



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Корнеев Б.А., [Левченко В.Д.](#)

Моделирование трехмерных
нестационарных вязких
сжимаемых течений на
графических картах с
помощью алгоритма
DiamondTorre

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Корнеев Б.А., Левченко В.Д.
Моделирование трехмерных нестационарных вязких сжимаемых течений на графических картах
с помощью алгоритма DiamondTorre // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 105. 17 с.
doi:[10.20948/prepr-2018-105](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-105)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-105>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

Б.А.Корнеев, В.Д.Левченко

**Моделирование трехмерных
нестационарных вязких сжимаемых
течений на графических картах
с помощью алгоритма DiamondTorre**

Москва — 2018

¹Корнеев Б.А., ²Левченко В.Д.

e-mail: ¹boris.korneev@phystech.edu, ²lev@keldysh.ru

¹МФТИ (ГУ), ²ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Моделирование трехмерных нестационарных вязких сжимаемых течений на графических картах с помощью алгоритма DiamondTorre

В работе рассматривается подход к моделированию задач нестационарной газовой динамики в рамках системы уравнений Навье–Стокса. Строится численная схема Рунге–Кутты разрывным методом Галеркина с аппроксимацией диссипативных членов локальным разрывным методом Галеркина. Разработан вариант алгоритма DiamondTorre реализации схемы для расчета на гетерогенных компьютерах. Солвер на его основе включен в программный комплекс DTGV для решения трехмерных газодинамических задач, приведены оценки его производительности и эффективности. Представлен пример решения задачи обтекания шара в трехмерной постановке с его помощью.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, сверхзвуковые течения, метод RKDG, LRnLA алгоритмы, DiamondTorre алгоритм, вычисления на видеокартах

¹Korneev B.A., ²Levchenko V.D.

e-mail: ¹boris.korneev@phystech.edu, ²lev@keldysh.ru

¹MIPT, ²KIAM RAS

Simulating three-dimensional unsteady viscous compressible flow on GPU using the DiamondTorre algorithm

In this paper the approach to simulation of unsteady fluid dynamic problems in terms of the Navier–Stokes system of equations is considered. The numerical scheme is built using the Runge–Kutta discontinuous Galerkin method, approximating the viscous terms with the local discontinuous Galerkin method. A modification of the DiamondTorre algorithm is developed for the heterogeneous implementation of the scheme. The solver based on this algorithm is included into the DTGV software for solving three-dimensional fluid dynamic problems, the results of its validation and performance tests are given. An example of solving the problem of flow past a sphere in three-dimensional setting is presented.

Keywords: Navier–Stokes equations, supersonic flow, RKDG method, LRnLA algorithms, DiamondTorre algorithm, GPU computing

Содержание

1	Введение	3
2	Модель и численная схема	4
2.1	Система уравнений	4
2.2	Пространственная дискретизация. Локальный разрывный метод Галеркина	5
2.3	Временная дискретизация. Ограничители	6
3	Алгоритм реализации	7
4	Валидация и оценка производительности	9
4.1	Задача Римана	9
4.2	Оценка скорости расчета	10
5	Обтекание шара. Моделирование и сравнение результатов	11
5.1	Обтекание при $M \ll 1$	11
5.2	Обтекание при высоких M	13
6	Заключение	15
	Список литературы	15

1. Введение

Численное моделирование является основным инструментом исследования нестационарных процессов газовой динамики [1–3]. В данной работе рассматривается модель сжимаемой, вязкой сплошной среды, сформулированная в виде системы уравнений Навье–Стокса. Одной из преследуемых нами целей является использование максимально полной в физическом смысле модели без использования моделей турбулентности и других упрощений.

Для построения явной численной схемы использован подход на основе Рунге–Кутты разрывного метода Галеркина. Изначально сформулированный для уравнения переноса [4], метод допускает обобщение для задач гиперболического типа, в частности, задач газовой динамики в рамках системы уравнений Эйлера [5], а также развиты расширения метода для решения задач других типов: конвекции-диффузии, в частности, системы уравнений Навье–Стокса, и эллиптических задач [6]. В данной работе используется локальный разрывный метод Галеркина, основанный на формальном введении новых неизвестных для описания диссипативных членов [6, 7].

Для эффективной реализации численной схемы с использованием графических процессоров используется подход на основе теории локально-рекурсивных нелокально-асинхронных алгоритмов [8]. Ранее описан алгоритм DiamondTorge для реализации аналогичной схемы, но в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью [9, 10]. В настоящей работе указан способ модификации алгоритма для их учета на основе введения дополнительных подстадий для процедур расчета диссипативных членов. Рассмотрен вопрос оценки производительности и

эффективности полученной реализации. Приводятся результаты тестовой задачи Римана [11].

В качестве задачи для валидации в полностью трехмерной постановке и примера использования построенного программного комплекса рассматривается задача обтекания шара потоком газа при разных числах Маха и Рейнольдса. Имеется большой набор экспериментальных и численных данных по ее решению [12, 13]. В данной работе проводится численное решение данной задачи на персональном компьютере с видеокартой. Приводится сравнение полученных результатов.

Структура работы следующая. Во втором разделе идет речь о математической модели и построении численной схемы. Третий раздел посвящен построению DiamondTorre алгоритма реализации. Затем рассматриваются вопросы оценки эффективности, производительности программы и ее валидация. Наконец, в пятом разделе идет речь о моделировании задачи об обтекании сферы. В заключении подводятся итоги работы.

2. Модель и численная схема

2.1. Система уравнений. Система уравнений, описывающая динамику вязкой сжимаемой жидкости или газа в трехмерном пространстве, представлена в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (\rho, \rho u_j, E)$ — «консервативные» переменные состояния жидкости или газа, $E = \rho(\varepsilon + \frac{1}{2}u^i u_i)$ — полная энергия,

$$\mathbf{F}(\mathbf{U})_i = [\rho u_i, \rho u_i u_j + P_{ij}, u_i E + P_{ij} u^j - \kappa \partial T / \partial x^i] —$$

потоки, $P_{ij} = p\delta_{ij} - \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) - \partial u_k / \partial x_k (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\delta_{ij}$ — тензор давления с учетом вязких членов. μ — кинематическая вязкость, ζ — «вторая» вязкость, κ — коэффициент теплопроводности. Система замыкается уравнением состояния $p = p(\rho, \varepsilon)$.

