



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 79 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А.

О порядке точности
рёберно-ориентированных
схем на сетках
специального вида

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А. О порядке точности рёберно-ориентированных схем на сетках специального вида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 79. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-79](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-79)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-79>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

П. А. Бахвалов

**О порядке точности
рёберно-ориентированных схем
на сетках специального вида**

Москва — 2017

Бахвалов П. А.

О порядке точности рёберно-ориентированных схем на сетках специального вида

Метод нестационарного корректора, предложенный автором ранее, применяется для изучения точности рёберно-ориентированных схем на примере уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Доказывается второй порядок точности при блочном измельчении. Приводятся примеры последовательностей расчётных сеток с сохранением качества элементов, на которых порядок точности дробный. Для специального класса сеток доказывается, что порядок схемы EBR3 в норме L_∞ равен $5/4$ и что эта оценка неулучшаема.

Ключевые слова: рёберно-ориентированная схема, неструктурированная сетка, аппроксимация и точность, сверхсходимоссть

Pavel Alexeevich Bakhvalov

On the order of accuracy of edge-based schemes on meshes of a special type

Unsteady corrector method proposed earlier by the author is applied to estimate the accuracy of several edge-based schemes for the transport equation with constant velocity. Second order of accuracy on block refinement is proved. Fractional order of accuracy is obtained on meshes with constant element quality. For a special type of meshes we prove the $5/4$ order of accuracy in L_∞ norm for EBR3 scheme and demonstrate that this estimate can't be improved.

Key words: edge-based scheme, unstructured mesh, consistency and accuracy, supraconvergence

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-31-60072 мол-а-дк.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию точности рёберно-ориентированных схем на неструктурированных сетках на примере уравнения переноса. Рёберно-ориентированные схемы являются особым классом конечно-объёмных схем с определением переменных в сеточных узлах. В соответствии с конечно-объёмным подходом расчётная область разбивается на множество контрольных объёмов, сопоставленных узлам сетки. Общей границе двух контрольных объёмов ставится во взаимнооднозначное соответствие пересекающее её сеточное ребро. Особенность рёберно-ориентированных схем заключается в том, что численный поток аппроксимирует не интегральное среднее от потоковой функции по грани контрольного объёма, а значение потоковой функции в середине ребра. При использовании медианных контрольных объёмов такие схемы обладают точностью на линейной функции, поэтому при некоторых разумных ограничениях на расчётные сетки их аппроксимационная ошибка чаще всего имеет первый порядок малости по характерному шагу.

Прародителем большинства рёберно-ориентированных схем является схема Т. Barth, предложенная для решения уравнений Эйлера на треугольных сетках в [1]. Точнее, в [1] предложены две схемы, близкие по построению и обладающие схожими свойствами, и поэтому они обычно рассматриваются как одна схема. В ней для повышения точности вычисления потока в центре ребра используется реконструкция сеточной функции линейным полиномом, наклон которого определяется вычисляемым в сеточных узлах градиентом. Автор не дал названия этой схеме, говоря о ней как о противопотоковой схеме повышенного порядка точности (*higher order accurate upwind scheme*). В [2] эта схема называлась линейной схемой Галёркина, а в [3] – вершинно-центрированной конечно-объёмной схемой. Для простоты мы будем называть её «линейной».

Теоретический анализ порядка точности «линейной» схемы нигде не проводился. Экспериментальная оценка порядка точности на последовательности сеток, как правило, даёт число, близкое к двум [3], [4]. Однако в обеих работах можно заметить, что численный порядок оказывается немного меньше двух. Этому факту на настоящий момент не было уделено должного внимания.

Метод коррекции потоков (*Flux correction, FC*) был предложен в работах [2], [3] и отличается от «линейной» схемы тем, что градиенты в узлах, используемые для определения потоков в центрах рёбер, вычисляются с повышенной точностью. В результате аппроксимация дивергенции потоков становится точной на квадратичных полиномах, и при ограничении на минимальный угол треугольника аппроксимационная ошибка имеет порядок $O(h^2)$. Метод коррекции потоков на практике показывает третий порядок точности на стационарных задачах, однако в нестационарном случае порядок равен двум. Для исправления

этого недостатка в [2], [3] было предложено использовать сложную аппроксимацию временной производной, однако это делает схему существенно более дорогой и приводит к потере консервативности. В [5] был предложен альтернативный способ повышения точности на стационарных задачах, названный нестационарным методом коррекции потоков (UFC), однако при этом точность на квадратичных полиномах была потеряна. Аппроксимационная ошибка схемы UFC, как и «линейной» схемы, на произвольной треугольной сетке при ограничении на минимальный угол имеет первый порядок малости по характерному шагу.

Другим классом рёберно-ориентированных разностных схем являются схемы с реконструкцией вдоль направления ребра (Edge-based reconstruction, EBR) [6]. В схеме EBR3 для вычисления потока в центре ребра ij , помимо значений в узлах i и j , используется значение, интерполированное на содержащую это ребро прямую. Впервые эта идея была предложена в иной интерпретации в 1987 году [7]. В [8] было предложено модифицировать эту схему таким образом, чтобы на равномерной декартовой сетки она обладала 5-м порядком аппроксимации. Этим же свойством обладает более простая схема SEBR5 [6], в которой используется не одно, а три дополнительных значения, интерполированных на продолжение ребра.

Все перечисленные схемы, улучшая качество расчёта по сравнению с «линейной» схемой, за исключением схемы FC, обладают общим недостатком: их порядок точности в многомерном случае ниже двух в максимальной и интегральной нормах. Правда, в численных экспериментах это проявляется только при достаточно сильном измельчении сетки.

В одномерном случае схема EBR3 была подробно исследована в [9] для стационарного уравнения переноса. Было доказано, что если отношение соседних шагов лежит в пределах $2/5 < h_i/h_{i+1} < 5/2$, то схема EBR3 обладает вторым порядком точности. Аналогичный результат имеет место и для остальных рассматриваемых в настоящей работе схем. Численные расчёты показывают, что второй порядок точности по максимальному шагу сетки в одномерном случае, во всяком случае для схемы EBR3, имеет место без каких бы то ни было ограничений на неравномерность сетки. Таким образом, падение их порядка точности ниже двух возможно только в размерности 2 и выше.

В [10] было проведено подробное исследование точности «линейной» схемы, схем EBR3, SEBR5 и UFC в двумерном случае на сетках специального вида. Было показано, что различные стратегии измельчения сеток приводят к различному порядку точности. Блочная стратегия измельчения (масштабирование сетки в целое число раз и регулярное заполнение расчётной области полученными неструктурированными блоками) обеспечивает второй порядок точности. При произвольном измельчении с сохранением качества сетки и, в

частности, на асимптотически структурированных сетках порядок точности оказывается ниже. Было показано, что этот эффект проявляется для всех рассмотренных схем, причём для разных схем падение точности оказывается разным. Объяснению этого эффекта и посвящена настоящая работа.

В [11] для исследования точности простейшей конечно-объёмной схемы для уравнения переноса был предложен метод геометрического корректора. Геометрический корректор представляет собой поправку к оператору проектирования решения на пространство сеточных функций, с учётом которой схема приобретает первый порядок аппроксимации. Для коэффициентов геометрического корректора было выписано уравнение, которое для простейшей конечно-объёмной схемы решалось маршевым методом. С помощью этой технологии было показано, что на асимптотически структурированных последовательностях сеток решение по простейшей конечно-объёмной схеме сходится к точному с первым порядком.

В [12] геометрическому корректору, предложенному в [11], была придана эволюция во времени. Это позволило рассмотреть с его помощью уравнение переноса с периодическими условиями и доказать первый порядок точности простейшей конечно-объёмной схемы при блочном измельчении. В [13] было введено понятие нестационарного корректора, обобщающее понятие геометрического корректора на схемы произвольного порядка точности. Показано, что этот метод позволяет устанавливать превосходство порядка точности схемы над её порядком аппроксимации и специфику поведения ошибки решения уравнения переноса при длительном счёте.

В настоящей работе с помощью метода нестационарного корректора изучаются рёберно-ориентированные схемы на примере уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Доказывается достаточное условие их второго порядка точности при блочном измельчении расчётной сетки. Также исследуется порядок точности на специальном классе «поперечных» сеток, однородных в направлении распространения волны и меняющихся только в поперечном направлении. Доказывается, что на таких сетках при ограничении на качество элементов схема EBR3 имеет порядок точности $5/4$, и приводятся соображения, объясняющие порядок $3/2$ для «линейной» схемы. Объясняется, почему на некоторых последовательностях поперечных сеток порядок схемы EBR3 оказывается равен $3/2$ или $7/4$.

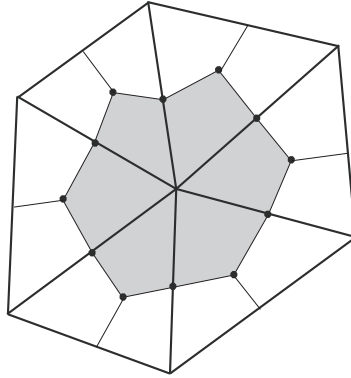


Рис. 1. Медианный контрольный объём

Схемы с определением переменных в узлах

Рассмотрим уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (1)$$

где \mathbf{a} – постоянный во времени и пространстве вектор. Пусть начальные условия $u(0, \mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r})$ заданы дважды дифференцируемой функцией с липшицевыми вторыми производными.

Пусть в пространстве задана треугольная сетка. Радиус-векторы узлов этой сетки обозначим через \mathbf{r}_j . Для построения рёберно-ориентированных схем разобьём пространство на множество контрольных объёмов, каждый из которых соответствует своему узлу. Способ построения контрольных объёмов существенно влияет на точность рёберно-ориентированных схем. Мы будем считать, что они строятся с использованием середин рёбер и центров масс ячеек, см. рис. 1. Такие объёмы называются медианными или барицентрическими. О построении трёхмерных медианных объёмов см. [14].

Пусть K_j – контрольный объём узла j , $v_j = |K_j|$ – его площадь. Контрольные объёмы могут быть невыпуклыми, и общие грани двух контрольных объёмов образуют ломаную. Определим

$$\mathbf{N}_{j,k} = \int_{\partial K_j \cap \partial K_k} \mathbf{n} dl, \quad j \neq k, \quad (2)$$

где \mathbf{n} – вектор единичной нормали, направленный внутрь ячейки K_k . Если узлы j и k не входят ни в один общий элемент, а также при $j = k$ положим $\mathbf{N}_{j,k} = 0$. $\mathbf{N}_{j,k}$ будем называть ориентированной площадью, ассоциированной с ребром (или диагональю) jk .

Пусть $N(j)$ – множество узлов, входящих с j в один общий элемент, исключая сам узел j . Обозначим $N^+(j) = \{k \in N(j) : \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} > 0\}$ и $N^-(j) = \{k \in N(j) : \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} \leq 0\}$.

В общем виде вершинно-центрированная конечно-объёмная схема для уравнения переноса (1) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{|K_j|} \sum_{k \in N(j)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} f_{jk}(u) = 0, \quad u = \{u_j\}, \quad (3)$$

где $f_{jk}(u) = f_{kj}(u)$ есть плотность потока функции u через общую границу двух контрольных объёмов. Определение $f_{jk}(u) = u_j$ при $k \in N^+(j)$ и $f_{jk}(u) = u_k$ при $k \in N^-(j)$ даёт простейшую конечно-объёмную схему с определением переменных в узлах.

