



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Истомина М.А.

О реализации одномерного
квазигазодинамического
алгоритма в открытом
программном комплексе
OpenFOAM

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Истомина М.А. О реализации одномерного квазигазодинамического алгоритма в открытом программном комплексе OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 1. 19 с. doi:[10.20948/prepr-2018-1](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-1)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-1>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

М.А. Истомина

О реализации одномерного
квазигазодинамического алгоритма в открытом
программном комплексе OpenFOAM

Москва — 2018

М.А. Истомина **О реализации одномерного квазигазодинамического алгоритма в открытом программном комплексе OpenFOAM.**

Аннотация. Приведен пример включения квазигазодинамического алгоритма в открытый программный комплекс OpenFOAM. Преимуществами OpenFOAM являются ориентированность на пользователя, разделение понятий геометрии и расчетной области, возможность выбора дискретизации основных уравнений и визуализации основных результатов. Решатель QGDFoam протестирован на одномерных характерных тестах о распадах разрывов. Проведено сравнение решений, полученных с помощью решателя QGDFoam и встроенного решателя rhoCentralFoam. Версии QGDFoam находятся в открытом доступе на

<http://github.com/unicfdlab/QGDSolver/>.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, открытый программный комплекс OpenFOAM, решатели QGDFoam и rhoCentralFoam, квазигазодинамический подход, конечно-разностная аппроксимация

М.А. Istomina **About realization of one-dimensional quasi-gas dynamic algorithm in the open program OpenFOAM complex.**

Abstract. An example of including a quasi-gas-dynamic algorithm in the OpenFOAM open-source software package is given. Advantages of OpenFOAM are user orientation, separation of concepts of geometry, calculation area, choice of basic equations descretization and visualization of main results. The QGDFoam solver was tested on one-dimensional characteristic tests on breakdowns of discontinuities. A comparison of solutions is made using QGDFoam and the built-in solver of rhoCentralFoam. The QGDFoam versions are publicly available on the

<http://github.com/unicfdlab/QGDSolver/>.

Key words: gas dynamic equations, OpenFOAM, QGDFoam and rhoCentralFoam solvers, quasi-gas dynamic approach, finite-difference approximation

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 16-01-00048 и 18-01-00587 и программы № 26 президиума РАН.

Введение

На основании введенной в работах [1], [2], [3] квазигазодинамической системы уравнений газовой динамики было проведено множество расчетов течений вязкого сжимаемого газа для различных модельных и прикладных задач. Однако все эти расчеты были выполнены с использованием индивидуальных программ и программных комплексов. Для того, чтобы расширить применение КГД подхода на более широкий круг задач и предоставить возможность использования этого метода широкому кругу пользователей, КГД алгоритм был реализован в программном пакете OpenFOAM. В разработке и развитии открытого пакета OpenFOAM принимают участие множество организаций и сотни разработчиков по всему миру.

OpenFOAM (англ. Open Source Field Operation And Manipulation) — открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред, в которой используется метод конечного объема. OpenFOAM предназначен для вычисления операций со скалярными, векторными и тензорными полями.

В основе кода лежит набор библиотек, предоставляющих инструменты для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Рабочим языком кода является ООП C++.

В коде разделяются такие понятия, как геометрия и расчетная сетка, выбор дискретизации основных уравнений и визуализация полученных результатов (SALOME/OpenFOAM/ParaView).

OpenFOAM разрабатывался в Имперском колледже Лондона в 1991–2003 гг. (H. Weller and H. Jasak), в открытом доступе с 2004 г. на условиях GPL лицензии. Входит в состав CAE Linux. Название и идеология взяты от предшественника FOAM (Field Operation And Manipulation). В настоящее время параллельно разрабатываются несколько ответвлений от пакета OpenFOAM, поддерживаемые разными компаниями. Основная версия открытого пакета OpenFOAM принадлежит OpenCFD, UK, во главе с основателем H. Weller — www.openfoam.org.

Преимуществом OpenFOAM можно считать ориентацию на пользователя, возможность использования как готовых решателей и утилит, так и средств решения задач механики сплошной среды в виде классов C++.

Для решения задач механики сплошной среды в открытом пакете OpenFOAM представлен широкий круг решателей. Исходный код различных решателей объединен по классу задач и собран в следующих папках OpenFOAM: DNS (прямое численное моделирование), basic (простейшие уравнения), combustion (задачи горения), compressible (сжимаемые течения), discreteMethods (дискретные методы), electromagnetics (электромагнетизм), financial (экономические задачи), heatTransfer (тепло- и массообмен), incompressible (несжи-

маемые течения), *lagrangian* (течение жидкости с учетом движения отдельных частиц), *multiphase* (многофазные течения), *stressAnalysis* (задачи прочности).