Разделим формально потоки на невязкие (Эйлеровы) и чисто вязкие (Навье–Стоксовские) слагаемые:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i^{Eu}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{F}_i^{NS}}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{F}_i^{Eu} = [\rho u_i, \rho u_i u_j + p\delta_{ij}, u_i E]$ — Эйлеровы потоки,

$$\mathbf{F}_i^{NS} = \left[0, -\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \partial u_k / \partial x_k \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}, \right.$$

$$- \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) u^j - \partial u_k / \partial x_k \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) u_i - \kappa \partial T / \partial x^i \Big] -$$

вязкие «потоки».

2.2. Пространственная дискретизация. Локальный разрывный метод Галеркина. Для начала рассмотрим случай $\mathbf{F}_i^{NS} = 0$. Тогда система представляется в дивергентном виде, имеет гиперболический тип, и метод RKDG строится следующим образом. Пусть мы строим численное решение системы (1) в области $G \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ с границей ∂G с некоторыми заданными начальными условиями при $t = 0$ и граничными условиями. Введем дискретизацию пространства G с помощью сетки из конечных объемов. В каждой ячейке L введем набор базисных функций $\{\varphi^n\}$, и решение будем искать в виде разложения по этому базису для каждой компоненты искомого вектора \mathbf{U} , при этом базисные коэффициенты суть функции от времени. Таким образом, численное решение ищется в виде

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{u}_n(t) \varphi^n(x). \quad (3)$$

(3) подставляется в (2), при этом мы требуем, чтобы получаемая невязка была ортогональна базисным функциям. Интеграл по объему ячейки L с помощью теоремы Гаусса преобразуем так, чтобы получить интеграл по поверхности ячейки ∂L . Получим

$$\frac{d\mathbf{u}_n(t)}{dt} \int_L \varphi^n \varphi_m dV + \int_{\partial L} \mathbf{F}_i^{Eu} \varphi_m \mathfrak{n}^i d\Sigma - \int_L \mathbf{F}_i^{Eu} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} dV = 0.$$

Здесь и далее \mathfrak{n}^i — нормаль к границе ячейки ∂L . В данной работе используется ортонормированный базис, поэтому $\int_L \varphi^n \varphi_m dV = \delta_m^n$ и

$$\frac{d\mathbf{u}_m(t)}{dt} + \int_{\partial L} \mathbf{F}_i^{Eu} \varphi_m \mathfrak{n}^i d\Sigma - \int_L \mathbf{F}_i^{Eu} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} dV = 0. \quad (4)$$

Так строится DG-аппроксимация для уравнения Эйлера [5].

В данной работе используется обобщение данного метода для диссипативных членов в уравнении Навье–Стокса, известное как LDG-метод (локальный разрывный метод Галеркина [7]). Введем набор новых переменных для пространственных производных в потоке \mathbf{F}_i^{NS} :

$$W = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad S = \frac{\partial T}{\partial x^i}. \quad (5)$$

Так же формально будем искать численное решение для тензоров W и S в виде разложения по базису $\{\varphi^n\}$:

$$W = \mathbf{w}_n(t) \varphi^n(x), \quad S = \mathbf{s}_n(t) \varphi^n(x). \quad (6)$$

Для невязки в (5) при аппроксимации (6) так же ставится условие ортогональности базисным функциям, что приводит к следующей алгебраической системе:

$$\begin{aligned} w_m(t) &= \int_{\partial L} u_i \eta^j \varphi_m d\Sigma - \int_L u_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} dV; \\ s_m(t) &= \int_{\partial L} T \eta^i \varphi_m d\Sigma - \int_L T \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} dV. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь использованы равенства $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(u_i \delta_k^j)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{\partial(T \delta_i^k)}{\partial x_k}$ и теорема Гаусса

$$\begin{aligned} \int_L \frac{\partial u_i \delta_k^j}{\partial x_k} \varphi_m dV &= \int_L \frac{\partial(u_i \delta_k^j \varphi_m)}{\partial x_k} dV - \int_L u_i \delta_k^j \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} dV = \\ &= \int_{\partial L} u_i \delta_k^j \eta^k d\Sigma - \int_L u_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} dV = \int_{\partial L} u_i \eta^j d\Sigma - \int_L u_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} dV. \end{aligned}$$

Аналогично для градиента температуры.

Далее строим аппроксимацию для уравнения (2):

$$\frac{dw_m(t)}{dt} + \int_{\partial L} \mathbf{F}_i^{Eu} \varphi_m \eta^i d\Sigma + \int_{\partial L} \mathbf{F}_i^{NS} \varphi_m \eta^i d\Sigma - \int_L \mathbf{F}_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} dV = 0. \quad (8)$$

Численные потоки

В членах уравнений (7) и (8), содержащих интегралы по поверхности границы ячейки, необходима аппроксимация подынтегрального выражения, использующая значения в соседствующих ячейках, формирующих грань поверхности. Для потока \mathbf{F}_i^{Eu} обычно используется поток на основе решения задачи Римана. В данной работе используется поток HLLC [11]. Для остальных выражений предложены различные аппроксимации [6], в данной работе используется полусумма значений слева и справа от границы [14].

Интегралы заменяются квадратурными формулами нужного порядка. В итоге построена следующая численная схема. Первой решается система (7), в результате которой вычисляются диссипативные члены, которые используются для решения (8).

2.3. Временная дискретизация. Ограничители. Система ОДУ (7), (8) решается с помощью некоторого явного метода Рунге–Кутты. На каждой стадии метода необходимо использовать ограничитель для монотонизации численной схемы [6].

