



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бойко А.В., Демьянко К.В.,  
Нечепуренко Ю.М.**

**Асимптотические граничные  
условия для анализа  
гидродинамической  
устойчивости течений в  
областях с открытой  
границей**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. Асимптотические граничные условия для анализа гидродинамической устойчивости течений в областях с открытой границей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 129. 27 с. doi:[10.20948/prepr-2018-129](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-129)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-129>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук

А. В. Бойко, К. В. Демьянко, Ю. М. Нечепуренко

Асимптотические граничные условия  
для анализа гидродинамической  
устойчивости течений в областях  
с открытой границей

МОСКВА, 2018 г.

А. В. Бойко, К. В. Демьянко, Ю. М. Нечепуренко

## Асимптотические граничные условия для анализа гидродинамической устойчивости течений в областях с открытой границей

**Аннотация.** Предложен и обоснован новый подход к постановке асимптотических граничных условий для проблем собственных значений, возникающих при численном анализе гидродинамической устойчивости сдвиговых течений типа пограничных слоев, отрывов потока, струй, следов, характеризующихся почти постоянной скоростью основного течения за пределами слоя или слоев сдвига. Этот подход позволяет ставить и решать в полном объеме задачи временной и пространственной устойчивости в локально-параллельной постановке, сводя их к обыкновенным алгебраическим проблемам собственных значений.

**Ключевые слова:** гидродинамическая устойчивость, уравнения распространения малых возмущений, локально-параллельный метод, пограничный слой, асимптотические граничные условия

A. V. Boiko, K. V. Demyanko, Yu. M. Nечepurenko

## Asymptotic boundary conditions for the analysis of hydrodynamic stability of flows in regions with open boundaries

**Abstract.** A new approach to formulation of asymptotic boundary conditions for eigenvalue problems arising in numerical analysis of hydrodynamic stability of such shear flows as boundary layers, separations, jets, wakes, characterized by almost constant velocity of the main flow outside the shear layer or layers is proposed and justified. This approach makes it possible to formulate and solve completely the temporal and spatial stability problems in the locally parallel formulation, reducing them to the ordinary algebraic eigenvalue problems.

**Key words:** evolution equations of small disturbances, linearized Navier–Stokes equations, hydrodynamic stability, boundary layer, asymptotic boundary conditions

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

# 1. Введение

Известно, что моды дискретного спектра, являющиеся наиболее значимыми возмущениями в задачах гидродинамической устойчивости, пренебрежимо малы лишь вдали от сдвигового пограничного слоя (см., напр., [1]). Поэтому в настоящее время широко используется подход, при котором расчетная область выбирается достаточно большой (порядка десяти толщин пограничного слоя и выше) и на ее границе ставят однородные граничные условия для возмущения, либо его производной, либо их линейной комбинации [5]. Этот метод прост в реализации, но его отличает существенный эмпиризм, так как в каждом случае требуется подбирать достаточный размер расчетной области экспериментально. Кроме того, проведение расчетов в таких больших областях приводит к увеличению общего числа узлов сетки за счет включения в расчетную область той области течения, в которой основное течение с высокой точностью постоянное [2, 3], а поведение мод дискретного спектра не влияет на устойчивость пограничного слоя. Наконец, применение широко используемых при решении задач устойчивости спектральных методов на основе полиномов Чебышева или Лежандра требует предварительных преобразований, позволяющих сконцентрировать узлы сетки в пограничном слое. Если расчетная область существенно превышает пограничный слой, то соответствующее преобразование будет плохо обусловленным, что приведет к большим погрешностям аппроксимации [3, 4].

В качестве альтернативы можно использовать так называемые асимптотические граничные условия — ненулевые граничные условия, которые ставят на границе пограничного слоя. Для этого иногда используют упрощенные асимптотические граничные условия, основанные на физических соображениях [6, 7]. В качестве более обоснованной альтернативы нулевых граничных условий в ряде работ предлагалось использовать полные асимптотические граничные условия, полученные аналитически как условие убывания возмущения вдали от пограничного слоя (см., например, [8–10]). В работе [11] был описан общий подход к выводу таких условий с помощью аналитического вычисления собственных функций сопряженной проблемы собственных значений. Однако такой подход приводит к некорректным постановкам из-за возникновения дефектного кратного собственного значения при некоторых значениях параметров.

В данной работе для вывода полных асимптотических граничных условий предлагается использовать аналитически вычисленное инвариантное подпространство решений, затухающих на бесконечности. В качестве примера рассматриваются задачи временной и пространственной устойчивости

пограничного слоя Блазиуса. Проводится сравнение решений, полученных с помощью асимптотических граничных условий, с решениями, полученным с использованием однородных граничных условий, и соответствующих вычислительных затрат. Показано, что использование асимптотических граничных условий позволяет существенно снизить вычислительные затраты.

## 2. Постановка задач линейной устойчивости в локально-параллельном приближении

Пусть в декартовых координатах  $x, y$  в полосе

$$\Omega = \{(x, y) : x_{\min} < x < x_{\max}, 0 \leq y < \infty\}, \quad (1)$$

где граница  $y = 0$  является жесткой с условием прилипания, задано стационарное двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости с компонентами скорости  $U$  и  $V$  вдоль  $x$  и  $y$  соответственно, нормированным на плотность давлением и кинематической вязкостью  $\nu$ . Это течение мы будем называть основным. Компоненты скорости будем считать достаточно гладкими, ограниченными по абсолютной величине и имеющими предел при  $y \rightarrow \infty$  и любом фиксированном  $x$  из интервала  $x_{\min} < x < x_{\max}$ . Под линейной устойчивостью такого течения понимают его устойчивость к бездивергентным инфинитезимальным возмущениям с компонентами скорости, равными нулю при  $y = 0$  и  $\infty$ .

Линеаризованные уравнения эволюции малых нестационарных возмущений основного течения с компонентами скорости и давлением соответственно

$$u'(t, x, y), \quad v'(t, x, y), \quad p'(t, x, y)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + v' \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Будем предполагать далее, что компонента  $U$  скорости основного течения слабо зависит от  $x$ , а компонента  $V$  и ее производная по  $y$  пренебрежимо малы. В этом случае система уравнений (2) сводится к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

позволяющей исследовать линейную устойчивость основного течения в так называемом локально-параллельном приближении (детальное обоснование этого подхода можно найти, например, в [21]). Для этого в интервале  $x_{\min} < x < x_{\max}$  строят некоторую сетку, в окрестности каждого фиксированного узла  $x = x_0$  которой рассматривают уравнения (3) с профилем скорости  $U = U(y) = U(x_0, y)$ , пренебрегая его зависимостью от  $x$ . В качестве возмущений рассматривают функции вида

$$\begin{bmatrix} u'(t, x, y) \\ v'(t, x, y) \\ p'(t, x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(y) \\ v(y) \\ p(y) \end{bmatrix} \exp(i\alpha x - i\omega t),\tag{4}$$

где

$$u(0) = v(0) = u(\infty) = v(\infty) = 0.\tag{5}$$

При сделанных выше предположениях амплитуды  $u(y)$ ,  $v(y)$  и  $p(y)$  таких возмущений должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned}-i\omega u + i\alpha U u + v \frac{dU}{dy} &= -i\alpha p - \frac{\alpha^2}{\text{Re}} u + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 u}{dy^2}, \\ -i\omega v + i\alpha U v &= -\frac{dp}{dy} - \frac{\alpha^2}{\text{Re}} v + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 v}{dy^2}, \\ i\alpha u + \frac{dv}{dy} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\text{Re}$  означает локальное (то есть при  $x = x_0$ ) число Рейнольдса, при определении которого референтная скорость выбирается равной

$$U_\infty = \lim_{y \rightarrow \infty} U(y).$$

Эту систему можно записать также в следующем виде:

$$\begin{aligned}\lambda u &= \left[ -i\operatorname{Re}\alpha(U - 1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] u - v\operatorname{Re}\frac{dU}{dy} - i\alpha p, \\ \lambda v &= \left[ -i\operatorname{Re}\alpha(U - 1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] v - \frac{dp}{dy}, \\ i\alpha u + \frac{dv}{dy} &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

где  $\lambda = \alpha^2 + i\operatorname{Re}(\alpha - \omega)$  и произведение  $\operatorname{Re} p$  обозначено через  $p$ .

