ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 139 за 2018 г.


ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Галанин М.П., Прошунин Н.Н., Родин А.С.

# Численное решение динамической задачи контакта упругопластических тел

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Галанин М.П., Прошунин Н.Н., Родин А.С. Численное решение динамической задачи контакта упругопластических тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 139. 31 с. doi:10.20948/prepr-2018-139
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-139

**Ордена Ленина**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**им. М.В. Келдыша**
**Российской академии наук**

М.П. Галанин, Н.Н. Прошунин, А.С. Родин

# Численное решение динамической задачи контакта упругопластических тел

Москва — 2018

**Галанин М.П., Прошунин Н.Н., Родин А.С.**

Численное решение динамической задачи контакта упругопластических тел

Рассмотрена плоская динамическая задача механики деформируемого твердого тела. Приведены основные соотношения для упругого и упругопластического материалов. Описан конечно-элементный подход для численного решения поставленной задачи, рассмотрены различные схемы дискретизации по времени. Приведена постановка динамической контактной задачи, для ее решения предложен вариант итерационного метода Шварца. Показаны результаты численных решений трех тестовых контактных задач: задачи о соударении двух упругих стержней и задач о контакте двух труб в упругой и упругопластической постановках (для поперечного сечения). Продемонстрирована сходимость используемого варианта метода Шварца на примере расчетов со сгущающимися сетками.

***Ключевые слова:*** контактное взаимодействие, метод конечных элементов, метод Шварца, динамическая задача, упругопластическое тело

**Mikhail Pavlovich Galanin, Nikolay Nikolaevich Proshunin, Aleksandr Sergeevich Rodin**

Numerical solution of the dynamic contact problem of elasto-plastic bodies

A plane dynamic problem of solid mechanics is considered. Basic relations for elastic and elasto-plastic materials are given. A finite element method for numerical solution of the problem is described, various time discretization schemes are presented. The dynamic contact problem formulation is given, a version of the Schwarz iterative method is proposed for its solution. The results of numerical solution for three test contact problems are shown: the problem of collision of two elastic rods and the problems of contact between two pipes in elastic and elastoplastic formulations (for the cross section). The convergence of the used Schwarz method is demonstrated on an example of calculation on refining grids.

***Key words:*** contact interaction, finite element method, Schwarz method, dynamic problem, elasto-plastic body

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00252).

# 1. Введение

Работа посвящена численному решению задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Основной целью работы является численное моделирование динамического контактного взаимодействия упругих и упругопластических тел.

При моделировании напряженно-деформированного состояния конструкций часто нужно принимать во внимание контактное взаимодействие рассматриваемых тел, так как именно зоны контакта могут оказаться критичными с точки зрения прочности. В работе рассмотрена постановка контактной задачи с условиями скольжения без трения на контактной границе.

Для решения контактных задач используется ряд численных методов, среди которых метод множителей Лагранжа, метод штрафов, метод Шварца и другие. В данной работе для решения динамической задачи контактного взаимодействия предложен вариант итерационного метода Шварца, который заключается в коррекции кинематических и силовых граничных условий на контактной границе.

Рассмотрено несколько тестовых задач, для которых продемонстрирована работоспособность выбранного алгоритма.

# 2. Математические и численные модели

## 2.1. Математическая модель теории упругости

Рассмотрим твердое деформируемое тело, занимающее область $\Omega$, к которому приложено заданное внешнее воздействие. Тогда в каждой внутренней точке тела должны выполняться уравнения движения сплошной среды, имеющие вид [1, 2]:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i, \tag{1}$$

где $u_i$ — компоненты вектора перемещений, $\ddot{u}_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ — компоненты вектора ускорений (точкой обозначается частная производная по времени), $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений, $b_i$ — компоненты вектора плотности объемных сил, $\rho$ — плотность, запятой обозначается дифференцирование по соответствующей декартовой координате $\left(\sigma_{ji,j} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)$. Считаем, что все индексы ($i, j, k$ и др.) принимают значения 1, 2, 3. Также здесь и далее используем соглашение Эйнштейна, согласно которому по повторяющемуся индексу производится суммирование.