Этот пакет включает в себя целый ряд возможностей, в частности – использование трехмерных неструктурированных сеток, генерацию сетки, изменение топологии сетки, непосредственную работу с ячейками, гранями, ребрами и узлами, вытягивание сетки 2D в 3D, удаление границ, деформацию сетки, создание подвижных сеток и постановку различных видов граничных условий, изменение явности и неявности численной схемы, применение более 50 различных комбинаций расчетных схем. Также возможна конвертация различных форматов сеток как в OpenFOAM, так и из OpenFOAM (например, Fluent, TecPlot, EnSight, UNS, GMV). Также OpenFOAM определяет мониторинг показателей сходимости. OpenFOAM может осуществлять запуск задачи в параллельном режиме, применяя различные методы декомпозиции области.

Все это делает пакет OpenFOAM перспективным для использования в нем нового КГД алгоритма в качестве одного из вычислительных ядер.

Доступ к вычислительным ресурсам пакета OpenFOAM и пакетов SALOME/ParaView (пре- и постпроцессинг) может быть осуществлен на базе технологической платформы UniHUB Web-лаборатории механики сплошной среды UniCFD (<http://www.unicluster.ru/unihub.html>), созданной в рамках программы "Университетский кластер". UniHUB – технологическая платформа, созданная для организации виртуальных информационно-вычислительных лабораторий. Она представляет собой программный комплекс, построенный из компонентов на базе свободно распространяемого программного обеспечения с открытыми исходными кодами.

Лаборатория, построенная на базе UniHUB, позволяет: получить доступ к размещенным ресурсам, опубликовывать информацию о себе и своих исследовательских работах, осуществлять поиск коллег в своей области, поддерживать связь со своими коллегами, организовывать коллективы по интересам для дальнейшего совместного участия, получать актуальную информацию о направлениях деятельности различных научных коллективов, использовать материалы лаборатории, запускать приложения в вычислительной инфраструктуре лаборатории, получить помощь исследователей в разработке, установке и дальнейшей поддержке приложений.

Доступ к сервисам UniHUB реализован как доступ к виртуальному рабочему столу. Для этого нужен Web-браузер (Chrome, MS IE, FireFox, Opera и др.), нахождение в открытой сети и создание учетной записи (для этого можно обратиться в ИСП РАН – unihub@ispras.ru). Авторизация производится по ссылке <http://desktop.weblab.cloud.unihub.ru>. На сегодняшний день возможно одновременное создание трех рабочих столов. Можно выбрать

более или менее экономичные оболочки с точки зрения сетевого трафика.

В данной работе представлен вариант включения КГД алгоритма в комплекс программ OpenFoam. Тестирование квазигазодинамического алгоритма, встроенного в открытый пакет OpenFoam, проводится на примере системы одномерных тестов, собранных в [4] – [8]. Показано, что достигнуто соответствие между расчетами, выполненными ранее, и расчетами, выполненными с помощью разработанного решателя QGDFoam, встроенного в пакет OpenFOAM версии 4.1. Решатель — численная модель интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных, основанная на методе конечного объема. Также проведено сравнение разработанного решателя QGDFoam и встроенного решателя rhoCentralFoam, используемого в расчете нестационарных течений сжимаемого газа. rhoCentralFoam – решатель для невязкого сжимаемого потока, использующий метод годуновского типа — схему Курганова–Тадмора.

1. Реализация 1D КГД алгоритма в OpenFOAM

Система уравнений газовой динамики в форме Навье–Стокса в виде уравнений баланса массы, импульса и полной энергии в традиционных обозначениях имеет следующий вид

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \hat{\Pi}, \quad (2)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}[(E + p)\mathbf{u}] + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = \operatorname{div}(\hat{\Pi} \mathbf{u}). \quad (3)$$

Знак \otimes обозначает прямое векторное произведение, причем при вычислении дивергенции от него дифференцируется первый множитель.

Тензор вязких напряжений $\hat{\Pi}$ имеет вид

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} = \mu(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \mathbf{u})\hat{I}) \quad (4)$$

с коэффициентом динамической вязкости $\mu = \mu(\rho, T) > 0$. Здесь \hat{I} – единичный тензор.

Тепловой поток q задается формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} = -\kappa \nabla T, \quad (5)$$

где $\kappa = \kappa(\rho, T) > 0$ – коэффициент теплопроводности.

Полная энергия E вычисляется с использованием величины внутренней

энергии u_ε

$$E = \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \rho u_\varepsilon. \quad (6)$$

Система уравнений (1) замыкается общими уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T), \quad u_\varepsilon = u_\varepsilon(\rho, T). \quad (7)$$

Для простоты рассматривается идеальный политропный газ

$$p = \rho RT, \quad u_\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (8)$$

$$u_\varepsilon = c_v T, \quad c_v = \frac{R}{(\gamma - 1)}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}, \quad (9)$$

где показатель адиабаты $\gamma = c_p/c_v > 1$.