На практике, при анализе устойчивости пограничных слоев в локально-параллельном приближении, используют также еще одно полезное упрощение: профиль основного течения при каждом фиксированном  $x = x_0$  считают постоянным выше некоторого достаточно большого значения  $y = y_{\text{VL}}$ , которое интерпретируют как границу пограничного слоя. При этом профиль, рассчитанный до  $y = y_{\text{VL}}$  и продолженный далее константой, аппроксимируют достаточно гладким сплайном (например, кубическим). Мы будем предполагать далее, что такое упрощение сделано на этапе формирования системы (6), то есть профиль  $U$  в (6) обладает свойством  $U(y) = 1$  при  $y \geq y_{\text{VL}}$  и имеет непрерывную первую производную.

Различают задачи временной и пространственной устойчивости. В случае анализа временной устойчивости  $\alpha$  — произвольное фиксированное вещественное число, а  $\omega$  — комплексные частоты, подлежащие определению из системы (6), (5). Эта система является проблемой собственных значений, в которой  $\lambda$  играет роль собственного значения, а  $(u, v, p)^T \neq 0$  — отвечающей ему собственной функции. Каждой такой паре отвечает решение вида (4), локально удовлетворяющее системе (3). Если мнимая часть  $\omega = \alpha + i(\lambda - \alpha^2)/\operatorname{Re}$  больше нуля, то соответствующее решение (4) растет по времени, если меньше нуля, то убывает, а если равна нулю, то является нейтрально устойчивым. Таким образом, условием локальной временной устойчивости основного течения при  $x = x_0$  является отрицательность мнимых частей  $\omega$ , отвечающих каждому собственному значению  $\lambda$  проблемы (6), (5) при всех вещественных значениях  $\alpha$ .

Отметим, что если пара  $\lambda, (u, v, p)^T$  является решением проблемы (6), (5) при некотором вещественном  $\alpha = \alpha_0$ , то комплексно сопряженная ей пара  $\bar{\lambda}, (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p})^T$  является решением этой проблемы при  $\alpha = -\alpha_0$ . Кроме того, при  $\alpha = 0$  собственными значениями  $\lambda$  проблемы (6), (5) могут быть, как нетрудно видеть, лишь собственные значения проблемы

$$\lambda u = \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad u(0) = u(\infty) = 0,\tag{7}$$

а отвечающие им собственные функции должны иметь вид  $(u, 0, c)^T$ , где  $u$  — собственная функция проблемы (7), а  $c$  — произвольная константа. Однако проблема (7) не имеет собственных значений, поскольку при любом фиксированном  $\lambda$  уравнение (7) имеет только тривиальное решение. Учитывая это, мы далее будем рассматривать только случай  $\alpha > 0$ .

### 3. Численное решение проблемы собственных значений с однородными граничными условиями

При численном решении проблемы собственных значений (6), (5) расчеты проводят в интервале

$$0 \leq y \leq y_0, \quad (8)$$

где  $y_0 \gg y_{VL}$ , на границах которого ставят нулевые граничные условия для  $u$  и  $v$ . Величина  $y_0$  выбирается настолько большой, чтобы дальнейшее ее увеличение не оказывало на решение существенного влияния.

Для дискретизации по  $y$  можно использовать метод коллокаций [19], выбрав в качестве сетки точки  $y_j = y(s_j)$ , где

$$y(s) = \frac{1+s}{2+\sigma(1-s)} y_0, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

$\sigma > 0$  — масштабирующий множитель,  $s_0 = 1$ ,  $s_{N+1} = -1$ , а

$$s_j = \cos \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (9)$$

то есть корни многочлена Чебышева второго рода степени  $N$ . Таким образом, введенная сетка будет удовлетворять следующим соотношениям:  $y_0 > y_1 > \dots > y_N > y_{N+1} = 0$ .

Для аппроксимации производных давления в узлах сетки  $y_1 > \dots > y_N$  используем интерполяционные многочлены Лагранжа на сетке (9), для аппроксимации производных компонент скорости в тех же узлах используем интерполяционные многочлены Лагранжа на сетке (9) с добавлением узлов  $\pm 1$ . Для расчета значений производных элементарных интерполяционных многочленов Лагранжа используем методы, описанные в работе [17].

В результате такой аппроксимации с учетом нулевых граничных условий для компонент скорости мы получим линейную обобщенную алгебраическую проблему собственных значений следующего вида:

$$\lambda \mathbf{v} = J\mathbf{v} + G\mathbf{p}, \quad F\mathbf{v} = 0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{v}$  означает  $2N$ -компонентный вектор (столбец) значений компонент  $u$  и  $v$  в узлах сетки  $y_1 > \dots > y_N$ ,  $\mathbf{p}$  —  $N$ -компонентный вектор (столбец)



значений давления в узлах той же сетки, а  $J$ ,  $G$  и  $F$  — соответственно матрицы размеров  $2N \times 2N$ ,  $2N \times N$  и  $N \times 2N$ , являющиеся конечномерными аналогами операторов

$$\begin{bmatrix} -i\text{Re}\alpha(U - 1) + d^2/dy^2 & -\text{Re}dU/dy \\ 0 & -i\text{Re}\alpha(U - 1) + d^2/dy^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -i\alpha \\ -d/dy \end{bmatrix}$$

и  $[i\alpha, d/dy]$ .

Отметим, что не только описанная выше, но любая другая пространственная аппроксимация проблемы (6), (5) приведет (в некоторых случаях после несложных алгебраических преобразований) к обобщенной алгебраической проблеме собственных значений вида (10). Если для аппроксимации применять методы галеркинско-го типа, основанные на слабой постановке проблемы (6), (5), то матрицы  $F$  и  $G$  будут взаимно сопряженными, а конечномерный аналог второй производной, входящий в матрицу  $J$ , будет эрмитовым отрицательно определенным. Это делает обобщенную алгебраическую проблему (10) полностью адекватной исходной проблеме (6), (5). В частности, это позволяет, спроектировав проблему (10) на подпространство соленоидальных сеточных функций, свести ее к обыкновенной алгебраической проблеме собственных значений, имеющей в качестве спектра множество конечных собственных значений исходной проблемы. Того же самого можно добиться и в рамках метода коллокаций, применяя разнесенные сетки для давления и компонент скорости и используя прием, описанный в работе [22].

Описанный выше простейший вариант метода коллокаций не позволяет получить обобщенную алгебраическую проблему (10), в точности обладающую всеми основными свойствами исходной проблемы (6), (5). Однако, как показывает практика, такая аппроксимация ввиду ее малой погрешности позволяет получать вполне адекватные результаты, во всяком случае для задач, связанных с исследованием устойчивости пограничных слоев и определения в них положения ламинарно-турбулентного перехода (смотри, например, [12, 13, 23]).

При  $\alpha > 0$  матрицы  $G$  и  $F$  в (10), полученные простейшим вариантом метода коллокаций, хотя и не являются взаимно сопряженными, но имеют полные ранги, то есть ядра матриц  $F$  и  $G^*$  имеют одинаковую размерность. Кроме того, максимальный угол между этими ядрами меньше  $\pi/2$ . Эти свойства, эквивалентные невырожденности матрицы  $FG$ , позволяют свести проблему (10) к обыкновенной алгебраической проблеме собственных значений, имеющей в качестве спектра множество конечных собственных значений исходной проблемы. Кроме них, проблема (10) имеет бесконечное собственное значение кратности  $2N$ .

