{|f| + \theta_{max}\sqrt{g^2 + h^2}}.$$

Если f=0, g=h, то правое выражение из этого неравенства равно  $\sqrt{2}$  . Докажем, что

$$\frac{\left|f\right| + \theta_{max}\left(\left|g\right| + \left|h\right|\right)}{\left|f\right| + \theta_{max}\sqrt{g^2 + h^2}} \le \sqrt{2}.$$

Перепишем это в виде

$$(1-\sqrt{2})\frac{|f|}{\theta_{\max}} \le 2\left(\sqrt{\frac{g^2+h^2}{2}} - \frac{|g|+|h|}{2}\right).$$

Левая часть этого неравенства всегда неположительна. Учитывая

$$\sqrt{\frac{g^2+h^2}{2}} \ge \frac{\left|g\right|+\left|h\right|}{2},$$

очевидно, что правая часть всегда неотрицательна. Таким образом, требуемое утверждение доказано, а значит, приближенное решение будет отличаться от оптимального не более чем в  $\sqrt{2}$  раз.

# 3.3 Разгрузка при помощи гравитационного момента

Прежде чем мы приступим к построению опорного движения, обеспечивающего разгрузку маховиков при помощи гравитационного момента, рассмотрим более детально выражение для солнечного момента, а точнее его проекцию на направление на Солнце  $\mathbf{r}_s$ :

$$(\mathbf{M}_{s},\mathbf{r}_{s}) = (\mathbf{R} \times 2a\mathbf{r}_{s} + [\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}](b+d),\mathbf{r}_{s}) = ([\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}](b+d),\mathbf{r}_{s}).$$

Как уже было отмечено выше,  $|\mathbf{p} \times 2\mathbf{v}(b+d)|$  является величиной второго порядка малости. В силу того, что угол между вектором средней нормали  $\mathbf{n}$  и направлением на Солнце  $\mathbf{r}_s$  достаточно мал, величина

$$(\mathbf{R} \times 2\mathbf{n}(b+d), \mathbf{r}_s)$$

также является величиной второго порядка малости. Таким образом, проекция солнечного момента на направление на Солнце фактически является малой величиной второго порядка, а значит, разгрузка маховиков вдоль направления на Солнце практически не производится.

Учитывая вышесказанное, мы будет проводить разгрузку маховиков при помощи гравитационного момента исключительно вдоль направления на Солнце, т.к. кинетический момент, ортогональный этому направлению, может быть разгружен за счет солнечного момента. В итоге, мы приходим к следующей задаче:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{s}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_{s}), 3\frac{\mu}{r_{sat}^{5}} \mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{J} \mathbf{r}_{sat} \end{pmatrix} \rightarrow \min, 
(\mathbf{r}_{s}, \mathbf{n}) \ge \cos \theta_{max}, \tag{13}$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли,  $\mathbf{r}_{sat}$  – радиус-вектор из центра Земли в центр масс КА,  $\mathbf{J}$  – его тензор инерции. В качестве независимых переменных, как и в предыдущем пункте, будут выступать углы Эйлера (последовательность 3-1-3 на углы  $\Psi$ , $\Theta$ , $\Phi$  соответственно). Ограничение (3) при этом снова можно переписать в более компактном виде

$$-\theta_{max} \leq \Theta \leq \theta_{max}$$
.

Матрица перехода из ОССК в ССК после линеаризации записывается в виде

$$\mathbf{D}_{Zx} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi + \Psi) & \sin(\Phi + \Psi) & \Theta\sin(\Phi) \\ -\sin(\Phi + \Psi) & \cos(\Phi + \Psi) & \Theta\cos(\Phi) \\ \Theta\cos(\Psi) & -\Theta\cos(\Psi) & 1 \end{pmatrix}.$$

В ОССК выражения для вектора направления на Солнце и радиус-вектора КА записываются в виде

$$\mathbf{r}_s^Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{r}_{sat}^Z = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & r_3 \end{pmatrix}^T.$$

Минимизируемая функция принимает вид

$$\left(\mathbf{r}_{s}\left(\mathbf{K},\mathbf{r}_{s}\right),3\frac{\mu}{r_{sat}^{5}}\mathbf{r}_{sat}\times\mathbf{J}\mathbf{r}_{sat}\right)=3\frac{\mu}{r_{sat}^{5}}\left(\mathbf{K},\mathbf{r}_{s}\right)\left(\mathbf{r}_{s}^{Z}\times\mathbf{r}_{sat}^{Z},\mathbf{D}_{Zx}^{T}\mathbf{J}^{x}\mathbf{D}_{Zx}\mathbf{r}_{sat}^{Z}\right),\tag{14}$$

где  $\mathbf{J}^x$  – тензор инерции КА, записанный в ССК, при этом

$$\mathbf{J}^x = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Итоговое выражение для (14) имеет вид

$$3\frac{\mu}{r_{sat}^{5}}(\mathbf{K},\mathbf{r}_{s})\left[r_{1}^{2}\frac{A-B}{2}\sin(2\Psi+2\Phi)-\frac{1}{2}r_{1}r_{3}\Theta((A-B)\cos(2\Phi+\Psi)-\cos(\Psi)(A+B-2C))\right].$$

Введем обозначения

$$F = \frac{3\mu}{2r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1^2 (B - A), \quad G = -\frac{3\mu}{2r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 (A - B),$$

$$H = -\frac{3\mu}{2r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 (A + B - 2C),$$

$$\alpha = 2\Phi + \Psi + \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \Psi + \frac{\pi}{2}.$$

Тогда минимизационная задача принимает вид

$$F\sin(\alpha+\beta) + \Theta(G\sin(\alpha) - H\sin(\beta)) \to \min_{\alpha,\beta,\theta},$$
$$-\theta_{max} \le \Theta \le \theta_{max}.$$

Легко видеть, что с точностью до обозначений она совпадает с задачей (9), а значит, и метод решения, предложенный в предыдущем пункте, также может быть без изменений и дополнений применен к ней.