Построенная КГД система с дополнительными диссипативными слагаемыми с малым коэффициентом τ размерности времени выглядит следующим образом

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (10)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \hat{\Pi}, \quad (11)$$

$$\partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m H) + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = \operatorname{div}(\hat{\Pi} \mathbf{u}). \quad (12)$$

При этом поток массы в уравнении неразрывности принимает вид

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (13)$$

тензор вязких напряжений $\hat{\Pi}$ имеет вид

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} + \tau \mathbf{u} \otimes \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p) + \tau \hat{I}(\mathbf{u} \nabla p + \gamma p \nabla \mathbf{u}). \quad (14)$$

Тепловой поток q задается формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} - \tau \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla u_\varepsilon + p \mathbf{u} \cdot \nabla (\frac{1}{\rho})). \quad (15)$$

Для КГД системы уравнений газовой динамики пространственные дискретизации были выписаны в [2], [3], [6], [7], [8]. Для КГД системы уравнений с общим уравнением состояния в [9], [10] было показано выполнение уравнения баланса энтропии и построена соответствующая диссипативная функция. Пространственная дискретизация, сохраняющая энтропийные свойства раз-

ностных уравнений, построена и опробована в работе [11].

В основе OpenFOAM лежит метод конечного объема. Интегрирование по объему сводится к вычислению потоков через грани

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} dS \cdot \mathbf{a}. \quad (16)$$

Значение каждой величины в центре ячейки есть среднее этой величины по ячейке

$$\frac{1}{V} \int_V a dV,$$

V – объем ячейки. Индекс f указывает на значение величины на грани конечного объема, $\mathbf{S}_f = S_f \mathbf{n}$ – нормаль к грани, умноженная на ее площадь (Рис. 1).

Для включения в программный комплекс OpenFOAM исходная КГД система уравнений была переписана в следующем потоковом виде

$$\rho_i^t = \rho_i^0 - \frac{\Delta t}{V} \Sigma_f F_f^0(\rho^0), \quad (17)$$

$$F_f^0(\rho^0) = \rho_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_f - \tau((\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_f + (\nabla p)_f) \cdot \mathbf{S}_f,$$

$$(\rho \mathbf{u})^t = (\rho \mathbf{u})^0 - \frac{\Delta t}{V} \Sigma_f F_f^0((\rho \mathbf{u})^0), \quad (18)$$

$$F_f^0((\rho \mathbf{u})^0) = F_f^0((\rho)^0) \mathbf{u}_f + p_f \mathbf{S}_f - \hat{\Pi}_f^{QGD} \cdot \mathbf{S}_f,$$

$$\hat{\Pi}_f^{QGD} = \tau \mathbf{u}_f \otimes (\rho + \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \mathbf{u})_f + (\nabla p)_f) +$$

$$+ \tau_f \hat{I}(\mathbf{u}_f \cdot (\nabla p)_f + \gamma_f p_f (\nabla \cdot \mathbf{u}_f)) + \tau_{QGD}((\nabla u)_f + (\nabla \mathbf{u})_f^T - \frac{2}{3} \hat{I}(\nabla \cdot \mathbf{u})_f),$$

$$(\rho E)^t = (\rho E)^0 - \frac{\Delta t}{V} \Sigma_f F_f^0((\rho E)^0), \quad (19)$$

$$\Sigma_f F_f^0((\rho E)^0) = F_f^0(\rho^0) H_f - \hat{\Pi}_f^{QGD} \cdot \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f \mathbf{u}_f \rho_f (\mathbf{u}_f \cdot (\nabla u)_f + p \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \frac{1}{\rho})) \cdot \mathbf{S}_f.$$

В первом уравнении используются следующие преобразования для потока массы

$$\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

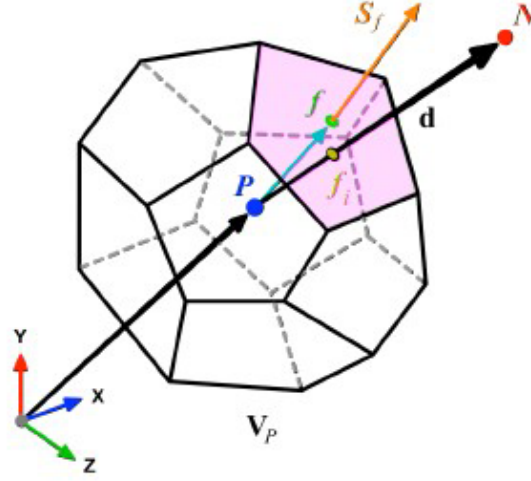


Рис. 1. Контрольный объем в OpenFOAM.

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \cdot (\tau \nabla p) \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\tau \nabla p) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \tau \nabla p \cdot \mathbf{n} dS = \\
 &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \tau \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS \approx \frac{1}{V} \sum_f \tau_f \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right)_f S_f.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Производная на грани контрольного объема вычисляется как

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \approx \frac{p_n - p_0}{h},$$

где p_n – значение поля в соседней ячейке, p_0 – значение поля в своей ячейке.

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \cdot (\tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) \rangle &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS \approx \\
 &\approx \frac{1}{V} \sum_f \tau_f (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_f \cdot S_f.
 \end{aligned} \tag{21}$$

В OpenFOAM дивергенция вычисляется, если поле величины задано на гранях контрольных объемов. В одномерном случае для вычисления дивергенции достаточным является использование трехточечного шаблона (Рис. 2).



Рис. 2. Трехточечный оригинальный шаблон пакета OpenFOAM.