Опишем алгоритм сведения обобщенной проблемы (10) к обыкновенной, который мы далее будем использовать в численных экспериментах. Детальное обоснование такого типа редукций дано в [24]. Обозначим через  $Q_F$  и  $Q_G$  унитарные прямоугольные матрицы размера  $2N \times N$ , столбцы которых образуют ортонормированные базисы в ядрах матриц  $F$  и  $G^*$  соответственно. Поскольку максимальный угол между этими ядрами меньше  $\pi/2$ , матрица  $Q_G^*Q_F$  является невырожденной. Произвольный вектор  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющий второму уравнению в (10), однозначно представим в виде  $\mathbf{v} = Q_F\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u} = Q_F^*\mathbf{v}$ . Подставив это представление в первое уравнение в (10) и умножив полученное уравнение слева на  $Q_G^*$ , получим уравнение

$$\lambda Q_G^*Q_F\mathbf{u} = Q_G^*JQ_F\mathbf{u},$$

разделив которое слева на матрицу  $Q_G^*Q_F$ , придем к обыкновенной проблеме собственных значений

$$\lambda\mathbf{u} = H\mathbf{u},$$

с матрицей  $H = (Q_G^*Q_F)^{-1}(Q_G^*JQ_F)$ . Вычислив матрицу  $H$  и решив для нее полную проблему собственных значений, например, QR-алгоритмом [25], мы найдем все конечные собственные значения проблемы (10). Компоненты скорости соответствующих собственных векторов могут быть найдены по формуле  $\mathbf{v} = Q_F\mathbf{u}$ . Обычно при анализе устойчивости давление не требуется. В противном случае, вектор  $\mathbf{p}$ , отвечающий найденному вектору  $\mathbf{v}$ , может быть однозначно найден из первого уравнения в (10). Для вычисления матриц  $Q_F$  и  $Q_G$  можно использовать полные QR-разложения матриц  $F^*$  и  $G$  соответственно, полученные с помощью стандартного алгоритма, основанного на преобразованиях отражения [25]. Например, применив этот алгоритм к матрице  $G$ , мы получим унитарную матрицу  $Q$  порядка  $2N$  и верхнюю треугольную прямоугольную матрицу  $R$  размера  $2N \times N$ , такие, что с машинной точностью  $G = QR$ . Искомую матрицу  $Q_G$  образуют  $N$  последних столбцов матрицы  $Q$ .

Все упомянутые выше матричные алгоритмы реализованы, например, в пакете LAPACK [18] и использующей его среде MATLAB. Поэтому программная реализация описанной выше процедуры не вызывает особых проблем, при этом основной объем вычислений полученного кода будет приходиться на стандартные, тщательно отработанные матричные алгоритмы.

#### 4. Сведение к квадратичной проблеме собственных значений в ограниченном интервале

Систему уравнений (6) можно записать в виде системы обыкновенных

дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\eta}{dy} = C(y, \lambda)\eta, \quad (11)$$

где

$$C(y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1(y, \lambda) & 0 & -i\alpha \\ c_1(y, \lambda) & c_2(y) & i\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ du/dy \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$c_1(y, \lambda) = \lambda + i\operatorname{Re} \alpha(U(y) - 1), \quad c_2(y) = \operatorname{Re} \frac{dU}{dy}(y).$$

Элементы матрицы  $C$  непрерывно зависят от  $y$ . Поэтому при любых фиксированных комплексном числе  $\lambda$ , вещественном  $y_0$  и 4-компонентном комплексном векторе  $\eta^0$  существует единственная непрерывная векторная функция  $\eta(y)$ , удовлетворяющая (11), (12) при  $y \neq y_0$  и равная  $\eta^0$  при  $y = y_0$ . Эта векторная функция является также и непрерывно дифференцируемой.

В новых обозначениях проблема собственных значений (6), (5) может быть сформулирована следующим образом:

$$\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0, \quad \frac{d\eta}{dy} = C(y, \lambda)\eta, \quad y > 0, \quad \eta_1(\infty) = \eta_2(\infty) = 0, \quad (13)$$

где  $\eta_i$  означает  $i$ -ю компоненту вектора  $\eta$ . Фиксируя произвольное положительное значение  $y = y_b$ , проблему (13) можно разбить на две недоопределенные проблемы собственных значений

$$\eta_1^{(1)}(0) = \eta_2^{(1)}(0) = 0, \quad \frac{d\eta^{(1)}}{dy} = C(y, \lambda^{(1)})\eta^{(1)}, \quad 0 < y < y_b, \quad (14)$$

и

$$\frac{d\eta^{(2)}}{dy} = C(y, \lambda^{(2)})\eta^{(2)}, \quad y_b < y < \infty, \quad \eta_1^{(2)}(\infty) = \eta_2^{(2)}(\infty) = 0, \quad (15)$$

и условие сшивки

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}, \quad \eta^{(1)}(y_b) = \eta^{(2)}(y_b). \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что если пара  $\lambda, \eta$  удовлетворяет (13), то пары  $\lambda^{(1)} = \lambda, \eta^{(1)}(y) = \eta(y)$  ( $0 \leq y < y_b$ ) и  $\lambda^{(2)} = \lambda, \eta^{(2)}(y) = \eta(y)$  ( $y_b \leq y < \infty$ ) будут удовлетворять соответственно (14) и (15) и условию сшивки (16). Верно и обратное утверждение: если  $\lambda^{(1)}, \eta^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}, \eta^{(2)}$  удовлетворяют соответственно (14) и (15) и условию сшивки (16), то пара

$$\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}, \quad \eta(y) = \begin{cases} \eta^{(1)}(y), & 0 \leq y < y_b, \\ \eta^{(2)}(y), & y_b \leq y < \infty, \end{cases}$$

будет удовлетворять (13).

В случае, когда  $U(y) = 1$  при всех  $y \geq y_b$ , общее решение проблемы (15) имеет вид

$$\eta^{(2)}(y) = \exp \left\{ (y - y_b) C(y_b, \lambda^{(2)}) \right\} \eta^{(2)}(y_b),$$

где  $\lambda^{(2)}$  — произвольное комплексное число, а  $\eta^{(2)}(y_b)$  — произвольный ненулевой вектор из инвариантного подпространства матрицы

$$C(y_b, \lambda^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(2)} & 0 & -i\alpha \\ \lambda^{(2)} & 0 & i\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

отвечающего ее собственным значениям с отрицательной вещественной частью. Это позволяет, используя описанную выше декомпозицию, существенно уменьшить вычислительные затраты, по сравнению с алгоритмом решения проблемы (6), (5) из предыдущего раздела.

Несложные выкладки показывают, что матрица

$$C(y_b, \gamma^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 & 0 & -i\alpha \\ \gamma^2 & 0 & i\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\gamma$  — произвольное комплексное число, имеет собственные значения

$$\delta_{1,2} = \pm\gamma, \quad \delta_{3,4} = \pm\alpha, \quad (17)$$

и справедливо следующее тождество:

$$C(y_b, \gamma^2) X(\alpha, \gamma) = X(\alpha, \gamma) \Omega(\alpha, \gamma), \quad (18)$$

где

$$X(\alpha, \gamma) = \begin{bmatrix} -i\alpha & i \\ \alpha & 0 \\ \gamma^2 - \alpha^2 & \alpha + \gamma \\ i\alpha^2 & -i(\alpha + \gamma) \end{bmatrix}, \quad \Omega(\alpha, \gamma) = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Поскольку мы ограничились рассмотрением случая  $\alpha > 0$ , из (17) и (18) следует, что множество решений проблемы (15) состоит из собственных пар вида

$$\lambda^{(2)} = \gamma^2, \quad \eta^{(2)}(y) = X(\alpha, \gamma) \exp \left\{ (y - y_b) \Omega(\alpha, \gamma) \right\} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где  $\gamma$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — произвольные комплексные константы, удовлетворяющие следующему условию:

$$\text{Real}(\gamma) > 0 \quad \vee \quad \kappa_2 = 0. \quad (20)$$

Таким образом, проблема собственных значений (13) сводится к проблеме собственных значений (14) с дополнительными условиями

$$\lambda^{(1)} = \gamma^2, \quad \eta^{(1)}(y_b) = \kappa_1 \begin{bmatrix} -i\alpha \\ \alpha \\ \gamma^2 - \alpha^2 \\ i\alpha^2 \end{bmatrix} + \kappa_2 \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ \alpha + \gamma \\ -i(\alpha + \gamma) \end{bmatrix},$$