Рассмотрим более детально приближенное решение (11). Запишем явные выражения для угла  $\gamma_0$  из предыдущего пункта с учетом переобозначений:

$$\sin \gamma_{0} = \frac{-G \operatorname{sign}(F)}{\sqrt{G^{2} + H^{2}}} = \frac{\frac{3\mu}{2r_{sat}^{5}}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_{s})r_{1}r_{3}(A - B)\operatorname{sign}((\mathbf{K}, \mathbf{r}_{s})(B - A))}{\left|\frac{3\mu}{2r_{sat}^{5}}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_{s})r_{1}r_{3}\right|\sqrt{(A - B)^{2} + (A + B - 2C)^{2}}} = \frac{-\operatorname{sign}(r_{3})|B - A|}{\sqrt{(A - B)^{2} + (A + B - 2C)^{2}}},$$

$$\cos \gamma_{0} = \frac{-H}{\sqrt{G^{2} + H^{2}}} = \frac{-\frac{3\mu}{2r_{sat}^{5}} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_{s}) r_{1} r_{3} (A + B - 2C)}{\left| \frac{3\mu}{2r_{sat}^{5}} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_{s}) r_{1} r_{3} \right| \sqrt{(A - B)^{2} + (A + B - 2C)^{2}}} = \frac{-\operatorname{sign}((\mathbf{K}, \mathbf{r}_{s}) r_{3}) (A + B - 2C)}{\sqrt{(A - B)^{2} + (A + B - 2C)^{2}}}.$$

Углы ориентации  $\Phi,\Psi$  однозначно выражаются через угол  $\gamma_0$  :

$$\Phi = \gamma_0 + \frac{2 - \operatorname{sign}((\mathbf{K}, \mathbf{r}_s)(B - A))}{2}, \ \Psi = -\gamma_0 - \pi.$$

Таким образом, ориентация КА относительно ОССК может принимать лишь конечное число значений, которые определяются знаками проекций  $r_3 = (\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_s)$  и  $(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s)$ , а также компонентами тензора инерции аппарата. Иными словами, в случае, когда знаки этих проекций не изменяются по ходу движения, КА будет неподвижен в ОССК.

Получим явные выражения для угловой скорости ОССК. Согласно определению ее базисные оси могут быть записаны в виде

$$\mathbf{e}_{1} = \frac{\mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_{s} \left(\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_{s}\right)}{\left|\mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_{s} \left(\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_{s}\right)\right|}, \quad \mathbf{e}_{3} = \mathbf{r}_{s}, \quad \mathbf{e}_{2} = \mathbf{e}_{3} \times \mathbf{e}_{1}.$$

Компоненты угловой скорости этой СК могут быть найдены при помощи уравнений Пуассона:

$$\dot{\mathbf{D}}_{YZ} = -[\boldsymbol{\omega}_0^Z]_{\times} \mathbf{D}_{YZ},$$

где  $\mathbf{D}_{YZ}$  – матрица перехода из ИСК в ОССК,  $\mathbf{\omega}_0^Z$  – вектор угловой скорости ОССК, записанный в проекциях на ее оси, а также введено обозначение для кососимметрической матрицы векторного произведения

$$[\mathbf{a}]_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражения для компонент угловой скорости записываются в виде

$$\mathbf{\omega}_0^Z = \begin{pmatrix} (\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2) & -(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_2) & (\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1) \end{pmatrix}^T.$$

Вектор направления на Солнце делает один полный оборот за год, поэтому его изменением можно пренебречь, т.е.  $\dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{0}$ . Производная первого базисного вектора тогда

$$\dot{\mathbf{e}}_{1} = \frac{\mathbf{v}_{sat} - \mathbf{r}_{s} \left(\mathbf{v}_{sat}, \mathbf{r}_{s}\right) - \mathbf{e}_{1} \left(\mathbf{v}_{sat} - \mathbf{r}_{s} \left(\mathbf{v}_{sat}, \mathbf{r}_{s}\right), \mathbf{e}_{1}\right)}{\left|\mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_{s} \left(\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_{s}\right)\right|} = \frac{\mathbf{e}_{2} \left(\mathbf{e}_{2}, \mathbf{v}_{sat}\right)}{\left|\mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{r}_{s}\right|}.$$

Здесь мы учли, что

$$\mathbf{v}_{sat} = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_{sat}) + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_{sat}) + \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_{sat}), \quad (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0.$$

Таким образом, выражение для угловой скорости принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}_0^Z = \left( \frac{\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_{sat})}{|\mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{r}_s|} \quad 0 \quad 0 \right)^T.$$