Из закона сохранения момента импульса вытекает симметричность тензора напряжений [1]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Для замыкания задачи необходимо задать начальные и граничные условия. Пусть начальные условия заданы в виде:

$$\mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{u_0}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$
$$\dot{\mathbf{u}}\big|_{t=0} = \mathbf{v_0}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Поверхность тела разбита на две непересекающиеся части $\Gamma_F$ и $\Gamma_U$. На $\Gamma_U$ заданы кинематические условия вида:

$$\mathbf{u}\big|_{\Gamma_U} = \mathbf{u_1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_U,\ t > 0,$$

а на $\Gamma_F$ заданы силовые граничные условия вида:

$$\sigma_{ji} n_j\big|_{\Gamma_F} = f_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_F,\ t > 0,$$

где $n_j$ — компоненты вектора наружней нормали к $\Gamma_F$, а $t$ — время. Предполагается, что функции $\mathbf{u_0}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v_0}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u_1}(\mathbf{x}, t)$ и $f_i(\mathbf{x}, t)$ из начальных и граничных условий заданы.

В случае если решается статическая задача, компоненты вектора ускорений $\ddot{u}_i$ в правой части (1) равняются нулю, и мы получаем уравнение равновесия:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0.$$

В этом случае для замыкания необходимы только граничные условия, причем функции $\mathbf{u_1}$ и $f_i$ уже не будут зависеть от времени.

В работе использован линейный тензор деформаций, компоненты которого вычисляются следующим образом [1,3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \tag{2}$$

Тензор деформаций, определяемый по данной формуле, является симметричным.

Предположим, что тело, испытывающее действие внешних сил, является упругим, то есть полностью восстанавливает свою первоначальную форму после снятия нагрузки. Пусть также тело изотропно, то есть все его упругие характеристики по всем направлениям одинаковы. В таком случае связь между напряжениями и деформациями задается обобщенным законом Гука [1,3]:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, \tag{3}$$
$$C_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl},$$

$E$ — модуль Юнга, $\nu$ — коэффициент Пуассона, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, равный единице при совпадении значений индексов и нулю в противном случае.

Закон Гука (3) можно обратить и таким образом выразить напряжения через деформации:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{4}$$
$$D_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl}.$$

Рассмотрим различные варианты двумерной постановки задачи. Пусть цилиндрическое тело нагружается силами, которые перпендикулярны продольной оси тела и не меняются по его длине. Тогда можно считать, что все поперечные сечения находятся в одинаковых условиях, и рассматривать только одно из них.

Если к концевым сечениям не приложены никакие нагрузки, то есть на них $\sigma_{zz} = \sigma_{33} = 0, \sigma_{xz} = \sigma_{13} = 0, \sigma_{yz} = \sigma_{23} = 0$, тогда можно предположить что $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ и $\sigma_{yz}$ равны нулю и внутри тела. В таком случае напряженное состояние тела называется плоским напряженным состоянием и определяется только компонентами $\sigma_{xx} = \sigma_{11}, \sigma_{yy} = \sigma_{22}$ и $\sigma_{xy} = \sigma_{12}$.

Если концевые сечения зафиксированы и не перемещаются в продольном направлении, то $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{33} = 0, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{13} = 0, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{23} = 0$. Такое состояние называется плоским деформированным состоянием.

## 2.2. Математическая модель теории пластичности

При увеличении нагрузки на тело материал обычно перестает вести себя как упругий и имеет место пластическая (необратимая) деформация. После снятия напряжения материал сохранит некоторую остаточную деформацию.

Существуют различные теории пластичности, в данной работе будет рассмотрена теория пластического течения.

В упругопластическом материале приращения компонент тензора полной деформации можно представить в виде суммы [4–6]:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(e)} + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)},$$

где $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(e)}$ и $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)}$ — приращения упругих и пластических деформаций соответственно.

Пластические деформации не вызывают изменения объема, то есть

$$\varepsilon_{kk}^{(p)} = 0, \quad \mathrm{d}\varepsilon_{kk}^{(p)} = 0.$$

Для того чтобы определить области упругого и пластического деформирования материала, вводится условие текучести, которое для идеальной упругопластической среды имеет вид [4]:

$$f(\sigma_{ij}) = 0.$$

Во всех точках тела выполняется неравенство $f \leqslant 0$. При $f < 0$ имеет место только упругая деформация, а при $f = 0$ возникает пластическая деформация.