и (20). Возвращаясь к уравнениям второго порядка, окончательно получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \gamma^2 u &= \left[ -i\text{Re}\alpha(U - 1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] u - v \text{Re} \frac{dU}{dy} - i\alpha p, \\ \gamma^2 v &= \left[ -i\text{Re}\alpha(U - 1) + \frac{d^2}{dy^2} \right] v - \frac{dp}{dy}, \\ i\alpha u + \frac{dv}{dy} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = 0, \quad u(y_b) = -\kappa_1 i\alpha + \kappa_2 i, \quad v(y_b) = \kappa_1 \alpha, \\ p(y_b) = \kappa_1(\gamma^2 - \alpha^2) + \kappa_2(\alpha + \gamma), \quad \frac{du}{dy}(y_b) = \kappa_1 i\alpha^2 - \kappa_2 i(\alpha + \gamma) \end{aligned} \quad (22)$$

и условием (20).

Система (21), (22) является квадратичной проблемой собственных значений относительно собственного значения  $\gamma$  и собственной функции, состоящей из векторной функции  $(u, v, p)^T$  и чисел  $\kappa_1, \kappa_2$ . Граничные условия в (22), заменившие граничные условия на бесконечности, называют асимптотическими граничными условиями. Эти условия подразумевают наличие среди решений проблемы (21), (22) всех решений исходной проблемы (6), (5). Однако среди решений проблемы (21), (22) могут оказаться также и решения с  $\text{Real}(\gamma) \leq 0$  и  $\kappa_2 \neq 0$ , продолжение которых не будет затухать на бесконечности. Дополнительное условие (20) позволяет исключить эти «неправильные» решения после того, как все решения проблемы (21), (22) найдены.

Напомним, что мы свели проблему (6), (5) к проблеме (21), (22), (20), предположив, что  $U(y) = 1$  при всех  $y \geq y_b$ . Для выполнения этого условия, учитывая предположения об основном течении, сделанные в разделе 2, достаточно выбрать  $y_b = y_{BL}$ .

## 5. Численное решение квадратичной проблемы собственных значений

Выбрав  $y_b = y_{VL}$ , будем использовать для аппроксимации по  $y$  проблемы (21), (22), (20) простейший вариант метода коллокаций, описанный в разделе 3, с  $y_0 = y_{VL}$ .

Через  $\mathbf{v}_u$  и  $\mathbf{v}_v$  будем обозначать  $N$ -компонентные векторы (столбцы) значений компонент скорости  $u$  и  $v$  в узлах сетки  $y_1 > \dots > y_N$ , через  $\mathbf{p}$  —  $N$ -компонентный вектор (столбец) значений давления в узлах той же сетки, через  $u_0$  и  $v_0$  —  $u(y_0)$  и  $v(y_0)$  соответственно. Кроме того, обозначим через  $D_p$  квадратную матрицу порядка  $N$ , являющуюся дискретным аналогом оператора первой производной в узлах сетки  $y_1 > \dots > y_N$  для давления, заданного в узлах той же сетки, через  $D_v$  — квадратную матрицу порядка  $N + 1$ , являющуюся дискретным аналогом оператора первой производной в узлах сетки  $y_0 > \dots > y_N$  для компоненты скорости, заданной в узлах той же сетки с учетом нулевого граничного условия при  $y = 0$ , то есть в узле  $y_{N+1}$ , через  $L_v$  — прямоугольную матрицу размера  $N \times (N + 1)$ , являющуюся дискретным аналогом оператора второй производной в узлах  $y_1 > \dots > y_N$  для компоненты скорости, заданной в узлах  $y_0 > \dots > y_N$ , с учетом нулевого граничного условия при  $y = 0$ , а через  $\Pi$  обозначим  $N$ -компонентную строку, такую, что  $\Pi \mathbf{p}$  является значением давления в узле  $y_0$ , вычисленным с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного на сетке (9). Матрицы  $D_v$  и  $L_v$  разобьем на блоки следующим образом:

$$D_v = \begin{bmatrix} d & r \\ c & D \end{bmatrix}, \quad L_v = [ l \quad L ],$$

где  $d$  — число,  $r$  —  $N$ -компонентная строка,  $c$  и  $l$  —  $N$ -компонентные столбца, а  $D$  и  $L$  квадратные матрицы порядка  $N$ .

Введенные обозначения позволяют записать полученный методом коллокаций дискретный аналог проблемы (21), (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \mathbf{v}_u &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_u + l u_0 + B \mathbf{v}_v - i\alpha \mathbf{p}, \\ \gamma^2 \mathbf{v}_v &= (i\alpha A + L) \mathbf{v}_v + l v_0 - D_p \mathbf{p}, \\ i\alpha \mathbf{v}_u + D \mathbf{v}_v + c v_0 &= 0, \\ u_0 &= -\kappa_1 i\alpha + \kappa_2 i, \quad v_0 = \kappa_1 \alpha, \\ \Pi \mathbf{p} &= \kappa_1 (\gamma^2 - \alpha^2) + \kappa_2 (\alpha + \gamma), \\ r \mathbf{v}_u + d u_0 &= \kappa_1 i \alpha^2 - \kappa_2 i (\alpha + \gamma), \end{aligned} \tag{23}$$

где  $A$  и  $B$  — квадратные диагональные матрицы порядка  $N$  значений соответственно  $-\text{Re}(U - 1)$  и  $-\text{Re} dU/dy$  в узлах  $y_1 > \dots > y_N$ . Исключая в

(23)  $u_0$  и  $v_0$  с помощью четвертого и пятого уравнений из всех остальных уравнений, в которые входят эти переменные, и исключая  $\gamma$  из предпоследнего уравнения с помощью последнего, эту квадратичную алгебраическую проблему собственных значений можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}\gamma^2 \mathbf{v}_u &= (i\alpha A + L)\mathbf{v}_u + B\mathbf{v}_v - i\alpha l\kappa_1 + il\kappa_2 - i\alpha \mathbf{p}, \\ \gamma^2 \mathbf{v}_v &= (i\alpha A + L)\mathbf{v}_v + \alpha l\kappa_1 - D_p \mathbf{p}, \\ i\alpha \mathbf{v}_u + D\mathbf{v}_v + \alpha c\kappa_1 &= 0, \\ \gamma^2 \kappa_1 &= \Pi \mathbf{p} - ir\mathbf{v}_u - \alpha d\kappa_1 + d\kappa_2, \\ \gamma \kappa_2 &= ir\mathbf{v}_u + (\alpha d + \alpha^2)\kappa_1 - (d + \alpha)\kappa_2,\end{aligned}$$

или в более компактном виде:

$$\gamma^2 \mathbf{v} = J\mathbf{v} + a\kappa_2 + G\mathbf{p}, \quad F\mathbf{v} = 0, \quad \gamma \kappa_2 = b\mathbf{v} + f\kappa_2, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_v \\ \kappa_1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} i\alpha A + L & B & -i\alpha l \\ 0 & i\alpha A + L & \alpha l \\ -ir & 0 & -\alpha d \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} il \\ 0 \\ d \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -i\alpha I \\ -D_p \\ \Pi \end{bmatrix},$$

$$F = [i\alpha I \quad D \quad \alpha c], \quad b = [ir \quad 0 \quad \alpha d + \alpha^2], \quad f = -d - \alpha,$$

через  $I$  обозначена единичная матрица порядка  $N$ , и блочная структура всех матриц соответствует блочной структуре вектора  $\mathbf{v}$ .

