ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 96 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Вычисление экзотических разложений решений третьего уравнения Пенлеве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Вычисление экзотических разложений решений третьего уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 96. 22 с. doi:**10.20948/prepr-2017-96**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-96**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Д. Брюно

Вычисление экзотических разложений решений третьего уравнения Пенлеве

Москва — 2017

УДК 517.925

Александр Дмитриевич Брюно

Вычисление экзотических разложений решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2017.

Рассматриваются экзотические асимптотические разложения решений полиномиального обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Они являются такими рядами по целым степеням независимой переменной, коэффициенты которых суть ряды Лорана по чисто мнимым степеням независимой переменной. Предлагается алгоритм для составления ОДУ для этих коэффициентов. Первый коэффициент является решением укороченного уравнения. Для некоторых уравнений он оказывается полиномом. Возникает вопрос: будут ли следующие коэффициенты полиномами Лорана? Здесь этот вопрос рассмотрен для третьего уравнения Пенлеве (P_3). Оказалось, что для него во всех случаях второй коэффициент также является полиномом Лорана, но третий коэффициент является полиномом при определённых условиях на параметры уравнения.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, экзотическое асимптотическое разложение, полиномиальность коэффициентов.

Alexander Dmitrievich Bruno

Calculation of exotic expansions of solutions to the third Painlevé equation.

We consider the exotic asymptotic expansions of solutions to a polynomial ordinary differential equation (ODE). They are such series in integral powers of the independent variable, which coefficients are the Laurent series on imaginary powers of the independent variable. We propose an algorithm for writing ODEs for these coefficients. The first coefficient is a solution of a truncated equation. For some initial equations, it is a Laurent polynomial. Question: will the following coefficients be Laurent polynomials? Here the question is considered for the third Painlevé equation (P_3). It appears that for it the second coefficients are Laurent polynomials in all cases, but the third coefficient is a Laurent polynomial under some restriction on parameters.

Key words: ordinary differential equation, exotic asymptotic expansion, polynomiality of coefficients.

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

1. Введение

В 2004 г. я предложил способ вычисления асимптотических разложений решений полиномиального ОДУ [1]. Он позволял вычислять степенные и степенно-логарифмические разложения, в которых коэффициенты при степенях независимой переменной x являются либо постоянными, либо многочленами от логарифма. Позже оказалось, что у таких уравнений асимптотические разложения решений могут иметь в качестве коэффициентов при степенях x ряды Лорана либо по убывающим степеням логарифма x, либо по мнимым степеням x — соответственно сложные [2] и экзотические [3] разложения. Для их вычисления методы из [1] неудобны. Теперь я разработал метод составления ОДУ для каждого коэффициента такого ряда. Эти уравнения содержат младшие и высшие вариации от определённых частей исходного уравнения. Первый коэффициент сложного разложения и экзотического разложения является решением укороченного уравнения, и, вообще говоря, является рядом Лорана по $\log x$ и по $x^{i\gamma}$. Но для некоторых уравнений он оказывается полиномом (обычным или Лорана). Возникает вопрос: *будут ли следующие коэффициенты полиномами?*

В [4] этот вопрос я рассмотрел для сложных разложений двух уравнений Пенлеве P_3 и P_6. Ибо из шести уравнений Пенлеве P_1 – P_6 три имеют сложные разложения решений — это P_3, P_5 и P_6. Первые коэффициенты этих разложений известны и все являются полиномами [5]. Оказалось, что во всех случаях уравнений P_3 и P_6 второй коэффициент также полином, но третий коэффициент является полиномом либо всегда, либо при некоторых условиях на параметры уравнения, либо никогда.

Здесь этот же вопрос я рассматриваю для экзотических разложений решений третьего уравнения Пенлеве P_3. Оказалось, что и здесь второй коэффициент всегда является полиномом (обычным или Лорана). Третий же коэффициент является полиномом только при определённых условиях на параметры исходного уравнения. Вычисления здесь более громоздкие, чем в [4]. Экзотические разложения решений имеются также у пятого (P_5) и шестого (P_6) уравнений Пенлеве [6, 7].

Основные результаты работы.

В [4] предложен алгоритм составления уравнений для коэффициентов разложения решения обыкновенного дифференциального уравнения. Здесь в §2 указывается правило коммутирования операторов и степеней независимой переменной (лемма 1).

В § 3 находятся все решения укороченного уравнения (теорема 1). В § 4 из них выделяются те, разложения которых содержат x в чисто мнимой степени. Они образуют 5 семейств $F_1^{\pm}$,$F_2^{\pm}$ и F_3. Начинающиеся с них семейства решений полного уравнения P_3 образуют семейства $\mathcal{F}_1^{\pm}$,$\mathcal{F}_2^{\pm}$ и $\mathcal{F}_3$ соответственно. Они изучены в § 5, 6 и 7 соответственно. Разложения семейства $\mathcal{F}_1^{\pm}$ не являются экзотическими, а являются рядами по степеням $x^{2+i\gamma}$, которые получаются разложением выписанной явно рациональной функции (теорема 2). В разложениях семейств $\mathcal{F}_2^{\pm}$ и $\mathcal{F}_3$ второй коэффициент всегда обычный полином и полином Лорана соответственно. Третий коэффициент является полиномом только если параметр уравнения $a = 0$ (теоремы 3 и 4). Дальнейшие коэффициенты не вычислялись. Но и полиномиальность второго коэффициента свидетельствует о вырожденности уравнения P_3, т.е. о наличии у него новых внутренних симметрий.

2. Об экзотических разложениях

Полиномы и ряды Лорана по чисто мнимой степени x могут представлять вещественные функции.

Пример 1. $x^i + x^{-i} = e^{i \ln x} + e^{-i \ln x} = 2 \cos \ln x$ согласно формуле Эйлера. □

Лемма 1. *Пусть* $\xi = x^{i\gamma}$*, тогда* $x = \xi^{1/(i\gamma)}$ *и*

$$\frac{d^m}{d\xi^m}\left[x^n \varphi(\xi)\right] = x^n \left[\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{n}{i\gamma}\left(\frac{n}{i\gamma} - 1\right) \ldots \left(\frac{n}{i\gamma} - k + 1\right) \frac{1}{\xi^k} \varphi^{(m-k)}\right],$$

где C_m^k *— биномиальные коэффициенты.*

Доказательство следует из формулы Лейбница для производной от произведения, ибо $x^n = \xi^{n/(i\gamma)}$.

Следствие 1.

$$\xi \frac{d}{d\xi}\left[x^n \varphi(\xi)\right] = x^n \left[\frac{n}{i\gamma}\varphi + \xi\dot{\varphi}\right],$$

$$\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2}\left[x^n \varphi(\xi)\right] = x^n \left[\frac{n}{i\gamma}\left(\frac{n}{i\gamma} - 1\right)\varphi + \frac{2n}{i\gamma}\xi\dot{\varphi} + \xi^2\ddot{\varphi}\right],$$

где точка сверху означает производную по ξ.

3. Уравнение P_3 и все решения его укороченного уравнения

Третье уравнение Пенлеве, записанное в виде дифференциальной суммы, есть

$$f(x,y) \stackrel{def}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + ay^3 + by + cxy^4 + dx = 0, \qquad (3.1)$$

где a, b, c, d — комплексные параметры. Его носитель и многоугольник при $a,b,c,d \neq 0$ показаны на рис. 1.