В данной работе используется ограничитель градиента типа minmod, который для декартовой сетки строится следующим образом. Пусть решение в ячейке I_j представлено в виде

$$v|_{I_j} = v_j^0 + (x - x_j)v_j^1, \quad j = 1, \dots, Nx.$$

Тогда положим

$$u|_{I_j} = v_j^0 + (x - x_j)m \left(v_j^1, \frac{v_{j+1}^0 - v_j^0}{h}, \frac{v_j^0 - v_{j-1}^0}{h} \right),$$

где

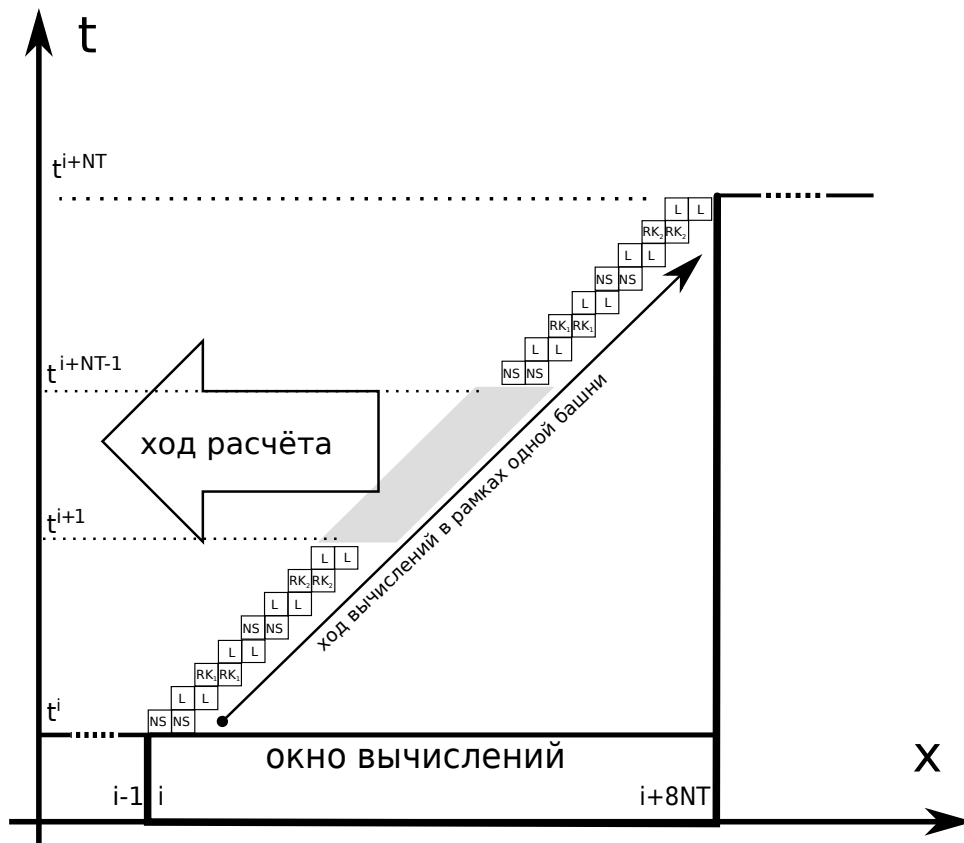
$$m(x, y, z) = \begin{cases} s \cdot \min(|x|, |y|, |z|), & \text{если } \text{sign}(x) = \text{sign}(y) = \text{sign}(z) = s, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ограничитель по другим координатам строится аналогичным образом.

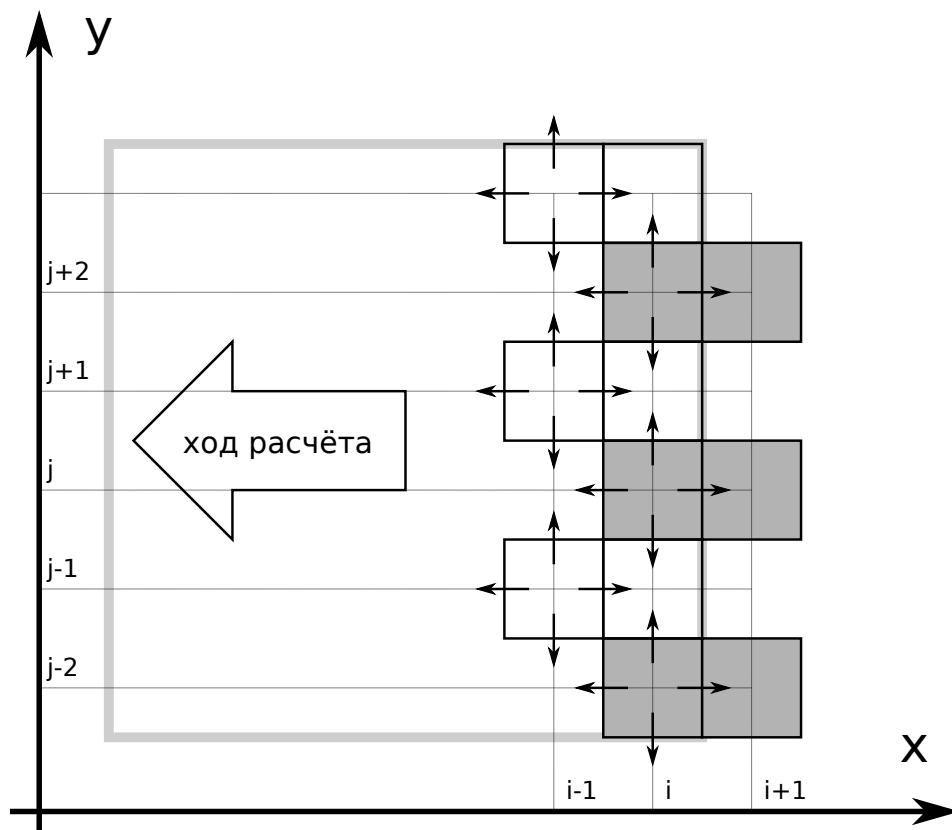
3. Алгоритм реализации

В данной работе рассматривается построение эффективной реализации для расчета на гетерогенных вычислительных системах, в частности, на персональных компьютерах с видеокартой. При решении трехмерных газодинамических задач актуальна проблема нехватки памяти графической карты для хранения всей вычислительной области, кроме того, вычислительная газодинамика является memory bound задачей. Таким образом, эффективная реализация должна быть адаптирована к иерархической структуре памяти *оперативная память CPU* \Rightarrow *оперативная память GPU* \Rightarrow *регистры*. Для решения этих проблем в данной работе используется теория локально-рекурсивных нелокально-асинхронных алгоритмов (LRnLA) [8]. LRnLA алгоритмы применимы для создания высокопроизводительных программных продуктов для моделирования различных физических задач [15–17]. В данной работе применяется вариант LRnLA алгоритма DiamondTorte [17], адаптированный для схемы RKDG метода [10].