Определение 1. Будем называть конечно-объёмную схему (3) рёберно-ориентированной, если потоки точны на линейной функции в центре ребра:

$$u(\mathbf{r}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{r} + b \quad \Rightarrow \quad f_{jk}(u) = \mathbf{L} \cdot \frac{\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_k}{2} + b = \frac{u_j + u_k}{2} \quad (4)$$

для всех узлов j, k .

Утверждение 1. При использовании медианных контрольных объёмов любая рёберно-ориентированная схема (3)–(4) точна на линейной функции на произвольной треугольной сетке.

Доказательство. В силу определения 1 точность на линейной функции достаточно установить для процедуры Грина-Гаусса вычисления производных в узлах:

$$[\nabla u]_j = \frac{1}{|K_j|} \sum_{k \in N(j)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} \frac{u_j + u_k}{2}. \quad (5)$$

Это было установлено для медианных объёмов на треугольных сетках в [1].

В настоящей работе мы будем рассматривать только линейные рёберно-ориентированные схемы в том смысле, что $f_{jk}(u)$ является линейной функцией u :

$$f_{jk}(u) = \sum_{m \in S_{jk}} F_{jk,m} u_m, \quad (6)$$

где S_{jk} – множество узлов, используемых для определения потока на ребре. Таким образом, мы исключаем из рассмотрения всевозможные способы монотонизации решения. В этом случае схему (3) можно записать в сокращённом полудискретном виде

$$\frac{du_j}{dt} + \sum_{k \in N(j)} L_{jk} u_k = 0. \quad (7)$$

Для простоты всюду далее будем говорить о решении полудискретного уравнения, подразумевая, что оно решается s -стадийным методом Рунге-Кутты s -го порядка на линейных задачах, где $s \geq 2$.

Во всех этих схемах, исследуемых в настоящей работе, потоки $f_{jk}(u) = f_{kj}(u)$, определяемые (6), аппроксимируются на шаблоне, скошенном против направления характеристики:

$$f_{jk}(u) = f_{kj}(u) = \begin{cases} \mathcal{R}_{jk}(u), & \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{jk} \geq 0; \\ \mathcal{R}_{kj}(u), & \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{jk} < 0. \end{cases} \quad (8)$$

«Линейная» схема. В «линейной» схеме [1] потоки в центрах рёбер определяются формулой

$$\mathcal{R}_{ij}^{\text{Lin}}(u) = u_i + \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{2} \cdot [\nabla u]_i, \quad (9)$$

где $[\nabla u]_i$ определено формулой Грина-Гаусса (5). Итого, «линейная» схема определяется формулами (3), (8), (9), (5).

Схемы EBR3 и SEBR5. В схеме EBR3 потоки определяются формулой

$$\mathcal{R}_{ij}^{\text{EBR3}}(u) = u_i + \frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{u_i - u_I}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_I|} + \frac{2}{3} \frac{u_j - u_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \right), \quad (10)$$

где точка I с радиус-вектором \mathbf{r}_I является пересечением прямой, проходящей через узлы i и j , и некоторого сеточного ребра, оба узла которого принадлежат $N(i)$. Значение u_I в ней определяется линейной интерполяцией по этим двум узлам. Итого, схема EBR3 определяется формулами (3), (8), (10).

Определение схемы SEBR5 дано в [6]. Поскольку оно достаточно громоздко и не будет в явном виде использоваться в настоящей работе, мы не будем его приводить здесь.

Метод коррекции потоков. Будем называть спектральным элементом 2-го порядка совокупность четырёх одинаковых (с точностью до отражения) треугольников, образующих один треугольник вдвое большего размера. Спектральный элемент 2-го порядка содержит 6 узлов, и по значениям в них на спектральном элементе однозначно строится квадратичный интерполяционный полином.

Предположим, что расчётная сетка представляет собой совокупность спектральных элементов. Определим градиент в узле как среднее между градиентами, посчитанными по всем спектральным элементам, в которые входит этот

узел:

$$[\nabla u]_i^{(SE)} = \frac{\sum_{E \ni i} [\nabla u]_{i,E} V_E}{\sum_{E \ni i} V_E}, \quad (11)$$

где E – спектральный элемент, V_E – его площадь, а $[\nabla u]_{i,E}$ – градиент от интерполяционного полинома, определённого на спектральном элементе E , в узле i . Нетрудно показать, что заменой спектральных элементов на сеточные элементы в (11) получается формула Грина-Гаусса (5).

Стационарный метод коррекции потоков отличается от «линейной» схемы только методом вычисления градиентов и определяется формулами (3), (8), (9), (11). Он обладает точностью на квадратичной функции, поэтому в настоящей работе подробно не рассматривается.

Нестационарный метод коррекции потоков [5] записывается в виде

$$\frac{du_i}{dt} + \sum_{j \in N(i)} u_{ij} \left[\frac{1}{|K_j|} \sum_{k \in N(j)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} f_{jk}(u) \right] = 0, \quad (12)$$

где коэффициенты матрицы U определяются равенством

$$u_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{24} \frac{v_i + v_j}{2v_i}, & j \in N(i) \setminus \{i\}, \\ 1 - \frac{1}{24} \sum_{j \in N(i)} \frac{v_i + v_j}{2v_i}, & j = i \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $v_m = |K_m|$.

Итого, нестационарный метод коррекции потоков (схема UFC) определяется формулами (12), (13), (8), (9), (11).

Метод нестационарного корректора

Для исследования точности рёберно-ориентированных схем будем пользоваться методом нестационарного корректора, описанным в [13].

Далее будем предполагать, что расчётная сетка является периодической по одному или двум направлениям. Обозначим множество узлов в пространстве через $M = M^0 \times B$, где M^0 – множество узлов в одном блоке, а B – множество блоков. Например, если сеточный блок является прямоугольником, то множество M^0 включает в себя все внутренние узлы блока, множество внутренних узлов одного ребра из каждой пары и один из четырёх угловых узлов блока.

Поскольку в настоящей работе рассматриваются схемы, точные на линейной функции, но не точные на квадратичной, будем пользоваться следующим определением.

Определение 2. Главным корректором называется набор величин $\alpha_j(t) = \{\alpha_j^{xx}(t), \alpha_j^{xy}(t), \alpha_j^{yy}(t)\}$, $j \in M$, определяемых системой уравнений

$$\frac{d\alpha_j(t)}{dt} + \sum_{k \in M^0} \hat{L}_{jk} \alpha_k(t) = \mathbf{f}_j^{(2)}, \quad \alpha_j(0) = 0. \quad (14)$$

Коэффициенты матрицы \hat{L} определяются равенством

$$\hat{L}_{jk} = \sum L_{jm}, \quad (15)$$

в котором сумма берётся по всем узлам $m \in N(j)$, совмещаемым с k при наложении блоков. Правая часть определяется равенством

$$\mathbf{f}_j^{(2)} = - \sum_{k \in N(j)} L_{jk} \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \otimes (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)}{2}, \quad (16)$$

где $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{xx} = a^x b^x$, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{xy} = a^x b^y + a^y b^x$, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{yy} = a^y b^y$.

Сформулируем утверждение, которое является частным случаем теоремы 1, доказанной в [13].

Утверждение 2. Обозначим через h максимальную длину сеточного ребра. Рассмотрим последовательность сеток в \mathbb{R}^2 с $h \rightarrow 0$. Пусть выполняются следующие условия.

1. Объёмы ячеек подчиняются условию $|K_j| \geq C_1 h^2$.
2. Число рёбер, инцидентных одному узлу, не превосходит C_2 .
3. Шаблон S_{jk} для определения потоков на рёбрах, входящий в формулу (6), конечен: $|S_{jk}| \leq C_3$.
4. Шаблон S_{jk} локализован в пространстве: $|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j| \leq C_4 h \quad \forall m \in S_{jk}$.
5. Коэффициенты, при помощи которых вычисляется поток, ограничены: $|F_{jk,m}| \leq C_5$.
6. Рассматриваемая схема является устойчивой.
7. Решение уравнения (14)–(16) имеет порядок $\|\alpha\| = O(h^{1+\delta})$, $0 \leq \delta \leq 1$. Тогда схема (7) имеет порядок точности $O(h^{1+\delta})$.

В следующем разделе мы применим метод нестационарного корректора для доказательства 2-го порядка точности рёберно-ориентированных схем при блочном измельчении, после чего перейдём к основному предмету настоящей работы – исследованию поведения рёберно-ориентированных схем на сетках специального вида.

Рёберно-ориентированные схемы при блочном измельчении

Утверждение 3. Рассмотрим линейную рёберно-ориентированную схему (3)–(4) для уравнения (1) с периодическими граничными условиями по всем направлениям. Пусть v – вектор, i -ая компонента которого равна объёму i -го контрольного объёма: $v = (v_0, \dots, v_{|N^0|-1})^T$. Пусть $\mathbf{f}^{(2)}$ определено равенством (16). Тогда $v^T \mathbf{f}^{(2)} = 0$.

Доказательство. Докажем только $v^T f^{xx} = 0$, равенство нулю остальных двух компонент доказывается аналогично. Запишем аппроксимацию (3) в виде

$$[\mathbf{a} \cdot \nabla u]_j = \frac{1}{v_j} \left(\sum_{k \in N(j)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} \sum_{m \in S_{jk}} F_{jk,m} u_m \right),$$

где коэффициенты F определены в (6). Тогда

$$-f_j^{xx} = \frac{1}{v_j} \sum_{k \in N(j)} L_{jk} \frac{(x_k - x_j)^2}{2} = \sum_{k \in N(j)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} \sum_{m \in S_{jk}} F_{jk,m} \frac{(x_m - x_j)^2}{2}.$$

Представим

$$\frac{(x_m - x_j)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(x_m - \frac{x_j + x_k}{2} \right)^2 + \left[\left(x_m - \frac{x_j + x_k}{2} \right) \frac{x_k - x_j}{2} + \frac{(x_k - x_j)^2}{8} \right].$$

Второе слагаемое в этом выражении является суммой константы и линейной функции от переменной x_m и равно $(x_k - x_j)^2/8$ при $x_m = (x_k + x_j)/2$. Поэтому по определению рёберно-ориентированной схемы (4) выполняется

$$\sum_{m \in S_{jk}} F_{jk,m} \left[\left(x_m - \frac{x_j + x_k}{2} \right) \frac{x_k - x_j}{2} + \frac{(x_k - x_j)^2}{8} \right] = \frac{(x_k - x_j)^2}{8}.$$

Таким образом,

$$-f_j^{xx} = \frac{1}{v_j} \sum_{k \in N(j)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} \left[\frac{(x_k - x_j)^2}{8} + \sum_{m \in S_{jk}} F_{jk,m} \frac{1}{2} \left(x_m - \frac{x_j + x_k}{2} \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Теперь домножим (17) на v_j и просуммируем по $j \in N^0$. Слева получим $-v^T f^{xx}$. Выражение в квадратных скобках в (17) симметрично относительно замены x_j на x_k . В общую сумму это слагаемое входит дважды, соответственно с весами $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{k,j} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k}$. Таким образом, $v^T f^{xx} = 0$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Рассмотрим рёберно-ориентированную схему (3)–(4) для уравнения (1) с периодическими граничными условиями по всем направлениям. Пусть выполняются следующие свойства.