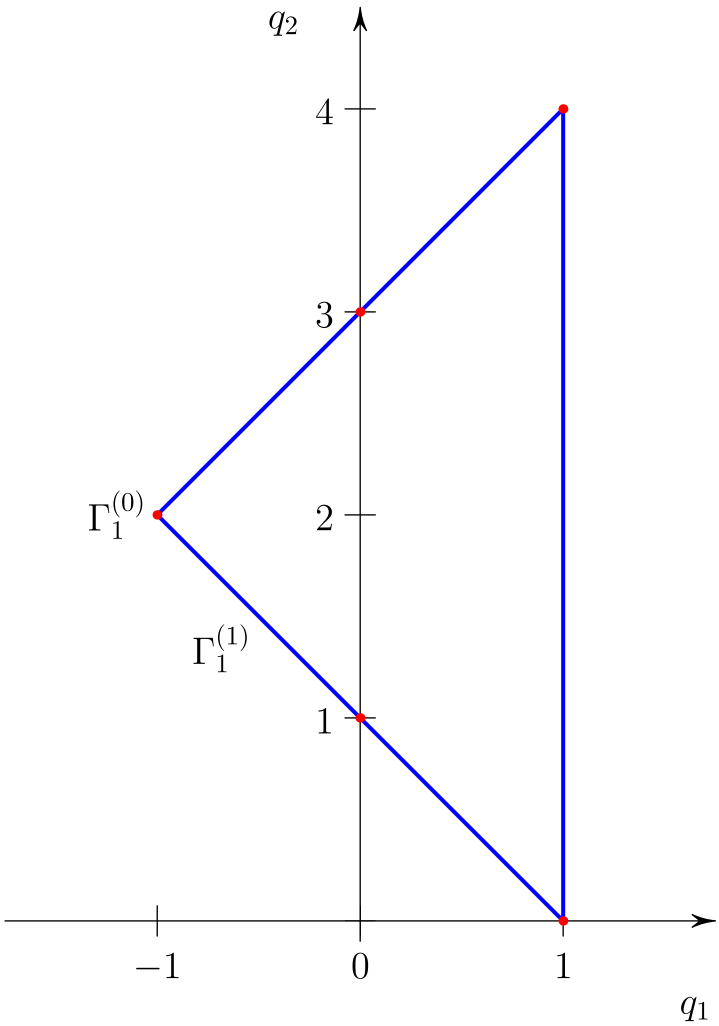

Рис. 1. Носитель и многоугольник уравнения (3.1) при $abcd \neq 0$.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ рис. 1 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{def}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + by + dx = 0. \tag{3.2}$$

После степенного преобразования $y = xz$ и сокращения на x полное уравнение (3.1) переходит в

$$g \stackrel{def}{=} -x^2zz'' + x^2z'^2 - xzz' + bz + d + ax^2z^3 + cx^4z^4 = 0. \tag{3.3}$$

При этом укороченное уравнение (3.2) принимает вид

$$g_0 \stackrel{def}{=} -x^2zz'' + x^2z'^2 - xzz' + bz + d = 0\,. \tag{3.4}$$

Носитель и многоугольник уравнения (3.3) показаны на рис. 2. При этом укороченному уравнению (3.4) соответствует вертикальное ребро на оси $q_1 = 0$. Здесь $g_2 = az^3, g_4 = cz^4$.

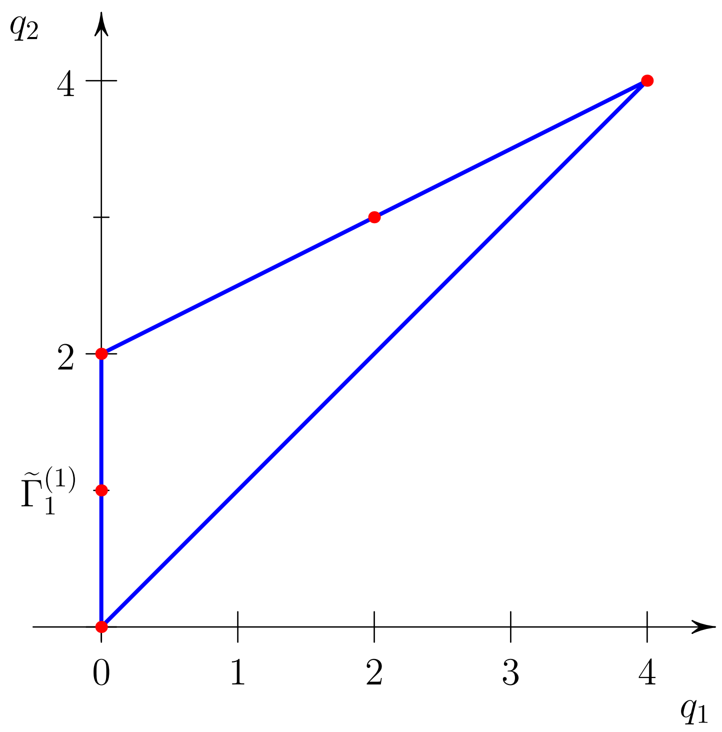

Рис. 2. Носитель и многоугольник уравнения (3.3).

После логарифмического преобразования $\xi = \ln x$ уравнение (3.4) переходит в уравнение

$$h_0 \stackrel{def}{=} -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz + d = 0. \tag{3.5}$$

В это уравнение ξ не входит явно. Поэтому положим z независимой переменной и $\dot{z} = p$ — зависимой переменной. Тогда

$$\ddot{z} = \frac{dp}{dz} \cdot \dot{z} = \frac{dp}{dz} \cdot p \,.$$

Уравнение (3.5) принимает вид

$$zp\,\frac{dp}{dz} = p^2 + bz + d\,. \tag{3.6}$$

Теперь положим $q = p^2$, тогда уравнение (3.6) примет вид

$$z\,\frac{1}{2}\frac{dq}{dz} = q + bz + d\,. \tag{3.7}$$

Это линейное уравнение для q. Его однородная часть $(1/2)\, z\, dq/dz = q$ имеет решение $q = cz^2$, где c — произвольная постоянная. Теперь, применяя метод вариаций постоянной c, получаем из (3.7) уравнение

$$\frac{1}{2} z \frac{dc}{dz}\, z^2 = bz + d\,,$$

т.е.
$$\frac{dc}{dz} = \frac{2b}{z^2} + \frac{2d}{z^3}\,,$$
отсюда
$$c = -\frac{2b}{z} - \frac{d}{z^2} + c_0\,,$$
где c_0 — произвольная постоянная. Итак,
$$q = z^2 c = c_0 z^2 - 2bz - d\,.$$
Вспоминая, что $q = \dot{z}^2$, получаем уравнение
$$\dot{z} = \sqrt{c_0 z^2 - 2bz - d}\,. \tag{3.8}$$
Рассмотрим это уравнение в четырёх случаях: $c_0 = 0$; $c_0 \neq 0, b = d = 0$; $c_0 = -b^2/d$; $c_0 \neq 0$,$c_0 \neq -b^2/d$.
1) $c_0 = 0$. Здесь возможны два подслучая $b \neq 0$ и $b = 0$,$d \neq 0$.

