ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 100 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф.

Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 100. 22 с. doi:10.20948/prepr-2018-100
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-100

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Ю.А.Криксин, В.Ф.Тишкин

Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики

Москва — 2018

Криксин Ю. А., Тишкин В.Ф.

Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики

В работе сформулирован новый вариационный принцип энтропийной регуляризации, и на его основе построена конструктивная версия разрывного метода Галеркина высоких порядков точности для одномерных уравнений газовой динамики, в которой выполнены дискретные аналоги законов сохранения массы, импульса, полной энергии и энтропийного условия. Получены формулы для коэффициентов метода.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, разрывный метод Галеркина, вариационный принцип, законы сохранения, энтропийное условие

Yury Anatolievich Kriksin, Vladimir Fedorovich Tishkin

Entropic regularization of Discontinuous Galerkin method in one-dimensional problems of gas dynamics

A new variational entropic regularization principle is formulated for a discontinuous Galerkin (DG) method. An entropy stable DG method of high accuracy is constructed for 1D equations of gas dynamics. The DG solutions satisfy the discrete analogues of the conservation laws of mass, momentum, total energy and entropic inequality. Formulas for the coefficients of the DG method are obtained.

Key words: equations of gas dynamics, discontinuous Galerkin method, variational principle, conservation laws, entropy condition

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-30014).

1. Введение

Построение многих естественнонаучных моделей невозможно без аппарата дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку эти уравнения представляют собой один из наиболее точных способов формулировки законов природы, лежащих в основе изучаемых процессов и явлений. Газодинамические процессы, сопровождающиеся распространением волн в различных средах, относятся к явлениям, для описания которых применяются системы уравнений в частных производных гиперболического типа [1], выражающие законы сохранения массы, импульса и полной энергии.

Особенностью газодинамических систем является пространственно-временная многомасштабность протекающих в них процессов. Хотя волны, возникающие в газодинамических процессах, имеют ярко выраженный макроскопический характер, одних механических законов недостаточно для правильной формулировки реалистичных моделей. Помимо механических явлений в газовой динамике происходят неравновесные и поэтому необратимые термодинамические процессы на микроскопическом уровне, которые накладывают отпечаток на поведение всей системы в целом, задавая направление ее эволюции во времени. Количественным выражением необратимости газодинамических процессов является энтропийное условие [1, 2], согласно которому реалистичные решения должны удовлетворять некоторому неравенству, выражающему тот факт, что в каждом малом, но в то же время макроскопическом элементе системы неравновесные процессы приводят к возрастанию или, по крайней мере, неубыванию энтропии [3]. Поэтому только соображения аппроксимации, устойчивости и консервативности [4] недостаточны для разработки эффективных численных методов решения газодинамических задач.

В последнее время активно разрабатываются методы решения задач механики сплошных сред высоких порядков точности, такие как разрывный метод Галеркина (РМГ) [5, 6], который благодаря простоте своей реализации и существенному потенциалу в повышении порядка точности пользуется большой популярностью. Среди многообразных алгоритмов решения задач газовой динамики следует выделить легендарную схему Годунова первого порядка точности [7], автоматически удовлетворяющую энтропийному условию по своему построению, что является одной из причин ее широкого применения.

Отметим, что нарушения энтропийного условия не остаются без последствий и являются одной из причин появления численных артефактов и нереалистичного поведения приближенных решений [1]. Во избежание этих негативных последствий часто применяются искусственные приемы и конструкции, такие как различные виды численных потоков, лимитирование и другие способы [8, 9], с целью внесения в алгоритм дополнительной численной диссипации, которая способствует выполнению энтропийного условия и улучшает качество численных решений. В целом РМГ показал хорошие результаты в расчетах газодинамических течений и других задачах в области сплошных сред. В работах отечественных исследователей [10–13] проведены теоретические исследования РМГ и, в частности, установлена тесная связь РМГ со схемой Годунова.

Помимо этого, в зарубежных исследованиях [14–18] достигнут определенный прогресс в построении высокоточных схем (entropy stable schemes), в которых наряду с законами сохранения обеспечивается выполнение энтропийного условия. В частности, следует отметить значительный успех в этом направлении, имевший место в разработке соответствующих (entropy stable) версий РМГ [19–22] для различных задач механики сплошных сред. Отметим в связи с этим научную группу профессора Грегора Гаснера (Gregor Gassner) в Кельнском университете (Германия).

В исследованиях этой группы разработаны соответствующие математические конструкции [19, 20, 22], обеспечивающие выполнение энтропийного неравенства. Отдавая должное этим новым интересным результатам, авторы настоящей работы считают, что в нелинейных задачах механики сплошных сред эффективный численный метод в то же время является дискретной моделью сплошной среды и, следовательно, включает в себя дискретные аналоги всех физических законов, которые являются существенными для описания изучаемого явления. Применительно к задачам газовой динамики это означает, что наряду с законами сохранения в соответствующую дискретную модель должно быть априори заложено выполнение дискретного аналога энтропийного условия.