Приращения напряжений выражаются через приращения упругих деформаций с помощью закона Гука (4):

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = D_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{(e)} = D_{ijkl}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{(p)}\right).$$

Приращения пластических деформаций, согласно теории пластического течения, находятся из ассоциированного закона течения [4]:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

где $\mathrm{d}\lambda$ — некоторый скалярный параметр, а функция $f$ — функция текучести.

В работе использовалось условие текучести Мизеса для случая идеального упругопластического материала [4]:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} - \sigma_T^2, \tag{5}$$

где $\sigma'_{ij}$ — компоненты девиатора напряжений:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij},$$

а $\sigma_T$ — значение предела текучести.

Первое слагаемое в (5) есть не что иное, как квадрат интенсивности напряжений, которую можно записать непосредственно через компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$\sigma_{\text{и}}^2 = \frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \\ + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 3\sigma_{xy}^2 + 3\sigma_{yz}^2 + 3\sigma_{xz}^2. \tag{6}$$

Из формулы (6) можно получить, что для условия Мизеса в форме (5)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3\sigma'_{ij}.$$

Воспользуемся тем фактом, что функцию $f$ можно домножить на произвольную константу, в дальнейшем будем считать, что

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}.$$

В итоге при использовании условия текучести Мизеса ассоциированный закон течения принимает вид [4]:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)} = \mathrm{d}\lambda\, \sigma'_{ij}. \tag{7}$$

Если выражение (7) подставить в формулу для интенсивности приращений пластических деформаций

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\text{и}}^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)}},$$

то можно получить следующее выражение для $\mathrm{d}\lambda$ [4]:

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{и}}^{(p)}}{\sigma_{\text{и}}}.$$

Однако при численных расчетах использовался несколько иной подход к вычислению параметра $\mathrm{d}\lambda$, который будет описан ниже.

Рассмотрим подробнее случай плоского деформированного состояния упругопластического тела. В этом случае $\varepsilon_{zz} = 0,\ \varepsilon_{xz} = 0,\ \varepsilon_{yz} = 0$. Следовательно, должны выполняться и равенства нулю соответствующих приращений пластических деформаций:

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}\varepsilon_{zz}^{(p)} = \mathrm{d}\lambda\left(\frac{2}{3}\sigma_{zz} - \frac{1}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{yy}\right) = 0,\\
\mathrm{d}\varepsilon_{xz}^{(p)} = \mathrm{d}\lambda\sigma_{xz} = 0,\\
\mathrm{d}\varepsilon_{yz}^{(p)} = \mathrm{d}\lambda\sigma_{yz} = 0.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что для сохранения постановки задачи, соответствующей плоскому деформированному состоянию, нужно использовать следующие соотношения:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right), \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \tag{8}$$

Если учесть эти равенства, функция $f$ из критерия Мизеса (5) для случая плоского деформированного состояния примет вид:

$$f(\sigma_{ij}) = \left[\frac{3}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 3\sigma_{xy}^2\right] - \sigma_T^2.$$

К тому же компоненты девиатора напряжений заданы равенствами:

$$\begin{gathered}
\sigma'_{xx} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}),\\
\sigma'_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}),\\
\sigma'_{xy} = \sigma_{xy}.
\end{gathered}$$

## 2.3. Метод конечных элементов

Для получения слабой постановки задачи используется принцип возможных перемещений [7]:

$$\int\limits_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i \mathrm{d}\Omega + \int\limits_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\Omega} \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int\limits_{\Gamma_F} \delta u_i f_i \mathrm{d}\Gamma,$$

где $\delta u_k$ — виртуальные перемещения, а $\delta \varepsilon_{ij}$ — виртуальные деформации.

Для дискретизации задачи используется метод конечных элементов (МКЭ) [7–10]. Чтобы упростить дальнейшие выкладки, перейдем к двумерному случаю и к конкретному виду элементов и функций формы, которые использовались в работе, а именно к треугольному элементу первого порядка. Обозначим 3 функции формы как $N_1, N_2, N_3$.