1а) $b \neq 0$. Тогда уравнение (3.8) есть
$$\dot{z} = \sqrt{-2b}\,\sqrt{z + \frac{d}{2b}}\,.$$
Положим $w = z + d/(2b)$, тогда
$$\dot{w} = \sqrt{-2b}\,\sqrt{w}\,.$$
Следовательно, $2\sqrt{w} = \sqrt{-2b}\,(\xi + \tilde{c})$, где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная, и
$$w = -\frac{b}{2}\,(\xi + \tilde{c})^2\,.$$
Наконец,
$$z = -\frac{b}{2}\,(\ln x + \tilde{c})^2 - \frac{d}{2b}\,. \tag{3.9}$$
Это основное семейство сложных решений φ_0 из [4].

1б) $b = 0, d \neq 0$. Тогда уравнение (3.8) есть
$$\dot{z} = \sqrt{-d}\,.$$
Следовательно,
$$z = \sqrt{-d}\,(\ln x + \tilde{c})\,. \tag{3.10}$$
Это $\varphi_0(\xi)$ дополнительного семейства сложных разложений из [4].

2) $c_0 \neq 0, b = d = 0$. В этом случае уравнение (3.8) имеет вид $\dot{z} = \sqrt{c_0}z$. Его решения суть

$$z = c_3 x^{\sqrt{c_0}}\,, \tag{3.11}$$

где c_3 — произвольная постоянная.

3) $c_0 = -b^2/d, bd \neq 0$, тогда уравнение (3.8) принимает вид

$$\dot{z} = (bz + d)/\sqrt{-d}\,.$$

Его решения

$$z = -\frac{d}{b} + c_1 x^{b/\sqrt{-d}}\,, \tag{3.12}$$

где c_1 — произвольная постоянная. Если число $b/\sqrt{-d}$ — чисто мнимое, то это решение является простейшим экзотическим.

4) $c_0 \neq 0, c_0 \neq -b^2/d$. В этом случае используем приём Эйлера. Положим

$$t = \frac{\sqrt{c_0 z^2 - 2bz - d} - \sqrt{-d}}{z}\,.$$

Тогда

$$c_0 z^2 - 2bz - d = (tz + \sqrt{-d})^2 = t^2 z^2 + 2\sqrt{-d}tz - d\,,$$
$$c_0 z - 2b = t^2 z + 2\sqrt{-d}t\,.$$

Следовательно,

$$z = \frac{-2b - 2\sqrt{-d}\,t}{t^2 - c_0} \stackrel{def}{=} \psi(t)\,. \tag{3.13}$$
$$\sqrt{c_0 z^2 - 2bz - d} = tz + \sqrt{-d} = t\,\psi(t) + \sqrt{-d}\,.$$

Уравнение (3.8) принимает вид

$$\frac{dz}{\sqrt{c_0 z^2 - 2bz - d}} = \frac{\psi'(t)\,dt}{t\,\psi(t) + \sqrt{-d}} = \frac{-2dt}{t^2 - c_0} = d\eta\,.$$

Здесь опущено явное вычисление $\psi'(t)$ согласно (3.13). Интегрируя последнее равенство приведением к простейшим дробям, получаем

$$-\frac{1}{\sqrt{c_0}}\,\ln(t - \sqrt{c_0}) + \frac{1}{\sqrt{c_0}}\,\ln(t + \sqrt{c_0}) = \xi + c_1\,,$$

где c_1 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$\left(\frac{t + \sqrt{c_0}}{t - \sqrt{c_0}}\right)^{1/\sqrt{c_0}} = c_2 e^{\xi} = c_2 x\,.$$

Т.е.

$$\frac{t+\sqrt{c_0}}{t-\sqrt{c_0}} = c_3 x^{\sqrt{c_0}} \stackrel{def}{=} u\,, \tag{3.14}$$

$$t = \frac{\sqrt{c_0}(c_3 x^{\sqrt{c_0}}+1)}{c_3 x^{\sqrt{c_0}}-1}\,.$$

Согласно (3.13) получаем

$$z = -2\frac{b+\sqrt{-d}\,t}{t^2-c_0} = -\frac{(u-1)[(\sqrt{-dc_0}+b)u+\sqrt{-dc_0}-b]}{2c_0 u}\,, \tag{3.15}$$

где u определено в (3.14), а c_3 — произвольная постоянная. Если $c_0 = -b^2/d$, то решение (3.15) превращается в (3.12). Случай $d = 0$ сюда включается, тогда $z = -\dfrac{b(u-1)^2}{2c_0 u}$. Итак, доказана

Теорема 1. *Решения укороченного уравнения* (3.4) *образуют следующие 5 семейств:* (3.9) *при* $b \neq 0$*;* (3.10) *при* $b = 0, d \neq 0$*;* (3.11) *при* $c_0 \neq 0, b = d = 0$*;* (3.12) *при* $c_0 = -b^2/d$*;* (3.15) *при* $c_0 \neq -b^2/d, c_0 \neq 0$.

4. Экзотические решения укороченного уравнения

Теперь и до конца препринта положим $\xi = x^{i\gamma}, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$. Тогда

$$x = \xi^{1/(i\gamma)}, \quad z' = \frac{i\gamma\dot{z}\xi}{x}, \quad z'' = -\frac{\gamma^2\ddot{z}\,\xi^2 + i\gamma\dot{z}\xi + \gamma^2\dot{z}\xi}{x^2}\,.$$

Поэтому уравнение (3.4) переходит в уравнение

$$\gamma^2 z(\xi^2\ddot{z} + \xi\dot{z}) - \gamma^2\xi^2\dot{z}^2 + bz + d = 0\,.$$

Сокращая его на γ^2, получаем уравнение

$$h_0 \stackrel{def}{=} z(\xi^2\ddot{z} + \xi\dot{z}) - \xi^2\dot{z}^2 + \tilde{b}z + \tilde{d} = 0\,, \tag{4.1}$$

где $\tilde{b} = b/\gamma^2, \tilde{d} = d/\gamma^2$. В полном (неукороченном) уравнении $h_2 = \tilde{a}z^3, h_4 = \tilde{c}z^4$, где $\tilde{a} = a/\gamma^2, \tilde{c} = c/\gamma^2$.

Согласно теореме 1 решения укороченного уравнения (3.4) содержат x в чисто мнимой степени, если $c_0 \in \mathbb{R}$ и $c_0 < 0$. При этом имеются три вида решений:

моном $\quad z = c_3 x^{i\gamma}\,,$

бином $\quad z = c_3 x^{i\gamma} - \dfrac{d}{b},\ i\gamma = b\sqrt{-d}\,,$

трином $\quad z = Ax^{i\gamma} + B + Cx^{-i\gamma}\,.$

Здесь c_3 — произвольная комплексная постоянная, а γ — произвольная вещественная постоянная для монома и тринома, но фиксированная постоянная для бинома. Уточним значения остальных постоянных A,B,C. Для этого запишем указанные решения в виде $z = A\xi + B + C\xi^{-1}$ и подставим их в уравнение (4.1). Тогда: для монома A — произвольная постоянная и $b = d = 0$; для бинома A — произвольная постоянная, $B = -d/b, C = 0$ и $\tilde{d} = \tilde{b}^2$, т.е. $\gamma^2 = b^2/d$; для тринома уравнение (4.1) принимает вид

$$(A\xi + B + C\xi^{-1})(A\xi + C\xi^{-1}) - (A\xi - C\xi^{-1})^2 + \tilde{b}(A\xi + B + C\xi^{-1}) + \tilde{d} = 0\,.$$

Запишем его в виде

$$(A\xi + C\xi^{-1})^2 - (A\xi - C\xi^{-1})^2 + B(A\xi + C\xi^{-1}) + \tilde{b}(A\xi + C\xi^{-1}) + \tilde{b}B + \tilde{d} = 0\,.$$

Далее имеем

$$(2A\xi)^2 \cdot (2C\xi^{-1})^2 + (B + \tilde{b})(A\xi + C\xi^{-1}) + \tilde{b}B + \tilde{d} = 0\,.$$

Следовательно,

$$B + \tilde{b} = 0, \quad 4AC + \tilde{b}B + \tilde{d} = 0\,,$$

т.е.

$$B = -\tilde{b} = -b/\gamma^2, \quad 4AC - \tilde{b}^2 + \tilde{d} = 0, \quad \tilde{d} - \tilde{b}^2 = \frac{\gamma^2 d - b^2}{\gamma^4} \neq 0\,.$$

Итак, будем различать 5 следующих семейств экзотических решений укороченного уравнения (3.4).