В настоящей работе для задач одномерной газовой динамики развивается новый теоретический подход, названный нами *энтропийной регуляризацией*, обеспечивающий построение конструктивного обобщения РМГ высоких порядков точности, в котором выполнены дискретные аналоги законов сохранения массы, импульса, полной энергии и энтропийного условия. Изложение материала начинается с постановки задачи (п. 2). В п. 3 обсуждается одно экстремальное свойство метода Галеркина, являющееся ключевым для формулировки принципа энтропийной регуляризации. В п. 4 рассмотрены принципы выбора конечномерного базиса в целях выполнения дискретных аналогов законов сохранения. В п. 5 изучается связь РМГ со схемой Годунова и рассматриваются предпосылки для получения РМГ более высокого порядка точности. В п. 6 сформулирован принцип энтропийной регуляризации РМГ и получены расчетные формулы метода. В заключении обсуждаются результаты работы и перспективы их практического применения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений одномерной газовой динамики (ГД)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \qquad x \in [a, b] \subset (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

с некоторыми граничными условиями и начальным условием

$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_0(x), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \\ U^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(\varepsilon + u^2/2) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ [\rho(\varepsilon + u^2/2) + p]u \end{pmatrix}, \tag{3}$$

используя приближение идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \qquad \gamma = c_P / c_V. \tag{4}$$

Здесь приняты обозначения p – давление, ρ – плотность, u – скорость, ε – удельная внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты, c_P и c_V – теплоемкости идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

Требуется найти обобщенное решение системы уравнений (1), удовлетворяющее соответствующим интегральным уравнениям, выражающим законы сохранения массы, импульса и энергии [1, 2]. Реалистичная модель газодинамического течения учитывает как законы механики, так и неравновесной термодинамики, поэтому помимо уравнения (1) искомое решение должно удовлетворять энтропийному неравенству

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho s u)}{\partial x} \geq 0, \tag{5}$$

выражающему необратимость неравновесных термодинамических процессов, в том числе газодинамических, в котором безразмерная удельная энтропия идеального газа определяется равенством

$$s = \ln\frac{p}{p_*} - \gamma \ln\frac{\rho}{\rho_*}. \tag{6}$$

В соотношении (6) в качестве стандартных значений p_* и ρ_* можно выбрать любые постоянные величины, имеющие размерности давления и плотности соответственно, например, положив их равными значениям, соответствующим стандартному состоянию идеального газа [23]. Энтропийное неравенство (5) выполняет роль условия отбора физически реализуемых решений.

Вводя обозначения

$$S(\mathbf{U}) = \rho s, \qquad H(\mathbf{U}) = \rho s u, \tag{7}$$

перепишем неравенство (5) в следующем виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial S(\mathbf{U})}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial x} = \nabla S(\mathbf{U}) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{U})}{\partial x} \geq 0, \\ \nabla S(\mathbf{U}) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial U^{(1)}} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial U^{(2)}} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial U^{(3)}} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t}. \end{gathered} \tag{8}$$

Если ввести в рассмотрение функциональное фазовое пространство Φ, состоящее из упорядоченных пар 3D векторных функций $(\mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x))$, зависящих от пространственной переменной *x*, то решение $(\mathbf{U}(x,t), \partial \mathbf{U}(x,t)/\partial t)$ системы (1) является некоторой *t*-параметрической кривой (фазовой траекторией), лежащей в Φ.

Обратим внимание, что неравенство (8), переписанное применительно к элементам из Φ в виде

$$\nabla S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial x} \geq 0, \tag{9}$$

определяет некоторую область $\Gamma \subset \Phi$, в которой лежат физически реализуемые траектории системы (1). Хотя топология области Γ достаточно сложна, численный алгоритм, претендующий на вычисление физически реализуемых решений, должен обеспечивать принадлежность фазовой траектории $(\mathbf{U}(x,t), \partial \mathbf{U}(x,t)/\partial t)$ указанной области Γ. Польза неравенства (9) усматривается в следующем обстоятельстве. Фазовое пространство Φ можно интерпретировать как прямое произведение "координатного" подпространства V и "касательного" подпространства W. Если зафиксировать произвольный элемент $\mathbf{v}(x) \in \mathrm{V}$, то нетрудно видеть, что неравенство (9) является линейным по отношению к элементу $\mathbf{w}(x) \in \mathrm{W}$ и допускает простую геометрическую интерперетацию. Пусть пара векторных функций $(\mathbf{v}(x), \mathbf{w}(x))$ непрерывно-дифференцируема в точке $x = x_0$, тогда трехмерный вектор $\mathbf{w}(x_0)$ лежит по одну сторону от плоскости соответствующего трехмерного подпространства (лежащего в "касательном" подпространстве W), определяемой обращением в нуль левой части неравенства (9).

Используя отмеченную выше линейность энтропийного неравенства (8) относительно "касательного" вектора $\partial \mathbf{U}(x,t)/\partial t$, поставим задачу сформулировать численный алгоритм решения задачи (1) – (6) на основе разрывного метода Галеркина (РМГ) более высокого порядка точности, чем первый порядок, чтобы указанный алгоритм обеспечивал выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства (5) на численных решениях.

3. Экстремальное свойство метода Галеркина

Основная идея как классического метода Галеркина, так и РМГ заключается в представлении приближенного решения задачи для дифференциального уравнения в виде конечной линейной комбинации линейно независимых функций и последующем определении коэффициентов этой комбинации как решения некоторой системы линейных уравнений [24].