Легко видеть, что в случае, когда  $\mathbf{r}_{sat}$  и  $\mathbf{r}_{s}$  коллинеарны, угловая скорость ОССК получается неограниченной. Это должно быть учтено при построении требуемой ориентации и требуемой угловой скорости КА на этапе разгрузки вблизи перицентра. При достаточно малых  $|\mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{r}_{s}|$  разгрузку при помощи гравитационного момента проводить становится нецелесообразно, т.к. требуется довольно большая угловая скорость аппарата и у маховиков может не хватить запаса кинетического момента для ее обеспечения. Отметим также, что из-за вращения вектора направления на Солнце такие этапы будут достаточно кратковременны и не будут превышать нескольких витков КА, а в случае когда перицентр находится на достаточном удалении от плоскости эклиптики, и вовсе отсутствовать.

# 4. Построение управления

Для построения алгоритма управления будем использовать хорошо зарекомендовавший себя прямой метод Ляпунова [10–12], обеспечивающий асимптотическую устойчивость опорного (требуемого) углового движения, а значит, и его устойчивость к малым внешним возмущениям, которые не учитываются в контуре управления.

Выпишем уравнения углового движения КА

$$\mathbf{J}^{x}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{x} + \boldsymbol{\omega}^{x} \times \mathbf{J}^{x}\boldsymbol{\omega}^{x} = \mathbf{M}_{ctrl}^{x} + \mathbf{M}_{ext}^{x},$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{yx} = -[\boldsymbol{\omega}^{x}]_{x}\mathbf{D}_{yx},$$
(15)

где  $\mathbf{J}^x$  — матрица тензора инерции,  $\mathbf{\omega}^x$  — угловая скорость аппарата,  $\mathbf{M}_{ext}^x$ ,  $\mathbf{M}_{ctrl}^x$  — внешние и управляющие моменты соответственно,  $\mathbf{D}_{yx}$  — матрица перехода из ИСК в ССК. Пусть опорное угловое движение задается при помощи матрицы направляющих косинусов  $\mathbf{D}_{yR}$ , описывающей переход из ИСК в Опорную Систему Координат (ОСК, в дальнейшем векторы, заданные в этой СК, помечаются верхним индексом R), и опорной угловой скоростью  $\mathbf{\omega}_{ref}^R$ , причем выполнены кинематические уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{D}}_{YR} = -[\boldsymbol{\omega}_{ref}^R]_{\times} \mathbf{D}_{YR}. \tag{16}$$

Задачей алгоритма управления ориентацией является обеспечение такого режима углового движения, что ОСК и ССК совпадают.

Рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2} \left( \mathbf{\omega}_{rel}^{x}, \mathbf{J}^{x} \mathbf{\omega}_{rel}^{x} \right) + k_{a} \left( 3 - \text{tr} \mathbf{D}_{Rx} \right), \ k_{a} = \text{const} > 0, \tag{17}$$

где  $\mathbf{D}_{Rx} = \mathbf{D}_{Yx} \mathbf{D}_{YR}^T$  — матрица перехода из ОСК в ССК,  $\mathbf{\omega}_{rel}^x = \mathbf{\omega}^x - \mathbf{D}_{Rx} \mathbf{\omega}_{ref}^R$  — относительная угловая скорость, tr — операция взятия следа матрицы. Производная функции V в силу уравнений (15) и (16) тогда

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\omega}_{rel}^{x}, \mathbf{J}^{x} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{x} \right) - k_{a} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{D}}_{Rx} = \left( \boldsymbol{\omega}_{rel}^{x}, \mathbf{J}^{x} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{x} + \mathbf{J} \left[ \boldsymbol{\omega}_{rel}^{x} \right]_{x} \mathbf{D}_{Rx} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{R} - \mathbf{J}^{x} \mathbf{D}_{Rx} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}^{R} + k_{a} \mathbf{S} \right),$$

где  $\mathbf{S} = (d_{23} - d_{32} \quad d_{31} - d_{13} \quad d_{12} - d_{21}), \quad d_{ij}$  — компоненты матрицы  $\mathbf{D}_{Rx}$ . Если потребовать

$$\mathbf{J}^{x}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{x} + \mathbf{J} \left[\boldsymbol{\omega}_{rel}^{x}\right]_{x}^{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{Rx} \boldsymbol{\omega}_{ref}^{R} - \mathbf{J} \mathbf{D}_{Rx} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}^{R} + k_{a} \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel}^{x}, \ k_{\omega} = \text{const} > 0,$$

то  $\dot{V} \leq 0$ . Выражение для управляющих моментов в этом случае записывается в виде

$$\mathbf{M}_{ctrl}^{x} = -\mathbf{M}_{ext}^{x} + \mathbf{\omega}^{x} \times \mathbf{J}^{x} \mathbf{\omega}^{x} - \mathbf{J}^{x} \left[ \mathbf{\omega}_{rel}^{x} \right]_{x}^{x} \mathbf{D}_{Rx} \mathbf{\omega}_{ref}^{R} + \mathbf{J} \mathbf{D}_{Rx} \dot{\mathbf{\omega}}_{ref}^{R} - k_{a} \mathbf{S} - k_{\omega} \mathbf{\omega}_{rel}^{x}.$$
(18)

Покажем, что такое управление обеспечивает асимптотическую устойчивость опорного движения практически на всем пространстве начальных условий. Для этого мы воспользуемся теоремой Барбашина-Красовского [13], согласно которой для доказательства асимптотической устойчивости достаточно показать существование положительно определенной функции Ляпунова, производная которой по времени в силу уравнений движения неположительна, а в нуль обращается на множестве, не содержащем ни одной целой траектории, кроме исследуемого положения равновесия.