2. 1D – тесты для газодинамических течений

В этом разделе рассматриваются задачи Римана о распаде разрывов, собранные в [4] – [8]. Эти тесты отражают характерные особенности нестационарных газодинамических течений с ударными волнами.

Эти задачи решаются в рамках уравнений Эйлера. Поэтому диссипативные коэффициенты выписываются в виде

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{c}, \mu = p \tau Sc, \kappa = \frac{p \tau Sc}{Pr} \quad (22)$$

и рассматриваются как коэффициенты искусственной диссипации.

Начальные данные к задачам о распаде разрывов приведены в Таблице 1. Значения газодинамических величин слева от разрыва обозначены индексом L, справа – индексом R. Моменты времени, для которого построены графики, указаны в Таблице 1 как t_{fin} . Область расчета равна $(-0.5, 0.5)$. Разрыв расположен в точке $x = 0$. Для сравнения на всех рисунках с задачами о распаде разрывов приведено автомодельное решение.

Граничные условия соответствуют начальным условиям на границе области. Во всех тестах $\gamma = 1.4$, кроме теста 3, где $\gamma = 5/3$.

Было проведено сравнение результатов расчетов характерных тестов с помощью решателей QGDFoam и rhoCentralFoam. Все тесты можно считать с параметром α , равным 0.4, и численными коэффициентами $Sc = Pr = 1$. Параметры, характеризующие улучшение решателей QGDFoam и rhoCentralFoam, зафиксированы в описании конкретных тестов. Решатели QGDFoam и rhoCentralFoam используют постоянное число Куранта C_0 и переменный шаг по времени.

В OpenFOAM задачи решаются в размерной области. Размерный вид характеризуется следующими величинами: $L = 1$ м, $c_v = 1.0 J/(Kg K)$, $R/\mu = 0.4 J/(Kg K)$, где $\mu = 20785$ – молекулярная масса. Выражение $c_p = \frac{\gamma R/\mu}{\gamma - 1} J/(Kg K)$ используется для получения значения γ . Для $\gamma = 1.4$ $c_p = 1.4 J/(Kg K)$, для $\gamma = 5/3$ $c_p = 1.0 J/(Kg K)$. Далее размерность величин не будет указываться, но все величины считаются размерными – шаги сетки вычисляются в метрах, время – в секундах.

Шаг по времени вычисляется в соответствии с условием Куранта

$$\Delta t \leq C_0 \frac{h_x}{|\mathbf{u}| + c}, \quad (23)$$

где $c = \sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука, вычисляемая в OpenFOAM через $\psi = (RT)^{-1}$ как $c = \sqrt{\gamma/\psi}$.

Таблица 1. Начальные условия для задач Римана.

Тест	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	t_{fin}
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
3 Нох	1	1	10^{-6}	1	-1	10^{-6}	1
3а	1	-19.59745	1000	1	-19.59745	0.01	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99924	-6.19633	46.095	0.035
5	1.4	0	1	1	0	1	2
6	1.4	0.1	1	1	0.1	1	2
7	0.1261192	8.9047029	782.92899	6.591493	2.2654207	3.1544874	0.0039

Тест 1. Данная задача представляет собой вариант задачи о распаде разрыва. В образующемся течении имеются все характерные особенности сверхзвукового течения – звуковые точки на границах волны разрежения, контактный разрыв и ударная волна. На Рис. 3 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.0025$. Число Куранта в rhoCentralFoam $C_0 = 0.1$, в QGDFoam – $C_0 = 0.4$. Наилучшее решение в QGDFoam достигается при выборе $\alpha = 0.2$ и $Sc = 1.0$. Для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

Тест 2. Здесь течение представляет собой две волны разрежения, разбегающиеся от центра области. Сложность численного решения этой задачи обусловлена тем, что плотность, скорость и давление в центре очень малы (между разбегающимися потоками), но внутренняя энергия $u_\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$ к нулю не стремится. В этой задаче никакая разностная схема в переменных Эйлера не описывает поведение внутренней энергии с высокой точностью.

На Рис. 4 приведен расчет внутренней энергии для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.0003125$. Число Куранта в rhoCentralFoam $C_0 = 0.025$, в QGDFoam – $C_0 = 0.1$. Для решателя QGDFoam минимальный энтропийный след достигался при $\alpha = 0.3$ и $Sc = Pr = 1.0$. При этом на Рис. 2 представлен результат, в котором в начальный момент скорость на разрыве в двух точках полагалась равной 0. Также этот нефизический максимум может быть сглажен с помощью варьирования числа Прандтля $Pr = 0.001$. В решателе rhoCentralFoam в словаре fvSchemes использовался параметр Minmod, и также в начальный момент времени скорость на разрыве в двух точках полагалась равной 0.

Тест 3. Задача Ноха. Течение представляет собой столкновение двух гиперзвуковых потоков холодного плотного газа, которое приводит к образованию двух расходящихся "бесконечно сильных" ударных волн, между которыми остается неподвижный газ с постоянными плотностью и давлением. Оценки числа Маха в ударной волне составляют $Ma = u_L/c = 775$, что значительно выше земных условий. В решении rhoCentralFoam вблизи точки $x = 0$ появляется энтропийный след. В решении QGDFoam энтопийный след менее заметен, дополнительная КГД диссипация (члены с τ – слагаемыми) в центре расчетной области обращается в 0 (скорость течения равна нулю, давление газа постоянно).