Семейства $F_1^{\pm} : z = A\xi, \xi = x^{i\gamma},\ \pm 1 = sgn\,\gamma$ при $b = d = 0$.
Семейства $F_2^{\pm} : z = A\xi - d/b, \xi = x^{i\gamma},\ \pm 1 = sgn\,\gamma$ при $\gamma^2 = b^2/d$.
Семейство $F_3 : z = A\xi + B + C\xi^{-i\gamma}$, где $4\gamma^4 AC = b^2 - \gamma^2 d, B = -b/\gamma^2$, при $b^2 - \gamma^2 d \neq 0$.

Упражнение 1. Получить эти же решения из уравнения (4.1) методами статьи [1], разлагая решения в степенной ряд.

Решения уравнения (3.3) имеют вид

$$z = \varphi_0(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}(\xi) x^{2k}, \tag{4.2}$$

где $\varphi_0(\xi)$ принадлежит одному из семейств $F_1^{\pm}, F_2^{\pm}$ и F_3. Соответствующие семейства экзотических разложений (4.2) обозначим через $\mathcal{F}_1^{\pm}, \mathcal{F}_2^{\pm}$ и $\mathcal{F}_3$ возможно с дополнительными нижними индексами. Ниже вычислим коэффициенты $\varphi_{2k}(\xi)$ для разложений из этих семейств.

5. Семейства $F_1^{\pm}$

Здесь $b = d = 0$. Согласно теореме 2 [4] для $\varphi_2(\xi)$ получается уравнение

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} x^2 \varphi_2 + x^2 h_2(\varphi_0) = 0\,, \tag{5.1}$$

где согласно (4.1)

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} = z\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + z\xi \frac{d}{d\xi} - 2\xi^2 \dot{z} \frac{d}{d\xi} + \xi^2 \ddot{z} + \xi \dot{z} = z\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + (z - 2\dot{z}\xi)\xi \frac{d}{d\xi} + \xi \dot{z}\,, \tag{5.2}$$

$h_2 = \tilde{a}\varphi_0^3, \varphi_0 = z = A\xi, \dot{z} = A, \ddot{z} = 0.$

По следствию 1

$$\begin{gathered} \xi \frac{d}{d\xi}(x^2 \varphi_2) = x^2 \left[\frac{2}{i\gamma} \varphi_2 + \xi \dot{\varphi}_2 \right]\,, \\ \xi^2 \frac{d}{d\xi}(x^2 \varphi_2) = x^2 \left[\frac{2}{i\gamma} \left(\frac{2}{i\gamma} - 1 \right) \varphi_2 + \frac{4}{i\gamma} \xi \dot{\varphi}_2 + \xi^2 \ddot{\varphi}_2 \right]\,. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Следовательно, после сокращения на x^2 уравнение (5.1) принимает вид

$$A\xi \left[\frac{2}{i\gamma} \left(\frac{2}{i\gamma} - 1 \right) \varphi_2 + \frac{4}{i\gamma} \xi \dot{\varphi}_2 + \xi^2 \ddot{\varphi}_2 \right] - A\xi \left[\frac{2}{i\gamma} \varphi_2 + \xi \dot{\varphi}_2 \right] + A\xi \varphi_2 + \tilde{a}(A\xi)^3 = 0\,.$$

Сокращая его на $A\xi$, получаем уравнение

$$\frac{2}{i\gamma} \left(\frac{2}{i\gamma} - 2 \right) \varphi_2 + \varphi_2 + \left(\frac{4}{i\gamma} - 1 \right) \xi \dot{\varphi}_2 + \xi^2 \ddot{\varphi}_2 + \tilde{a} A^2 \xi^2 = 0\,. \tag{5.4}$$

Его носитель состоит из двух точек $Q = (q_1, q_2)$: $(0,1)$ и $(2,0)$. Следовательно, ищем решение вида $\varphi_2 = D\xi^2, D = const$. Подставляя это выражение в уравнение (5.4) и сокращая его на ξ^2, получаем уравнение

$$\frac{2}{i\gamma} \left(\frac{2}{i\gamma} - 2 \right) D + D + \left(\frac{4}{i\gamma} - 1 \right) 2D + 2D + \tilde{a} A^2 = 0\,,$$

т.е.

$$\frac{4}{i\gamma} \left(\frac{1}{i\gamma} + 1 \right) D + D = -\tilde{a} A^2\,.$$

Следовательно,

$$D = \frac{\gamma^2 \tilde{a} A^2}{4(1 + i\gamma) - \gamma^2} = \frac{a A^2}{(2 + i\gamma)^2}\,. \tag{5.5}$$

Вычислим $\varphi_4(\xi)$. Согласно теореме 2 [4] для $\varphi_4(\xi)$ получается уравнение

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} x^4 \varphi_4(\xi) + x^2 \frac{\delta h_2}{\delta z} x^2 \varphi_2 + x^4 h_4(\varphi_0) = 0\,, \tag{5.6}$$

где справедливо (5.2), $\dfrac{\delta h_2}{\delta z} = \dfrac{dh_2}{dz} = 3\tilde{a}z^2, \varphi_2 = D\xi^2, h_4 = \tilde{c}z^4, \varphi_0 = z = A\xi$.

По следствию 1

$$\begin{gathered} \xi \frac{d}{d\xi}(x^4\varphi_4) = x^4 \left[\frac{4}{i\gamma}\varphi_4 + \xi\dot{\varphi}_4\right]\,, \\ \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2}(x^4\varphi_4) = x^4 \left[\frac{4}{i\gamma}\left(\frac{4}{i\gamma} - 1\right)\varphi_4 + \frac{8}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_4 + \xi^2\ddot{\varphi}_4\right]\,. \end{gathered} \tag{5.7}$$

После сокращения на x^4 уравнение (5.6) принимает вид

$$A\xi \left[\frac{4}{i\gamma}\left(\frac{4}{i\gamma} - 1\right)\varphi_4 + \frac{8}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_4 + \xi^2\ddot{\varphi}_4\right] - A\xi\left[\frac{4}{i\gamma}\varphi_4 + \xi\dot{\varphi}_4\right] + A\xi\varphi_4 + \\ + 3\tilde{a}(A\xi)^2 D\xi^2 + \tilde{c}(A\xi)^4 = 0\,.$$

Сокращая это уравнение на $A\xi$, получаем уравнение

$$\frac{4}{i\gamma}\left(\frac{4}{i\gamma} - 2\right)\varphi_4 + \varphi_4 + \left(\frac{8}{i\gamma} - 1\right)\xi\dot{\varphi}_4 + \xi^2\ddot{\varphi}_4 + 3\tilde{a}A\xi D\xi^2 + \tilde{c}(A\xi)^3 = 0\,. \tag{5.8}$$