Расчет задачи с помощью данного алгоритма удобно представить себе как заполнение вычислительной области башнями. Схема такого заполнения представлена на рисунках 1а) и 1б). Суть каждого кирпичика башни с координатами (x_i, y_j, t_k) – выполнение части расчета по численной схеме по всему отрезку (x_i, y_j, Nz, t_k) , это может быть выполнение стадий расчета диссипативных членов, Рунге–Кутты или ограничителей. На рисунке 1а) они обозначены NS , $R1$, $R2$ и L . Будем считать координатами башни координаты ее левого нижнего кирпичика в плоскости xt . Параметр $NT \geq 1$ определяет, сколько шагов по времени рассчитывается при одной итерации алгоритма. В плоскости xt каждая башня строится снизу вверх по оси t , а по x – в сторону ее наклона (для конфигурации, как на рисунке 1, – по возрастанию x). На каждой итерации алгоритма заполнение области в плоскости xy (рисунок 1б)) идет справа налево, начиная от правой границы по x , и на каждом x_i , $i \in 0, \dots, Nx - 1$ башни строятся через одну по оси y , при этом если при $x = x_i$ строились башни только на четных y , то при $x = x_{i-1}$ строятся башни только на нечетных y . Мы пользуемся тем, что алгоритм расчета диссипативных членов также имеет шаблон типа «крест»,



а)



б)

Рис. 1. Алгоритм DiamondTorge: а) отображение в плоскости xt , б) отображение в плоскости xy

с зависимостями по соседним 6 ячейкам. Таким образом, модификация алгоритма DiamondTorre для расчета газодинамических задач без пренебрежения вязкостью и теплопроводностью состоит во введении требуемого количества дополнительных стадий.

По оси z вводится векторизация с помощью CUDA threads. На каждой итерации обхода x_i , $i \in 0, \dots, Nx - 1$ башни с индексом j одной четности считаются асинхронно с помощью CUDA blocks. В глобальной памяти GPU хранятся данные, соответствующие бегущему окну вычислений. Остальные данные хранятся в оперативной памяти CPU. Обмен между GPU и CPU происходят в виде копирования порции данных в точке x_{i-1} на GPU и отправке посчитанных данных с GPU на CPU в точке x_{i+8NT} . Размер передаваемых данных фиксирован и не зависит от параметра NT . Таким образом, увеличивая NT , что увеличивает размер вычислений, мы нивелируем возможное замедление расчета из-за пересылок между GPU и CPU.

4. Валидация и оценка производительности

4.1. Задача Римана. Для тестирования газодинамических солверов используют модельную постановку в виде одномерной задачи с кусочно-постоянным начальным условием. Такая постановка называется задачей Римана о распаде разрыва. Рассматриваемый в данной работе программный комплекс тестировался в пренебрежении диссипативными членами на серии подобных задач, результаты приведены, например, в [9]. Установлено, что данные результаты воспроизводятся в полной мере при расчете на модифицированной версии программы, при этом при введении диссипативных членов наблюдается дополнительное (к схемной диссипации) размытие разрывов.

Также полезным тестом является задача Римана в сферических координатах или так называемая задача о распространении сферической взрывной волны. Отмечаем, что формально в декартовых координатах данная задача является трехмерной. Постановка задачи состоит в следующем. В трехмерной области (пусть, для определенности, это будет куб $[-1, 1]^3$) находится газ в состоянии $(\rho^{out}, u_i^{out}, p^{out})$, в центре области задается подобласть в форме шара с параметрами $(\rho^{in}, u_i^{in}, p^{in})$. Решение ищется до момента достижения возмущения границ области, нивелируя значение граничных условий.

Рассмотрим решение задачи „spherical Sod problem“: $(\rho^{in}, u_i^{in}, p^{in}) = (1, 0, 1)$, $(\rho^{out}, u_i^{out}, p^{out}) = (0.125, 0, 0.1)$. На рисунке 2 приведены результаты численного решения данной задачи на сетке 200^3 ячеек, при этом на рисунке отображена плотность в области от центра области $r = 0$ до ее границы $r = 1$. Момент времени $t = 0.25$, рассматривался идеальный газ с $\gamma = 1.4$. Решение при $\mu = 0$ хорошо соотносится с известным в литературе для схем повышенного порядка [11]. При введении диссипации мы наблюдаем размытие разрывов, при этом при $\mu = 10^{-3}$ наблюдаются некие осцилляции решения.

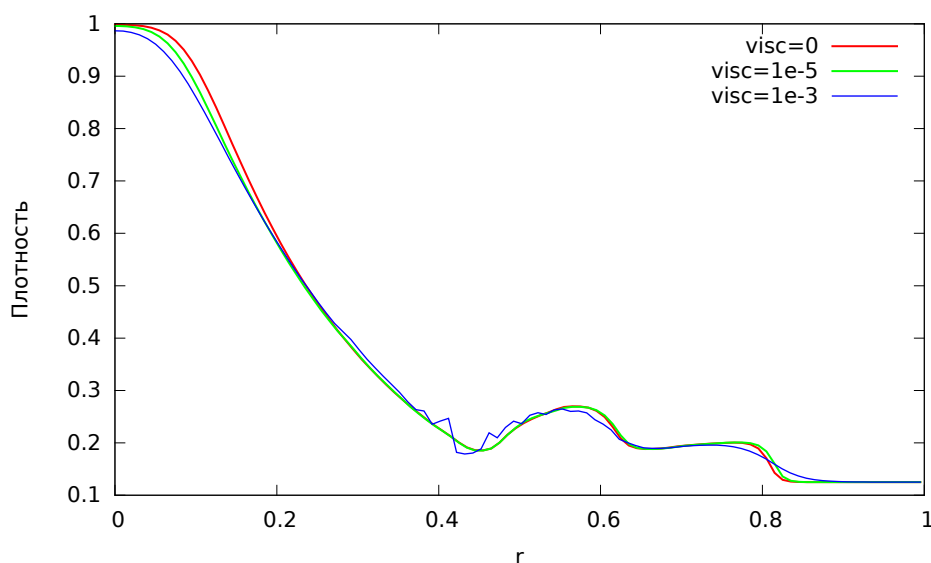


Рис. 2. Решение тестовой задачи о распространении сферической взрывной волны. Распределение плотности в диагональном сечении для трех значений вязкости $\mu = 0, 10^{-5}, 10^{-3}$