Первая часть теоремы с очевидностью выполняется, т.к. функция (17) является положительно определенной. Как уже было показано, производная этой функции по времени в силу уравнений движения неотрицательна. Рассмотрим множество  $M = \left\{ (\mathbf{D}_{Rx}, \mathbf{\omega}_{rel}) : \dot{V} = 0 \right\}$ , которому соответствуют значения  $\mathbf{\omega}_{rel}^x \equiv \mathbf{0}$ . Уравнения движения после подстановки в них (18) записываются в виде

$$\mathbf{J}^{x}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}^{x} + k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel}^{x} + k_{a}\mathbf{S} = \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{Rx} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}^{x}]_{x}\mathbf{D}_{Rx}.$$

Учтем, что мы ищем целые траектории только на множестве M . Легко видеть, что такими целыми траекториями будут

$$S \equiv 0$$
,  $\omega_{rel}^x \equiv 0$ .

 $\mathbf{S} \equiv \mathbf{0}$  соответствует либо требуемой ориентации, либо отличной от требуемой на поворот вокруг произвольной оси на угол  $\pi$ . Таким образом, в системе будет несколько положений равновесия, при этом положение относительного равновесия  $\mathbf{D}_{Rx} \equiv \mathbf{E}_3$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{rel}^x \equiv \mathbf{0}$  будет глобально (за исключением остальных положений равновесия) асимптотически устойчиво, остальные же положения равновесия будут неустойчивы. Отметим также, что детальное исследование точности ориентации и стабилизации, которые обеспечивает рассмотренный алгоритм, проведено в работе [14].

Как уже говорилось ранее, мы разбиваем угловое движение на два этапа: вблизи от перицентра, где превалирует гравитационный момент, и вдали от перицентра. Рассмотрим более детально выражения для  $\mathbf{D}_{yR}$  и  $\mathbf{\omega}_{ref}^R$ , которые требуются для построения управления, на каждом из этих этапов.

В случае разгрузки маховиков при помощи солнечного момента кинетический момент аппарата меняется довольно медленно, так же как и вектор направления на Солнце. Это означает, что и изменение оптимальной ориентации КА будет мало. Таким образом, на этапе движения КА вдали от перицентра режим углового движения будет мало отличаться от инерциальной стабилизации. При этом опорное движение записывается в виде

$$\mathbf{D}_{yR} = \mathbf{D}_{yx} \mathbf{D}_{zy} \mathbf{D}_{yz}, \quad \boldsymbol{\omega}_{ref}^{R} \equiv \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{D}_{yz}$  — матрица перехода из ИСК в СолСК,  $\mathbf{D}_{zy}$  — матрица перехода, отвечающая углам Эйлера, найденным в ходе решения минимизационной задачи (9),  $\mathbf{D}_{yz}$  — постоянная матрица, отвечающая за переход из СПСК в ССК. При этом на малых отрезках времени матрицу  $\mathbf{D}_{yR}$  можно считать постоянной и обновлять ее значение лишь раз в несколько часов.

На этапе движения вблизи перицентра предположение о малости угловой скорости работать уже перестает, т.к. сама матрица перехода из ИСК в ОССК довольно быстро меняется. Из-за того что требуемая ориентация вычисляется в ходе решения кубического уравнения, нахождение явных выражений для угловой скорости и углового ускорения затруднено, поэтому в настоящей работе предлагается вычислять их численно с использованием (16). Выражение для матрицы перехода из ИСК в ОСК при этом

$$\mathbf{D}_{YR} = \mathbf{D}_{Zx} \mathbf{D}_{YZ},$$

где  $\mathbf{D}_{yz}$  — матрица перехода из ИСК в ОССК,  $\mathbf{D}_{zx}$  — матрица перехода, соответствующая углам Эйлера, найденным в ходе решения минимизационной задачи (13).

# 5. Численное моделирование

Для демонстрации работы предложенных алгоритмов построения опорного углового движения и его реализации было проведено моделирование движений КА со следующими параметрами и предположениями:

- КА движется по высокоэллиптической кеплеровой орбите с наклонением 60°, перицентром 9 000 км и апоцентром 150 000 км, длительность одного витка 62.7 ч.
- Тензор инерции КА  $\mathbf{J}^x = \text{diag}(150,120,200) \, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .
- Суммарная площадь солнечных панелей 3 м<sup>2</sup>.
- $\mathbf{R}_{1}^{x} = (0 \quad 0.75 \quad 0.15)^{T} \text{ M}, \ \mathbf{R}_{2}^{x} = (0 \quad -0.85 \quad 0.15)^{T} \text{ M}.$
- $\mathbf{n}_{1}^{x} = (0.075 \quad 0.075 \quad 0.996)^{T}, \mathbf{n}_{2}^{x} = (-0.075 \quad -0.075 \quad 0.996)^{T}.$
- Коэффициент отражения  $\alpha = 0.1$ , коэффициент зеркальности  $\mu = 0.5$  .
- Земля вращается вокруг Солнца с постоянной угловой скоростью, изменением вектора направления на Солнце при движении КА по орбите пренебрегаем, т.е. вектор направления на Солнце вращается с постоянной угловой скоростью в ИСК.
- $\theta_{max} = 10^{\circ}$ .
- Начальная ориентация  $\mathbf{D}_{Yx} = \mathbf{E}_3$ , начальная угловая скорость  $\mathbf{\omega}^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ .
- Максимальный управляющий момент 0.01 Н · м.
- Начальное значение накопленного маховиками кинетического момента  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}$ .
- На участках вдали от перицентра ориентация пересчитывается каждые 40 000 с.

При построении опорного движения использовались представленные выше упрощенные уравнения для солнечного момента (4), а границей смены режима являлось расстояние между спутником и центром Земли в 15 000 км. В ходе интегрирования уравнений движения использовалась более точная модель солнечного момента (1), а гравитационный момент всегда действовал на КА. На рисунках 3-8 представлены результаты работы алгоритма, при котором использовалось точное решение минимизационных задач (9) и (13).

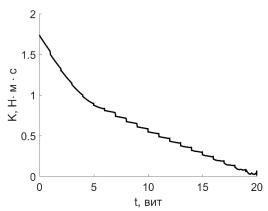


Рис. 3. Полный кинетический момент

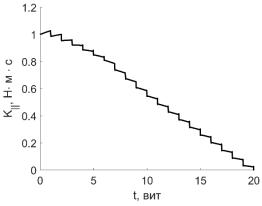


Рис. 5. Проекция кинетического момента на направление на Солнце

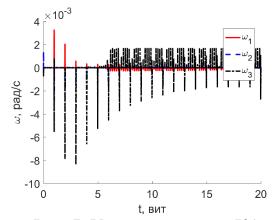


Рис. 7. Угловая скорость КА

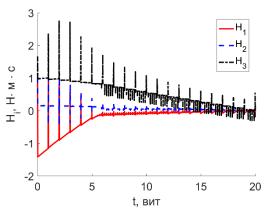


Рис. 4. Кинетический момент маховиков

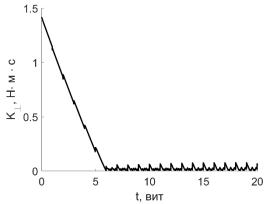


Рис. 6. Кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце

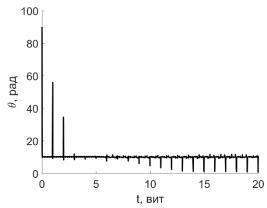


Рис. 8. Угол между средней нормалью и направлением на Солнце

Скачки в значении кинетического момента маховиков на рис. 4 обусловлены тем, что КА должен быстро переориентироваться при движении вблизи перицентра. Начиная с шестого витка также появляются скачки и при движении вдали от перицентра, что связано с тем, что кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце, практически полностью разгружен и каждый раз при обновлении ориентации оптимальное ее значение существенно

отличается от предыдущего. Этим же обусловлены и резкие изменения в угловой скорости КА. Довольно большой угол между средней нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце вызван также большой разницей в значении оптимальной ориентации при движении вдали от перицентра и вблизи от него, однако промежутки времени, на которых этот угол значителен, кратковременны и не будут оказывать существенного влияния на энергетику КА.

Для рисунках 9-14 результаты сравнения на представлены моделирования, в которых при построении опорного движения использовались не точные решения минимизационных задач, а лишь их приближение (11).

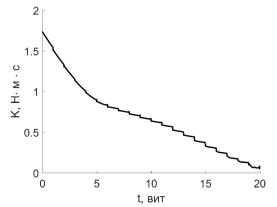
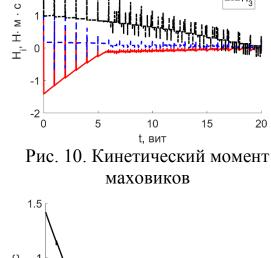


Рис. 9. Полный кинетический момент



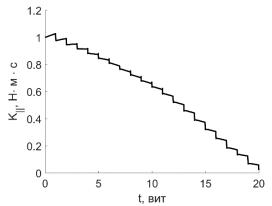
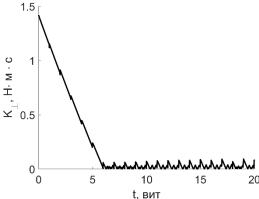
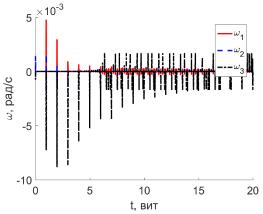


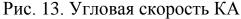
Рис. 11. Проекция кинетического момента на направление на Солнце



20

Рис. 12. Кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце





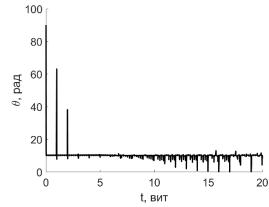


Рис. 14. Угол между средней нормалью и направлением на Солнце

Легко видеть, что поведение кинетического момента мало отличается от случая с точным решением минимизационных задач.