Перейдем к более детальному описанию метода Галеркина для системы (1) одномерных уравнений газовой динамики. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ $(k = 0, \ldots, N)$ есть система n+1 ортонормированных функций в гильбертовом пространстве $\mathrm{L}_2[c,d]$ $([c,d] \subseteq [a,b])$ со скалярным произведением, определяемым обычным образом [25].

$$(\varphi,\psi) = \int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx, \qquad \forall\, \varphi, \psi \in \mathrm{L}_2[c,.d]. \tag{10}$$

Наряду с только что введенным пространством $\mathrm{L}_2[c,d]$ в дальнейшем изложении потребуется гильбертово пространство $\mathbf{L}_2^{\alpha,\beta}[c,d]$ векторных функций $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))^T$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\alpha,\beta} = \alpha(v_1,w_1) + \beta(v_2,w_2) + (v_3,w_3), \qquad \alpha, \beta > 0, \tag{11}$$

и нормой

$$\| \mathbf{v} \|_{\alpha,\beta} = (\mathbf{v},\mathbf{v})_{\alpha,\beta}^{1/2}. \tag{12}$$

Приближенное решение системы (1) уравнений газовой динамики будем искать в виде линейной комбинации функций конечномерного ортонормированного базиса $\varphi_k(x)$ $((\varphi_k,\varphi_l) = \delta_{kl})$ в гильбертовом пространстве $\mathrm{L}_2[c,d]$ с коэффициентами, зависящими от времени

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{U}_k(t)\varphi_k(x), \tag{13}$$

для которых уравнения метода Галеркина на отрезке $[c,d]$ принимают вид

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} = -\int_c^d \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x,t))}{\partial x}\varphi_k(x)dx. \tag{14}$$

Введем следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{3k-2} = (\alpha^{-1/2}\varphi_{k-1}(x), 0, 0)^T, && \lambda_{3k-2} = \alpha^{1/2} dU_{k-1}^{(1)}(t)/dt,\\
&\mathbf{e}_{3k-1} = (0, \beta^{-1/2}\varphi_{k-1}(x), 0)^T, && \lambda_{3k-1} = \beta^{1/2} dU_{k-1}^{(2)}(t)/dt, \qquad (15)\\
&\mathbf{e}_{3k} \quad = (0, 0\ \varphi_{k-1}(x))^T, && \lambda_{3k} \quad = dU_{k-1}^{(3)}(t)/dt
\end{aligned}
$$

при значениях индекса $k = 1, \dots, n, n+1$.

Обратим внимание на то, что система векторных функций $\{\mathbf{e}_m\}$ ($m = 1, \dots, 3n+3$), определенная соотношениями (15), образует конечную ортонормированную систему векторных функций в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2^{\alpha,\beta}[c,d]$, а уравнения (14) в обозначениях (15) можно переписать в виде

$$
\lambda_m = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_m)_{\alpha,\beta}\ , \qquad \mathbf{a} = -\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x,t))}{\partial x}. \qquad (16)
$$

Легко видеть, что квадратичная функция $M = 3n+3$ переменных

$$
w(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \| \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \mathbf{e}_m - \mathbf{a} \|_{\alpha,\beta}^2 \qquad (17)
$$

достигает своего минимального значения, если ее аргументы удовлетворяют равенствам (16), причем коэффициенты $\mathbf{U}_k(t)$ не зависят от выбора весовых коэффициентов α и β в определении скалярного произведения (11). Тем самым показано, что альтернативным, но эквивалентным способом получения коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ является решение экстремальной задачи о нахождении точки минимума квадратичной функции

$$
W_0(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n) = \int_c^d \Big| \sum_{k=0}^{n} \mathbf{B}_k \varphi_k(x) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x,t))}{\partial x} \Big|_{\alpha,\beta}^2 dx, \qquad (18)
$$

где

$$
|\,\mathbf{c}\,|_{\alpha,\beta} = (\alpha c_1^2 + \beta c_2^2 + c_3^2)^{1/2}, \quad \forall\, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathrm{E}^3, \quad \alpha, \beta > 0, \qquad (19)
$$

а производные по времени от коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ определяются по правилу

$$
\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} = \mathbf{B}_k^{\min}, \qquad (20)
$$

где $\mathbf{B}_k^{\min}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) – точка минимума квадратичной функции (18).

Таким образом, минимизация квадратичной функции (18) с последующим выбором коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ в точке минимума в соответствии с равенством (20) дает вариационный метод получения коэффициентов метода Галеркина, а значит, и РМГ как его разновидности. Вариационная интерпретация метода Галеркина открывает в дальнейшем возможность для его *энтропийной регуляризации*.

4. О выборе системы линейно независимых функций

В стандартной формулировке метода Галеркина и его разновидностей приближенное решение может быть линейной комбинацией произвольных линейно независимых функций в (13). Однако выбор такой системы функций должен осуществляться с учетом выполнения дискретных аналогов законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Интегро-дифференциальная форма указанных законов получается в результате интегрирования уравнения (1) по пространственной переменной x на произвольном отрезке $[c,d] \subseteq [a,b]$

$$\frac{d}{dt}\int_c^d \mathbf{U}(x,t)dx + \mathbf{F}(\mathbf{U}(d,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(c,t)) = 0. \tag{21}$$

С другой стороны, интегрирование правой части равенства (14) по частям приводит к следствию

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{U}(d,t))\varphi_k(d) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(c,t))\varphi_k(c) - \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{U}(x,t))\frac{\varphi_k(x)}{dx}dx = 0. \tag{22}$$

Легко видеть, что при выборе $\varphi_k(x) = 1$ равенство (22) примет вид

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{U}(d,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(c,t)) = 0, \tag{23}$$