1. Оператор \hat{L} имеет нулевое собственное значение кратности 1, соответствующее константному собственному вектору.
2. Схема (3) решается явным методом Рунге-Кутты 2-го порядка точности или выше.
3. Шаг по времени постоянен и таков, что все собственные значения матрицы $-\hat{L}$, кроме нулевого, лежат строго внутри области устойчивости. Тогда схема (3)–(4) обладает вторым порядком точности при блочном измельчении.

Доказательство. Рассмотрим уравнение для главного нестационарного корректора (14)–(16). По условию собственное значение $\lambda = 0$ оператора \hat{L} является простым. В силу консервативности схемы (3) выполняется условие $v^T \hat{L} = 0$, то есть v^T является левым собственным вектором оператора \hat{L} , соответствующим $\lambda = 0$. Согласно утверждению 3, $v^T \mathbf{f}^{(2)} = 0$. Поскольку все остальные собственные значения матрицы $-\hat{L}$ лежат строго внутри области устойчивости, главный корректор ограничен во времени.

Нетрудно видеть (см. [13]), что при блочном измельчении выполняется

$$\alpha(t, h) = \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \alpha \left(t \frac{h_0}{h}, h_0 \right).$$

Следовательно, при $h \rightarrow 0$ выполняется $\|\alpha\| = O(h^2)$. Поэтому, согласно утверждению 2, имеет место второй порядок сходимости численного решения по схеме (3)–(4) к точному. Утверждение доказано.

Замечание 1. В одномерном случае сужением понятия рёберно-ориентированных схем являются схемы с потоками, точными на линейной функции в полужелтых точках. Вероятно, для диссипативных схем этого класса при выполнении условий утверждения 4 выполняется $\|\alpha\| = O(h^2)$, и второй порядок точности имеет место при любом способе измельчения (не только при блочном). В [9] для схемы EBR3 была доказана соответствующая оценка величины корректора 2-го порядка, если отношение соседних шагов не превосходит $5/2$.

Замечание 2. Автору неизвестно доказательство устойчивости какой бы то ни было линейной (то есть не монотонизированной) рёберно-ориентированной схемы на неравномерной и неструктурированной сетке.

Поперечные сетки

Перейдём к основной теме настоящей работы – исследованию точности схем на нерегулярных сетках специальной структуры. Рассмотрим класс сеток, которые далее будем называть **поперечными**, построенных следующим образом. Проведём семейство параллельных прямых вида $y = nh_y$, $n \in \mathbb{Z}$. На каждой из этих линий отметим узлы с равномерным шагом h_x . Далее при необходимости узлы сетки будем нумеровать двумя индексами: первый – номер узла на прямой, второй – номер прямой, но также будем использовать и общую одноиндексную нумерацию.

Пусть узел $A_{m,n}$ имеет координаты $mh_x + \Delta_n, nh_y$. Соединим узлы рёбрами $A_{m,n}A_{m+1,n}$, $A_{m,n}A_{m,n+1}$ и $A_{m,n}A_{m-1,n+1}$. Пусть для определённости $\Delta_0 = 0$. При $\Delta_n = n\Delta_1$ сетка является **трансляционно-симметрической (ТС)**, то есть инвариантной относительно трансляции на величину любого своего ребра. Причём при $\Delta_n = 0$ или $\Delta_n = nh_x$ получается сетка из прямоугольных треугольников, а при $\Delta_n = nh_x/2$ и $h_y = h_x\sqrt{3}/2$ – сетка из правильных треугольников. На ТС-сетках, если минимальный угол треугольника ограничен снизу, рёберно-ориентированные схемы достигают своего максимального порядка точности: «линейная» схема – второго, EBR3 и UFC – третьего, SEBR5 – пятого.

Более сложный случай сеток рассматриваемого класса может быть получен следующим образом. Возьмём равномерную сетку из равнобедренных прямоугольных треугольников, катеты которых направлены вдоль осей координат и имеют длины $h_x = h$, $h_y = h\sqrt{3}/2$. Число слоёв по вертикали обозначим за N_1 . К горизонтальной границе этой сетки присоединим сетку из правильных треугольников с длиной ребра h , и число её слоёв по вертикали обозначим за $2N_2$. Полученную сетку, заданную в полосе, продолжим периодическим образом (чтобы это было возможным, число слоёв правильных треугольников сделано чётным). Таким образом, период сетки по горизонтали равен h , а по вертикали – $(N_1 + 2N_2)h$. В этом случае Δ_n определяется формулой

$$\Delta_n = \begin{cases} pN_2, & q < N_1 \\ pN_2 + h(q - N_1)/2, & q \geq N_1 \end{cases}$$

где $p \in \mathbb{Z}$, $q = 0, \dots, N_1 + 2N_2 - 1$ определяются равенством $n = p(N_1 + 2N_2) + q$. Фрагмент сетки с $N_1 = 3$ и $N_2 = 1$ представлен на рис. 2.

Для введённого класса сеток независимо от выбора величин Δ_n для ориентированных площадей и площадей контрольных объёмов выполняются равенства $N_{m,n;m+1,n}^x = 2h_y/3$, $N_{m,n;m,n+1}^x = h_y/3$, $N_{m,n;m-1,n+1}^x = -h_y/3$, $v_{m,n} = h_x h_y$ (см. (2)).

Чтобы сетка состояла из спектральных элементов, при рассмотрении схемы

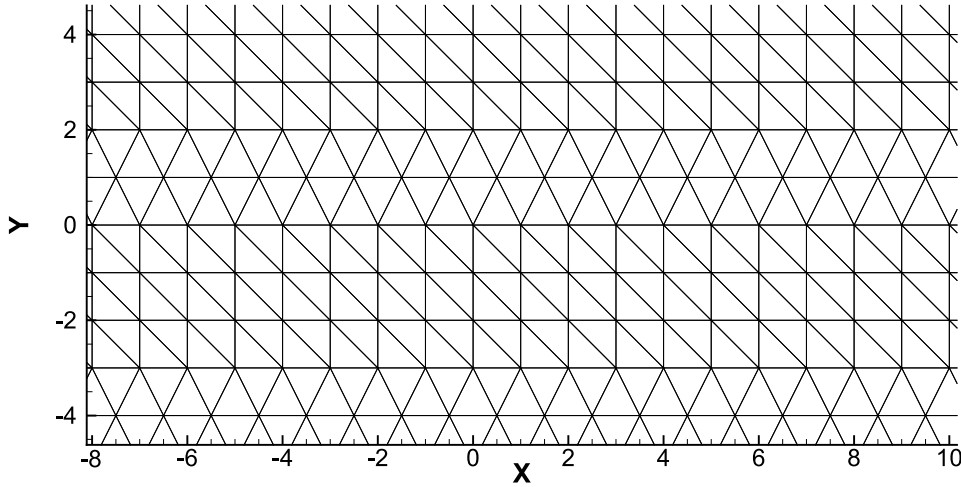


Рис. 2. Фрагмент сетки из прямоугольных и правильных треугольников

УФС будем считать, что N_1 и N_2 чётные, а спектральные элементы деформируются как целое:

$$\Delta_{2n+1} = \frac{\Delta_{2n} + \Delta_{2n+2}}{2}. \quad (18)$$

Уравнение главного корректора

Поскольку сетка периодична по x с шагом h_x , компоненты главного корректора $\alpha_{m,n}(t)$ не зависят от m . Если в сетке есть период по y , пренебрежём им. Таким образом, будем считать блок расчётной сетки состоящим из всех узлов $A_{m,n}$ с фиксированным числом m . Тогда m – номер блока, а n – номер узла в блоке. Пусть $M^0 = \{A_{0,n}\}$, $B = \mathbb{N}$. Введём обозначение $\alpha_{m,n}(t) = \alpha_n(t)$.

Рассмотрим уравнение переноса вдоль оси X с единичной скоростью:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Будем считать, что решение зависит только от t и x . Для того чтобы выписать уравнение на главный корректор, нужно определить матрицу \hat{L} и правую часть $\mathbf{f}^{(2)}$.

Начнём с матрицы \hat{L} и рассмотрим одну её строку. Принимая во внимание структуру сетки, по определению (15) можно записать

$$\hat{L}_{n;k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{0,n;m,k}.$$

Другими словами, для получения $\hat{L}_{n;k}$ нужно зафиксировать узел $A_{0,n}$, определить коэффициенты для вычисления производной в нём и просуммировать их по всем узлам вида $A_{m,k}$, то есть имеющим ординату kh_y .

На ТС-сетке рассматриваемого вида для «линейной» схемы коэффициенты матрицы \hat{L} , отличные от нуля, имеют вид

$$\hat{L}_{n;n\pm 2} = \frac{1}{12h_x}, \quad \hat{L}_{n;n\pm 1} = -\frac{1}{3h_x}, \quad \hat{L}_{n;n} = \frac{1}{2h_x}. \quad (20)$$

Для схемы EBR3 они записываются в виде

$$\hat{L}_{n;n\pm 2} = \frac{1}{18h_x}, \quad \hat{L}_{n;n\pm 1} = -\frac{2}{9h_x}, \quad \hat{L}_{n;n} = \frac{1}{3h_x}. \quad (21)$$

Для схемы UFC вычисление градиентов по спектральным элементам для узлов, являющихся вершиной спектрального элемента, отличается от их вычисления для остальных узлов. Вследствие этого для чётных и нечётных n строки матрицы \hat{L} получаются разными. Пусть для определённости все вершины спектральных элементов соответствуют чётным значениям n . Тогда для чётных n

$$\begin{aligned} \hat{L}_{n;n\pm 4} &= -\frac{1}{144h_x}, & \hat{L}_{n;n\pm 3} &= \frac{1}{36h_x}, & \hat{L}_{n;n\pm 2} &= \frac{1}{12h_x}, \\ \hat{L}_{n;n\pm 1} &= -\frac{17}{36h_x}, & \hat{L}_{n;n} &= \frac{53}{72h_x}, \end{aligned} \quad (22)$$

а для нечётных –

$$\begin{aligned} \hat{L}_{n;n\pm 4} &= 0, & \hat{L}_{n;n\pm 3} &= -\frac{1}{18h_x}, & \hat{L}_{n;n\pm 2} &= \frac{2}{9h_x}, \\ \hat{L}_{n;n\pm 1} &= -\frac{7}{18h_x}, & \hat{L}_{n;n} &= \frac{4}{9h_x}. \end{aligned} \quad (23)$$

Покажем, что коэффициенты матрицы \hat{L} всех трёх схем не зависят от горизонтальных смещений Δ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы для функций, зависящих только от y , вычисляемые производные не зависели от Δ . Рассмотрим некоторую функцию $u(y)$. Очевидно, что значения u_i каждом узле i также не зависят от Δ .

Рассмотрим «линейную» схему Т. Barth (3), (8), (9), (5). Начнём с формулы Грина-Гаусса (5) для $[\nabla u]_i$. Она представляет собой среднее от градиентов от u по всем инцидентным треугольникам с весами, пропорциональными площадям этих треугольников. В нашем случае все площади треугольников равны, поэтому все веса равны $1/6$. Производная по x , вычисленная по некоторому треугольнику, представляет собой разность значений в двух узлах его горизонтального ребра, делённую на h_x . Следовательно, $[\nabla u]_j^x \equiv 0$. Рассмотрим теперь производную по y , вычисленную по некоторому треугольнику. Пусть его узлы лежат

на линиях $y = kh_y$ и $y = (k + 1)h_y$. Тогда $[\nabla u]_j^y = (u((k + 1)h_y) - u(kh_y))/h_y$ и, следовательно, не зависит от Δ .