К проблеме (24) можно применить редукцию, аналогичную описанной в разделе 3. Обозначим через  $Q_F$  и  $Q_G$  унитарные прямоугольные матрицы размера  $(2N + 1) \times (N + 1)$ , столбцы которых образуют ортонормированные базисы в ядрах матриц  $F$  и  $G^*$  соответственно. Будем предполагать, что максимальный угол между этими подпространствами меньше  $\pi/2$ , то есть матрица  $Q_G^* Q_F$  — невырожденная. Произвольный вектор  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющий второму уравнению в (24), однозначно представим в виде  $\mathbf{v} = Q_F \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u} = Q_G^* \mathbf{v}$ . Подставив это представление в первое уравнение в (24) и умножив полученное уравнение слева на  $Q_G^*$ , получим уравнение

$$\gamma^2 Q_G^* Q_F \mathbf{u} = Q_G^* J Q_F \mathbf{u} + (Q_G^* a)\kappa_2. \quad (25)$$

Разделив уравнение (25) слева на матрицу  $Q_G^* Q_F$ , придем к уравнению

$$\gamma^2 \mathbf{u} = H\mathbf{u} + h\kappa_2 \quad (26)$$

с квадратной матрицей  $H = (Q_G^* Q_F)^{-1} (Q_G^* J Q_F)$  порядка  $N + 1$  и  $N + 1$ -компонентным столбцом  $h = (Q_G^* Q_F)^{-1} (Q_G^* a)$ . Подставив  $\mathbf{v} = Q_F \mathbf{u}$  в последнее уравнение в (24), получим уравнение

$$\gamma \kappa_2 = g\mathbf{u} + f\kappa_2, \quad (27)$$

где  $g = bQ_F$ .

Таким образом, проблема собственных значений (24) сводится к проблеме собственных значений (26), (27). Линеаризовав последнюю путем формирования сопровождающей матрицы, получим обыкновенную алгебраическую проблему собственных значений

$$\gamma \mathbf{w} = M \mathbf{w}, \quad (28)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ H & 0 & h \\ g & 0 & f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \gamma \mathbf{u} \\ \kappa_2 \end{bmatrix},$$

эквивалентную квадратичной проблеме (23).

Решив полную проблему собственных значений для матрицы  $M$  с помощью QR-алгоритма и отобрав собственные пары, удовлетворяющие условию (20), мы найдем приближенные решения исходной проблемы собственных значений (6), (5):

$$\lambda = \gamma^2, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_v \end{bmatrix} = \tilde{Q}_F \mathbf{u},$$

где  $\tilde{Q}_F$  означает матрицу размера  $2N \times (N + 1)$ , образованную первыми  $2N$  строками матрицы  $Q_F$ .

## 6. Задачи пространственной устойчивости

Задачу пространственной устойчивости основного течения формулируют как решение при фиксированном вещественном числе  $\omega$  квадратичной проблемы собственных значений (6), (5), где  $\lambda = \lambda(\alpha) = \alpha^2 + i\text{Re}(\alpha - \omega)$ , относительно комплексного собственного значения  $\alpha$  и собственной функции  $(u, v, p)^T \neq 0$ . Аппроксимация, описанная в разделе 3, сводит эту проблему (в обозначениях раздела 5, но с  $y_0 \geq y_{\text{BL}}$ ) к следующей квадратичной алгебраической проблеме собственных значений:

$$\mathcal{A}(\alpha) \mathbf{x} = 0, \quad (29)$$

где

$$\mathcal{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda(\alpha)I - i\alpha A - L & -B & i\alpha I \\ 0 & \lambda(\alpha)I - i\alpha A - L & D_p \\ -i\alpha I & -D & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_v \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (30)$$



которая, в свою очередь, может быть сведена к обыкновенной линейной проблеме с матрицей порядка в  $4/3$  раза большем, чем порядок пучка  $\mathcal{A}(\alpha)$  [12, 13].

Для решения проблемы собственных значений (6), (5) можно также использовать подход, описанный в разделе 5 и сводящий исходную задачу к проблеме собственных значений с асимптотическими граничными условиями. Аппроксимация этой проблемы приводит к нелинейной алгебраической проблеме собственных значений вида (29) с

$$\mathcal{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda(\alpha)I - i\alpha A - L & -B & i\alpha l & -il & i\alpha I \\ 0 & \lambda(\alpha)I - i\alpha A - L & -\alpha l & 0 & D_p \\ ir & 0 & \lambda(\alpha) + \alpha d & -d & -\Pi \\ -ir & 0 & -\alpha d - \alpha^2 & \gamma(\alpha) - f & 0 \\ -i\alpha I & -D & -\alpha c & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_v \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix},$$

где подматрицы аппроксимируют соответствующие операторы в интервале с верхней границей  $y_0 = y_{\text{BL}}$ ,  $\gamma(\alpha) = \sqrt{\lambda(\alpha)}$  и знак при вычислении корня выбирается так, чтобы вещественная часть  $\gamma(\alpha)$  была неотрицательной. Например, для этого можно использовать стандартную формулу вычисления квадратного корня из комплексного числа, выбирая значение, имеющее неотрицательную вещественную часть:

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{|\lambda(\alpha)| + \lambda_r(\alpha)}{2}} + i \operatorname{sign}(\lambda_i(\alpha)) \sqrt{\frac{|\lambda(\alpha)| - \lambda_r(\alpha)}{2}}, \quad (32)$$

где  $\lambda_r(\alpha)$  и  $\lambda_i(\alpha)$  – действительная и мнимая части  $\lambda(\alpha)$  соответственно.

Для нахождения всех решений проблемы (29), (31) ее можно представить как двухпараметрическую квадратичную проблему собственных значений с параметрами  $\alpha$  и  $\gamma$ , связанными формулой  $\gamma^2 = \alpha^2 + i\operatorname{Re}(\alpha - \omega)$ , и использовать методы, описанные в работе [26].

На практике при каждом рассматриваемом значении  $\omega$ , как правило, требуется найти только одно конкретное собственное значение  $\alpha$ , вещественная часть которого положительная, и отвечающий ему собственный вектор. Более того, для искомого собственного значения имеется хорошее начальное приближение, взятое, например, из решения задачи временной устойчи-

ности. Это позволяет эффективно применять метод последовательных линейных проблем. Для этого, задав  $\alpha$  и  $tol > 0$ , находим наименьшее по абсолютной величине собственное значение и отвечающий ему собственный вектор линейного матричного пучка  $\mathcal{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mu\mathcal{A}'(\alpha)\mathbf{x}$ , где штрих означает производную по  $\alpha$ , и полагаем  $\alpha$  равным  $\alpha - \mu$ ; если  $\|\mathcal{A}(\alpha)\mathbf{x}\|_2 < tol$ , то останавливаемся, иначе повторяем вычисления с найденным новым значением  $\alpha$ . Частичные линейные проблемы собственных значений решаем либо обратными итерациями, либо их комбинацией с методом ньютоновского типа, как это было предложено в работе [29].

В случае использования нулевых граничных условий производная матрицы  $\mathcal{A}(\alpha)$  по  $\alpha$  имеет вид

$$\mathcal{A}'(\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda'(\alpha)I - iA & 0 & iI \\ 0 & \lambda'(\alpha)I - iA & 0 \\ -iI & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\lambda'(\alpha) = 2\alpha + i\text{Re}$ . В случае использования асимптотических граничных условий —

$$\mathcal{A}'(\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda'(\alpha)I - iA & 0 & il & 0 & iI \\ 0 & \lambda'(\alpha)I - iA & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'(\alpha) + d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d - 2\alpha & \gamma'(\alpha) + 1 & 0 \\ -iI & 0 & -c & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\gamma'(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\lambda'(\alpha)}{\gamma(\alpha)}.$$

## 7. Численные эксперименты

В данном разделе мы приведем и обсудим результаты численных экспериментов с предложенными алгоритмами, выбрав в качестве исходного основного течения пограничный слой Блазиуса. На Рис. 1 слева красным цветом изображен нормированный профиль  $U$  скорости такого течения, рассчитанный с высокой точностью методом, описанным в [27], для  $0 \leq y \leq 40$  и  $U_\infty = 1$ . Граница  $y_{BL} \approx 4.27$  пограничного слоя была найдена как ближайший к поверхности узел сетки, в котором выполнялось условие  $U \geq 0.999$ . Как это было описано в разделе 2, за пределами пограничного слоя, то есть при  $y > y_{BL}$ , исходный профиль был заменен константой, равной  $U(y_{BL})$ , и нормирован на эту константу. Полученный новый профиль был аппроксимирован кубическим сплайном, который и использовался далее в качестве

профиля основного течения. На Рис. 1 слева черным цветом изображен модифицированный профиль при  $0 \leq y \leq y_{BL}$ , справа изображены исходный и модифицированный профили на отрезке  $3 \leq y \leq 5$ . Видно, что отличие модифицированного профиля от исходного незначительно.