и левые части равенств (21) и (23) совпадают, если положить $\mathbf{U}(x,t) = (d-c)^{-1}\mathbf{U}_k(t)$. Сопоставление равенств (21) и (23) друг с другом приводит к выводу, что система $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормированных функций должна обязательно включать в себя константу $|d-c|^{-1/2}$, чтобы удовлетворять интегро-дифференциальной форме (21) законов сохранения. Оставшаяся часть системы функций $\{\varphi_k(x)\}$ может быть произвольной и выбираться, например, из соображений аппроксимации. В дальнейшем примем, что

$$\varphi_0(x) = |d-c|^{-1/2}. \tag{24}$$

В заключение приведем интегро-дифференциальную форму энтропийного неравенства (8)

$$\frac{d}{dt}\int_c^d S(\mathbf{U}(x,t))dx + H(\mathbf{U}(d,t)) - H(\mathbf{U}(c,t)) \geq 0, \tag{25}$$

левую часть которого будем называть скоростью производства энтропии в области $[c,d]$.

Отметим, что соотношения (21) и (25) являются ключевыми для формулировки дискретных аналогов законов сохранения и энтропийного неравенства в РМГ.

5. Уравнения классического РМГ. Связь РМГ первого порядка со схемой Годунова и выполнение энтропийного условия

Определим в расчетной области $[a,b]$ сетку с N+1 узлами x_i, упорядоченными по возрастанию, причем, $x_0 = a$, $x_N = b$. Большинство граничных условий могут быть заданы с помощью фиктивных ячеек слева от $x_0 = a$ и справа от $x_N = b$. РМГ формулируется таким образом, что на границах произвольной ячейки $[x_{i-1}, x_i]$ приближенное решение, вообще говоря, претерпевает разрыв первого рода. Поэтому интегро-дифференциальная форма (21) законов сохранения и уравнение (22) для коэффициентов РМГ в произвольной ячейке $[x_{i-1}, x_i]$ должны быть соответствующим образом модифицированы

$$\frac{d}{dt}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{U}(x,t)dx + \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t)) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t))\varphi_k(x_i) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))\varphi_k(x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x,t))\frac{\varphi_k(x)}{dx}dx = 0, \tag{27}$$

где вектор $\mathbf{U}_G(x_i,t)$ обозначает решение задачи о распаде произвольного газодинамического разрыва для текущих значений газодинамических переменных в момент времени t на границе i-й и (i+1)-й ячеек. Вектор $\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t))$ задает потоки массы, импульса и полной энергии, которые мы будем называть потоками Годунова.

РМГ первого порядка соответствует случаю выбора простейшей системы функций $\{\varphi_k(x)\}$, включающей единственного представителя $\varphi_0(x)$, определенного равенством (24), в котором $c = x_{i-1}$, $d = x_i$. Приближенное решение в этом случае является кусочно-постоянной функцией, принимающей одно и то же значение $\mathbf{U}(t)$ в пределах рассматриваемой ячейки $[x_{i-1}, x_i]$ и определяемое обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))}{x_i - x_{i-1}} = 0. \tag{28}$$

Нетрудно проверить, что это приближенное решение, если оно существует, должно удовлетворять дискретному аналогу (26) законов сохранения.

В работе [11] впервые была установлена тесная связь РМГ первого порядка со схемой Годунова в координатах Эйлера [2]

$$\frac{\mathbf{V}(t+\tau) - \mathbf{V}(t)}{\tau} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))}{x_i - x_{i-1}} = 0. \tag{29}$$

По отношению к системе ОДУ (28), записанной для всех ячеек, решения схемы Годунова (29) являются ломаными Эйлера. Отметим, что решение $\mathbf{U}_G(x_i,t)$ задачи распада произвольного разрыва непрерывно-дифференцируемо (а значит, липшиц-непрерывно) по значениям газодинамических переменных в смежных ячейках $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$, если эти значения исключают образование вакуума, т.е. когда плотность газа ρ не обращается в нуль. Поэтому в отсутствие вакуума последовательность ломаных Эйлера сходится к единственному решению задачи Коши для системы ОДУ (28) при $\tau \to 0$.

С учетом разрывов на границах ячейки $[x_{i-1}, x_i]$ дискретный аналог энтропийного неравенства также формулируется с соответствующими потоковыми членами Годунова (см. (25))

$$\frac{d}{dt}\int_{x_{i-1}}^{x_i} S(\mathbf{U}(x,t))dx + H(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t)) \geq 0. \tag{30}$$

Левую часть неравенства (30) будем называть скоростью производства энтропии в ячейке $[x_{i-1}, x_i]$.

Покажем, что для решений РМГ первого порядка неравенство (30) справедливо. В связи с этим потребуются вспомогательные оценки с использованием следующего обозначения.

$$\mathbf{U} = (\rho, I, E) = (\rho, \rho u, \rho\varepsilon + \rho u^2/2) . \tag{31}$$

Выберем некоторый момент времени t_0 и рассмотрим решение $\mathbf{V}(t_0+\tau)$ схемы Годунова (29) (ломаную Эйлера) при достаточно малых значениях шага τ, таких что волны, образующиеся в результате распада разрывов на границах ячейки, не взаимодействуют друг с другом. В частности, в течение промежутка времени $[t_0, t_0+\tau]$ потоки $\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t))$ массы импульса и энергии, а также энтропии