#### Заключение

В настоящей работе рассмотрена задача бестопливной разгрузки маховичной системы ориентации аппарата, движущегося по высокоэллиптической орбите и находящегося в режиме солнечной ориентации. Для ее решения было предложено использовать моменты внешних сил, действующих на аппарат, а именно гравитационный момент и момент сил давления солнечного излучения.

Для спутника с двумя идентичными солнечными панелями в предположении малой разницы между нормалями к солнечным панелям и при малом отклонении средней нормали от направления на Солнце была получена упрощенная модель для момента сил давления солнечного излучения, которая в дальнейшем использовалась для поиска ориентации КА, обеспечивающей наибольшую скорость разгрузки избыточного кинетического момента маховиков.

Было показано, что как для упрощенной модели момента сил давления солнечного излучения, так и для гравитационного момента всегда существует ориентация КА, обеспечивающая как разгрузку маховиков, так и малое отклонение средней нормали от направления на Солнце.

Полученные результаты были протестированы на модельном примере. Как показало моделирование, не наблюдается существенной разницы в работе алгоритма при использовании точного решения минимизационных задач или при использовании лишь приближенного решения. Учитывая простой вид приближенного решения, целесообразным является использовать именно его.

# Благодарности

Авторы выражают благодарность А.А. Петруковичу за плодотворное участие в обсуждениях постановки задачи, а также М.Ю. Овчинникову за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект №14-11-00621)

#### Список литературы

- 1. Jung D., Tsiotras P. An Experimental Comparison of CMG Steering Control Laws // Collect. Tech. Pap. Astrodyn. Spec. Conf. 2004. Vol. 2. P. 1128–1144.
- 2. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка остаточных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2009. № 65. 35 с.
- 3. Богачев А.В. и др. Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. С. 132–139.
- 4. Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. Безрасходная разгрузка накопленного кинетического момента инерционных исполнительных органов автономного космического аппарата на высокоэллиптической орбите // Инженерный журнал наука и инновации. 2013. № 10.
- 5. Tregouet J.F. et al. Reaction wheels desaturation using magnetorquers and static input allocation // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2015. Vol. 23, № 2. P. 525–539.
- 6. Giulietti F., Quarta A.A., Tortora P. Optimal control laws for momentum-wheel desaturation using magnetorquers // J. Guid. Control. Dyn. 2006. Vol. 29, № 6. P. 1464.
- 7. Cluster II [Electronic resource]. URL: http://m.esa.int/Our\_Activities/Operations/Cluster\_II\_operations.
- 8. Magnetospheric Multiscale [Electronic resource]. URL: https://mms.gsfc.nasa.gov/.
- 9. Fliegel H.F., Gallini T.E., Swift E.R. Global Positioning System Radiation Force Model for geodetic applications // J. Geophys. Res. 1992. Vol. 97, № B1. P. 559.
- 10. Tsiotras P. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. 1994. P. 316–321.
- 11. Wie B., Barba P.M. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. // J. Guid. Control. Dyn. 1985. Vol. 8, № 3. P. 360–365.
- 12. Wie B., Lu J. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints // J. Guid. Control. Dyn. 1995. Vol. 18, № 6. P. 1372–1379.
- 13. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
- 14. Mashtakov Y.V., Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S. Study of the disturbances effect on small satellite route tracking accuracy // Acta Astronaut. 2016. Vol. 129. P. 22–31.

# Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	
2. Солнечный момент	5
3. Построение опорного движения	7
3.1 Используемые системы координат	8
3.2 Разгрузка при помощи солнечного момента	9
3.3 Разгрузка при помощи гравитационного момента	13
4. Построение управления	17
5. Численное моделирование	20
Заключение	23
Благодарности	24
Список литературы	25
Приложение	27
Поиск решений во внутренней области	29
Поиск решений на границе допустимой области	

# Приложение

Будем рассматривать следующую минимизационную задачу

$$f \sin(\varphi + \psi) + \theta(g \sin(\varphi) - h \sin(\psi)) \to \min_{\psi, \theta, \varphi},$$

$$-\theta_{max} \le \theta \le \theta_{max}.$$
(19)

Метод поиска минимума существенно будет зависеть от параметров f,g,h, поэтому начинать решение поставленной задачи следует с некоторых частных случаев. Все они разобраны в таблице 1, где представлены результаты как по значению переменных, так и по величине искомого функционала.

Нерассмотренными остались два случая. Первый из них тривиален: когда все параметры нулевые — функционал обращается в тождественный нуль. Приступим теперь к рассмотрению случая, когда все представленные параметры ненулевые.

Прежде чем заняться поиском точного решения, отметим, что можно всегда выбрать значения переменных таким образом, чтобы в рамках используемой модели происходила разгрузка маховиков. В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$\varphi + \psi = -\operatorname{sign}(f)\frac{\pi}{2}.$$

Тогда функционал принимает вид

$$-|f| + \theta\left(-g\operatorname{sign}(f)\cos(\psi) - h\sin(\psi)\right) = -|f| + \theta\sqrt{g^2 + h^2}\sin(\psi + \gamma_0),$$
  
$$\sin(\gamma_0) = \frac{-g\operatorname{sign}(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \cos(\gamma_0) = \frac{-h}{\sqrt{g^2 + h^2}}.$$

Следовательно, при

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \gamma_0, \quad \theta = \theta_{max}, \quad \varphi = \left(1 - \text{sign}(f)\right) \frac{\pi}{2} + \gamma_0 \tag{20}$$

функционал принимает значение

$$-|f|-\theta_{max}\sqrt{g^2+h^2}.$$

Это значение, безусловно, не является оптимальным, однако показывает, что всегда можно подобрать ориентацию таким образом, чтобы минимизируемая функция была отрицательна.