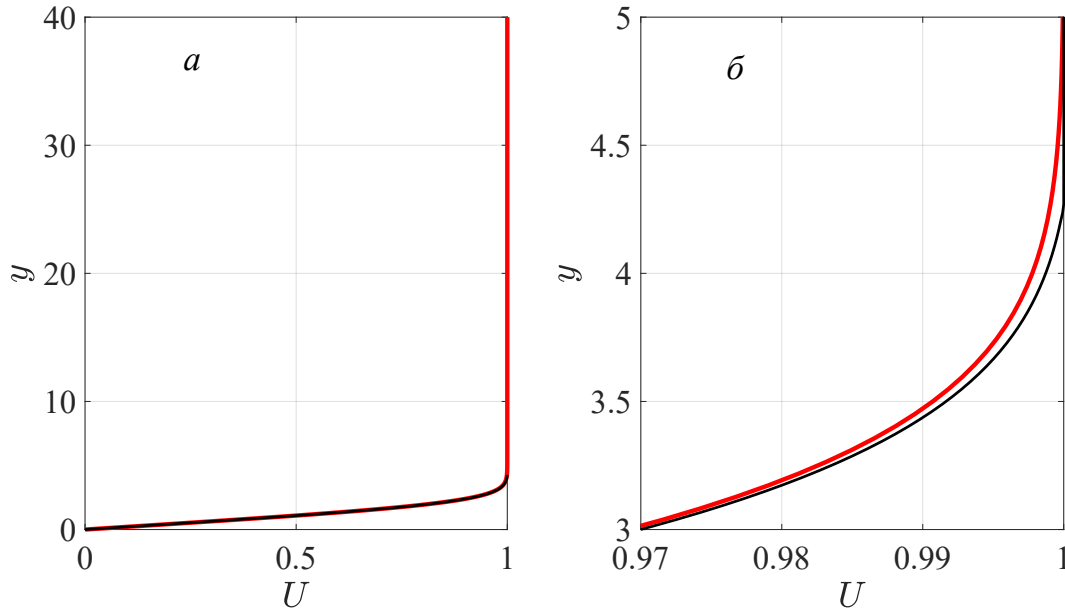


Рис. 1: Исходный профиль скорости при  $0 \leq y \leq 40$  (красный) и модифицированный профиль при  $0 \leq y \leq y_{BL}$  (черный) (а), и они же вблизи границы пограничного слоя (б).

Отметим, что указанная выше перенормировка профиля пограничного слоя требует, вообще говоря, небольшой коррекции числа Рейнольдса для аккуратного сопоставления с известными результатами расчета устойчивости исходного пограничного слоя Блазиуса. В расчетах с модифицированным профилем число Рейнольдса следует умножать на 0.999.

### 7.1. Временная устойчивость

Известно, что при числе Рейнольдса  $Re = 1000$  существуют нарастающие во времени возмущения пограничного слоя Блазиуса с локальным волновым числом  $\alpha = 0.25$  [1]. Сравним результаты решения проблем собственных значений (6), (5) при  $\alpha = 0.25$  и скорректированном числе Рейнольдса  $Re = 999$  методами, описанными в разделах 3 и 5, то есть — с однородными и асимптотическими граничными условиями на границе расчетной области соответственно.

Рассмотрим сначала результаты расчетов собственных функций. На Рис. 2 (а) сплошными линиями изображена абсолютная величина продоль-

ной компоненты скорости собственной функции, отвечающей ведущему собственному значению  $\omega$ , то есть собственному значению с максимальной мнимой частью. Вычисления выполнялись методом, описанным в разделе 3, при различных границах  $y_0$  расчетной области. Во всех расчетах использовалась сетка с  $\sigma = 2$  и числом внутренних узлов  $N = 500$ , гарантирующим сверхмалую погрешность аппроксимации. То есть точность расчета определялась выбранной границей расчетной области. На Рис. 2 (а) изображены те же функции, но в интервале  $0 \leq y \leq 5$ . Видно, что внутри пограничного слоя сходимость наблюдается уже при  $y_0 = 20$ . Однако лишь при  $y_0 = 40$  продольная компонента скорости оказывается визуально близкой к нулю на верхней границе расчетной области. То есть для достаточно точного расчета всей собственной функции минимальная необходимая высота расчетной области в случае однородных граничных условий составляет порядка десяти толщин пограничного слоя. Черным пунктиром на Рис. 2 показана абсолютная величина продольной компоненты скорости ведущей собственной функции, вычисленной методом, описанным в разделе 5, на сетке с тем же числом внутренних узлов. Видно совпадение внутри пограничного слоя с самым точным из результатов, полученных с помощью однородных граничных условий.

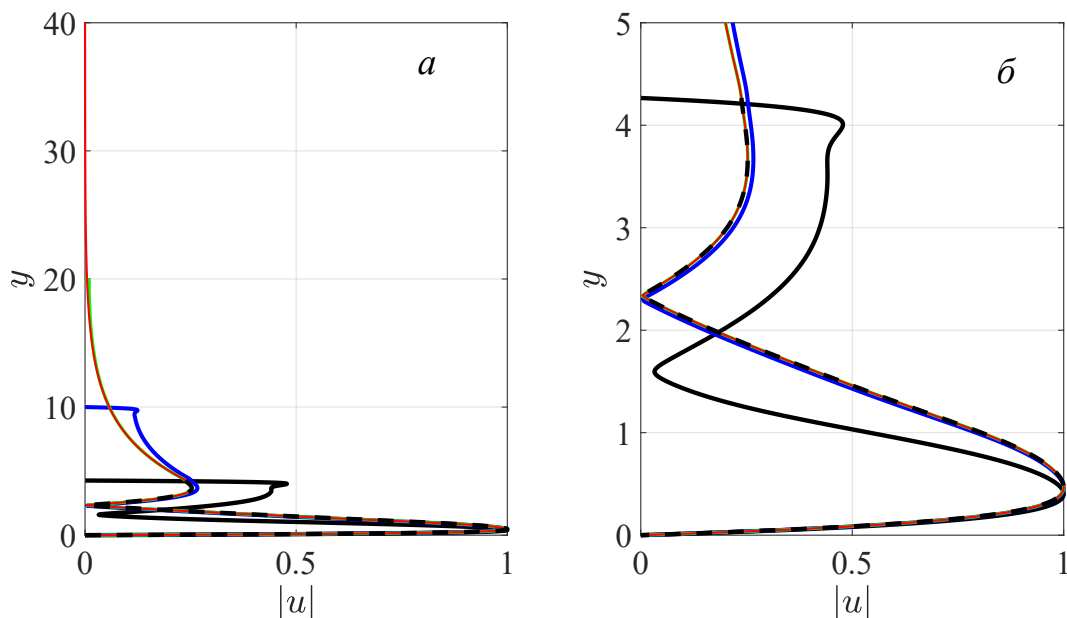


Рис. 2: Абсолютная величина продольной компоненты скорости ведущей собственной функции во всей расчетной области (а) и до  $y = 5$  (б), вычисленной при  $N = 500$  методом из раздела 3 при  $y_0 = y_{\text{вЛ}}$  (черный), 10 (синий), 20 (зеленый), 40 (красный) и методом из раздела 5 (черный пунктир).