$G(\mathbf{U}_G(x_i,t))$ остаются постоянными. Поэтому значение вектора $\mathbf{V}(t_0+\tau)$ совпадает со средним значением в ячейке $[x_{i-1}, x_i]$ вектора точного решения $\mathbf{U}_G(x,t_0+\tau)$ [2], т.е.

$$\mathbf{V}(t_0+\tau) = <\mathbf{U}_G(x,t_0+\tau)> = (x_i - x_{i-1})^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mathbf{U}_G(x,t_0+\tau)dx, \tag{32}$$

где мы сохраняем обозначение $\mathbf{U}_G(x,t)$ для точного решения задачи распада разрыва в точках x_{i-1} и x_i во всей области $[x_{i-1}, x_i]\times[t_0, t_0+\tau]$. Используя неравенство Коши–Буняковского [25] и выпуклость функции $\rho\ln\rho$, получим следующие неравенства для средних значений в ячейке $[x_{i-1}, x_i]$

$$<I>^2/<\rho> \le <I^2/\rho>, \qquad <\rho>\ln<\rho> \ \le \ <\rho\ln\rho>. \tag{33}$$

В новых переменных (ρ, I, E) (см. (31)) выражение (6) для удельной энтропии приобретает вид

$$s = \ln[\frac{\gamma-1}{p_*}(E - \frac{I^2}{2\rho})] - \gamma\ln\frac{\rho}{\rho_*}. \tag{34}$$

Неравенства (33) и выпуклость вверх логарифмической функции предоставляют возможность получения следующей мажорантной оценки для среднего значения энтропии в ячейке $[x_{i-1}, x_i]$ (см. [7])

$$<\rho s> \ \le \ <\rho>\{\ln[\frac{\gamma-1}{p_*}(<E> - \frac{<I>^2}{2<\rho>})] - \gamma\ln\frac{<\rho>}{\rho_*}\}. \tag{35}$$

Если функции (ρ, I, E) в неравенстве (35) являются точным решением $\mathbf{U}_G(x,t_0+\tau)$ задачи распада разрыва, то средние значения $(<\rho>, <I>, <E>)$ в правой части (35) являются не чем иным, как решениями $\mathbf{V}(t_0+\tau)$ схемы Годунова (29) согласно установленному ранее факту (32), т.е., как следует из (35)

$$S(\mathbf{U}_G(x,t_0+\tau)) \le S(\mathbf{V}(t_0+\tau)). \tag{36}$$

Для точного решения $\mathbf{U}_G(x,t)$ задачи распада разрыва левая часть неравенства (30) обращается в нуль на промежутке $[t_0, t_0+\tau]$ в отсутствие ударных волн и положительна, когда одна или несколько ударных волн движутся в пределах рассматриваемой ячейки, так как нефизичные решения типа ударных волн разрежения заведомо исключаются из рассмотрения [1]. Отсюда следует, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [S(\mathbf{U}_G(x,t_0+\tau)) - S(\mathbf{U}(x,t_0))]dx + \tau[H(\mathbf{U}_G(x_i,t_0)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t_0))] \geq 0. \quad (37)$$

С учетом (36) и (37) приходим к неравенству, справедливому при достаточно малых τ для любых решений схемы Годунова (29)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [S(\mathbf{V}(t_0+\tau)) - S(\mathbf{U}(x,t_0))]dx + \tau[H(\mathbf{U}_G(x_i,t_0)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t_0))] \geq 0. \quad (38)$$

Так как ломаные Эйлера, соответствующие решениям схемы Годунова (29), сходятся к единственному решению задачи Коши для системы ОДУ (28) при $\tau \to 0$, то следствием неравенства (38), примененного ко всем этим ломаным в момент времени $t = t_0$, будет выполнение энтропийного неравенства (30) на решении системы (28) в этот же момент времени. В силу произвольности выбора $t = t_0$ энтропийное неравенство (30) выполняется для всех значений времени t, куда может быть продолжено решение соответствующей задачи Коши для системы ОДУ (28).

Факт выполнения энтропийного неравенства (30) на решениях РМГ первого порядка является важной предпосылкой для построения схем, обеспечивающих его выполнение для РМГ более высоких порядков точности.

6. Энтропийная регуляризация РМГ более высоких порядков точности, чем первый

Расширение системы ортонормированных функций РМГ $\{\varphi_k(x)\}$ производится с целью улучшения аппроксимации исходной задачи (1) газовой динамики и точности приближенного решения, но может иметь драматические последствия для выполнения энтропийного неравенства, так как классические уравнения (27) для коэффициентов РМГ, вообще говоря, входят с ним в противоречие. Как уже отмечалось ранее, нарушение энтропийного неравенства является одной из причин появления в расчетах физически несостоятельных приближенных решений и численных артефактов. Выход из данного противоречия становится возможным с использованием регуляризованного вариационного принципа получения коэффициентов РМГ, который будет сформулирован в данном разделе.