Носитель этого уравнения состоит из двух точек $(0,1)$ и $(3,0)$. Поэтому ищем решение в виде $\varphi_4 = E\xi^3, E = const$. Подставляя это φ_4 в уравнение (5.8) и сокращая его на ξ^3, получаем уравнение

$$\left[\frac{4}{i\gamma}\left(\frac{4}{i\gamma} - 2\right) + \left(\frac{8}{i\gamma} - 1\right)3 + 7\right]E + 3\tilde{a}AD + \tilde{c}A^3 = 0\,.$$

Учитывая (5.5), получаем уравнение

$$\left[\frac{8}{i\gamma}\left(\frac{2}{i\gamma} + 2\right) + 4\right]E + \frac{3\gamma^2\tilde{a}^2A^3}{(2+i\gamma)^2} + \tilde{c}A^3 = 0\,.$$

Следовательно,

$$E = \frac{\gamma^2}{4(2+i\gamma)^2}\left[\frac{3\gamma^2\tilde{a}^2}{(2+i\gamma)^2} + \tilde{c}\right]A^3 = \frac{1}{4(2+i\gamma)^2}\left[\frac{3a^2}{(2+i\gamma)^2} + \tilde{c}\right]A^3\,. \tag{5.9}$$

Естественно предположить, что все $\varphi_{2k}(\xi) = const\cdot\,\xi^{k+1}$. Покажем, что это действительно так и вычислим явно ряд (4.2).

В нашем случае $b = d = 0$, поэтому полное уравнение (3.3) имеет вид

$$-z(x^2 z'' + xz') + x^2 z'^2 + ax^2 z^3 + cx^4 z^4 = 0\,. \tag{5.10}$$

Его носитель целиком лежит на верхнем ребре треугольника рис. 2, которое соответствует верхнему ребру треугольника рис. 1. Сделаем степенное преобразование

$$w = \frac{1}{zx^2}\,, \tag{5.11}$$

где w — новая зависимая переменная. Тогда

$$z = \frac{1}{wx^2}\,, \tag{5.12}$$

$$z' = -\frac{w'x^2 + 2xw}{(wx^2)^2} = -\frac{w'x + 2w}{w^2 x^3}\,,$$

$$z'' = -\frac{w''x^2 + 4xw' + 2w}{(wx^2)^2} + 2\frac{(w'x^2 + 2xw)^2}{(wx^2)^3} = \frac{-wx^2 w'' + 4xw'w + 2x^2 w'^2 + 6w^2}{w^3 x^4}\,.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5.10), умножая его на $w^4 x^4$ и приводя подобные, получаем уравнение

$$w(w''x^2 + w'x) - x^2 w'^2 + aw + c = 0\,. \tag{5.13}$$

Оно аналогично уравнению (3.4) с заменой w,a,c на z, $-b$, $-d$. Но решения уравнения (3.4) описаны в теореме 1. В частности они имеют вид (3.15), который после указанной замены есть

$$w = -\frac{(u-1)[(\sqrt{cc_0} - a)u + \sqrt{cc_0} + a]}{2c_0 u}\,,$$

где $u = c_3 x^{\sqrt{c_0}}$. Если $\sqrt{c_0} = 2 + i\gamma$, то согласно (5.11)

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{wx^2} &= -\frac{2c_0 c_3 x^{2+i\gamma}}{x^2(c_3 x^{2+i\gamma} - 1)\left[(\sqrt{cc_0} - a)c_3 x^{2+i\gamma} + \sqrt{cc_0} + a\right]} = \\ &= \frac{2c_0 c_3 \xi}{(1 - c_3 x^2 \xi)(\sqrt{cc_0} + a)\left[1 + \dfrac{\sqrt{cc_0} - a}{\sqrt{cc_0} + a} c_3 x^2 \xi\right]}\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Разлагая эту дробь в степенной ряд по $x^2\xi$, получим разложение (4.2), где

$$\varphi_0 = \frac{2c_0 c_3}{\sqrt{cc_0} + a}\xi = A\xi\,. \tag{5.15}$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Для семейства $\mathcal{F}_1^{\pm}$ разложение (4.2) является разложением дроби (5.14) в степенной ряд по $x^2\xi$. При этом выполнено правило (5.15).*

Упражнение 2. Проверить, что $\varphi_2(\xi)$ и $\varphi_4(\xi)$, полученные из (5.14), совпадают с (5.5) и (5.9) соответственно.

6. Семейства $\mathcal{F}_2^{\pm}$

Здесь $\gamma^2 = b^2/d$ и уравнение для φ_2 есть (5.1), но теперь

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} = z\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2}+z\xi\frac{d}{d\xi}-2\dot{z}\xi^2\frac{d}{d\xi}+\xi\dot{z}+\tilde{b} = z\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2}+(z-2\dot{z}\xi)\xi\frac{d}{d\xi}+\xi\dot{z}+\tilde{b}\,, \quad (6.1)$$

$$z = \varphi_0 = A\xi - d/b \stackrel{def}{=} A\xi - \tilde{b}, \text{ ибо } \tilde{b} = \frac{b}{\gamma^2} = \frac{bd}{b^2}\,. \quad (6.2)$$

Формулы (5.2) остаются справедливыми и уравнение (5.1) после сокращения на x^2 принимает вид

$$(A\xi-\tilde{b})\left[\frac{2}{i\gamma}\left(\frac{2}{i\gamma}-1\right)\varphi_2+\frac{4}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_2+\xi^2\ddot{\varphi}_2\right]-(A\xi+\tilde{b})\left[\frac{2}{i\gamma}\varphi_2+\xi\dot{\varphi}_2\right]+$$
$$+(A\xi+\tilde{b})\varphi_2+\tilde{a}(A\xi-\tilde{b})^3=0\,. \quad (6.3)$$

Носитель и многоугольник Ньютона этого уравнения показаны на рис. 3.

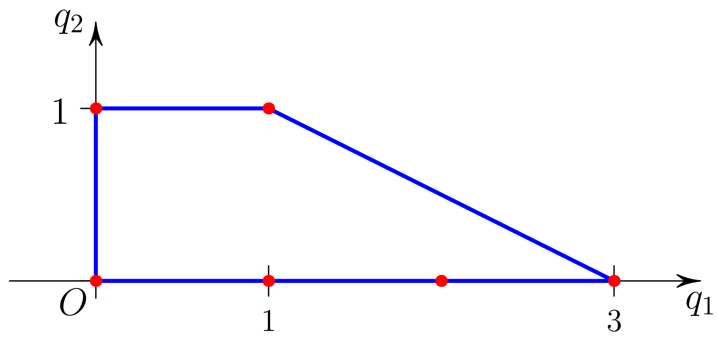

Рис. 3. Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (6.3).