На Рис. 5 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.005$. Число Куранта в rhoCentralFoam $C_0 = 0.2$, число Куранта в QGDFoam $C_0 = 0.001$. Оптимальным был выбран параметр $\alpha = 0.3$. В решателе rhoCentralFoam в словаре fvSchemes использовался параметр Minmod.

Тест 3а. В данной задаче рассматривается газодинамическое течение со сжатием газа, в котором перепад давления p_L/p_R составляет 10^5 .

На Рис. 6 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.0008$. Число Куранта в rhoCentralFoam и в QGDFoam составляет $C_0 = 0.01$. В решателе QGDFoam параметр $\alpha = 0.4$, $Sc = Pr = 1$. Для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

Тест 4. Здесь рассматривается течение газа в виде двух расходящихся по газу ударных волн, между которыми располагается движущийся разрыв. Для этой задачи характерно малое время протекания рассматриваемого процесса.

На Рис. 7 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.003$. Число Куранта в rhoCentralFoam $C_0 = 0.2$, в QGDFoam – $C_0 = 0.1$. В решателе QGDFoam $\alpha = 0.3$, $Sc = 0.1$, для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

Тест 5. Неподвижный контактный разрыв

На Рис. 8 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.01$. Число Куранта в rhoCentralFoam $C_0 = 0.2$, в QGDFoam – $C_0 = 0.1$. При отключении вязкости и теплопроводности ($Sc = 0$), КГД алгоритм дает ширину контактного разрыва в один шаг сетки. КГД диссипация стабилизирует неподвижный контактный разрыв, вязкость типа Навье–Стокса его размывает. При отключении всей вязкости ($\tau = 0$) решение оказывается абсолютно неустойчивым. Параметр регуляризации выбирается равным $\alpha = 0.4$. Для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

Тест 6. Медленно движущийся контактный разрыв

На Рис. 9 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.01$. Число Куранта в rhoCentralFoam $C_0 = 0.2$, в QGDFoam – $C_0 = 0.1$. В случае уменьшения искусственной вязкости и теплопроводности ($Sc = 0.1$) в QGDFoam получается более точное численное решение, которое

лучше соотносится с решением rhoCentralFoam. Параметр регуляризации выбирается равным $\alpha = 0.5$. Для rhoCentralFoam использовалась стандартная интерполяция vanLeer.

Тест 7. Задача, известная как "Peak"problem

На Рис. 10 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.00005$. Число Куранта в rhoCentralFoam равно $C_0 = 0.3$, а для QGDFoam – $C_0 = 0.05$. Для QGDFoam $\alpha = 0.4$ и $Sc = 1.0$, для rhoCentralFoam использовалась интерполяция upwind.

Для задач о распаде разрывов посчитаны значения погрешностей представленных на Рис. 3 – 10 величин в норме L_1 как

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_N |a_{\text{exact}} - a_{\text{numerical}}|, \quad (24)$$

где a_{exact} – значение газодинамической величины, соответствующей автомодельному решению, $a_{\text{numerical}}$ – значение газодинамической величины, посчитанной решателем rhoCentralFoam или QGDFoam. В тестах 1, 3, 3а, 5, 6, 7 в качестве величины a берется плотность ρ , в тестах 2 и 4 – внутренняя энергия u_ε .

Таблица 2. Погрешности в норме L_1 .

Решатель, № теста	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 3а	Тест 4	Тест 5	Тест 6	Тест 7
rhoCentralFoam	0.0024	0.2726	0.0287	0.6935	1.3929	0.0103	0.0103	0.0532
QGDFoam	0.0065	0.2909	0.0368	0.6849	3.6953	0.0021	0.0116	0.0775

Дополнительно к задачам о распаде разрывов рассматривается задача Вудворда–Колелла о взаимодействии двух разрывов (Woodward–Collela blast wave problem, рассмотренная в [4], [5], [8], [12], [13]).

Тест 8. "Blast" задача. Эта задача часто выбирается в качестве теста для алгоритмов решения уравнений Эйлера на сетках, динамически адаптирующихся к решению. Данная задача представляет собой задачу о взаимодействии двух волн, образующихся в результате распада двух разрывов типа Римана ([8], [12]). Для этой задачи нет автомодельного решения. Задача также решается на интервале $(-0.5, +0.5)$. В начальный момент задаются разрывы в точках $x_1 = -0.4$ и $x_2 = 0.4$. Во всей расчетной области задаются плотность $\rho = 1.0$ и скорость $u = 0.0$. Начальные значения давления в трех соответствующих областях (левой p_l , средней p_m и правой p_r) равны $(p_l, p_m, p_r) = (1000, 0.01, 100)$. В качестве граничных условий ставятся условия отражения вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, u = 0. \quad (25)$$

Расчет ведется до времени $t_{fin} = 0.038$. В этой задаче $\gamma = 1.4$.