Введем вектор узловых перемещений $\{u\}$:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x^{(1)} \\ u_y^{(1)} \\ u_x^{(2)} \\ u_y^{(2)} \\ u_x^{(3)} \\ u_y^{(3)} \end{Bmatrix}.$$

Перемещения в точках внутри элемента выражаются через перемещения его узлов следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [N]\{u\},$$

где

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}.$$

Подставив данные выражения в формулу для деформаций (2), получим:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [B]\{u\},$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Виртуальные перемещения и виртуальные деформации вычисляются по аналогичным формулам.

Как в случае плоского деформированного, так и в случае плоского напряженного состояния можно выразить три компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ через три компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

где $[D]$ — матрица $3 \times 3$, получаемая из закона Гука (4).

В случае плоского деформированного состояния $\sigma_{zz}$ можно получить либо по формуле

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

в чисто упругом случае, либо из соотношения (8) в упругопластическом случае.

В итоге, используя тот факт, что виртуальные перемещения произвольны, получаем следующее матричное уравнение [8, 11]:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}, \tag{10}$$

где

$$[M] = \int\limits_{\Omega} \rho [N]^T [N] \mathrm{d}\Omega \text{ — матрица масс,}$$

$$[K] = \int\limits_{\Omega} [B]^T [D][B] \mathrm{d}\Omega \text{ — матрица жесткости,}$$

$$\{F\} = \int\limits_{\Omega} [N]^T \{b\} \mathrm{d}\Omega + \int\limits_{\Gamma_F} [N]^T \{f\} \mathrm{d}\Gamma \text{ — вектор сил.}$$

Для статической задачи конечно-элементная постановка будет иметь вид:

$$[K]\{u\} = \{F\}.$$

Матрица $[D]$ для плоского деформированного состояния получается непосредственно из соотношений (4):

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix}.$$

## 2.4. Дискретизация по времени

Для дискретизации задачи по времени использовалось 3 различных схемы: явная, неявная и предиктор-корректор.

Явная схема имеет вид:

$$[M]\frac{\{\hat{u}\}-2\{u\}+\{\check{u}\}}{\tau^2}+[K]\{u\}=\{F\},$$

где $\{\hat{u}\},\{u\},\{\check{u}\}$ — векторы перемещений узлов на следующем, текущем и предыдущем временных слоях соответственно.

Неявная схема отличается тем, что вектор перемещений, умножаемый на матрицу жесткости, взят со следующего временного слоя:

$$[M]\frac{\{\hat{u}\}-2\{u\}+\{\check{u}\}}{\tau^2}+[K]\{\hat{u}\}=\{F\}.$$

В схеме предиктор-корректор вводится промежуточный слой $\{\tilde{u}\}$, а вычисление значения $\{\hat{u}\}$ проводится в 2 этапа:

1) предикция

$$[M]\frac{\{\tilde{u}\}-2\{u\}+\{\check{u}\}}{\tau^2}+[K]\{u\}=\{F\};$$

2) коррекция

$$[M]\frac{\{\hat{u}\}-2\{u\}+\{\check{u}\}}{\tau^2}+[K]\{\tilde{u}\}=\{F\}.$$

## 2.5. Численный метод решения задач теории пластичности

Для решения плоских задач теории пластичности в работе использовался метод начальных деформаций [12–14]. Будем считать, что нам известно напряженно-деформированное состояние тела на предыдущем слое по времени (в случае статики, на предыдущем этапе нагружения), то есть $\{u\}$, $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon^{(p)}\}$ даны и требуется найти $\{\hat{u}\}$, $\{\hat{\sigma}\}$, $\{\hat{\varepsilon}\}$, $\{\hat{\varepsilon}^{(p)}\}$. Считается, что пластические деформации при переходе на следующий шаг изменятся на $\{\Delta\varepsilon^{(p)}\}$:

$$\{\Delta\varepsilon^{(p)}\}=\{\hat{\varepsilon}^{(p)}\}-\{\varepsilon^{(p)}\}.$$