Таблица 1. Решение при различных вариантах параметров

Величины параметров	$oldsymbol{arphi}_{opt}$	$ heta_{\scriptscriptstyle opt}$	$\psi_{opt}$	Значение функционал а
$f = 0, g = 0, h \neq 0$	произвольно	$ heta_{ extit{max}}$	$sign(h)\frac{\pi}{2}$	$- heta_{ extit{max}}ig  hig $
	произвольно	$- heta_{max}$	$-\operatorname{sign}(h)\frac{\pi}{2}$	$- heta_{max}ig hig $
$f = 0, g \neq 0, h = 0$	$-\operatorname{sign}(g)\frac{\pi}{2}$	$ heta_{ extit{max}}$	произвольно	$- heta_{max} g $
	$\operatorname{sign}(g)\frac{\pi}{2}$	$- heta_{ extit{max}}$	произвольно	$- heta_{max} g $
$f = 0, g \neq 0, h \neq 0$	$-\operatorname{sign}(g)\frac{\pi}{2}$	$ heta_{ extit{max}}$	$\operatorname{sign}(h)\frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max}( g + h )$
	$sign(g)\frac{\pi}{2}$	$- heta_{ extit{max}}$	$-\operatorname{sign}(h)\frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max}( g + h )$
$f \neq 0, g = 0, h = 0$	произвольно	произвольно	$-\mathrm{sign}(f)\frac{\pi}{2}-\varphi_{e}$	- f
$f \neq 0, g = 0, h \neq 0$	$-\mathrm{sign}(f)\frac{\pi}{2}-\psi$	fopt $ heta_{max}$	$\operatorname{sign}(h)\frac{\pi}{2}$	$- f - heta_{max} h $
	$-\mathrm{sign}(f)\frac{\pi}{2}-\psi$	fopt $- heta_{max}$	$-\operatorname{sign}(h)\frac{\pi}{2}$	$- f - heta_{max} h $
$f \neq 0, g \neq 0, h = 0$	$-\operatorname{sign}(g)\frac{\pi}{2}$	$ heta_{ extit{max}}$	$-\operatorname{sign}(f)\frac{\pi}{2}-\varphi_{0}$	$\int_{\mathbb{R}^{pt}}  f  -  heta_{max}  g $
	$\operatorname{sign}(g)\frac{\pi}{2}$	$- heta_{max}$	$-\operatorname{sign}(f)\frac{\pi}{2}-\varphi_{0}$	$\int \int $

# Поиск решений во внутренней области

Будем искать решение внутри допустимой области, т.е.  $|\theta| < \theta_{max}$ . Тогда

$$\lambda_{1} = \lambda_{2} = 0,$$

$$g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) = 0,$$

$$f \cos(\varphi + \psi) + \theta g \cos(\varphi) = 0,$$

$$f \cos(\varphi + \psi) - \theta h \cos(\psi) = 0.$$
(21)

Пусть  $\theta = 0$ . Тогда

$$\cos(\varphi + \psi) = 0,$$
  
 $g\sin(\varphi) - h\sin(\psi) = 0.$ 

Соответствующее решение принимает вид:

$$\psi = \pi n - \gamma_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi (\mathbf{k} - \mathbf{n}) + \gamma_0, \quad \sin(\gamma_0) = \frac{g(-1)^k}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \cos(\gamma_0) = \frac{-h}{\sqrt{g^2 + h^2}},$$

где  $k,n\in\mathbb{Z}$ . Отметим, что в рассматриваемом случае функционал (19) будет зависеть лишь от суммы  $\psi$  и  $\varphi$ , а его минимум будет достигаться при  $\psi+\varphi=-\mathrm{sign}(f)\frac{\pi}{2}$  и будет равен -|f|.

Пусть теперь  $\theta \neq 0$ . Тогда следствием системы (21) будут уравнения

$$g\sin(\varphi) - h\sin(\psi) = 0,$$
  
$$g\cos(\varphi) + h\cos(\psi) = 0.$$

Возводя каждое из них в квадрат и складывая, получаем

$$g^2 + h^2 + 2gh\cos(\varphi + \psi) = 0.$$

Помимо этого, умножим второе уравнение на  $\sin(\varphi)$ , первое – на  $-\cos(\varphi)$  и сложим:

$$\sin(\varphi+\psi)=0.$$

Отсюда следует, что решение будет возможно лишь при |g| = |h|. В этом случае можно получить следующие следствия:

$$\varphi + \psi = \begin{cases} \pi + 2\pi k, & \text{при } g = h \\ 2\pi k, & \text{при } g = -h \end{cases}$$

Этого уже достаточно, чтобы показать, что значение функционала на решении будет равно нулю, что заведомо не лучше значения функционала при выборе

параметров (20). Таким образом, внутри области допустимых значений нет глобально оптимального решения, а есть только локальные минимумы.