Теперь перейдём к формуле (9). Поскольку горизонтальные компоненты градиентов нулевые, она приобретает вид

$$\tilde{f}_{ij}(u) = u_i + \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{2} \cdot [\nabla u]_i = u_i + \frac{y_j - y_i}{2} [\nabla u]_i^y.$$

Все члены, входящие в правую часть этого выражения, не зависят от Δ , следовательно, производная по x , посчитанная по «линейной» схеме от функции $u(y)$, не зависит от Δ . Значит, матрица \hat{L} не зависит от Δ .

Рассмотрим теперь схему UFC. Если выполняется условие (18), то, поскольку интерполяционные полиномы зависят только от y , проведённые для «линейной» схемы рассуждения справедливы и для вычисления градиентов по спектральным элементам (11). А поскольку матрица U , определённая (13), зависит только от топологии сетки и величин контрольных объёмов (и, следовательно, не зависит от Δ), то матрица \hat{L} для нестационарного метода коррекции потоков (12), (13), (8), (9), (11) также не зависит от Δ .

Схему EBR3 в рамках вычисления потока на одном ребре можно представить в виде (9), где вспомогательный градиент считается в виде взвешенного среднего между градиентом по одному из треугольников, опирающемуся на ребро ij (с весом $2/3$), и одного треугольника, пересекающего продолжение этого ребра (с весом $1/3$). Так как коэффициенты градиента по треугольнику для функции, зависящей только от y , не зависят от Δ , все приведённые рассуждения справедливы и для схемы EBR3.

Схема SEBR5 таким свойством не обладает.

В случае, когда расчётная сетка представляет собой сшивку областей прямоугольных и равнобедренных треугольников при $h_x = 1$, $h_y = \sqrt{3}/2$, коэффициенты матрицы L схемы EBR3 приведены на рис. 3. Толстой штриховой линией обведён коэффициент при значении в том узле, в котором вычисляется производная. Видно, что горизонтальные суммы коэффициентов совпадают с (21).

Таким образом, строки системы уравнений (14)–(16) для «линейной» схемы и схемы EBR3 имеют вид

$$\frac{d\alpha_n}{dt} + \frac{1}{Ch_x} (\alpha_{n+2} - 4\alpha_{n+1} + 6\alpha_n - 4\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}) = \mathbf{f}_n^{(2)}(h_x, h_y, \{\Delta_k\}), \quad (24)$$

где $C = 12$ для «линейной» схемы и $C = 18$ для схемы EBR3.

Если сетка содержит равномерную подобласть, то для n , таких что шаблон рёберно-ориентированной разностной схемы целиком лежит в этой

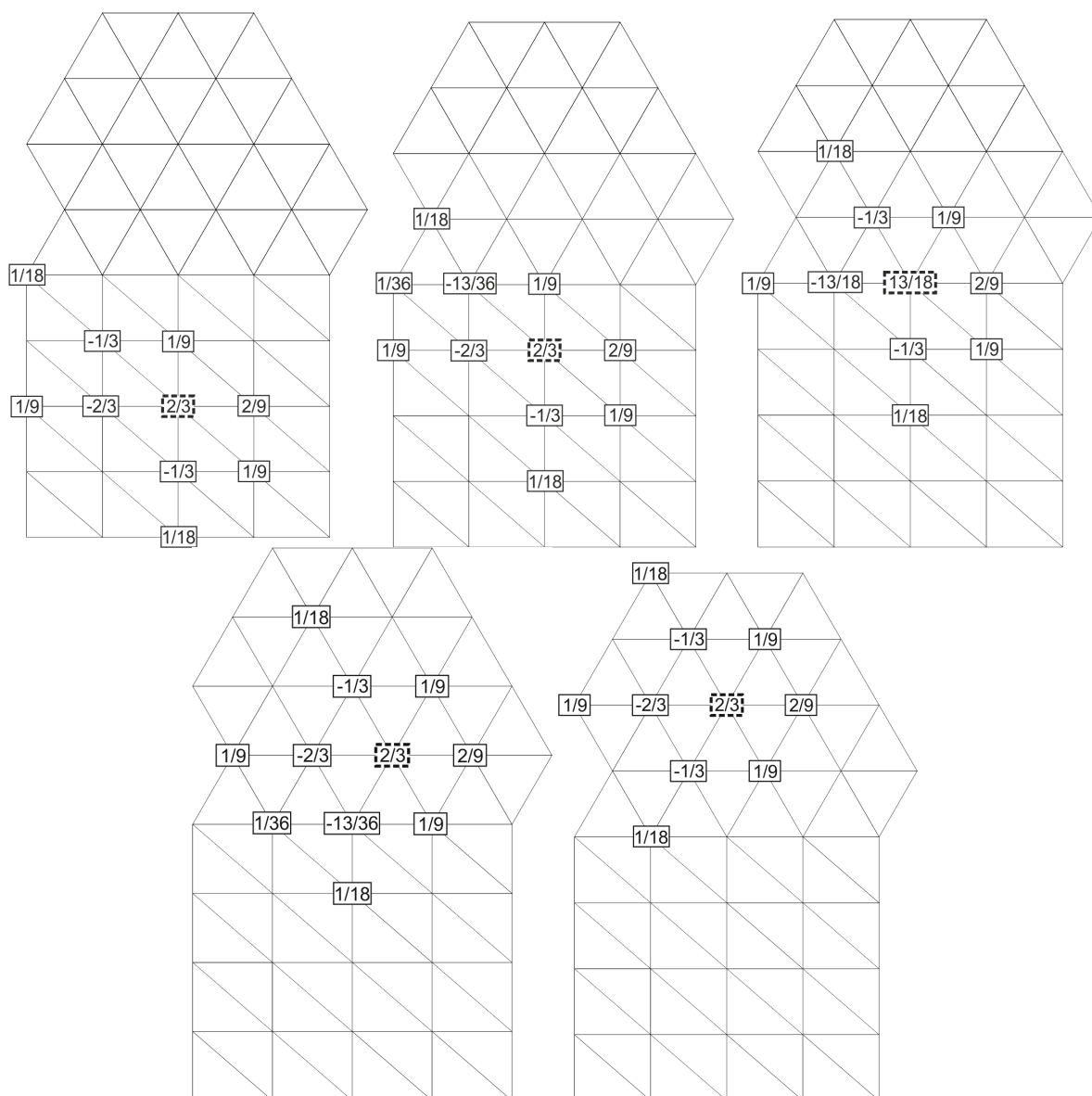


Рис. 3. Коэффициенты схемы EBR3 на сетке из прямоугольных и равнобедренных треугольников

подобласти, выполняется $f_n^{(2)} = 0$. Для схемы EBR3 уравнение (24) является ожидаемым, поскольку схема EBR3 имеет шаблон из соседей 2-го порядка по рёбрам и обладает точностью на кубической функции. Разумеется, для произвольной сетки рассматриваемого в настоящей работе вида правая часть в (24) при этом уже отлична от нуля.

Перейдём к рассмотрению вектора $f^{(2)}$. Поскольку было сделано предположение, что точное решение зависит только от t и x , интерес представляет только одна компонента главного корректора, α^{xx} .

Рассмотрим расчётную сетку с $\Delta_n = 0$ при $n \leq 0$ и $\Delta_n = nh_x/2$ при $n \geq 0$. Она, таким образом, состоит из двух подобластей: в верхней треугольники

равнобедренные, а в нижней – прямоугольные.

Для схемы EBR3 вектор f^{xx} имеет компоненты $f_{-1}^{xx} = h_x/144$, $f_0^{xx} = -h_x/36$, $f_1^{xx} = -h_x/144$. Таким образом, на сшивке равнобедренных и прямоугольных треугольников вектор f^{xx} приближённо может быть представлен δ -функцией: $f^{xx}(y) \sim -h_x \delta(y/h_y)/36$.

Иная ситуация возникает в случае «линейной» схемы T. Barth. Вектор f^{xx} имеет компоненты $f_{-1}^{xx} = 5h_x/288$, $f_0^{xx} = -h_x/48$, $f_1^{xx} = h_x/288$. Следовательно, вектор f^{xx} приближённо может быть представлен δ' -функцией: $f^{xx}(y) \sim -h_x \delta'(y/h_y)/72$.

Для объяснения этого эффекта сравним «линейную» схему с методом коррекции потоков. Последний отличается от «линейной» схемы лишь тем, что вспомогательные градиенты вычисляются точным на квадратичной функции образом. Это даёт второй порядок аппроксимации и для всей схемы в целом [5]. В областях, где сетка локально трансляционно-симметрическая, вспомогательные градиенты в «линейной» схеме вычисляются со вторым порядком точности и, таким образом, потоки на рёбрах на квадратичной функции совпадают на квадратичной функции с таковыми в методе коррекции потоков. Разность потоков между «линейной» схемой и схемой FC на рёбрах, лежащих вблизи сшивки подобластей, в силу консервативности схемы прибавляется в один узел этого ребра и вычитается из другого. Поэтому f^{xx} и имеет вид δ' -функции.

Аналитическая оценка корректора

Оценим величину нестационарного корректора для «линейной» схемы и схемы EBR3 на произвольной сетке рассматриваемого вида.

Обозначим через Λ оператор 4-й разностной производной на равномерной сетке с единичным шагом: $\Lambda_{n,n\pm 2} = 1$, $\Lambda_{n,n\pm 1} = -4$, $\Lambda_{n,n} = 6$, остальные коэффициенты нулевые. Введём обозначение $t^* = t/(Ch_x)$. Тогда уравнение (24) на главный корректор «линейной» схемы и схемы EBR3 примет вид

$$\frac{d\alpha_i^{xx}}{dt^*} + (\Lambda\alpha^{xx})_i = Ch_x f_i^{xx}. \quad (25)$$

Его решение можно записать в виде свёртки

$$\alpha_i^{xx}(t^*, h_x) = Ch_x \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_j(t^*) f_{i-j}^{xx}, \quad (26)$$

где G определяется как решение уравнения

$$\frac{dG_i}{dt^*} + \sum_j \Lambda_{ij} G_j(t^*) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \quad (27)$$

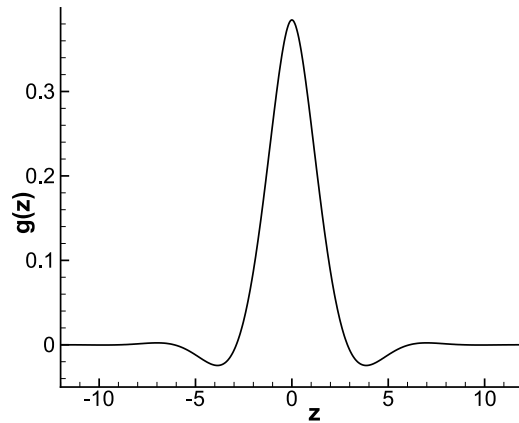


Рис. 4. Функция $g(z)$

с начальными условиями $G_i(0) = 0$. При достаточно большом времени это решение может быть приближено как $G_i(t^*) \approx G(t^*, i)$, где $G(t^*, \xi)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial t^*} + \frac{\partial^4 G}{\partial \xi^4} = \delta(\xi)\theta(t^*). \quad (28)$$

Близость $G_i(t^*)$ к $G(t^*, i)$ можно показать, используя интегральные представления

$$\frac{dG_j(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-4(\cos \xi - 1)^2 t} e^{-ij\xi} d\xi, \quad (29)$$

$$\frac{dG(t, j)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^4 t} e^{-ij\xi} d\xi. \quad (30)$$

Поскольку формулы (29) и (30) определяют ряд и интеграл Фурье от бесконечно гладкой функции, при $j \rightarrow \pm\infty$ функция G убывает быстрее любой степени.