Метод начальных деформаций представляет собой итерационный процесс, поэтому введем индекс $s$, отвечающий за номер итерации. Пусть на нулевой итерации

$$\{\Delta\varepsilon_0^{(p)}\}=0,\qquad \{\Delta F_0\}=0.$$

Сначала находится вектор перемещений $\{\hat{u}_s\}$ из системы линейных уравнений для упругого случая вида:

$$[M]\{\ddot{u}_s\}+[K]\{\hat{u}_s\}=\{F\}+\{\Delta F_{s-1}\}. \tag{11}$$

С помощью вектора $\{\hat{u}_s\}$ вычисляются деформации, а также упругое приближение тензора напряжений $\{\sigma_s^*\}$:

$$\{\hat{\varepsilon}_s\} = [B]\{\hat{u}_s\},$$
$$\{\sigma_s^*\} = [D]\left(\{\hat{\varepsilon}_s\} - \{\varepsilon^{(p)}\}\right).$$

Далее, если выполняется условие

$$f\left(\{\sigma_s^*\}\right) < 0,$$

где $f$ — функция из условия Мизеса (5), то пластической деформации на этом шаге не возникло ($\Delta\varepsilon^{(p)} = 0$), и тензор напряжений принимается равным его упругому приближению:

$$\{\hat{\sigma}\} = \{\sigma_s^*\}.$$

В противном случае, возникают пластические деформации и должны выполняться условие текучести Мизеса (5) и ассоциированный закон течения (7). Девиаторы напряжений и деформаций связаны следующим соотношением:

$$\{\hat{\sigma}'\} = 2G\left(\{\hat{\varepsilon}'\} - \{\hat{\varepsilon}^{(p)}\}\right),$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига.

Подставив в последнее соотношение закон течения (7) и упругое приближение $\{\sigma_s^*\}$, получим:

$$\{\hat{\sigma}_s'\} = \{\sigma_s^{*\prime}\} - 2G\Delta\lambda_s\{\hat{\sigma}_s'\},$$
$$\{\hat{\sigma}_s'\} = \frac{1}{1+2G\Delta\lambda_s}\{\sigma_s^{*\prime}\}. \tag{12}$$

Интенсивность напряжений $\{\hat{\sigma}_s\}$ должна равняться пределу текучести $\sigma_T$. Исходя из этого и используя формулу (12), можно получить выражение для $\Delta\lambda_s$ через интенсивности:

$$\Delta\lambda_s = \frac{1}{2G}\left(\frac{\sigma_{s\text{и}}^*}{\sigma_T} - 1\right).$$

После вычисления параметра $\Delta\lambda_s$ можно вычислить приращения пластических деформаций:

$$\{\Delta\varepsilon_s^{(p)}\} = \Delta\lambda_s\{\hat{\sigma}_s'\} = \frac{\Delta\lambda_s}{1+2G\Delta\lambda_s}\{\sigma_s^{*\prime}\}.$$

Напряжения вычисляются по формуле:

$$\{\hat{\sigma}_s\} = [D]\left(\{\hat{\varepsilon}_s\} - \{\Delta\varepsilon_s^{(p)}\} - \{\varepsilon^{(p)}\}\right).$$

Для перехода к следующей итерации остается только скорректировать приращение вектора правой части системы следующим образом:

$$\{\Delta F_s\} = \int\limits_{\Omega} [B]^T [D] \{\Delta \varepsilon_s^{(p)}\} \mathrm{d}\Omega.$$

После этого можно принять $s = s+1$ и начать следующую итерацию снова с решения системы уравнений (11).