Поскольку левое ребро многоугольника вертикально, а правое имеет наклон -2, то полиномиальное решение должно быть многочленом второй степени

$$\varphi_2 = D\xi^2+E\xi+F\,. \quad (6.4)$$

Тогда

$$\xi\dot{\varphi}_2 = 2D\xi^2+E\xi, \quad \xi^2\ddot{\varphi}_2 = 2D\xi^2\,.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.3) и приравнивая нулю коэффициенты при ξ^3,ξ^2,ξ^1,ξ^0, получаем систему 4 линейных алгебраических уравнений для трёх неизвестных D,E,F. Она имеет решение

$$D = \frac{aA^2}{(2+i\gamma)^2}\,, \quad E = -\frac{a\tilde{b}A}{2+i\gamma}\,, \quad F = \frac{a\tilde{b}^2}{4+\gamma^2}\,. \tag{6.5}$$

Коэффициент φ_4 удовлетворяет уравнению (5.6), где справедливы (6.1), (6.2), (6.4), (6.5) и

$$\frac{\delta h_2}{\delta z} = 3\tilde{a}z^2, \quad h_4 = \tilde{c}z^4\,.$$

В уравнении (5.6) свободная от φ_4 часть линейно зависит от двух параметров a^2 и c. Поэтому его решение также линейно зависит от этих параметров. Поэтому достаточно решить уравнение (5.6) в двух случаях:

$$\begin{aligned} &1) a = 0,\ c \neq 0\,, \\ &2) a \neq 0,\ c = 0\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Рассмотрим первый случай. Тогда уравнение (5.6) имеет вид

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} x^4 \varphi_4(\xi) + x^4 h_4(\varphi_0) = 0\,.$$

Согласно (6.1) и (5.7) это уравнение есть

$$(A\xi - \tilde{b})\left[\frac{4}{i\gamma}\left(\frac{4}{i\gamma} - 1\right)\varphi_4 + \frac{8}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_4 + \xi^2\ddot{\varphi}_4\right] - (A\xi + \tilde{b})\left[\frac{4}{i\gamma}\varphi_4 + \xi\dot{\varphi}_4\right] + \\ + (A\xi + \tilde{b})\varphi_4 + \tilde{c}(A\xi - \tilde{b})^4 = 0\,. \tag{6.7}$$

Носитель и многоугольник Ньютона этого уравнения показаны на рис. 4.

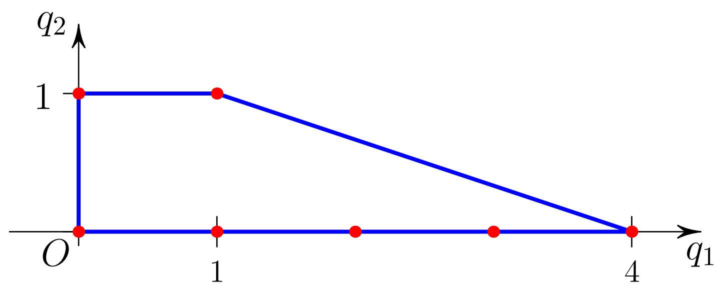

Рис. 4. Носитель и многоугольник уравнения (6.7).

Поскольку левое ребро многоугольника вертикально, а правое имеет наклон -3, то полиномиальное решение уравнения (6.7)должно быть многочленом третьей степени

$$\varphi_4 = G\xi^3 + H\xi^2 + I\xi + J\,. \tag{6.8}$$

Тогда

$$\xi\dot\varphi_4 = 3G\xi^3 + 2H\xi^2 + I\xi, \quad \xi^2\ddot\varphi_4 = 6G\xi^3 + 2H\xi^2 .$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.7) и приравнивая нулю коэффициенты при ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ^1,ξ^0, получаем линейную систему 5 уравнений для 4 неизвестных G,H,I,J. Она имеет решение

$$G = \frac{cA^3}{4(2+i\gamma)^2}, \; H = -\frac{2c\tilde b A^2(3+i\gamma)}{(4+i\gamma)^2(2+i\gamma)}, \; I = \frac{c\tilde b^2 A(12+5i\gamma)}{8(4+i\gamma)(2+i\gamma)}, \; J = -\frac{c\tilde b^3}{16+\gamma^2} . \tag{6.9}$$

Рассмотрим второй случай (6.6). Уравнение (5.6) принимает вид

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}x^4\varphi_4 + x^2\frac{\delta h_2}{\delta z}x^2\varphi_2 = 0 .$$

В развёрнутом виде после сокращения на x^4 оно есть

$$(A\xi-\tilde b)\left[\frac{4}{i\gamma}\left(\frac{4}{i\gamma}-1\right)\varphi_4 + \frac{8}{i\gamma}\xi\dot\varphi_4 + \xi^2\ddot\varphi_4\right] - (A\xi+\tilde b)\left[\frac{4}{i\gamma}\varphi_4 + \xi\dot\varphi_4\right] +$$

$$+(A\xi+\tilde b)\varphi_4 + 3\tilde a(A\xi-\tilde b)^2 a\left[\frac{A^2}{(2+i\gamma)^2}\xi^2 - \frac{\tilde b A}{2+i\gamma}\xi + \frac{\tilde b^2}{4+\gamma^2}\right] = 0 .$$

Носитель и многоугольник Ньютона этого уравнения показаны на рис. 4. Поэтому его полиномиальное решение должно иметь вид (6.8). Но в данном случае система 5 линейных уравнений для четырёх коэффициентов G,H,I,J не имеет решения при вещественном $\gamma \neq 0$. Следовательно, надеяться на полиномиальность $\varphi_{2k}(\xi)$ можно только при $a = 0$. Тогда $\varphi_6 \equiv 0$ и $\varphi_2 \equiv 0$. По теореме 2 [4] уравнение для φ_8 при $a = 0$ есть

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}(x^8\varphi_8) + x^4\frac{\delta h_4}{\delta z}x^4\varphi_4 = 0 , \tag{6.10}$$

где справедливы (5.3), (6.1), (6.2), $\delta h_4/\delta z = 4\tilde c z^3$, а φ_4 определено в (6.8), (6.9). Используя следствие 1, можно сократить уравнение (6.10) на x^8, получится уравнение

$$(A\xi-\tilde b)\left[\frac{8}{i\gamma}\left(\frac{8}{i\gamma}-1\right)\varphi_8 + \frac{16}{i\gamma}\xi\dot\varphi_8 + \xi^2\ddot\varphi_8\right] - (A\xi+\tilde b)\left[\frac{8}{i\gamma}\varphi_8 + \xi\dot\varphi_8\right] +$$

$$+(A\xi+\tilde b)\varphi_8 + 4\tilde c(A\xi-\tilde b)^3\varphi_4 = 0 . \tag{6.11}$$

Носитель и многоугольник Ньютона этого уравнения показаны на рис. 5. Ле-

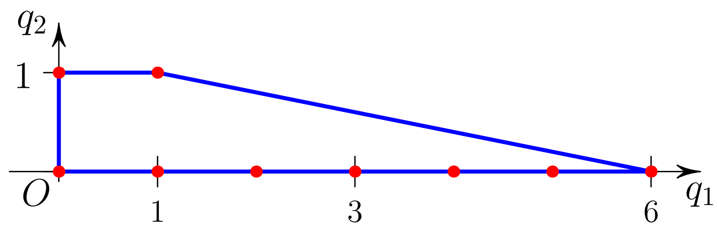

Рис. 5. Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (6.11).