Решение (28) имеет вид

$$G(t^*, \xi) = (t^*)^{3/4} g\left(\xi(t^*)^{-1/4}\right), \quad (31)$$

где $g(z)$ – ограниченное и быстро убывающее на бесконечности решение уравнения

$$g''''(z) - \frac{z}{4}g'(z) + \frac{3}{4}g(z) = \delta(z).$$

Функция $g(z)$ изображена на рис. 4. Исходя из интегрального представления (30), легко показать, что $g(0) = 4\Gamma(5/4)/(3\pi) \approx 0.3847$, где Γ – Гамма-

функция Эйлера. Также методом перевала можно установить асимптотику

$$g(\xi) \sim 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}} 4^{2/3} |\xi|^{-5/3} \exp\left(-\frac{3}{2} \left(\frac{|\xi|}{4}\right)^{4/3}\right) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{|\xi|}{4}\right)^{4/3} + \frac{\pi}{6}\right) \quad (32)$$

при $\xi \rightarrow \infty$. Этот результат в настоящей работе не используется.

Подставляя (31) в (26), решение для α^{xx} приближённо записывается в виде

$$\alpha_i^{xx}(t^*, h) \approx Ch_x(t^*)^{3/4} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g\left((t^*)^{-1/4} j\right) f_{i-j}. \quad (33)$$

Полная вариация последовательности $g((t^*)^{-1/4} j)$ конечна и ограничена величиной $TV = \int |g'(\xi)| d\xi < \infty$. Поэтому можно записать оценку

$$|\alpha^{xx}| \leq C TV h_x(t^*)^{3/4} \sup \left| \sum_{j=-\infty}^J f_j^{xx} \right|. \quad (34)$$

Таким образом, величина коэффициентов нестационарного корректора определяется негативной нормой вектора vf . Для оценки негативной нормы воспользуемся выражением (17) для f :

$$-f_j^{xx} = \frac{1}{h_x h_y} \sum_{k \in N(j)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k} \left[\frac{(x_k - x_j)^2}{8} + \sum_{m \in S_{jk}} F_{jk,m} \frac{1}{2} \left(x_m - \frac{x_j + x_k}{2} \right)^2 \right].$$

В рассматриваемом случае суммирование по j в (34) является одномерным, но $N(j)$ содержит шесть соседних узлов k , два из которых лежат над j (и соответствующие $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{jk}$ равны $\pm h_y/3$), два под ним, а два имеют ту же ординату с $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{jk} = \pm 2h_y/3$. Выражения в квадратных скобках, связанные с горизонтальными рёбрами, равны, поэтому их учёт (с учётом знака $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}_{j,k}$) не даёт вклада в вектор f . Сумма вкладов с узлов k , два из которых лежат над j , будет суммой вкладов с нижних узлов в следующем узле j . Поэтому вектор f имеет дивергентный вид, и его негативная норма, соответственно, ограничена суммой величин под знаком суммы для пары сегментов. Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=-\infty}^J f_j^{xx} v_j \right| &\leq \frac{1}{h_x h_y} 2 \frac{h_y}{3} \max_{k \in N(j)} \left[\frac{(x_k - x_j)^2}{8} + \sum_m F_{jk,m} \frac{1}{2} \left(x_m - \frac{x_j + x_k}{2} \right)^2 \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{h_x h_y} 2 \frac{h_y}{3} \left(\frac{L^2}{8} + 4 \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} L \right)^2 \right) \leq \frac{37 L^2}{12 h_x}, \end{aligned}$$

где L – максимальная длина сеточного ребра.

Отсюда

$$|\alpha^{xx}| \leq \frac{37}{12} C TV L^2 (t^*)^{3/4} = \frac{37}{12} C TV \frac{L^2}{h_x^{3/4}} t^{3/4}.$$

Предполагая, что длины сеточных ребёр не превосходят константы, умноженной на длину горизонтального ребра, получаем $|\alpha^{xx}| = O(h^{5/4} t^{3/4})$.

Таким образом, схема EBR3 для уравнения (19) на сетках рассматриваемого вида в случае, если точное решение не зависит от y , обладает порядком точности $5/4$ в норме L_∞ .

Верификация аналитической оценки

Рассмотрим сетку, состоящую из подобластей прямоугольных и правильных треугольников. Пусть сшивка подобластей имеет ординату $n = 0$, а остальные сшивки находятся достаточно далеко, чтобы возникающие на сшивках ошибки не интерферировали друг с другом.

Из (33) для схемы EBR3 имеем

$$\begin{aligned} \alpha_n^{xx}(t) \approx & -\frac{h_x^2}{2} (t^*)^{3/4} \left[g \left(n (t^*)^{-1/4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} g \left((n-1) (t^*)^{-1/4} \right) - \frac{1}{4} g \left((n+1) (t^*)^{-1/4} \right) \right]. \end{aligned}$$

При больших t/h_x разность слагаемых в последней строке имеет порядок $(t/h_x)^{-1/4}$. Пренебрегая ей, запишем

$$\alpha_n^{xx}(t) \approx -\frac{h_x^{5/4}}{2} \left(\frac{t}{18} \right)^{3/4} g \left(n \left(\frac{t}{18h_x} \right)^{-1/4} \right). \quad (35)$$

Аналогичным образом для «линейной» схемы получим

$$\alpha_n(t) \approx \frac{h_x^{3/2}}{6} \left(\frac{t}{12} \right)^{1/2} g' \left(n \left(\frac{t}{12h_x} \right)^{-1/4} \right). \quad (36)$$

Положим $N_1 = N_2 = 32$, $h_x = h_y = 1$. Приведём на рис. 5 решение уравнения (14) на момент времени $t = 256$ по схеме EBR3 и «линейной» схеме вместе с аналитическими оценками (35) и (36) вблизи $n = 0$. Таким образом, видно, что решение уравнения (14) на этом участке близко к автомодельному. Различие между решением и оценкой при малых $|y|$ связано с тем, что при выводе формул (35) и (36) мы пренебрегли слагаемыми порядка $(t/h_x)^{-1/4}$ от главного члена. Пик при $y \approx -32$ соответствует второй сшивке подобластей.

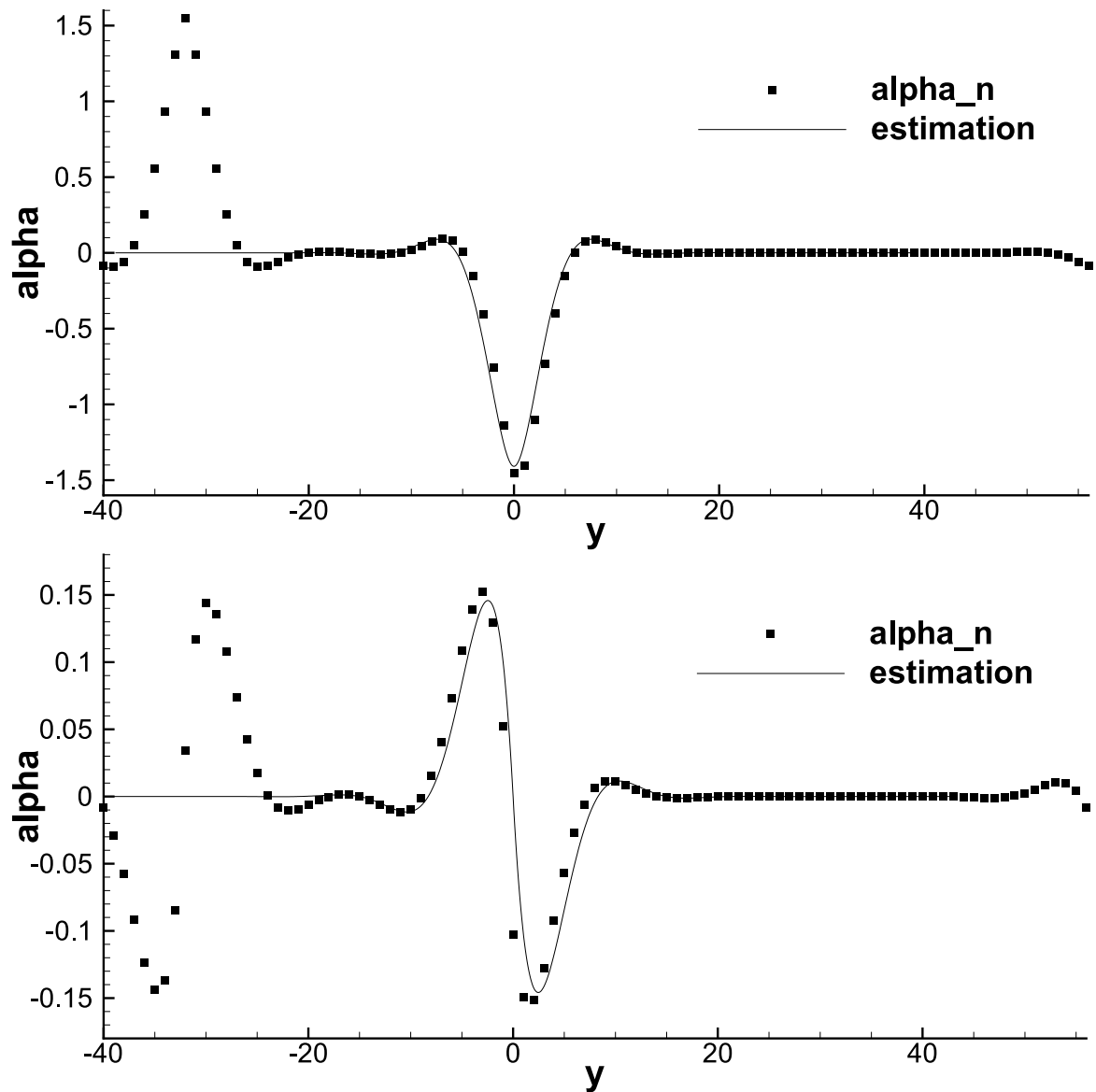


Рис. 5. Главный корректор α^{xx} (маркеры) и его оценка вблизи $y = 0$ (линия).
Верхний рисунок: схема EBR3, нижний – «линейная» схема

Дробный порядок схемы EBR3: примеры

Из проведённого анализа, в частности, видно, что для периодической по y сетки сумма f_n^{xx} по периоду равна 0. В [13] показано, что равенство $\sum f_n^{(2)} v_n = 0$ справедливо и для неравномерной периодической сетки.

Из сеток рассматриваемого типа можно составить последовательности, на которых схема EBR3 обладает различным поведением. Образцы таких сеток изображены на рис. 6. Жирными линиями отмечены границы одного периода сетки. Предполагается, что при измельчении остаётся постоянным период сетки L , отношение h_y/h_x и сохраняется структура шивок подобластей.