# Поиск решений на границе допустимой области

Рассмотрим случай, когда решение находится на границе допустимой области, т.е.  $|\theta| = \theta_{max}$ . Система уравнений для поиска минимума переписывается в виде

$$\lambda_{2} = 0,$$

$$g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) - \lambda_{1} = 0,$$

$$f \cos(\varphi + \psi) + \theta^{*} g \cos(\varphi) = 0,$$

$$f \cos(\varphi + \psi) - \theta^{*} h \cos(\psi) = 0,$$
(22)

где  $\theta^* = \theta_{max}$  или  $\theta^* = -\theta_{max}$ . Следовательно,

$$\cos(\varphi) = -\frac{h}{g}\cos(\psi), \quad \sin(\varphi) = \pm\sqrt{1 - \frac{h^2}{g^2}\cos^2(\psi)}.$$

Раскроем косинус суммы углов в третьем уравнении и используем полученные выражения:

$$f\left(-\frac{h}{g}\cos^2(\psi)\mp\sin(\psi)\sqrt{1-\frac{h^2}{g^2}\cos^2(\psi)}\right)=\theta^*h\cos(\psi).$$

Перенесем первое слагаемое в правую часть и возведем обе части в квадрат. После несложных выкладок итоговое уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\cos^{3}(\psi) + \frac{1}{2}\cos^{2}(\psi) \left( \frac{g\theta^{*}}{f} + \frac{f}{g\theta^{*}} + \frac{fg}{h^{2}\theta^{*}} \right) - \frac{fg}{2h^{2}\theta^{*}} = 0.$$
 (23)

Решение этого уравнения довольно громоздко, хотя и может быть найдено в явном виде с использованием формулы Кардано.

Покажем, что у этого кубического уравнения относительно косинуса всегда будет по крайней мере одно решение, по модулю не превышающее единицы. Введем обозначения

$$\beta = \frac{fg}{2h^2\theta^*}, \quad \alpha = \frac{fg}{h^2\theta^*} \left( \left( \frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} + 1 \right), \quad x = \cos(\psi).$$

Тогда это уравнение переписывается в виде

$$q(x) = \beta$$
,  $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}\alpha x^2$ .

График q(x) для некоторых значений  $\alpha$  приведен на рисунке 15.

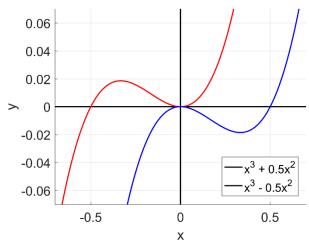


Рис. 15. График функции при различных значениях параметра

Осталось показать, что  $\beta$  принадлежит области значений функции q(x) на отрезке [-1,1]. Рассмотрим случай  $\alpha > 0$ . Тогда у q(x) будет две точки экстремума

$$q(0)=0$$
,  $q\left(-\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{1}{54}\alpha^3$ .

При этом x=0 является точкой локального минимума, а  $x=-3^{-1}\alpha$  — точкой локального максимума. Очевидно, что область значений q(x) будет представлять собой

$$\lim_{-1 \le x \le 1} q(x) = \begin{cases}
\left[ \min\left(0, -1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right), \max\left(\frac{1}{54}\alpha^3, -1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right)\right], & 0 < \alpha \le 3 \\
\left[ \min\left(0, -1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right), \max\left(-1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right)\right], & \alpha \ge 3
\end{cases}$$

Легко видеть, что это выражение упрощается и приводится к виду

$$\lim_{-1 \le x \le 1} q(x) = \left[ \min \left( -1 + \frac{1}{2} \alpha, 0 \right), 1 + \frac{1}{2} \alpha \right], \quad \alpha > 0.$$

Аналогичные рассуждения для случая  $\alpha$  < 0 приводят к

$$\lim_{-1 \le x \le 1} q(x) = \left[ -1 + \frac{1}{2}\alpha, \max\left(1 + \frac{1}{2}\alpha, 0\right) \right], \quad \alpha < 0.$$

Учтем, что  $\alpha$  и  $\beta$  одного и того же знака, и помимо этого их связывает соотношение

$$\alpha = 2\beta \left( 1 + \left( \frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} \right).$$

Следовательно, достаточно лишь проверить

$$\beta \leq \beta \left( 1 + \left( \frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} \right) + 1, \ \beta \geq 0,$$
$$\beta \geq \beta \left( 1 + \left( \frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} \right) - 1, \ \beta < 0,$$

которые с очевидностью выполняются. Таким образом, мы показали, что у исходного кубического уравнения относительно  $\cos(\psi)$  всегда будет действительное решение, не превышающее единицы.

Отметим также, что каждому действительному решению кубического уравнения, не превышающему по модулю единицы, соответствуют четыре решения (по модулю  $2\pi$ ) исходной системы (22), каждое из которых является точкой экстремума минимизируемой функции (19). Помимо этого, минимизируемая функция обладает симметрией, а именно: при одновременной замене  $\theta$  на  $-\theta$  и сдвиге  $\varphi, \psi$  на угол  $\pi$  значение этой функции не изменится, а значит, достаточно найти ее минимум лишь для  $\theta = \theta_{max}$ .