вое ребро многоугольника вертикально, а правое имеет наклон -5. Поэтому полиномиальное решение должно быть многочленом 5- степени

$$\varphi_8 = K\xi^5 + L\xi^4 + M\xi^3 + N\xi^2 + O\xi + P\,.$$

Тогда

$$\xi\dot{\varphi}_8 = 5K\xi^5 + 4L\xi^4 + 3M\xi^3 + 2N\xi^2 + O\xi\,,$$

$$\xi^2\ddot{\varphi}_8 = 20K\xi^5 + 12L\xi^4 + 6M\xi^3 + 2N\xi^2\,.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.11) и приравнивая нулю коэффициенты при ξ^6,ξ^5,ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ^1,ξ^0, получаем линейную систему 7 уравнений для 6 констант K,L,M,N, O,P. Однако вычисление этой системы очень громоздко и здесь не будем это делать.

Итак, доказана

Теорема 3. *Для семейства $\mathcal{F}_2^{\pm}$ второй коэффициент $\varphi_2(\xi)$ экзотического разложения решения* (4.2) *является полиномом, третий коэффициент $\varphi_4(\xi)$ является полиномом тогда и только тогда, когда параметр уравнения $a = 0$.*

Если коэффициент $\varphi_{2k}(\xi)$ является полиномом, то он единственный. Если нет полиномиального коэффициента $\varphi_{2k}(\xi)$, то их может быть два разных: один по убывающим степеням ξ, а другой — по возрастающим степеням ξ. Поэтому, если в разложении (4.2) не все $\varphi_{2k}(\xi)$ полиномы, то имеется два разных разложения:

$$\mathcal{F}_{2-}^{+} - \text{ по убывающим степеням } \xi \quad \text{и}$$

$$\mathcal{F}_{2+}^{+} - \text{ по возрастающим степеням } \xi\,.$$

При этом в семействе $\mathcal{F}_{2-}^{+}$ степени ξ в $\varphi_{2k}(\xi)$ начинаются с $k+1$ и убывают, а в семействе $\mathcal{F}_{2+}^{+}$ они начинаются с нуля и возрастают. Более того, члены степеней $k+1$ в $\varphi_{2k}(\xi)$ из семейства $\mathcal{F}_{2-}^{+}$ образуют степенной ряд $\xi\sum\limits_{k=0}^{\infty}\rho_k(x^2\xi)^k$, описанный в теореме 2, ибо он является решением укороченного уравнения, соответствующего верхнему ребру рис. 2.

Отметим ещё, что коэффициенты $\varphi_{2k}(\xi)$, являющиеся степенными рядами от ξ, сходятся для достаточно больших $|\xi|$ в случае $\mathcal{F}_{2-}^{+}$ и для достаточно малых $|\xi|$ в случае $\mathcal{F}_{2+}^{+}$, ибо у уравнения для $\varphi_{2k}(\xi)$ оба укороченных уравнения содержат $\ddot{\varphi}_{2k}$.

7. Семейство $\mathcal{F}_3$

Согласно концу раздела 4 теперь

$$\varphi_0(\xi) = z = A\xi + B + C\xi^{-1}\,, \tag{7.1}$$

где $B = -\tilde{b} = -b/\gamma^2$, $4AC = \tilde{b}^2 - \tilde{d} \neq 0$. Вычислим коэффициент $\varphi_2(\xi)$. По теореме 2 [4] он удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} x^2 \varphi_2 + x^2 h_2(\varphi_0) = 0\,,$$

где

$$\frac{\delta h_0}{\delta z} = z\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + (z - 2\dot{z}\xi)\xi\frac{d}{d\xi} + \tilde{b} + \xi^2\ddot{z} + \xi\dot{z}\,, \quad h_2 = \tilde{a}z^3\,. \tag{7.2}$$

Согласно (7.1) $\xi\dot{z} = A\xi - C\xi^{-1}$, $\xi^2\ddot{z} = 2C\xi^{-1}$. Поэтому, применяя следствие 1 и сокращая на x^2, получаем уравнение

$$\begin{aligned}(A\xi + B + C\xi^{-1})\,\left[\frac{2}{i\gamma}\left(\frac{2}{i\gamma} - 1\right)\varphi_2 + \frac{4}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_2 + \xi^2\ddot{\varphi}_2\right] + \\ + (-A\xi + B + 3C\xi^{-1})\,\left[\frac{2}{i\gamma}\varphi_2 + \xi\dot{\varphi}_2\right] + \\ + (A\xi - B + C\xi^{-1})\varphi_2 + \tilde{a}(A\xi + B + C\xi^{-1})^3 = 0\,.\end{aligned} \tag{7.3}$$

Его носитель и многоугольник Ньютона показаны на рис. 6.

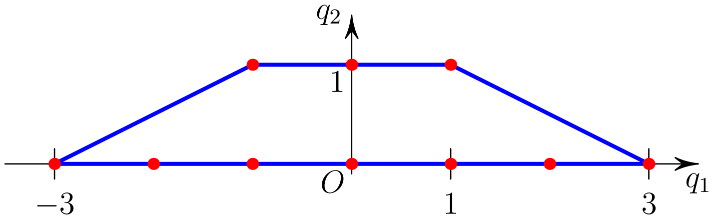

Рис. 6. Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (7.3).

Левое ребро многоугольника имеет наклон 2, а правое: -2. Поэтому решение в виде полинома Лорана должно иметь степени по ξ от -2 до $+2$, т.е.

$$\varphi_2 = D\xi^2 + E\xi + F + G\xi^{-1} + H\xi^{-2}\,, \tag{7.4}$$

где D,E,F,G,H — постоянные. Тогда

$$\xi\dot{\varphi}_2 = 2D\xi^2 + E\xi - G\xi^{-1} - 2H\xi^{-2}\,,$$

$$\xi^2\ddot{\varphi}_2 = 2D\xi^2 + 2G\xi^{-1} + 6H\xi^{-2}\,.$$

Отметим ещё, что

$$\varphi_0^3 = (A\xi + B + C\xi^{-1})^3 = A^3\xi^3 + 3A^2B\xi^2 + 3(AB^2 + A^2C)\xi + B^3 + 6ABC +$$

$$+3(AC^2 + B^2C)\xi^{-1} + 3BC^2\xi^{-2} + C^3\xi^{-3}\,.$$

Подставив эти выражения в уравнение (7.3) и приравняв нулю коэффициенты при ξ^3,ξ^2, ξ,ξ^0,ξ^{-1},ξ^{-2},ξ^{-3}, получаем систему 7 линейных уравнений для 5 коэффициентов D,E, F,G,H. Будем составлять и решать эти уравнения последовательно для D,E,F,G,H. Эти вычисления дают

$$D = \frac{\tilde{a}A^2\gamma^2}{(2+i\gamma)^2},\ E = \frac{\tilde{a}AB\gamma^2}{2+i\gamma},\ F = \frac{\tilde{a}B^2\gamma^2}{4+\gamma^2} + \tilde{a}AC\frac{(8+6\gamma^2)\gamma^2}{(4+\gamma^2)^2}, \tag{7.5}$$

$$G = \frac{\tilde{a}BC\gamma^2}{2-i\gamma},\ H = \frac{\tilde{a}C^2\gamma^2}{(2-i\gamma)^2}\,. \tag{7.6}$$

Теперь вычислим $\varphi_4(\xi)$ в случаях (6.6). Начнём со случая 1. Тогда уравнение для φ_4 имеет вид

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}x^4\varphi_4 + x^4h_4 = 0\,, \tag{7.7}$$