На Рис. 11 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом $h_x = 0.0003125$. Число Куранта в rhoCentralFoam $C_0 = 0.2$, у QGDFoam $C_0 = 0.4$. Для QGDFoam $\alpha = 0.3$ и $Sc = 0.1$, $Pr = 1.0$, для rhoCentralFoam использовалась интерполяция Minmod.

Сравнение двух решателей QGDFoam и rhoCentralFoam – первое сравнение КГД алгоритма с численным методом, встроенным в программный пакет OpenFoam. Сопоставление погрешностей численного решения, представленное в Таблице 2, показывает, что для всех тестов значения погрешностей для обоих методов близки между собой, при этом в ряде тестов у rhoCentralFoam погрешность больше (тесты 3а, 5), а в других тестах больше погрешность у QGDFoam. У обоих решателей значения чисел Куранта C_0 близки между собой (одного порядка), кроме тестов 3а и 7. В тесте 3 число Куранта у решателя QGDFoam в 200 раз меньше, чем у rhoCentralFoam, тесте 7 – в 6 раз меньше. В тестах 1 и 2 число Куранта у решателя QGDFoam превышает число Куранта у rhoCentralFoam в 4 раза. В тесте 3а числа Куранта совпадают для обоих решателей. Тестах 4, 5, 6 и 8 числа Куранта отличаются в 2 раза. В тесте 5 решение QGDFoam совпадает с аналитическим решением. Тем не менее, дополнительная настройка решателей QGDFoam и rhoCentralFoam может принести усовершенствование численных решений (например, варьирование чисел Sc и Pr у QGDFoam и изменение схемных интерполяций у rhoCentralFoam).

Сопоставление времени счета для приведенных примеров показывает, что время численного расчета задач решателем QGDFoam на 20–30% меньше, чем время численного расчета задач с помощью решателя rhoCentralFoam.

Данное сравнение показывает высокую конкурентоспособность КГД алгоритма и превосходство в ряде случаев.

Хочу выразить свою благодарность Т.Г. Елизаровой за постановку задачи и М.В. Крапошину за постоянную помощь в реализации алгоритма в пакете OpenFOAM.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Б.Н. Четверушкин*. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004 г.
2. *Т.Г. Елизарова*. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007 г.
3. *Ю.В. Шертов*. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. Москва–Ижевск: РХД, 2009 г.

4. *R. Liska, B. Wendroff*. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations // Technical report LA-UR-01-6225, LANL, Los Alamos, 2001.
5. *R. Liska, B. Wendroff*. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM J. Sci. Comput, 2003, v. 25, № 3, pp. 995–1017.
6. *Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников*. Анализ вычислительных свойств квазигазодинамического алгоритма на примере решения уравнений Эйлера // ЖВ МиМФ, 2009 г., т. 49, № 11, с. 1953–1969.
7. *Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников*. Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования течений невязкого газа // ЖВМиМФ, 2009 г., т. 49, № 3, с. 549–566.
8. *Т.Г. Елизарова, И.А. Широков*. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017 г.
9. *А.А. Злотник*. О квазигазодинамической системе уравнений с общими уравнениями состояния и источником тепла // Математическое моделирование, 2001 г., т. 22, № 7, с. 53–64.
10. *А.А. Злотник*. Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния // Доклады Академии наук, 2010 г., т. 431, № 5, с. 605–609.
11. *В.А. Гаврилин, А.А. Злотник*. О пространственной дискретизации одномерной квазигазодинамической системы уравнений с общими уравнениями состояния и балансе энтропии // ЖВМиМФ, 2015 г., т. 55, № 2, с. 267–284.
12. *М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин*. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017 г., № 89.
13. *Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко*. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978 г.

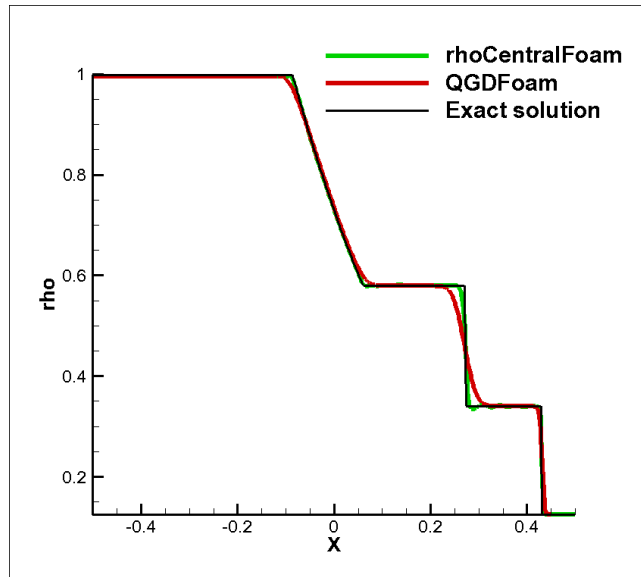


Рис. 3. Тест 1. Распределение плотности ρ .