4.2. Оценка скорости расчета. Для оценки производительности рассматривалась задача максимально большого размера для тестируемой видеокарты. В тесте принимали участие видеокарты NVidia архитектур Kepler, Maxwell, Pascal и Volta различной мощности. Стандартный тест для большинства карт проводился на задаче размерами $Nx \times 256 \times 256$ ячеек. Параметры алгоритма берутся для достижения максимальной эффективности: высота башни NT максимально большая, сколько хватает памяти видеокарты, $Nx \gg NT$ и такой, чтобы задача укладывалась в оперативную память ЭВМ. Для некоторых мощных карт (Titan X, 1070, 1080, Tesla V100) рассматривалась задача размерами $Nx \times 512 \times 512$.

На рисунке 3 приведены результаты производительности кода для доступного авторам набора графических карт. Результаты показывают, что код эффективен на картах современных архитектур и достигает свыше $3 \cdot 10^7$ ячеек в секунду на топовой игровой видеокарте нового поколения GTX 1080. Максимально достижимая производительность на одной видеокарте установлена выше 10^8 ячеек в секунду на новейшей элитной видеокарте Tesla V100.

На графике также отложены оценки эффективности программы в предположении ограничения скорости расчета производительностью вычислений с плавающей точкой (compute bound limit), темпом доступа в память видеокарты (memory bound limit) и темпом обмена между GPU и CPU (CPU bound limit). Можно вычислить из аналитических соображений или с помощью профилирования, что численная схема требует около $25 \cdot 10^3$ FMA операций на ячейку, при этом используя 0.48 Гигабайт данных на 1 млн ячеек. Используя эти данные, а также оценки, что в худшем случае мы тратим две операции с плавающей точкой для расчета одной FMA операции, а также тот факт, что для расчета

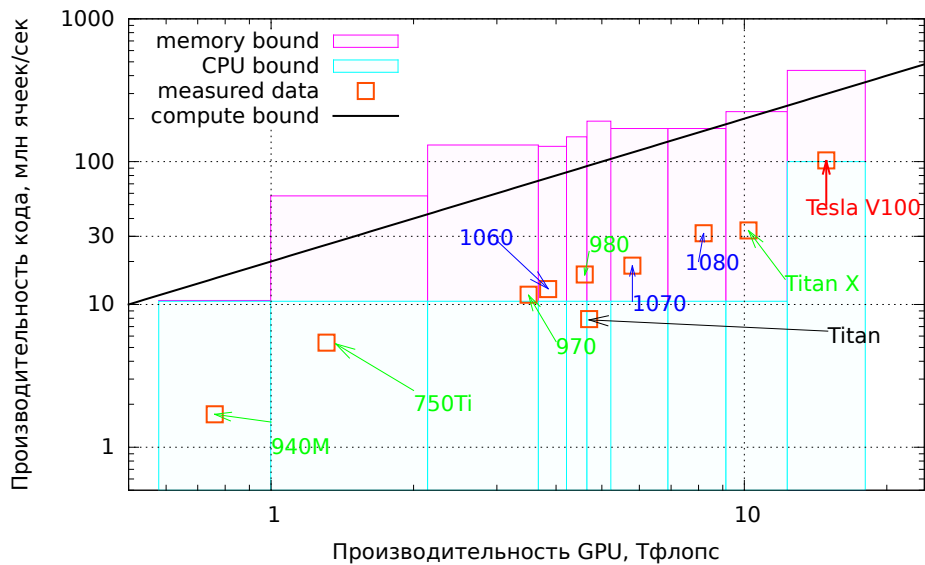


Рис. 3. Производительность солвера для различных видеокарт. Черной стрелкой с подписью выделена карта Titan архитектуры Kepler, зеленым указаны карты архитектуры Maxwell, синим — архитектуры Pascal. Красным выделена карта новейшей на момент написания работы архитектуры Tesla.

схемы нам необходимы 3 операции загрузки/сохранения данных в память видеокарты/память компьютера при наивном алгоритме, мы можем построить оценки производительности солвера в трех предельных случаях. Мы получаем, что наша задача при использовании наивного алгоритма является CPU-bound, а также является пограничной между compute и memory bound задачей. Производительность солвера выше максимально возможной при использовании наивного алгоритма и составляет до 30% от теоретически максимально возможной. Таким образом, построенный алгоритм реализации является эффективным. Кроме того, решена проблема моделирования задач, не вмещающихся полностью в память видеокарты.

5. Обтекание шара. Моделирование и сравнение результатов

Рассмотрим задачу обтекания шара потоком газа. Данная постановка является моделью реальных задач обтекания тел, возникающих при расчете аэродинамических свойств транспортных наземных, водных, воздушных и космических аппаратов. При высоких числах Маха необходимо учитывать сжимаемость обтекаемой жидкости или газа, а при повышении числа Рейнольдса характерно усложнение характера обтекания, наблюдается переход к турбулентности.

Данная задача рассматривается авторами как пример использования разработанного солвера для решения актуальных трехмерных задач газодинамики. Хранение результатов моделирования происходит в формате aiwlib массива трехмерных данных [18], для визуализации которых используется пакет im3D [19].