В основе предлагаемого подхода лежит вариационная интерпретация (18) – (20) метода Галеркина. Обратим внимание, что для получения формул (14) классического метода Галеркина в эквивалентном вариационном подходе необходима безусловная минимизация квадратичной функции (18). Таким образом, именно безусловная минимизация квадратичной функции (18) может привести к противоречию с энтропийным неравенством (30). Естественным способом гарантированного устранения этого противоречия является замена безусловной минимизации функции (18) на ее условную минимизацию на множестве переменных $\mathbf{B}_k$, совместимых с условием (30). К счастью, неравенство (30) может быть переписано в виде линейного неравенства относительно переменных $\mathbf{B}_k$, что сразу же делает новую вариационную задачу минимизации столь же легко разрешимой, как и первоначальная задача безусловной минимизации. Перейдем к формулировке РМГ более высоких порядков точности, опирающейся на условную минимизацию квадратичной функции (17), где $c = x_{i-1}$, $d = x_i$, с ограничением (30). Для обеспечения выполнения дискретных аналогов законов сохранения (26) в РМГ мы выбираем в качестве одного из элементов локального ортонормированного базиса ячейки $[x_{i-1}, x_i]$ функцию (24), а соответствующий ей коэффициент полагаем равным

$$\mathbf{U}_0(t) = (x_i - x_{i-1})^{1/2}\mathbf{U}(t), \tag{39}$$

где $\mathbf{U}(t)$ есть решение задачи Коши для системы ОДУ (28).

В выражении (13) должны быть также определены оставшиеся коэффициенты $\mathbf{U}_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$. С этой целью, подставляя (13) в неравенство (30) и учитывая соотношения (28) и (39), приходим к линейному неравенству относительно производных по времени искомых коэффициентов

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}_k(t)\cdot\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} + H(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t)) - \\ -(x_i - x_{i-1})^{-1/2}\,\mathbf{V}_0(t)\cdot[\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))] \ge 0,\end{gathered} \tag{40}$$

где

$$\mathbf{V}_k(t) = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\nabla S(\mathbf{U}(x,t))\varphi_k(x)dx, \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{41}$$

Далее, полагая в правой части (18)

$$\mathbf{B}_0 = -(x_i - x_{i-1})^{-1/2}[\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))], \tag{42}$$

перепишем (18) в виде

$$W(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n) = \int_{x_{i-1}}^{x_i}|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{B}_k\varphi_k(x) - \mathbf{A}(x)|^2_{\alpha,\beta}dx, \tag{43}$$

где

$$\mathbf{A}(x) = (x_i - x_{i-1})^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))] - \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x,t))}{\partial x}, \qquad (44)$$

и поставим задачу условной минимизации квадратичной функции (43) с линейным ограничением

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{B}_k \geq \eta, \qquad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \eta = (x_i - x_{i-1})^{-1/2}\, \mathbf{V}_0(t) \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))] - \\ - [H(\mathbf{U}_G(x_i,t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1},t))], \end{aligned} \qquad (46)$$

а $3n$-мерный вектор $(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)$ является искомой точкой минимума. Очевидно, что задача условной минимизации квадратичной функции (43) с ограничением (45) единственным образом разрешима, если хотя бы один из компонентов $3n$-мерного вектора $(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n)$ в левой части (45) отличен от нуля.

Отметим также существование особого случая

$$\mathbf{U}_k(t) = \mathbf{0}; \qquad k = 1, \ldots, n. \qquad (47)$$

Если равенства (47) справедливы, то функция (13) принимает постоянное значение в ячейке $[x_{i-1}, x_i]$ и правые части равенств (41) обращаются в нуль для $k = 1, \ldots, n$ в силу ортогональности системы функций $\{\varphi_k(x)\}$ в $\mathrm{L}_2[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $3n$-мерный вектор $(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n)$ состоит из нулевых компонентов. В этом случае локально, в пределах рассматриваемой ячейки, функция (13) удовлетворяет в момент времени t системе ОДУ (28), отвечающей РМГ первого порядка. Тогда, согласно выводам раздела 4, выполняются энтропийное условие (30) и его следствия (40) и (45). Необходимость выполнения условия (46) для обращения в нуль $3n$-мерного вектора $(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n)$ пока остается открытым вопросом.

Энтропийная регуляризация РМГ высоких порядков точности состоит в определении приближенного решения в ячейке $[x_{i-1}, x_i]$ как линейной комбинации (13) ортонормированных функций с коэффициентами, определяемыми по правилу:

1) если хотя бы один из интегралов (41) отличен от нуля, вычисляется точка $(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n)$ условного минимума квадратичной функции (43) с ограничением (45) и решается система ОДУ (20), в результате чего определяются коэффициенты в (13);

2) если все интегралы (41) при $k > 0$ обращаются в нуль, то полагаем, что соответствующие коэффициенты $\mathbf{U}_k(t)$ в (13) также обращаются в нуль, т.е.

имеют место равенства (47), а приближенное решение определяется как решение ОДУ (28);

3) наблюдаемыми значениями любой газодинамической величины $f(\mathbf{U})$ в ячейке являются ее средние значения в ячейке

$$f_i(t) = < f(\mathbf{U}(x,t)) > = (x_i - x_{i-1})^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\mathbf{U}(x,t))dx, \qquad (48)$$
$$< f(\mathbf{U}(x,t)) >_\rho = < \rho(x,t) f(\mathbf{U}(x,t)) > / < \rho(x,t) >$$

в зависимости от физического контекста. Верхняя формула (48) применяется для таких величин, как плотность $\rho(x,t)$ и давление $p(x,t)$ газа. Нижняя формула (48) используется для удельных величин, таких как скорость $u(x,t)$, внутренняя энергия $\varepsilon(x,t)$ и т.п.

Для практической реализации только что описанного метода энтропийной регуляризации осталось явно сформулировать конструктивный алгоритм решения вариационной задачи (43) – (45).