Случай сетки, период которой состоит из подобластей прямоугольных и

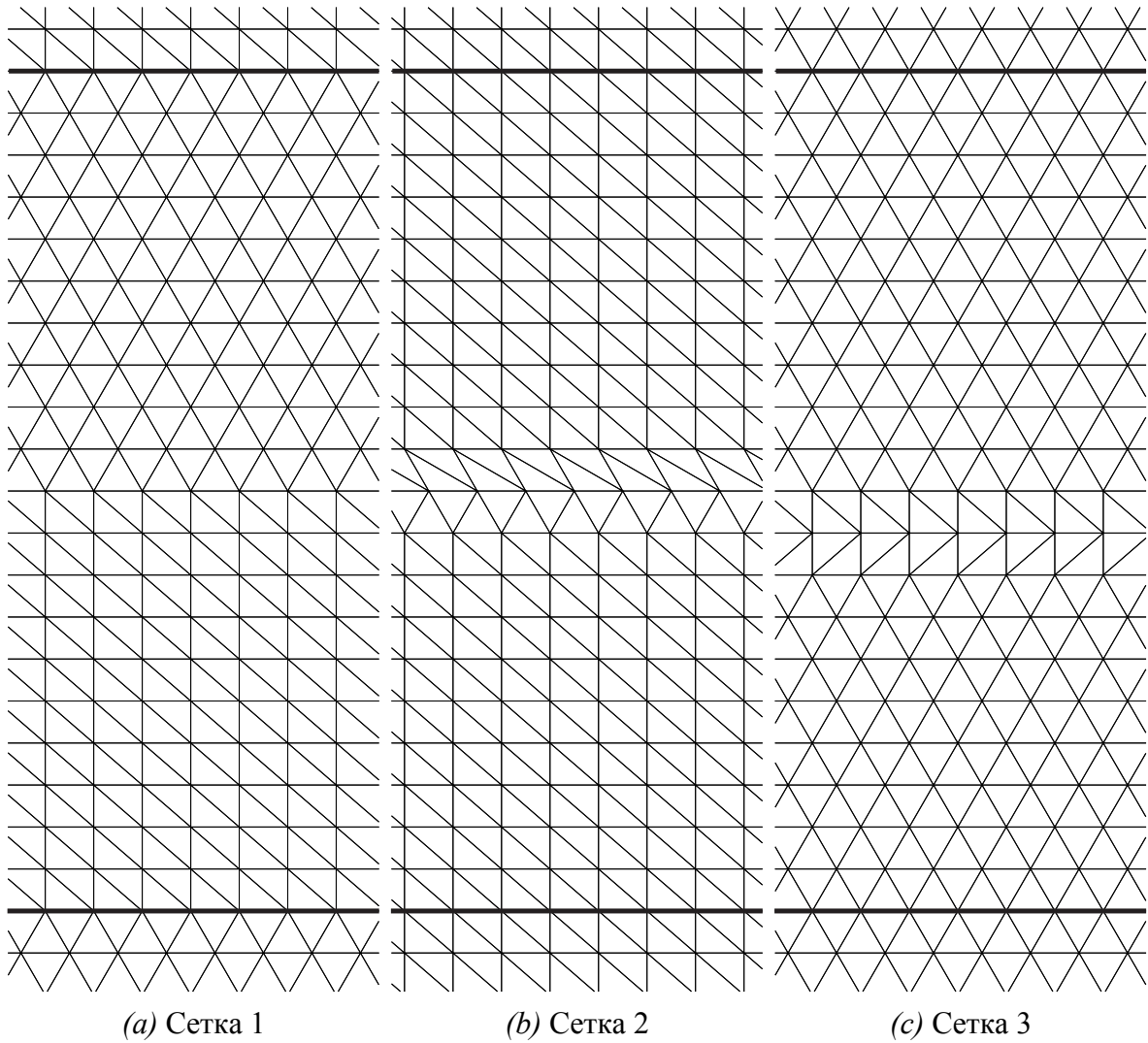


Рис. 6. Сетки, доставляющие разный порядок схемы EBR3

правильных треугольников, уже был рассмотрен выше, см. рис. 6а. В этом случае

$$f_n^{xx} \sim h_x \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\delta \left(\frac{y_n - kL - Y_1}{h_y} \right) - \delta \left(\frac{y_n - kL - Y_2}{h_y} \right) \right),$$

где Y_1 и Y_2 – границы области прямоугольных треугольников, сохраняющиеся при измельчении сетки. Асимптотически структурированное измельчение сетки приводит именно к этому случаю. При этом $|\alpha^{xx}| \sim h^{5/4} t^{3/4}$, то есть схема EBR3 имеет порядок $5/4$ в норме L_∞ .

Рассмотрим теперь последовательность сеток, полученную следующим образом. Возьмём сетку из прямоугольных треугольников, зададим величину L и сдвинем линии, отстоящие друг от друга на L по вертикали, на величину порядка h_x по горизонтали. Другими словами, положим $\Delta_n = \alpha h_x$, $\alpha \neq 0$ при $n \bmod (L/h_y) = 0$ и $\Delta_n = 0$ иначе. Эта сетка изображена на рис. 6б. Поскольку сумма f^{xx} по периоду равна 0, f^{xx} не может иметь слагаемых в виде δ -функции,

и справедливо

$$f_n^{xx} \sim h_x \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta' \left(\frac{y_n - kL}{h_y} \right).$$

В этом случае схема $|\alpha^{xx}| \sim h^{3/2}t^{1/2}$, то есть схема EBR3 имеет порядок 3/2 в норме L_∞ .

Рассмотрим теперь сетку, изображённую на рис. 6с. Она симметрична относительно линии разрыва, и поэтому для неё можно записать

$$f_n^{xx} \sim h_x \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta'' \left(\frac{y_n - kL}{h_y} \right).$$

В силу этого имеет место зависимость $|\alpha^{xx}| \sim h^{7/4}t^{1/4}$. Таким образом, в этих случаях мы будем наблюдать порядок схемы EBR3 в L_∞ , равный 7/4.

Наконец, если при измельчении сетки количество ячеек на периоде остаётся постоянным, а $L \sim h_y$, то мы имеем дело с блочным измельчением. Поскольку правая часть имеет нулевой интеграл по периоду, уравнение (14) имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$, и $\|\alpha\| \sim h^2$.

Все приведённые выше рассуждения относились к норме L_∞ . Теперь рассмотрим вопрос, каким порядком точности схема EBR3 обладает на сетках из прямоугольных и правильных треугольников в норме L_p . Определим её для бесконечной периодической области с равномерным шагом как

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^{N_y} |f_n|^p \right)^{1/p} N_y^{-1/p},$$

где N_y – число узлов, составляющих один период сетки.

Как и раньше, будем предполагать, что отношение h_y/h_x при измельчении сетки сохраняется. Поскольку ошибка при фиксированном t присутствует только вблизи сшивок, если при измельчении сетки сохранять L , то в норме L_p схема EBR3 будет обладать 2-м порядком точности. Чтобы построить пример, где порядок будет ниже, поступим следующим образом. Будем при измельчении сетки уменьшать расстояние между сшивками следующим образом: $L \sim h_x^{3/4-\varepsilon}$. Соответственно, число слоёв между сшивками будет иметь порядок $N_1, N_2 \sim h_x^{-1/4-\varepsilon}$.

Обратимся к формуле (35). Подставляя $n \sim N_1, N_2 \sim h_x^{-1/4-\varepsilon}$, мы получим, что аргумент функции g стремится к бесконечности при измельчении сетки, то есть на достаточно мелкой сетке ошибки, сгенерированные сшивками подобластей, не будут интерферировать. Поэтому вблизи каждой сшивки величина геометрического корректора описывается формулой (35).

Оценим теперь интегральную норму геометрического корректора. Обозначая $\omega = (t/18)^{-1/4}$, имеем

$$\begin{aligned} \|\alpha^{xx}\|_p &\sim \left(\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(h_x^{5/4} g \left(n h_x^{1/4} \omega \right) \right)^p}{h_x^{-1/4-\varepsilon}} \right)^{1/p} \approx h_x^{5/4} \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(g \left(\xi h_x^{1/4} \omega \right) \right)^p d\xi}{h_x^{-1/4-\varepsilon}} \right)^{1/p} = \\ &= h_x^{5/4} \left(h_x^{1/4+\varepsilon} h_x^{-1/4} \omega^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (g(\eta))^p d\eta \right)^{1/p} \sim h_x^{5/4+\varepsilon/p}. \end{aligned}$$

Поскольку ε может быть сколь угодно мало, в норме L_p , так же как и в норме L_∞ , на рассматриваемом классе сеток схема EBR3 имеет порядок $5/4$.

Численное нахождение корректора

Теперь изучим поведение главного корректора путём численного решения уравнения (14). Численный счёт позволит увидеть его поведение не только в асимптотике, но на всём промежутке времени. Кроме того, мы увидим, как ведёт себя главный корректор для схемы UFC, для которой асимптотика не была выписана.

Положим $h_x = h_y = 1$ и $N_1 = N_2 = 32$, то есть один сеточный блок будет содержать 32 слоя по 2 прямоугольных треугольника и 64 слоя по 2 равнобедренных треугольника. Зависимость коэффициентов α_n^{xx} от n на разные моменты времени для схемы EBR3 представлена на рис. 7. По горизонтали отложена ордината узла $A_{0,n}$, равная $n h_y = n$, по вертикали – значение главного корректора в этом узле. Каждая линия соответствует моменту времени $t = 2^b$. Сверху на рис. 7 изображены линии, соответствующие $b = 0, \dots, 8$, а снизу – соответствующие $b = 9, \dots, 23$. При большом времени коэффициенты α_n^{xx} выходят на стационарные значения, что предписывается утверждением 4.

Для «линейной» схемы эти же результаты приведены на рис. 8.

Теперь рассмотрим поведение схемы UFC при использовании градиентов, вычисленных по спектральным элементам. Соответствующие результаты приведены на рис. 9. Видно, что при достаточно большом времени профиль главного корректора сохраняется, а его величина растёт линейно со временем. Вследствие последнего схема обладает первым порядком точности. Невыполнение утверждения 4 связано с тем, что рассмотренный вариант схемы UFC не гасит «пилу» в поперечном направлении: применив к вектору u с