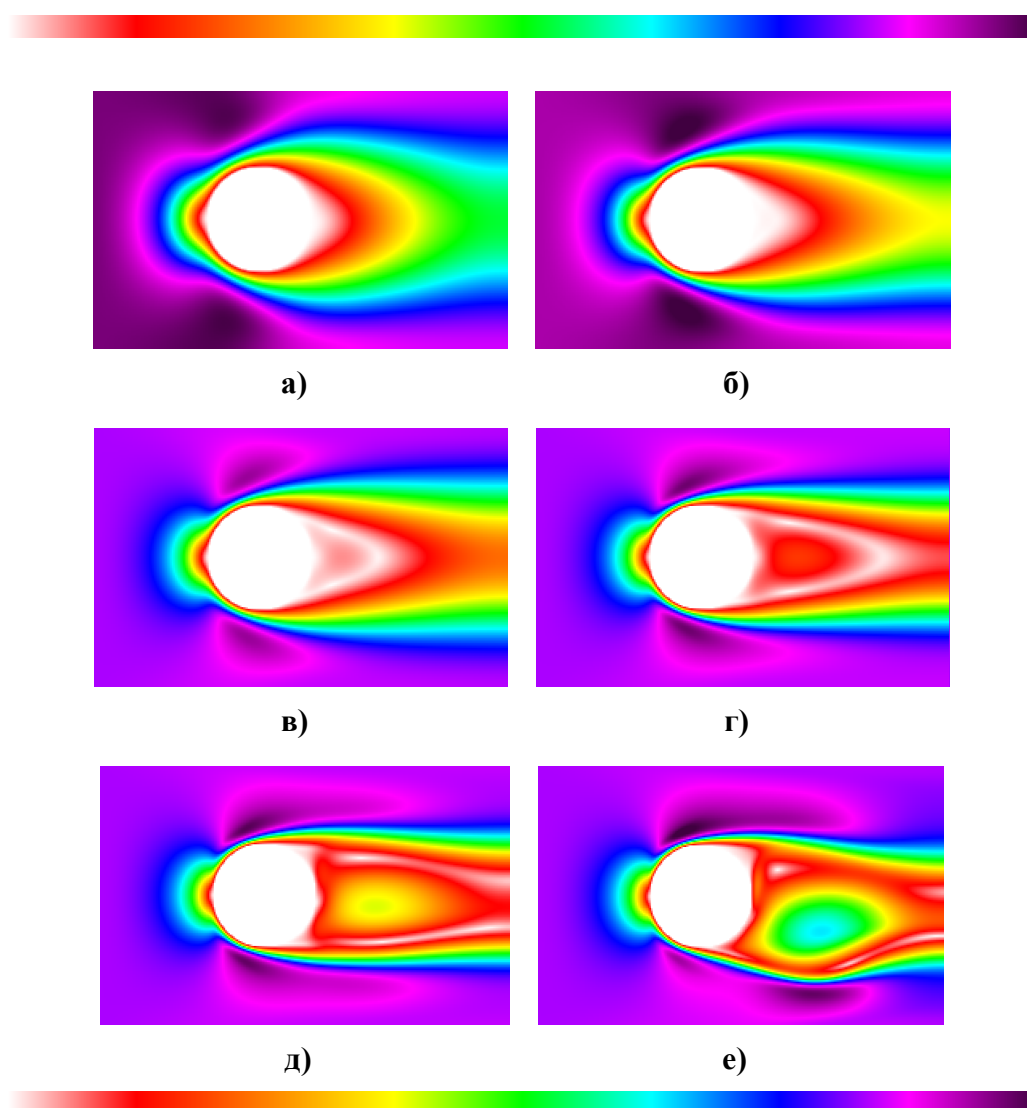


Рис. 4. Поле скорости для а) $Re = 16$, б) $Re = 32$, ..., е) $Re = 512$

5.1. Обтекание при $M \ll 1$. Сперва рассмотрим слабосжимаемое обтекание при низких числах Маха. Данная задача глубоко исследована в серии экспериментальных, аналитических и численных трудов. Выведена качественная зависимость течения от Re . Известно, что при очень низких числах Рейнольдса $Re \ll 1$ верно приближение «ползучего» течения, в диапазоне $0 < Re < 200$ существует устойчивое стационарное осесимметричное обтекание, симметричность которого теряется при $200 < Re < 300$, однако данное течение остается устойчивым. При $Re > 300$ течение становится нестационарным.

Численная постановка следующая. В прямоугольной области задается шар, на его границах ставится условие непротекания, на левой границе области задается скорость потока, на остальных — свободное вытекание. Параметры газа подбираются, исходя из чисел M и Re . На рисунке 4 приведены результаты моделирования профиля скорости обтекания при низкой скорости для различных чисел Рейнольдса в диапазоне $Re \leq 512$. Размер области $256 \times 160 \times 160$ ячеек, момент времени такой, что течение становится стационарным (если оно суще-

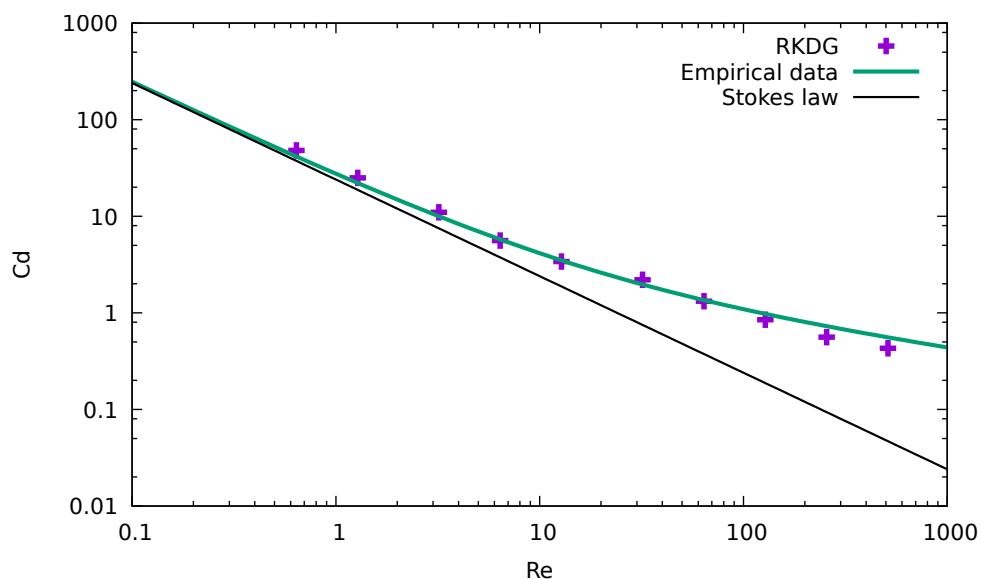


Рис. 5. Коэффициент сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса.