Минимальное значение квадратичной функции (43) достигается либо во внутренней точке полупространства, определяемого неравенством (45), либо на его границе, описываемой уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{B}_k = \eta. \qquad (49)$$

В первом случае точки условного и безусловного минимумов (43) совпадают друг с другом, и в качестве решения следует принять классические значения (27) коэффициентов РМГ. Если коэффициенты (27) не удовлетворяют неравенству (45), то следует решить задачу условной минимизации функции (43) с ограничением (49). Для этого удобно воспользоваться методом неопределенных множителей, записав соответствующий функционал Лагранжа в виде

$$\Phi_\mu(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_k \varphi_k(x) - \mathbf{A}(x)|^2_{\alpha,\beta} dx + 2\mu(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{B}_k - \eta), \qquad (50)$$

и найти его безусловный экстремум.

Пользуясь обозначениями

$$\mathbf{A} = (A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})^T, \ \mathbf{B}_k = (B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, B_k^{(3)})^T, \ \mathbf{V}_k = (V_k^{(1)}, V_k^{(2)}, V_k^{(3)})^T \qquad (51)$$

и приравнивая к нулю производные $\partial\Phi_\mu / \partial B_k^{(i)}$, найдем компоненты экстремали функционала Лагранжа (50)

$$B_k^{(1)} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} A^{(1)}(x)\varphi_k(x)dx - \alpha^{-1}\mu V_k^{(1)}, \tag{52}$$

$$B_k^{(2)} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} A^{(2)}(x)\varphi_k(x)dx - \beta^{-1}\mu V_k^{(2)}, \tag{53}$$

$$B_k^{(3)} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} A^{(3)}(x)\varphi_k(x)dx - \mu V_k^{(3)}, \tag{54}$$

где параметр μ определяется из условия (49)

$$\mu = \{\sum_{k=1}^{n}[\alpha^{-1}(V_k^{(1)})^2 + \beta^{-1}(V_k^{(2)})^2 + (V_k^{(3)})^2]\}^{-1}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} V_k^{(j)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} A^{(j)}(x)\varphi_k(x)dx - \eta]. \tag{55}$$

Отметим, что если реализуется случай 1) правила определения коэффициентов РМГ, то правая часть системы ОДУ (20) является липшиц-непрерывной функцией относительно искомых коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$, по крайней мере, в малой окрестности рассматриваемой точки фазовой траектории, что в соответствии с общей теорией обыкновенных дифференциальных уравнений [26] означает существование и единственность искомого решения. Случай 2) требует применения более тонких методов исследования и не является предметом рассмотрения настоящей работы. Последний пункт 3) правила относится к интерпретации решения энтропийно регуляризованного РМГ. Отметим, что решение РМГ не может рассматриваться буквально как приближение к точному решению газодинамической задачи на масштабах, меньших, чем размеры ячейки, так как на таких масштабах наша дискретная модель, вообще говоря, не удовлетворяет законам сохранения массы, импульса, полной энергии и энтропийному условию. Поэтому сравнение приближенного решения с точным должно производиться корректно путем сопоставления друг с другом соответствующих средних значений в рассматриваемой ячейке.

Рассмотрим вопрос о выборе весовых коэффициентов α и β в (11) и (19). Для безусловной минимизации квадратичной функции (43) этот выбор не является значимым, так как точка безусловного минимума от него не зависит. Однако правильное определение весовых множителей становится существенным, когда решается задача условной минимизации (43) – (45), лежащая в основе энтропийной регуляризации. Естественным мотивом при выборе весовых коэффициентов является соображение размерности, так как операция сложения применима только в отношении величин одной и той же размерности. Норма (11) применяется к производной по времени векторной функции $\mathbf{U} = (\rho, I, E)$. Отметим, что предлагаемый нами "энергетический" выбор коэффициентов α и β

$$\beta = \frac{< E(x,t) >}{< \rho(x,t) >} = (\int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho dx)^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(\varepsilon^2 + u^2 / 2) dx = \frac{U_0^{(3)}(t)}{U_0^{(1)}(t)}, \quad (56)$$
$$\alpha = \beta^2$$

отвечает соображению размерности и, с нашей точки зрения, правильно учитывает вклад каждого скалярного компонента вектора решения $\mathbf{U} = (\rho, I, E)$ в целевую функцию (43).

Учитывая (7), найдем явные выражения для градиента плотности энтропии

$$\nabla S(\mathbf{U}(x,t)) = (\frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho}, \frac{\partial(\rho s)}{\partial I}, \frac{\partial(\rho s)}{\partial E}), \quad (57)$$

в правой части (41). Принимая во внимание равенство (34), получим формулы для компонентов правой части (57)

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho} = s - \gamma + \frac{I^2}{2\rho E - I^2}, \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial I} = -\frac{2\rho I}{2\rho E - I^2}, \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial E} = \frac{2\rho^2}{2\rho E - I^2}. \quad (58)$$

Таким образом, энтропийная регуляризация РМГ сформулирована как вариационная задача (43) – (46) на условный экстремум с целью определения коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ разложения приближенного решения по выбранной системе ортонормированных функций $\{\varphi_k(x)\}$. Алгоритм вычисления коэффициентов разложения $\mathbf{U}_k(t)$ полностью описан.