Рассмотрим теперь результаты расчетов собственных значений. В Таблице 1 приведены 7 значащих десятичных цифр действительной и мнимой частей  $\omega$  с максимальной мнимой частью, рассчитанные с использованием однородных граничных условий методом, описанным в разделе 3, при  $y_0 = 40$  (столбцы 2 и 4) и с использованием асимптотических граничных условий методом, описанным в разделе 5 (столбцы 3 и 5), на сетках с  $\sigma = 2$  и различным числом узлов  $N$ . В первом случае вычисления сводились к решению обыкновенных проблем собственных значений с матрицами порядка  $N$ , а во втором — с матрицами порядка  $2N + 3$ . Тем не менее, как это видно из таблицы, при той же погрешности аппроксимации использование асимптотических граничных условий приводит к проблемам собственных значений с матрицами меньшего порядка. Например, четвертая значащая цифра в действительной части при вычислении методом, основанным на асимптотических граничных условиях, не меняется с увеличением  $N$  начиная с  $N = 15$ , в то время как для метода, использующего однородные граничные условия, — начиная с  $N = 50$ . Для мнимой части — соответственно с  $N = 20$  и  $N = 50$ . Следует отметить, что для метода, использующего однородные граничные условия, правильная четвертая значащая цифра в действительной и мнимой частях достигается при тех же значениях  $N$  и при  $y_0 = 30$ , но при  $y_0 = 20$  четвертая значащая цифра в мнимой части неправильная при всех  $N$ . Таким образом, для получения четырех правильных значащих десятичных цифр действительной и мнимой частей ведущего собственного значения с использованием асимптотических граничных условий достаточно решать проблемы собственных значений с матрицами порядка 43, а с использованием однородных граничных условий — с матрицами порядка 50. Учитывая, что суммарное число арифметических операций в обоих случаях пропорционально  $n^3$ , где  $n$  — порядок матрицы, с которой требуется решить проблему собственных значений, и то, что константы пропорциональности почти одинаковые, вычислительные затраты при использовании асимптотических граничных условий меньше почти в 1.6 раз.

## 7.2. Пространственная устойчивость

Рассмотрим теперь задачу пространственной устойчивости с параметрами  $\text{Re} = 999$  и  $\omega = 8.8482 \times 10^{-2}$ . Нас будет интересовать собственное значение  $\alpha$ , ближайшее к точке  $\alpha_0 = 0.25$ , и отвечающая ему собственная функция. Поскольку выбранное  $\omega$  является действительной частью ведущего собственного значения описанной в предыдущем подразделе временной проблемы собственных значений с  $\alpha = 0.25$ , в силу теоремы Гастера [28] следует ожидать, что найденная собственная функция будет амплитудой

Таблица 1: Действительная и мнимая части собственного значения  $\omega$  с максимальной мнимой частью, найденного с использованием однородных при  $y_0 = 40$  и асимптотических граничных условий, в зависимости от числа  $N$  узлов сетки.

$N$	$\text{Real}(\omega) \times 10^{-2}$		$\text{Imag}(\omega) \times 10^{-3}$	
	$y_0 = 40$	$y_0 = y_{\text{BL}}$	$y_0 = 40$	$y_0 = y_{\text{BL}}$
15	9.215895	8.848516	3.029127	2.133350
20	8.735340	8.848200	3.089142	2.146968
30	8.853347	8.848243	2.288313	2.146796
50	8.848314	8.848243	2.146175	2.146809
70	8.848209	8.848232	2.146837	2.146847
90	8.848245	8.848240	2.146960	2.146864
110	8.848251	8.848238	2.146738	2.146848
130	8.848249	8.848239	2.146875	2.146872
150	8.848239	8.848240	2.146853	2.146868

неустойчивой волны Толлмина-Шлихтинга, а действительная и мнимая части найденного собственного значения  $\alpha$  будут соответственно локальным волновым числом этой волны и ее инкрементом нарастания, взятым с обратным знаком.

На Рис. 3 представлена абсолютная величина продольной компоненты скорости собственной функции, отвечающей найденному собственному значению, вычисленная методами, описанными в разделе 6, с использованием однородных и асимптотических граничных условий. Параметры вычислений (величина  $\sigma$ , число узлов сетки  $N$  и граница расчетной области  $y_0$ ) использовались те же, что и в случае задачи временной устойчивости. Выводы из полученных результатов в точности те же.

В Таблице 2 приведены 7 значащих десятичных цифр действительной и мнимой частей искомого собственного значения, рассчитанного методами, описанным в разделе 6, с использованием однородных граничных условий при  $y_0 = 40$  (столбцы 2 и 4) и с использованием асимптотических граничных условий (столбцы 3 и 5). В первом случае возникающие проблемы собственных значений имеют алгебраическую размерность  $3N$ , а во втором —  $3N + 2$ . Видно, что, как и в случае задачи временной устойчивости, четвертая значащая цифра в действительной части собственного значения при вычислении методом, использующим асимптотические граничные условия, не меняется с увеличением  $N$  начиная с  $N = 15$ , в то время как для метода, использующего однородные граничные условия, — начиная с  $N = 50$ . Для мнимой части — соответственно с  $N = 20$  и  $N = 70$ . Таким образом, при той же погрешности аппроксимации использование асимптотических граничных условий приводит к частичной нелинейной проблеме собственных значений с матричным пучком порядка 62, а использование однородных

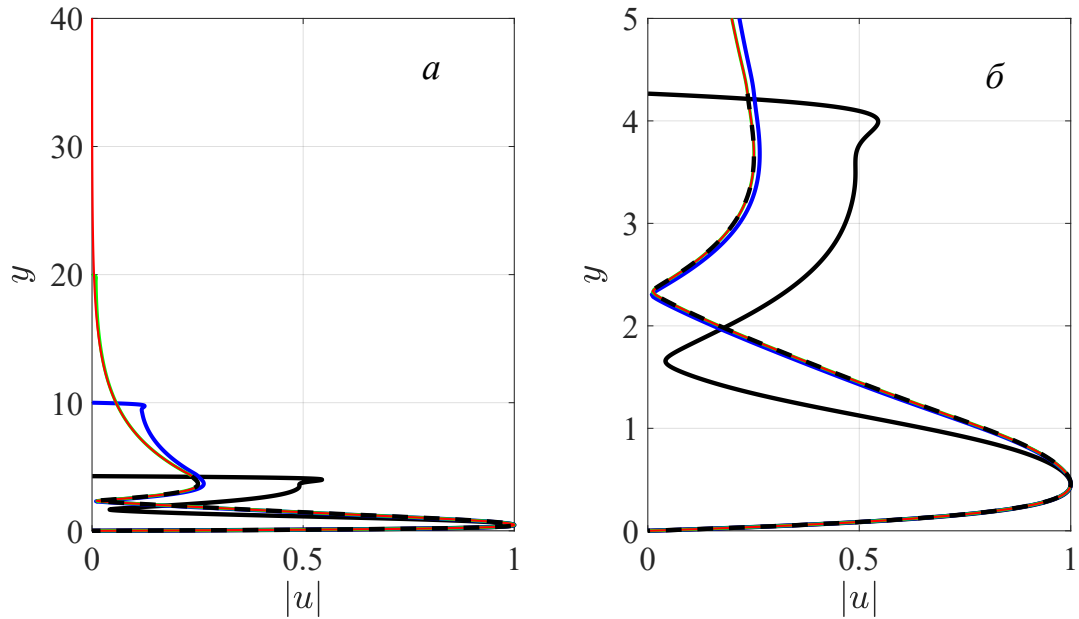


Рис. 3: Абсолютные величины продольной компоненты скорости собственной функции во всей расчетной области (а) и до  $y = 5$  (б), вычисленной при  $N = 500$  методами из раздела 6 с использованием однородных граничных условий при  $y_0 = y_{VL}$  (черный), 10 (синий), 20 (зеленый), 40 (красный) и асимптотических граничных условий (черный пунктир).