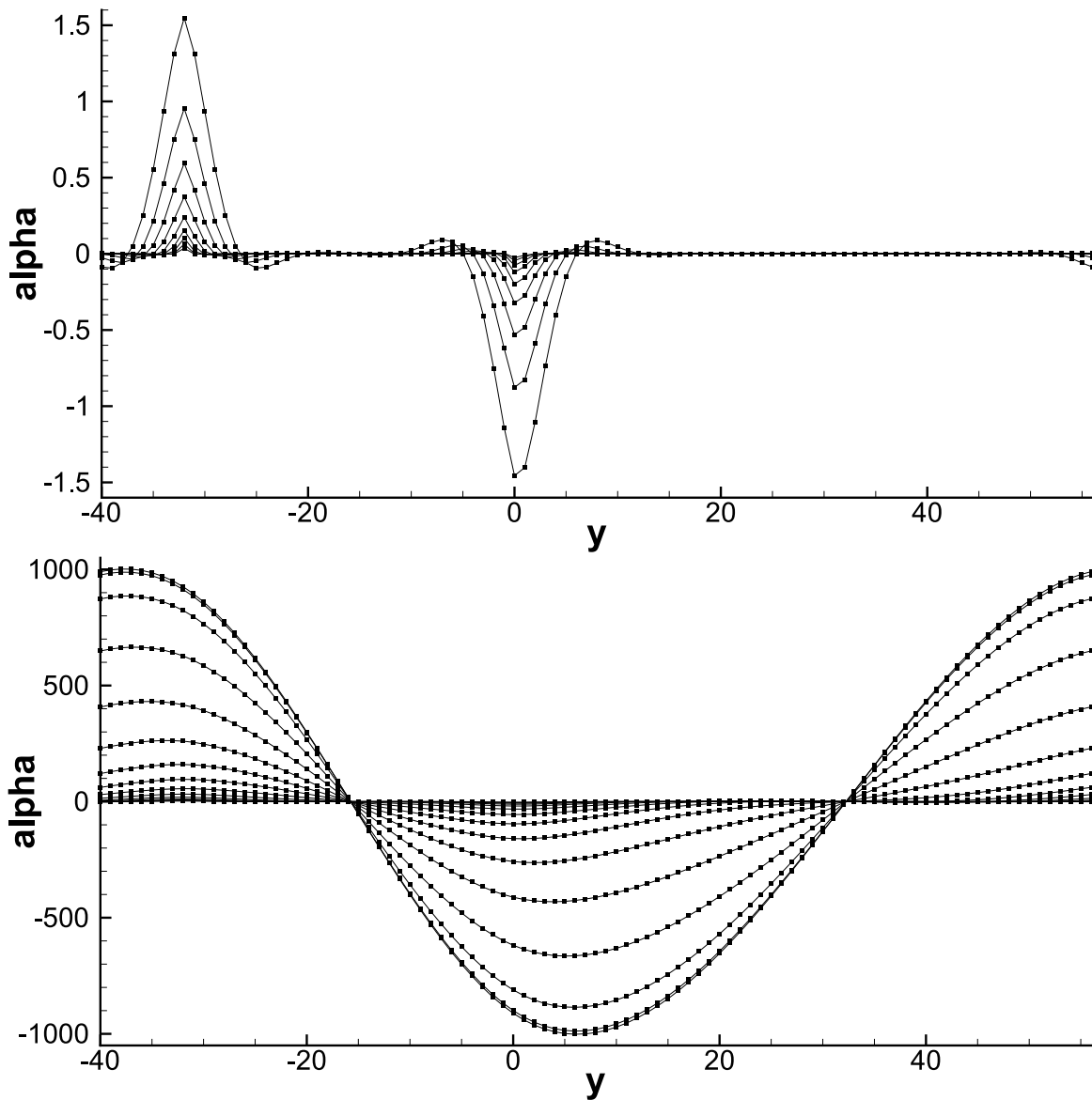


Рис. 7. Зависимость α^{xx} от y на время $t = 2^b$ для схемы EBR3. Верхний рисунок: $b = 0, \dots, 8$. Нижний рисунок: $b = 9, \dots, 23$

компонентами $u_{4m} = 1, u_{4m+1} = 0, u_{4m+2} = -1, u_{4m+3} = 0$ матрицу \hat{L} , коэффициенты которой заданы выражениями (22)–(23), можно убедиться, что $\hat{L}u = 0$. Таким образом, нестационарный метод коррекции потоков с вычислением вспомогательных градиентов по спектральным элементам не удовлетворяет условиям утверждения 4.

Теперь рассмотрим зависимость $\|\alpha^{xx}(t)\|_\infty$ от времени. Будем рассматривать последовательность сеток с $h_x = h_y = h = 2^{-b}, b = 1, \dots, 13$. При измельчении будем сохранять ширину слоя правильных треугольников равной 2 и ширину слоя прямоугольных треугольников равной 4. Другими словами, положим $N_1 = N_2 = 2^{b+1}$. Полученные результаты изображены на рис. 10а для

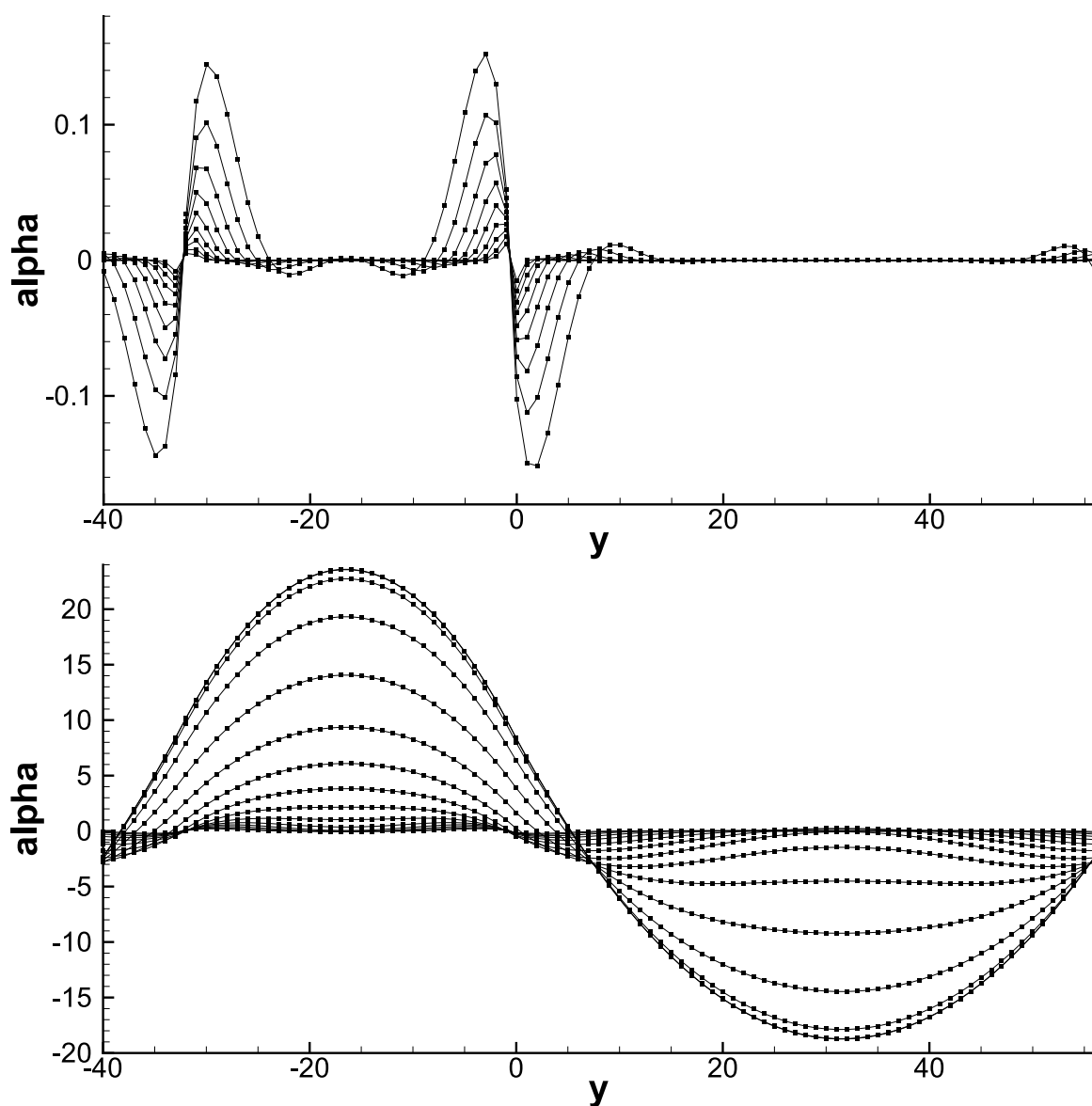


Рис. 8. Зависимость α^{xx} от y на время $t = 2^b$ для «линейной» схемы. Верхний рисунок: $b = 0, \dots, 8$. Нижний рисунок: $b = 9, \dots, 23$

«линейной» схемы и на рис. 10b для схемы EBR3.

Видно, что в двойном логарифмическом масштабе возникает зона постоянного наклона, границы которой при измельчении сетки расширяются во времени. Начальная граница этой зоны смещается в область $t \ll 1$. Конечная граница также смещается в область $t \gg 1$, где наступает насыщение, и $\alpha^{xx}(t, h)$ перестаёт зависеть от времени. Область автомодельного решения, с одной стороны, исключает несколько первых шагов, когда неприменима замена функции Грина оператора с разностной 4-й производной на функцию Грина оператора с дифференциальной 4-ой производной. С другой стороны, автомодельность теряется при интерференции ошибок, сгенерированных соседними шивками.

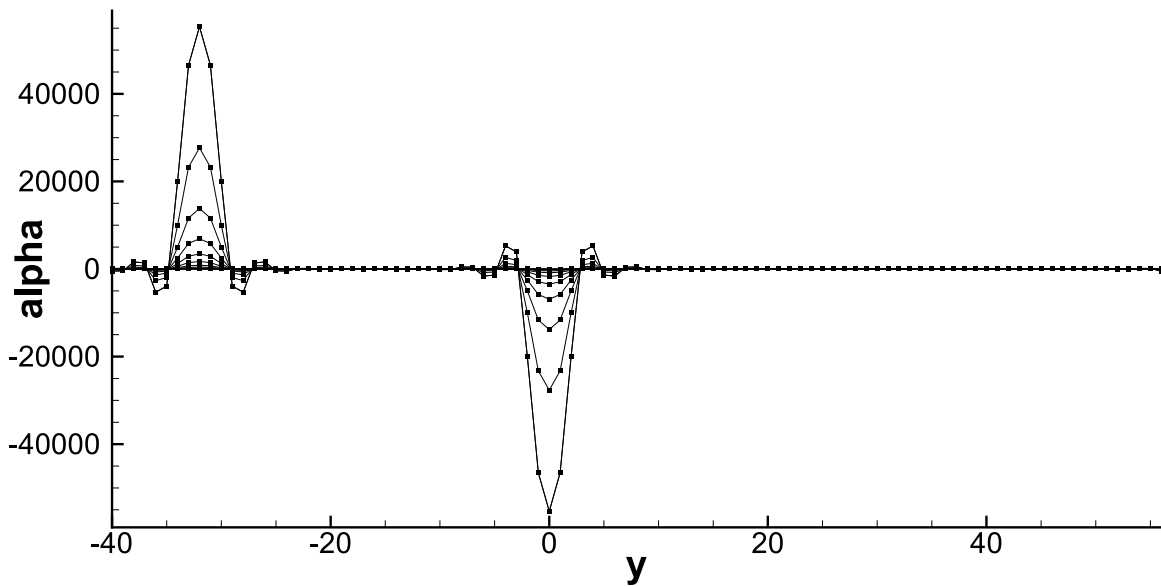
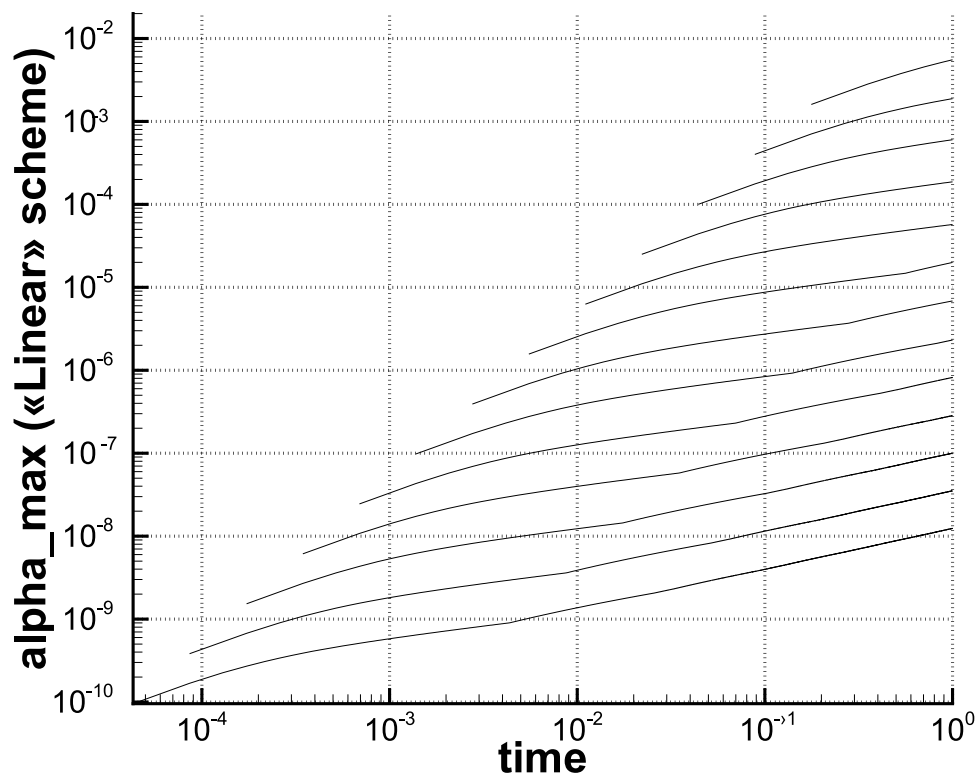