При выполнении некоторого условия останова, например

$$\left\| \{\Delta \varepsilon_s^{(p)}\} - \{\Delta \varepsilon_{s-1}^{(p)}\} \right\| \leqslant \delta_1 \left\| \{\Delta \varepsilon_s^{(p)}\} \right\| + \delta_2$$

для некоторых заранее заданных $\delta_1$ и $\delta_2$, нужно остановить внутренние итерации и перейти на следующий шаг, приняв

$$\{\hat{u}\} = \{\hat{u}_s\}, \qquad \{\hat{\sigma}\} = \{\hat{\sigma}_s\}, \qquad \{\hat{\varepsilon}\} = \{\hat{\varepsilon}_s\},$$
$$\{\hat{\varepsilon}^{(p)}\} = \{\varepsilon^{(p)}\} + \{\Delta \varepsilon_s^{(p)}\}.$$

## 2.6. Численный метод решения контактных задач

Рассмотрим динамическую задачу контактного взаимодействия двух тел $A$ и $B$ в двумерной постановке. Пусть для обоих тел заданы граничные и начальные условия и в обоих телах решается уравнение движения (1). Тогда для решения контактной задачи на контактной границе $\Gamma_{cont}$ (рис. 1), общей для двух тел, должны выполняться условия контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям.

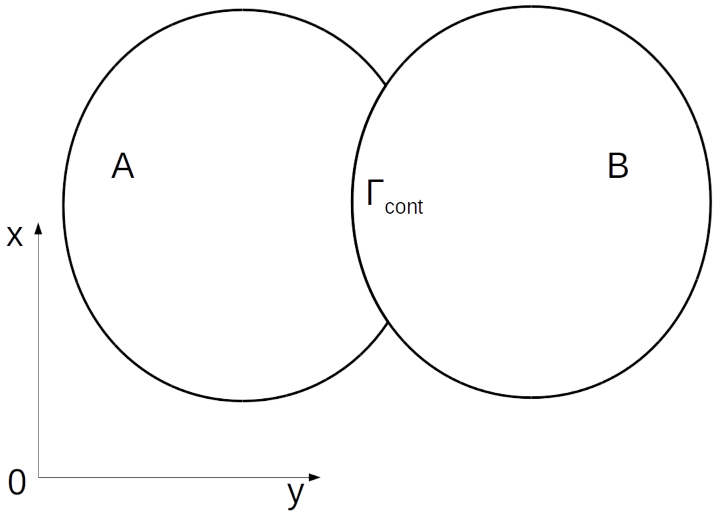



Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух тел

В данной работе использовались условия скольжения без трения, записываемые в виде [15, 16]:

$$u_n^A(\mathbf{x}, t) - u_n^B(\mathbf{x}, t) = \delta_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{cont},\ t > 0, \tag{13}$$

$$\sigma_n^A(\mathbf{x}, t) = \sigma_n^B(\mathbf{x}, t) \leqslant 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{cont},\ t > 0, \tag{14}$$

$$\sigma_\tau^A(\mathbf{x}, t) = \sigma_\tau^B(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{cont},\ t > 0, \tag{15}$$

где $u_n^A$ и $u_n^B$ — проекции векторов перемещений на направление внешней нормали $\mathbf{n}^A$ к границе тела $A$, $\delta_n$ — начальное расстояние по нормали между граничными точками тел $A$ и $B$, $\sigma_\tau^A$ и $\sigma_\tau^B$ — касательные напряжения, а $\sigma_n^A$ и $\sigma_n^B$ — нормальные напряжения на границах тел $A$ и $B$ соответственно:

$$\sigma_n^A = \sigma_{ij}^A n_i^A n_j^A,$$
$$\sigma_n^B = \sigma_{ij}^B n_i^B n_j^B,$$

где $n_i^A$ и $n_i^B$ — компоненты векторов единичных внешних нормалей к границам тел $A$ и $B$ соответственно, а $\sigma_{ij}^A$ и $\sigma_{ij}^B$ — тензоры напряжений этих тел.

Для учета контактного взаимодействия чаще всего применяются метод множителей Лагранжа, метод штрафов или их комбинации. Однако в этих методах решается одна система уравнений для всех контактирующих тел. В методе множителей Лагранжа в матрице системы возникает блок с нулями на диагонали, что ограничивает выбор решателя, а в методе штрафов возникает вопрос с определением величины штрафных множителей.