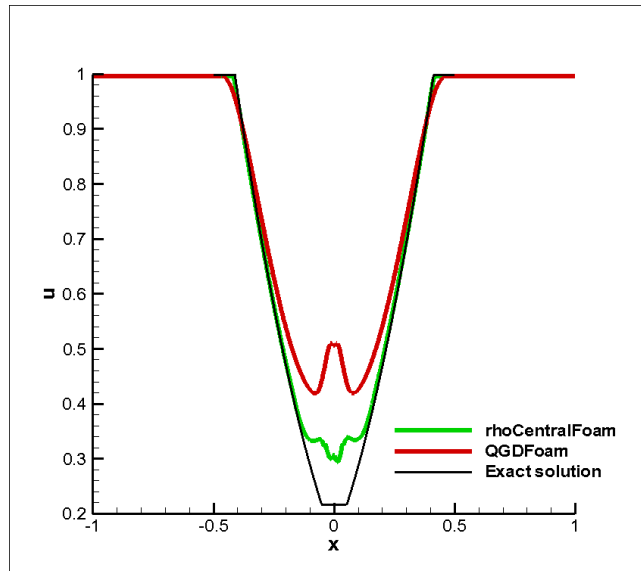


Рис. 4. Тест 2. Распределение внутренней энергии u_{ε} .

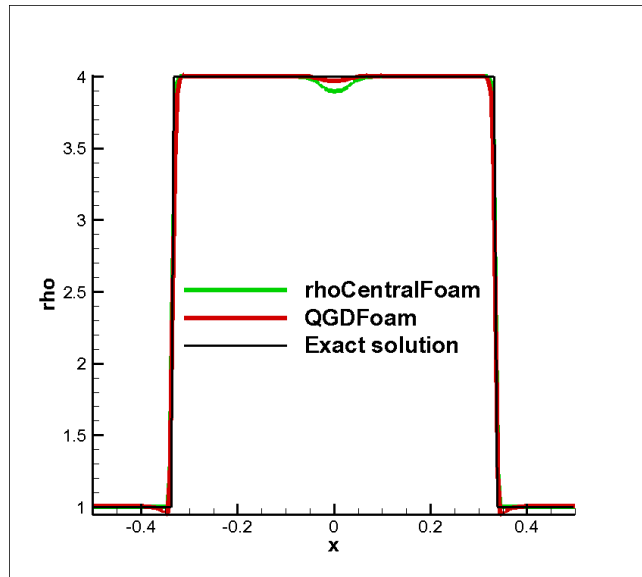


Рис. 5. Тест 3. Распределение плотности ρ .

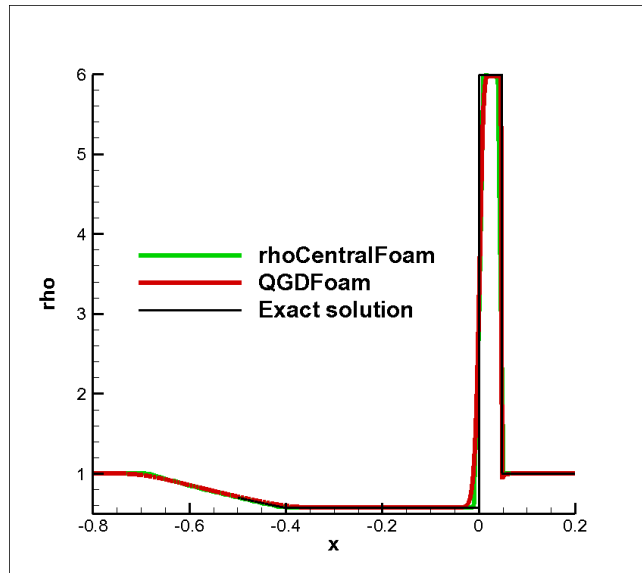


Рис. 6. Тест 3а. Распределение плотности ρ .

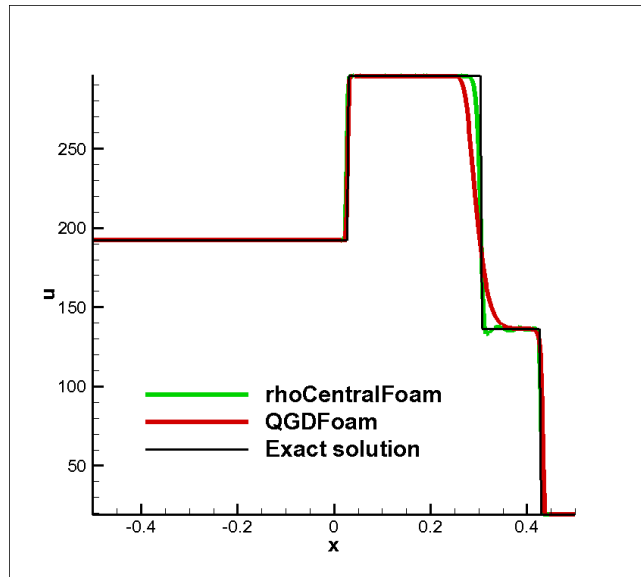


Рис. 7. Тест 4. Распределение внутренней энергии u_{ε} .