7. Заключение

1. Впервые сформулирован вариационный принцип энтропийной регуляризации разрывного метода Галеркина высокого порядка точности применительно к системе одномерных уравнений газовой динамики, обеспечивающий совместное выполнение дискретных аналогов законов сохранения массы, импульса и полной энергии и закона неубывания энтропии в неравновесных термодинамических системах. Выполнение перечисленных физических законов позволяет рассматривать энтропийно регуляризованный РМГ как полноценную дискретную модель газовой динамики.

2. Благодаря своей универсальной формулировке вариационный принцип энтропийной регуляризации может быть обобщен на многомерные гиперболические уравнения в частных производных, решения которых по постановке задачи должны удовлетворять энтропийному неравенству.

3. Получены соотношения для коэффициентов энтропийно регуляризованного РМГ, позволяющие найти их как решения соответствующей системы ОДУ по времени. Сложность численной реализации предложенного метода имеет такой же уровень, как и для классического РМГ, что создает предпосылки его применения в широком круге задач газовой динамики. Уравнение состояния идеального газа может быть заменено в случае необходимости другим более подходящим уравнением состояния.

4. Требование ортонормированности системы базисных функций несущественно для вариационного принципа энтропийной регуляризации РМГ. В качестве таковой может быть выбран любой конечномерный базис с той лишь оговоркой, что для выполнения законов сохранения в нем необходимо присутствие константы в качестве одной из базисных функций. Для неортогонального базиса также могут быть получены соответствующие формулы энтропийной регуляризации РМГ, которые переписываются в компактной форме с использованием взаимного базиса.

5. Порядок точности как энтропийно регуляризованного, так и классического РМГ существенно зависит от выбора базисных функций. Обратим внимание, что в тех ячейках, где классический РМГ не нарушает энтропийного неравенства, энтропийно регуляризованное приближенное решение вычисляется по одним и тем же с ним формулам и должно иметь тот же самый порядок точности. В областях вблизи разрыва высокая точность обоих методов не предполагается.

6. Конструктивный характер предложенного метода открывает возможность для расчета моделей с управляемым производством энтропии. Например, модифицируя энтропийное неравенство, можно формулировать условия, относящиеся к скорости производства энтропии для тех или иных физических процессов, и закладывать их в вычислительный алгоритм.

Список литературы

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
5. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection – Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics. 1998. V. 1697. P. 151–268.
6. Arnold D.N., Brezzi F. Cockburn B., Marini L. D. Unified analysis of

discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2002. V.29. P. 1749–1779.
7. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
8. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2017. № 89. — 32 с. — doi:10.20948/prepr-2017-89 — URL: http://keldysh.ru/papers/2017/prep2017_89.pdf
9. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Мат. модел., 2012, Т.24, №12, С.124–128.
10. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф., Утиралов Д. И. Реализация граничных условий прилипания для разрывного метода Галеркина // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2014. № 32. — 16 с. — URL: http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_32.pdf
11. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Дифференциальные уравнения. 2015. Т.51. № 7. С.899–907.
12. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О методах типа Годунова высокого порядка точности // Доклады академии наук. 2015. Т.461. № 4. С.390–393.
13. Тишкин В.Ф., Жуков В.Т., Мышецкая Е.Е. К обоснованию схемы Годунова в многомерном случае // Матем. моделирование. 2016. Т.28. № 2. с.86–96.
14. Le Floch P. G., Mercier J. M., Rohde C. Fully discrete, entropy conservative schemes of arbitrary order // SIAM J. Numer. Anal. 2002. V. 40. № 5. P.1968–1992.
15. Lagoutière F., Acad C. R. A non-dissipative entropic scheme for convex scalar equations via discontinuous cell-reconstruction // Comptes Rendus Mathematique. 2004. V.338. № 7. P.549–554.
16. Cheng X.-H., Nie Y.-F., Feng J.-H., Luo X.-Y., Cai L. Self-adjusting entropy-stable scheme for compressible Euler equations // Chinese Physics B. 2015. V.24. № 2.
17. Zakerzadeh H., Fjordholm U.S. High-order accurate, fully discrete entropy stable schemes for scalar conservation laws // IMA J. of Numerical Analysis. 2016. V.36. № 2. P.633–654.
18. Fjordholm U. S., Käppeli R., Mishra S., Tadmor E. Construction of approximate entropy measure-valued solutions for hyperbolic systems of conservation laws // Found. Comput. Math. 2017. V.17. № 3. P.763–827.
19. Winters A. R., Gassner G. J. A Comparison of Two Entropy Stable Discontinuous Galerkin Spectral Element Approximations for the Shallow Water Equations with Non-Constant Topography // Journal of Computational Physics.

2015. V. 301. P. 357–376.
20. Gassner G. J., Winters A. R., Kopriva D. A. A Well Balanced and Entropy Conservative Discontinuous Galerkin Spectral Element Method for the Shallow Water Equations // Applied Mathematics and Computation. 2016. V. 272. P. 291–308.
21. Chen T., Shu Ch.-W. Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys., 2017. V. 345. P.427–461.
22. Bohm M., Winters A. R., Gassner G. J., Derigs D., Hindenlang F., Saur J. An entropy stable nodal discontinuous Galerkin method for the resistive MHD equations. Part I: Theory and Numerical Verification (submitted to Journal of Computational Physics 19 Feb 2018). https://arxiv.org/pdf/1802.07341.pdf
23. Химическая энциклопедия. http://www.xumuk.ru/bse/2565.html
24. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 352 с.
25. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
26. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. стереотип. М., 2017. 240 с.

Оглавление