где $\frac{\delta h_0}{\delta z}$ приведено в (7.2), $h_4 = \tilde{c}z^4$, $z = \varphi_0 = A\xi + B + C\xi^{-1}$. Применяя следствие 1 и сокращая на x^4, из (7.7) получаем уравнение

$$(A\xi + B + C\xi^{-1})\ \left[\frac{4}{i\gamma}\left(\frac{4}{i\gamma} - 1\right)\varphi_4 + \frac{8}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_4 + \xi^2\ddot{\varphi}_4\right] +$$
$$+ (-A\xi + B + 3C\xi^{-1})\left[\frac{4}{i\gamma}\varphi_4 + \xi\dot{\varphi}_4\right] +$$
$$+ (A\xi - B + C\xi^{-1})\varphi_4 + \tilde{c}(A\xi + B + C\xi^{-1})^4 = 0\,. \tag{7.8}$$

Его носитель и многоугольник Ньютона показаны на рис. 7. Боковые рёбра многоугольника имеют наклон ± 3. Поэтому решение в виде полинома Лорана должно иметь степени ξ от -3 до $+3$. Итак, ищем решение в виде

$$\varphi_4 = I\xi^3 + J\xi^2 + K\xi + L + M\xi^{-1} + N\xi^{-2} + O\xi^{-3}\,. \tag{7.9}$$

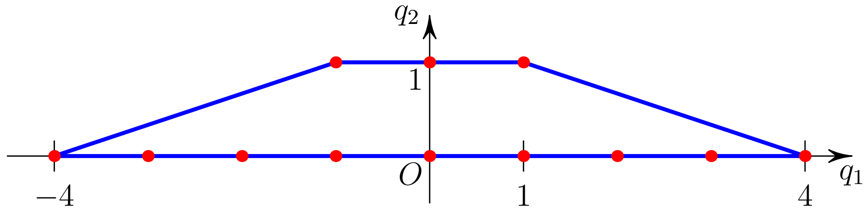

Рис. 7. Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (7.8).

Тогда

$$\xi\dot{\varphi}_4 = 3I\xi^3 + 2J\xi^2 + K\xi - M\xi^{-1} - 2N\xi^{-2} - 3O\xi^{-3}\,,$$

$$\xi^2\ddot{\varphi}_4 = 6I\xi^3 + 2J\xi^2 + 2M\xi^{-1} + 6N\xi^{-2} + 12O\xi^{-3}\,.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}(A\xi + B + C\xi^{-1})^4 = A^4\xi^4 + 4A^3B\xi^3 + (6A^2B^2 + 4A^3C)\xi^2 + \\ + (4AB^3 + 12A^2BC)\xi + B^4 + 6A^2C^2 + 12AB^2C + (4B^3C + 12ABC^2)\xi^{-1} + \\ + (6B^2C^2 + 4AC^3)\xi^{-2} + 4BC^3\xi^{-3} + C^4\xi^{-4}\,. \quad (7.10)\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в систему (7.8) и приравнивая нулю коэффициенты при ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ,ξ^0,ξ^{-1},ξ^{-2},ξ^{-3},ξ^{-4}, получаем линейную систему 9 уравнений для 7 коэффициентов I,J,K,L,M,N,O. Эта система имеет решение

$$I = \frac{\tilde{c}A^3\gamma^2}{4(2+i\gamma)^2}, \quad J = \frac{2\tilde{c}A^2B\gamma^2(3+i\gamma)}{(2+i\gamma)(4+i\gamma)^2},$$

$$K = \frac{\tilde{c}AB^2\gamma^2(12+5i\gamma)}{8(2+i\gamma)(4+i\gamma)} + \frac{\tilde{c}A^2C\gamma^2(3+2i\gamma)}{4(2+i\gamma)^2},$$

$$L = \frac{\tilde{c}B^3\gamma^2}{16+\gamma^2} + \frac{2\tilde{c}ABC(48+5\gamma^2)}{(16+\gamma^2)^2},$$

$$M = \frac{\tilde{c}B^2C\gamma^2(12-5i\gamma)}{8(2-i\gamma)(4-i\gamma)} + \frac{\tilde{c}AC^2\gamma^2(3-2i\gamma)}{4(2-i\gamma)^2},$$

$$N = \frac{2\tilde{c}BC^2\gamma^2(3-i\gamma)}{(2-i\gamma)(4-i\gamma)^2}\,, \quad O = \frac{\tilde{c}C^3\gamma^2}{4(2-i\gamma)^2}\,.$$

Во втором случае (6.6) уравнение для φ_4 есть

$$\frac{\delta h_0}{\delta z}x^4\varphi_4 + x^2\frac{\delta h_2}{\delta z}x^2\varphi_2 = 0\,.$$

В подробном уравнении часть с φ_4 такая же, как в (7.8), а добавка с φ_2 есть $3\tilde{a}(A\xi + B + C\xi^{-1})^2\varphi_2$, где φ_2 имеет вид (7.4), (7.5). Решение ищем в виде (7.9). Соответствующая система 9 линейных уравнений для 7 коэффициентов не имеет решения при вещественном $\gamma \neq 0$. Итак, доказана

Теорема 4. *Для семейства* $\mathcal{F}_3$ *экзотических разложений* (4.2) *второй коэффициент* $\varphi_2(\xi)$ *всегда полином Лорана, а третий коэффициент* $\varphi_4(\xi)$ *является полиномом Лорана только при* $a = 0$.

Заметим, что поскольку не все коэффициенты $\varphi_{2k}(\xi)$ являются полиномами Лорана, то имеются 2 разных семейства экзотических разложений $\mathcal{F}_{3\pm}$: в семействе $\mathcal{F}_{3+}$ в коэффициентах $\varphi_{2k}(\xi)$ степени ξ возрастают от $-(k+1)$, а в $\mathcal{F}_{3-}$ они убывают от $k+1$. Все эти ряды сходятся для малых $|\xi|$ и для больших $|\xi|$ соответственно. Кроме того, члены степеней $-(k+1)$ в $\mathcal{F}_{3+}$ и степеней $k+1$ в $\mathcal{F}_{3-}$ образуют степенные ряды от $x^{2k}\xi^{-1}$ и $x^{2k}\xi$, которые рассмотрены в теореме 2.

Список литературы

[1] А. Д. Брюно, Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004, Т. 59, № 3, с. 31–80.

[2] А. Д. Брюно, Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2006, Т. 406, № 6, с. 730–733.

[3] А. Д. Брюно, Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2007, Т. 416, № 5, с. 583–587.

[4] А. Д. Брюно, Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, № 55. DOI:10.20948/prepr-2017-55 URL:http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-55

[5] А. Д. Брюно, О сложных разложениях решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011, № 15.

[6] А. Д. Брюно, И. В. Горючкина, Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Туды ММО, 2010б Т. 71, С. 6–118.

[7] А. Д. Брюно, А. В. Парусникова, Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН, 2011, Т. 438, № 4, С. 439–443.

Список иллюстраций

1 Носитель и многоугольник уравнения (3.1) при $abcd \neq 0$. 5
2 Носитель и многоугольник уравнения (3.3). 6
3 Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (6.3). 14
4 Носитель и многоугольник уравнения (6.7). 15
5 Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (6.11). 17
6 Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (7.3). 18
7 Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (7.8). 20

Содержание

1 Введение 3
2 Об экзотических разложениях 4
3 Уравнение P_3 и все решения его укороченного уравнения 4
4 Экзотические решения укороченного уравнения 9
5 Семейства $F_1^{\pm}$ 11
6 Семейства $\mathcal{F}_2^{\pm}$ 14
7 Семейство $\mathcal{F}_3$ 18
Список литературы 21
Список иллюстраций 22