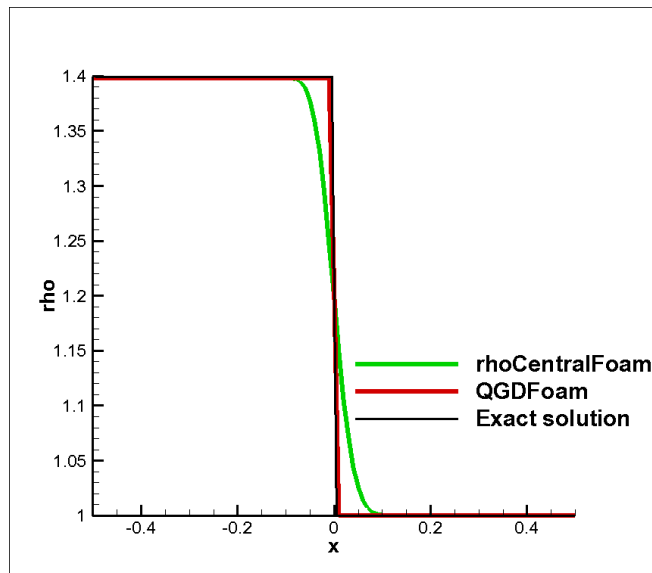


Рис. 8. Тест 5. Распределение плотности ρ .

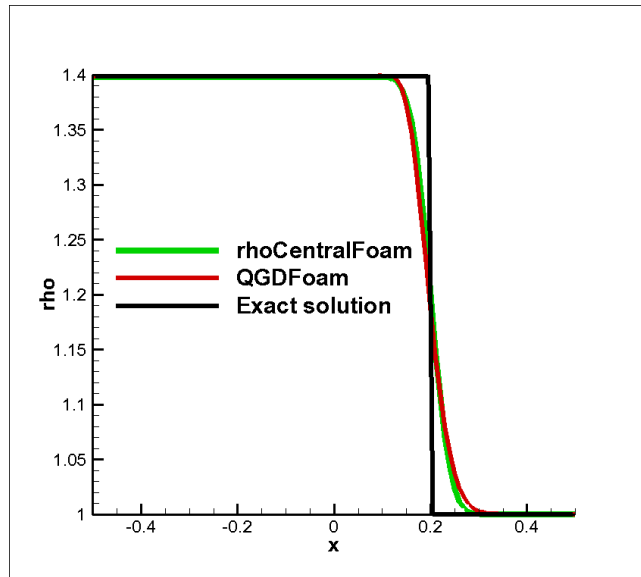


Рис. 9. Тест 6. Распределение плотности ρ .

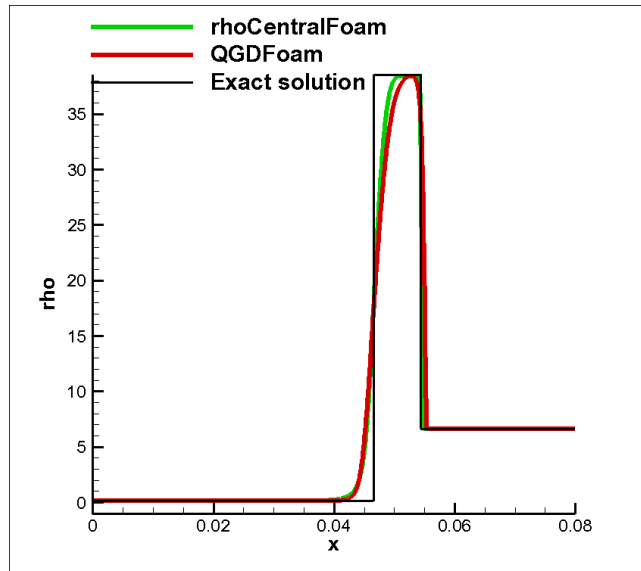


Рис. 10. Тест 7. Распределение плотности ρ .

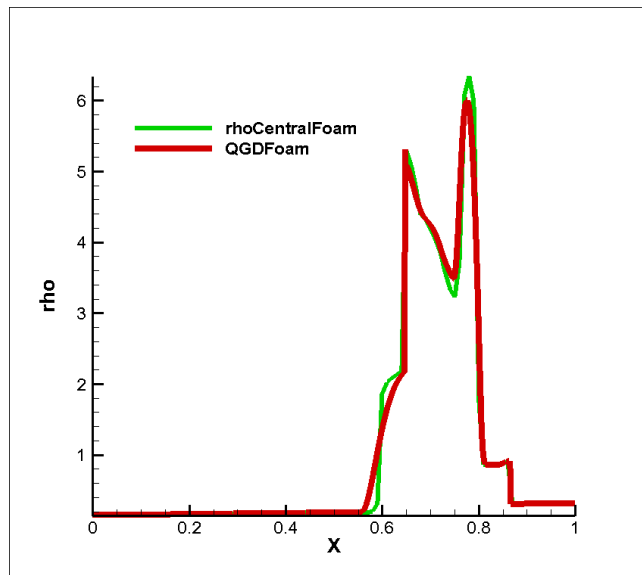


Рис. 11. Тест 8. Распределение плотности ρ .