условий — с матричным пучком порядка 210. Учитывая, что суммарное число арифметических операций в обоих случаях пропорционально  $n^3$ , где  $n$  — порядок соответствующего матричного пучка  $\mathcal{A}(\alpha)$ , и то, что константы пропорциональности почти одинаковые, вычислительные затраты благодаря использованию асимптотических граничных условий меньше почти в 40 раз.

## 8. Заключение

Предложен и обоснован новый подход к выводу асимптотических граничных условий для проблем собственных значений, возникающих при численном анализе устойчивости несжимаемых сдвиговых течений. В отличие от известного подхода, основанного на аналитически вычисленных собственных функциях сопряженной проблемы собственных значений, предложенный новый подход основан на аналитически вычисленном инвариантном подпространстве решений, затухающих на бесконечности. Это позволяет избежать некорректных постановок при возникновении кратного дефектного собственного значения. В качестве примера рассмотрены задачи временной и пространственной устойчивости пограничного слоя Блазиуса. Показано,

Таблица 2: Действительная и мнимая части собственного значения  $\alpha$ , найденного с использованием однородных при  $y_0 = 40$  и асимптотических граничных условий, в зависимости от числа  $N$  узлов сетки.

$N$	$\text{Real}(\alpha) \times 10^{-1}$		$\text{Imag}(\alpha) \times 10^{-3}$	
	$y_0 = 40$	$y_0 = y_{BL}$	$y_0 = 40$	$y_0 = y_{BL}$
15	2.420935	2.505527	-8.040224	-5.094611
20	2.530050	2.505575	-7.594081	-5.123753
30	2.504354	2.505566	-5.425765	-5.123288
50	2.505551	2.505566	-5.121799	-5.123317
70	2.505574	2.505569	-5.123319	-5.123390
90	2.505566	2.505567	-5.123674	-5.123439
110	2.505564	2.505567	-5.123166	-5.123400
130	2.505565	2.505567	-5.123489	-5.123458
150	2.505567	2.505567	-5.123411	-5.123448

что использование полученных асимптотических граничных условий позволяет решать в полном объеме задачи временной и пространственной устойчивости в локально-параллельном приближении существенно быстрее, чем при использовании однородных граничных условий, поскольку требует существенно меньшего количества узлов сетки для получения решения с той же точностью.

Следует отметить, что собственные функции проблем собственных значений, к которым приводят задачи временной и пространственной устойчивости сдвиговых сжимаемых сверхзвуковых течений, пренебрежимо малы на расстояниях от подстилающей поверхности не в десятки, как в несжимаемом случае, а в сотни толщин пограничного слоя. Поэтому, можно ожидать, что применение асимптотических граничных условий при численном анализе устойчивости таких течений даст еще более значительный выигрыш.

## Список литературы

- [1] *Boiko A. V., Dougal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.* Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012. 272 p.
- [2] *Grosch C. E., Orszag S. A.* Numerical solution of problems in unbounded regions: Coordinate transforms // J. Comput. Phys. 1977. Vol. 25, No. 3. P. 273–295.
- [3] *Boyd J. P.* The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain // J. Comput. Phys. 1982. Vol. 45, No. 1. P. 43–79.



- [4] *Don W. S., Solomonoff A.* Accuracy enhancement for higher derivatives using Chebyshev collocation and a mapping technique // *SIAM J. Sci. Comput.* 1997. Vol. 18, No. 4. P. 1040–1055.
- [5] *Bertolotti F. P., Joslin R. D.* Effect of far-field boundary conditions on boundary-layer transition // *J. Comput. Phys.* 1995. Vol. 118, No. 2. P. 392–395.
- [6] *Gill A. E., Davey A.* Instabilities of a buoyancy-driven system // *J. Fluid Mech.* 1969. Vol. 35, No. 4. P. 775–798.
- [7] *Jordinson R.* The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr–Sommerfeld equation // *J. Fluid Mech.* 1970. Vol. 43, No. 4. P. 801–811.
- [8] *Brown W. B.* A stability criterion for three-dimensional laminar boundary layers // *Boundary layer and flow control: Its principles and application* / ed. Lachmann G. V. Oxford: Pergamon, 1961. Vol. 2. P. 913–923.
- [9] *Володин А. Г., Гапонов С. А.* Устойчивость несжимаемого пограничного слоя // *Изв. Сиб. отд-ия АН СССР. Сер. техн. наук.* 1970. Т. 2, № 8. С. 55–58.
- [10] *Carpenter P. W., Garrad A. D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien–Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 155. P. 465–510.
- [11] *Keller H. B.* Numerical solution of two point boundary value problems. Philadelphia: SIAM, 1976. 59 p.
- [12] *Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М., Жучков Р. Н., Козелков А. С.* Блок расчета положения ламинарно-турбулентного перехода для пакета ЛЮГОС // *Теплофиз. аэромех.* 2014. Т. 21, № 2. С. 201–220.
- [13] *Boiko A. V., Nечepurenko Yu. M., Abalakin I. V., Bobkov V.G.* Numerical prediction of laminar-turbulent transition on an airfoil // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2014. Vol. 29, No. 4. P. 205–218.
- [14] *Mack L. M.* Boundary-layer linear stability theory. In AGARD Report No. 709: Special course on stability and transition of laminar flow. 1984. P. 3–81.
- [15] *Hein S.* Nonlinear nonlocal transition analysis. Göttingen: DLR, 2005. FB No. 2005–10. 160 p.

- [16] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. 712 с.
- [17] *Weideman J. A. C., Reddy S. C.* A MATLAB differentiation matrix suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26, No. 4. P. 465–519.
- [18] *Anderson E., Bai Z., Bischof C., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Ostrouchov S., Sorensen D.* LAPACK users guide, 3rd ed. Philadelphia: SIAM, 1999. 407 p.
- [19] *Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A.* Spectral methods. Fundamentals in single domains. Berlin: Springer, 2006. 563 p.
- [20] *Mack L. M.* A numerical method for the prediction of high-speed boundary-layer transition using linear theory. In: Aerodynamic Analyses Requiring Advanced Computers. Washington: NASA, 1975. P. 101–123.
- [21] *Жигулев В. Н.* Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ие, 1987. 282 с.
- [22] *Demyanko K. V., Nечepurenko Yu. M.* Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. Vol. 28, No. 2. P. 125–148.
- [23] *Boiko A. V., Demyanko K. V., Nечepurenko Yu. M.* On computing the location of laminar-turbulent transition in compressible boundary layers // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2017. Vol. 32, No. 1. P. 1–12.
- [24] *Нечепуренко Ю. М.* О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления // Доклады АН. 2012. Т. 445, № 1, С. 17–19.
- [25] *Golub G. H., Van Loan Ch.* Matrix computations, 4th ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
- [26] *Hochstenbach M. E., Muhič A., Plestenjak B.* On linearizations of the quadratic two-parameter eigenvalue problems // Linear Algebr. Appl. 2012. Vol. 436, P. 2725–2743.
- [27] *Shampine L. F., Gladwell I., Thompson S.* Solving ODEs with MATLAB. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003. 272 p.

- [28] *Gaster M.* A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 14, No. 2. P. 222–224.
- [29] *Demyanko K. V., Nechepurenko Yu. M., Sadkane M.* A Newton-type method for non-linear eigenproblems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2017. Vol. 32, No. 4. P. 237–244.

## Содержание

1. Введение . . . . .	3
2. Постановка задач линейной устойчивости в локально-параллельном приближении . . . . .	4
3. Численное решение проблемы собственных значений с однородными граничными условиями . . . . .	7
4. Сведение к квадратичной проблеме собственных значений в ограниченном интервале . . . . .	9
5. Численное решение квадратичной проблемы собственных значений . . . . .	13
6. Задачи пространственной устойчивости . . . . .	15
7. Численные эксперименты . . . . .	17
7.1 Временная устойчивость . . . . .	18
7.2 Пространственная устойчивость . . . . .	20
8. Заключение . . . . .	22
Список литературы . . . . .	23