ствует). В целом, качественно течение соответствует описанному в работе [12] для $Re < 300$. При увеличении Re наблюдается удлинение области торможения потока за сферой. Для $Re = 256$ (рис. 4д)) получено стационарное несимметричное решение. Для $Re = 512$ (рис. 4е)) получено нестационарное решение, на рисунке отображено решение в некоторый момент времени.

Для количественной оценки была рассмотрена зависимость коэффициента сопротивления C_d от Re . На рисунке 5 представлено сравнение с известной в литературе зависимостью [12]. Результаты согласуются с экспериментальными данными.

5.2. Обтекание при высоких M . Режим обтекания при околосзвуковых и сверхзвуковых скоростях очень важен для множества приложений в аэродинамической и космической отрасли [3]. При высоких скоростях обтекания усложняется модель описания газа: невозможно пренебречь эффектами сжимаемости, а также нельзя считать газ изотермическим. Необходимо корректное описание ударных волн. Далее рассматривается задача обтекания при около- и сверхзвуковой скорости потока с учетом вязкости и теплопроводности в постановке системы уравнений Навье–Стокса. Начальные условия аналогичны рассматриваемым в параграфе 5.1. В работе [13] в сферических координатах исследовано влияние температуры поверхности обтекаемого шара на характер и параметры обтекания. Мы в расчетах ниже для простоты будем считать температуру обтекаемого шара постоянной и равной температуре газа в начальный момент времени.

На рисунке 6 показан профиль скорости обтекания для околосзвуковой задачи с $M = 0.8$ и сверхзвуковой задачи с $M = 2.0$. Мы видим, что результаты моделирования качественно совпадают с известными данными. Так, при дозвуковом обтекании с $Re = 100$ мы видим ламинарный профиль течения, при

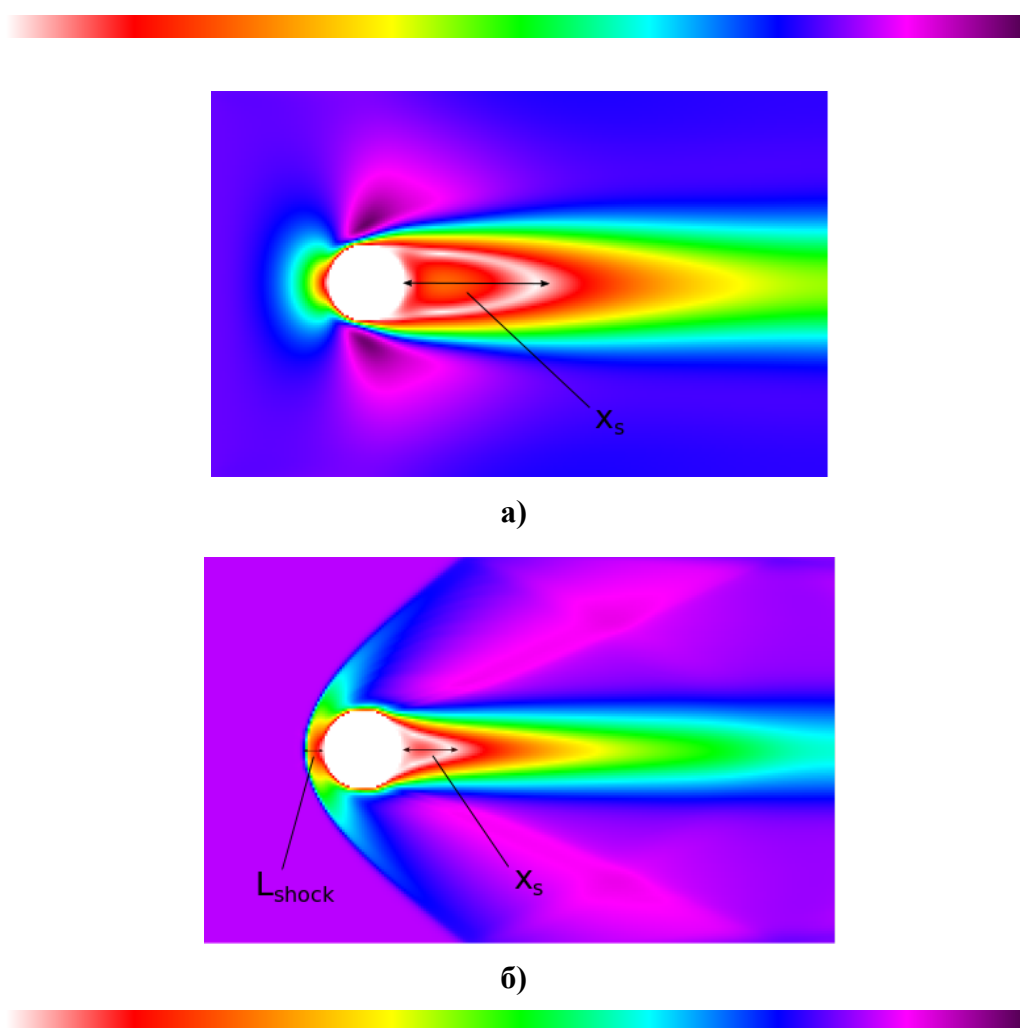


Рис. 6. Поле скорости при обтекании а) $M = 0.8$, $Re = 100$, б) $M = 2.0$, $Re = 300$

Таблица 1. Параметры L_{shock} и x_s при обтекании с различными числами M и Re

(M, Re)	Источник	L_{shock}/D	x_s/D
(0.8, 100)	эта работа	–	1.8
(0.8, 100)	данные в [13]	–	1.8
(2.0, 300)	эта работа	0.2	0.8
(2.0, 300)	данные в [13]	0.2	0.75

сверхзвуковом обтекании наблюдается головная ударная волна.

Для количественного описания течения выделяют такие особенности обтекания, как расстояние отхода головной ударной волны L_{shock} и длина зоны рециркуляции x_s (отмечены на рис. 6). В таблице 1 указаны эти параметры, измеренные из результатов расчетов с помощью рассматриваемого программного комплекса, в сравнении с известными в литературе данными [13]. По этим параметрам расчеты хорошо совпадают.