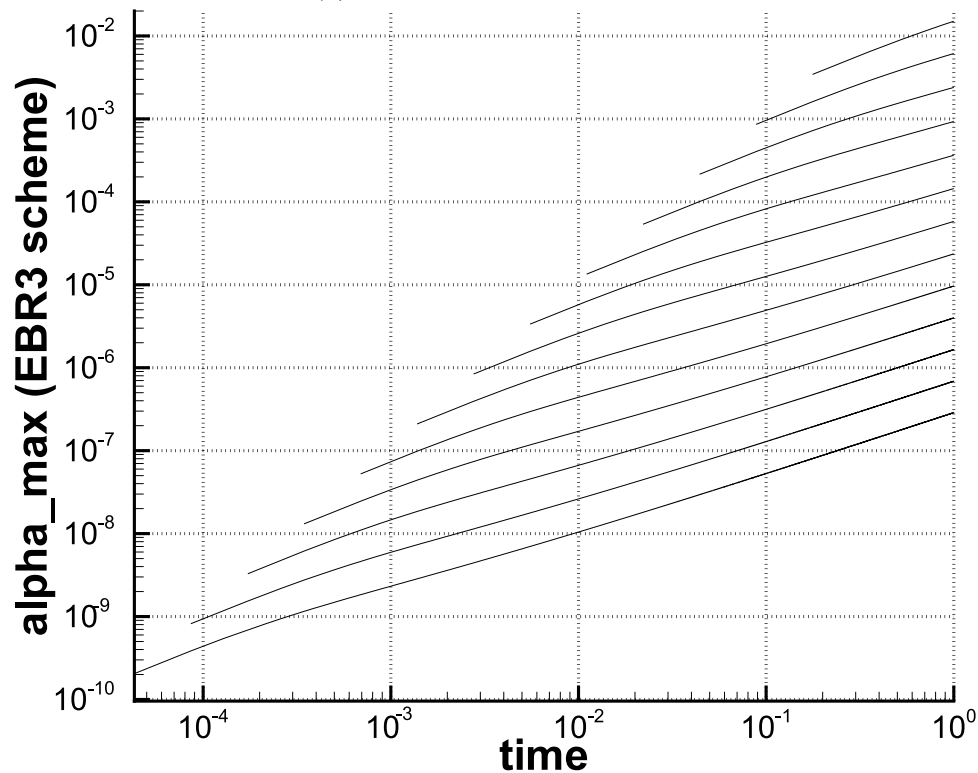
Рис. 9. Зависимость α^{xx} от y на время $t = 2^b$ для схемы UFC с вычислением градиентов по спектральным элементам. $b = 9, \dots, 22$

Также на рис. 10 видно, что наклон кривых выходит на предельное значение при измельчении сетки. Для схемы EBR3 он равен $s = 0.75$, а для «линейной» схемы $s = 0.5$. Используя утверждение об автомодельности главного корректора [13], получаем, что порядок сходимости равен $2 - s \approx 1.25$ для схемы EBR3 и 1.5 для «линейной» схемы. Эти же порядки можно получить, если мерить их по ошибке в фиксированный момент времени $t = 1$ на последовательности сеток.

Наконец, сравним рёберно-ориентированные схемы между собой, для чего выведем $\|\alpha^{xx}(t)\|_\infty$ на сетке с шагом $h_x = h_y = 2^{-12}$ и $N_1 = N_2 = 2^{13}$. Эти результаты представлены на рис. 11. «Линейная» схема благодаря полуторному порядку точности показывает существенно меньшую норму главного корректора. Среди оставшихся наилучший результат показывает схема EBR3, обладающая порядком точности 1.25. С тем же наклоном идёт график схемы UFC при отказе от вычисления вспомогательных градиентов по спектральным элементам и замене их градиентами от интерполяционных полиномов, построенных методом наименьших квадратов. Количественно норма геометрического корректора примерно в 1.7 раза выше, чем у схемы EBR3. Незначительно большей ошибкой обладает схема SEBR5. Тангенс угла наклона её графика чуть-чуть больше и примерно равен 0.82, что соответствует порядку точности 1.18. Приближением какой рациональной дроби является это число, понять пока не удалось; предположительно, это $7/6$. Наконец, наихудший результат показывает схема UFC при использовании градиентов по спектральным элементам. В этом



(a) для «линейной» схемы



(b) для схемы EBR3

Рис. 10. Зависимость $\|\alpha^{xx}(t)\|_{\infty}$ на множестве сеток с $N_1 = N_2 = 2^b$ при различных b

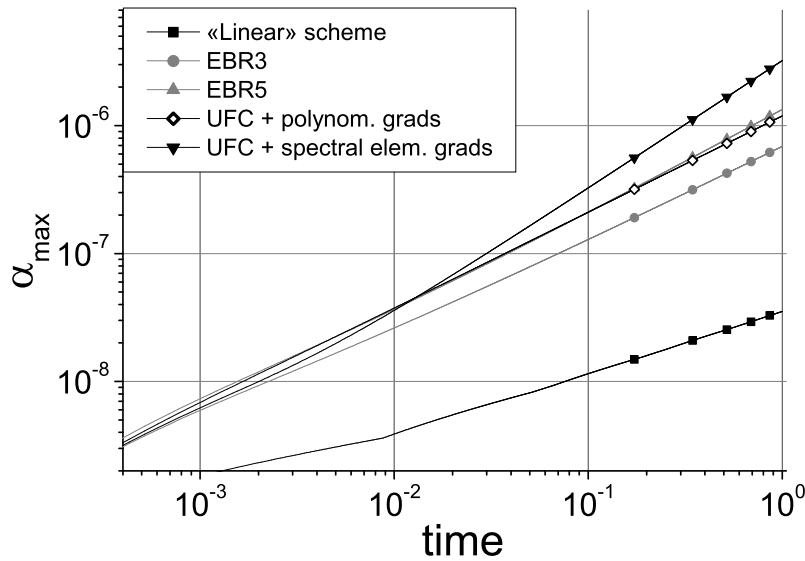


Рис. 11. Зависимость $\|\alpha^{xx}(t)\|_\infty$ на сетке с $N_1 = N_2 = 2^{12}$ для разных схем

случае она показывает первый порядок точности, хотя в некотором диапазоне времени (и, следовательно, мелкости сеток) её главный корректор имеет меньшую величину, нежели при использовании метода наименьших квадратов.

Заключение

В работе было проведено исследование точности рёберно-ориентированных схем на примере уравнения переноса при помощи метода нестационарного корректора. Было доказано, что при блочном измельчении расчётной сетки все рёберно-ориентированные схемы обладают вторым порядком точности при ограничении на шаг по времени, если только не существует отличного от константы поля, не диссипируемого этой схемой. Последнее было обнаружено для одной из модификаций нестационарного метода коррекции потоков. Таким образом, установлена связь эффекта сверхсходимости с отсутствием неконстантного поля, инвариантного для разностной схемы.

Были рассмотрены свойства рёберно-ориентированных схем на поперечных треугольных сетках. Было доказано, что на таких сетках при скорости переноса, совпадающей с выделенным направлением сетки, для одномерных решений схема EBR3 в нормах L_p , $1 \leq p \leq \infty$, обладает порядком точности $5/4$, и приведены соображения в пользу полуторного порядка точности «линейной» схемы T. Barth. Эти оценки подтверждены численными результатами.

Также были проведены расчёты для численной оценки главного корректора схем SEBR5 и UFC. Показано, что нестационарный метод коррекции потоков в применении к рассмотренной задаче в зависимости от способа вычисления

градиентов обладает либо первым порядком точности, либо порядком 5/4. Схема SEBR5 показывает численный порядок около 7/6.

Автор выражает благодарность М. Д. Сурначёву за внимательное прочтение работы и содержательные замечания к ней. М. Д. Сурначёвым также были получены оценки решения уравнений (27)–(28).

Список литературы

1. Barth T. J. Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-0721. 1991.
2. Katz A., Sankaran V. An Efficient Correction Method to Obtain a Formally Third-Order Accurate Flow Solver for Node-Centered Unstructured Grids // J. Sci. Comput. 2012. Т. 51, № 2. С. 375–393.
3. Pincock B. B., Katz A. High-order flux correction for viscous flows on arbitrary unstructured grids // AIAA paper No. 2013-1566. 2013.
4. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. О построении рёберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 4. С. 92–111.
5. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Модификация схемы Flux Corrector для повышения точности решения нестационарных задач // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 69. С. 1–22. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-69>.
6. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2016. Т. 81, № 6. С. 331–356.
7. Stoufflet B., Fezoui F. P., Dervieux A. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements // AIAA Paper No. 87-0560. 1987.
8. Computation of unsteady flows with mixed finite volume/ finite element upwind methods / Debiez C., Dervieux A., Mer K. et al. // International Journal for Numerical Method in Fluids. 1998. Vol. 27. P. 193–206.
9. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Структура ошибки консервативного 4-точечного конечно-разностного оператора дифференцирования на нерав-

- номерных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 74. С. 1–32. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-74>.
10. Бахвалов П. А. Численная оценка порядка точности рёберно-ориентированных схем для уравнения переноса на сетках специального вида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 105. С. 1–32. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-105>.
11. Bouche D., Ghidaglia J.-M., Pascal F. Error Estimate and the Geometric Corrector for the Upwind Finite Volume Method Applied to the Linear Advection Equation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2006. Vol. 43. P. 557–603.
12. Бахвалов П. А. Нестационарный метод геометрического корректора и его использование для оценки точности конечно-объемной схемы на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 122. С. 1–28. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-122>.
13. Бахвалов П. А. Метод нестационарного корректора для анализа точности линейных разностных схем для уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 140. С. 1–32. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-140>.
14. Barth T. J. A 3-D Upwind Euler Solver for Unstructured Meshes // AIAA Paper No. 91-1548. 1991.

Оглавление

Введение	3
Схемы с определением переменных в узлах	6
Метод нестационарного корректора	9
Рёберно-ориентированные схемы при блочном измельчении	11
Поперечные сетки	13
Уравнение главного корректора	14
Аналитическая оценка корректора	18
Верификация аналитической оценки	21
Дробный порядок схемы EBR3: примеры	22
Численное нахождение корректора	25
Заключение	30
Список литературы	31