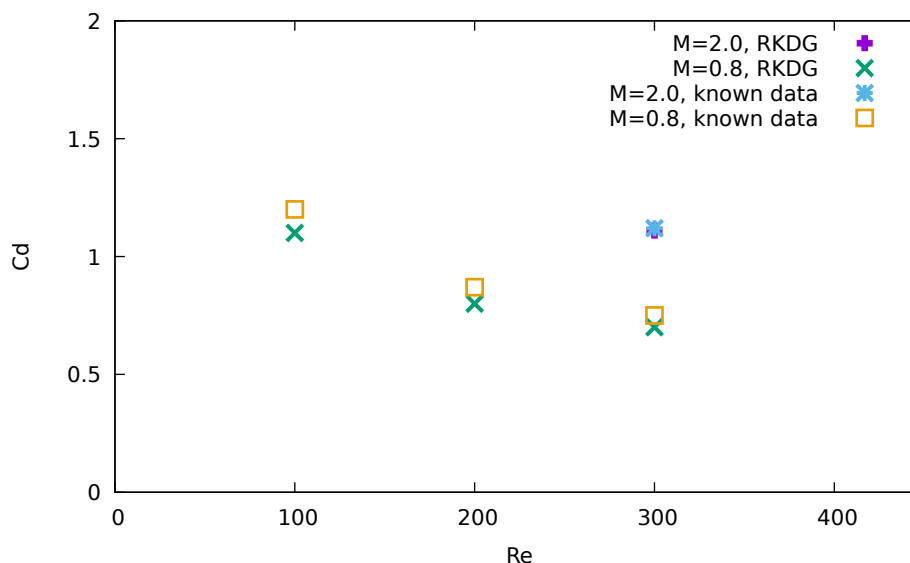


Рис. 7. Коэффициент сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для $M=0.8$ и $M=2.0$

Кроме того, аналогично проделанному в разделе 5.1, сравним полученные коэффициенты сопротивления. Результаты согласуются с данными [13] и [20].

Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

6. Заключение

В работе построена численная схема Рунге–Кутты разрывным методом Галеркина с аппроксимацией диссипативных членов локальным разрывным методом Галеркина для решения задач нестационарной газовой динамики в рамках системы уравнений Навье–Стокса. Разработан вариант алгоритма DiamondTorre реализации схемы, оптимизированный к иерархической структуре системы памяти современных гетерогенных компьютеров. Проведены валидация и оценка производительности модернизированного программного комплекса на основе этого алгоритма, получившего название DTGV. Солвер достигает темпа счета 10^8 ячеек в секунду для задач с миллиардами ячеек. Решена задача обтекания шара в трехмерной постановке с его помощью для различных скоростей обтекания и чисел Рейнольдса. Результаты моделирования хорошо соотносятся с известными данными.

Список литературы

- [1] Годунов Сергей Константинович. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. — 1959. — Vol. 47, no. 3. — P. 271–306.

- [2] Белоцерковский Олег Михайлович. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.
- [3] Гиперзвуковая аэродинамика и тепломассообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов / Под ред. Г. А. Тирского. — М.: Физматлит, 2011.
- [4] Triangular mesh methods for the neutron transport equation : Rep. / Los Alamos Scientific Lab., N. Mex. (USA) ; Executor: William H Reed, TR Hill : 1973.
- [5] Noelle Sebastian. On the derivation of the Discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws // *Mathematics of Computation*. — 1989. — Vol. 52. — P. 411–435.
- [6] Cockburn Bernardo, Shu Chi-Wang. Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // *Journal of scientific computing*. — 2001. — Vol. 16, no. 3. — P. 173–261.
- [7] Cockburn Bernardo, Shu Chi-Wang. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1998. — Vol. 35, no. 6. — P. 2440–2463.
- [8] Левченко В. Д. Асинхронные параллельные алгоритмы как способ достижения эффективности вычислений // *Информационные технологии и вычислительные системы*. — 2005. — Т. 1. — С. 68–87.
- [9] Korneev B. A., Levchenko V. D. Effective solving of three-dimensional gas dynamics problems with the Runge-Kutta discontinuous Galerkin method // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 56, no. 3. — P. 460–469.
- [10] Korneev B. A., Levchenko V. D. DiamondTorre GPU implementation algorithm of the RKDG solver for fluid dynamics and its using for the numerical simulation of the bubble-shock interaction problem // *Procedia Computer Science*. — 2015. — Vol. 51. — P. 1292–1302.
- [11] Toro E.F. *Riemann Solvers And Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. — Springer, 2009.
- [12] Johnson T. A., Patel V. C. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1999. — Vol. 378. — P. 19–70.
- [13] Direct numerical simulation of flow around a heated/cooled isolated sphere up to a Reynolds number of 300 under subsonic to supersonic conditions /

Takayuki Nagata, Taku Nonomura, Shun Takahashi et al. // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2018. — Vol. 120. — P. 284–299.

- [14] Bassi Francesco, Rebay Stefano. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations // *Journal of computational physics*. — 1997. — Vol. 131, no. 2. — P. 267–279.
- [15] Simulation of problems of nanophotonics and nanofilms: LRnLA/Nano kinetic code / V. D. Levchenko, G. I. Zmievskaya, A. L. Bondareva, A. V. Zakirov // *Applied Physics*. — 2012. — no. 3. — P. 9–18.
- [16] Перепёлкина А. Ю., Левченко В. Д., Горячев И. А. Трёхмерный кинетический код CFHall для моделирования замагниченной плазмы // *Математическое моделирование*. — 2013. — Vol. 25. — P. 98–110.
- [17] Levchenko Vadim, Perepelkina Anastasia, Zakirov Andrey. DiamondTorre Algorithm for High-Performance Wave Modeling // *Computation*. — 2016. — Vol. 4, no. 3. — P. 29.
- [18] Иванов А. В., Хилков С. А. Библиотека aiwlib — инструмент для создания приложений численного моделирования, визуализации и анализа результатов // *Научная визуализация*. — 2018. — Т. 10, № 1. — С. 110–127.
- [19] Zmievskaya G. I., Bondareva A. L. Kinetics of the formation of pores and a change in the properties of materials in numerical models // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. — 2016. — Vol. 10, no. 4. — P. 802–808.
- [20] Henderson Charles B. Drag coefficients of spheres in continuum and rarefied flows // *AIAA journal*. — 1976. — Vol. 14, no. 6. — P. 707–708.