Для численного решения контактной задачи в данной работе используется итерационный алгоритм, который является модификацией альтернирующего метода Шварца [15, 17–19]. Суть метода Шварца состоит в чередовании двух типов итераций. На нечетных итерациях происходит корректировка перемещений на контактной границе таким образом, чтобы выполнялось кинематическое условие (13). Однако после этого вычисленные контактные давления не удовлетворяют условию (14). Поэтому на четных итерациях происходит корректировка давлений для выполнения силового условия (14), в результате чего снова перестает выполняться условие (13). Таким образом необходимо чередовать итерации до сходимости.

Метод Шварца позволяет решать исходную систему уравнений для каждого тела по отдельности, изменения претерпевают лишь граничные условия на контактной границе. В алгоритме, используемом в работе, как корректировка перемещений, так и корректировка давлений происходит в рамках одной итерации. Будем считать, что начальный зазор $\delta_n = 0$, а контакт происходит узел в узел.

Сначала из системы линейных уравнений, получаемой из (10) при использовании той или иной схемы дискретизации по времени, находится вектор перемещений $\{\hat{u}\}$.

После этого происходит коррекция нормальных перемещений узлов на контактной границе по формуле [15]:

$$\{\widetilde{u}_n^A\}_i = \{\hat{u}_n^A\}_i + \alpha_i^A \left(\{\hat{u}_n^B\}_k - \{\hat{u}_n^A\}_i\right), \tag{16}$$

где $k$ — номер узла на поверхности тела $B$ напротив узла с номером $i$ на поверхности тела $A$.

Для вычисления параметра $\alpha_i^A$ можно пользоваться различными формулами, такими как [15]:

$$\alpha_i^A = \frac{\left|\{\hat{u}_n^A\}_i\right|}{\left|\{\hat{u}_n^A\}_i\right| + \left|\{\hat{u}_n^B\}_k\right|}.$$

В данной работе использовалось значение $\alpha_i^A = \dfrac{1}{2}$.

Чтобы вычислить нормальные перемещения $\{\widetilde{u}_n^B\}_i$ узлов на контактной границе для тела $B$ нужно в формуле (16) поменять местами $A$ и $B$.

Далее вычисляются узловые силы на контактной границе по формуле [15]:

$$\{F^{cont}\}_j = [M]_j \frac{\{\widetilde{u}\} - 2\{u\} + \{\check{u}\}}{\tau^2} + [K]_j\{\widetilde{u}\} - \{F\}_j,$$

здесь $j$ — номер узла на контактной границе, а запись $[M]_j$ означает, что берется $j$-я строка матрицы $[M]$.

Затем нормальные к поверхности компоненты найденных узловых контактных силы выравниваются с помощью формулы [15]:

$$\{\widetilde{F}_n^{cont\,A}\}_i = \{F_n^{cont\,A}\}_i - \beta_i^A \left(\{F_n^{cont\,B}\}_k + \{F_n^{cont\,A}\}_i\right), \tag{17}$$

где $\beta_i^A$ можно вычислять по различным формулам, например [15]:

$$\beta_i^A = \frac{\left|\{F_n^{cont\,A}\}_i\right|}{\left|\{F_n^{cont\,A}\}_i\right| + \left|\{F_n^{cont\,B}\}_k\right|}.$$

В данной работе использовалось значение $\beta_i^A = \dfrac{1}{2}$.

Кроме того, для удовлетворения условия (15) нужно положить

$$\{F_\tau^{cont\,A}\} = \{F_\tau^{cont\,B}\} = 0.$$

После коррекции вектор $\{\widetilde{F}^{cont}\}$ прибавляется к правой части $\{F\}$ уравнения (10) и происходит переход на следующую итерацию.

Численные эксперименты показали, что в рассмотренных задачах для сходимости достаточно 3-5 итераций описанного метода.

# 3. Результаты численных расчетов

## 3.1. Задача о соударении двух упругих стержней

Пусть два одинаковых упругих стержня прямоугольного сечения длиной $l$ и шириной $h$ двигались со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. 2). Рассмотрим случай, когда один стержень «догоняет» другой, то есть скорости стержней $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ сонаправлены и при этом $v_1 > v_2$. Пусть в момент времени $t = 0$ стержни соударяются, необходимо промоделировать распространение волн вдоль стержней в процессе удара. Для решения задачи применен алгоритм на основе метода Шварца, описанный в разделе 2.6.

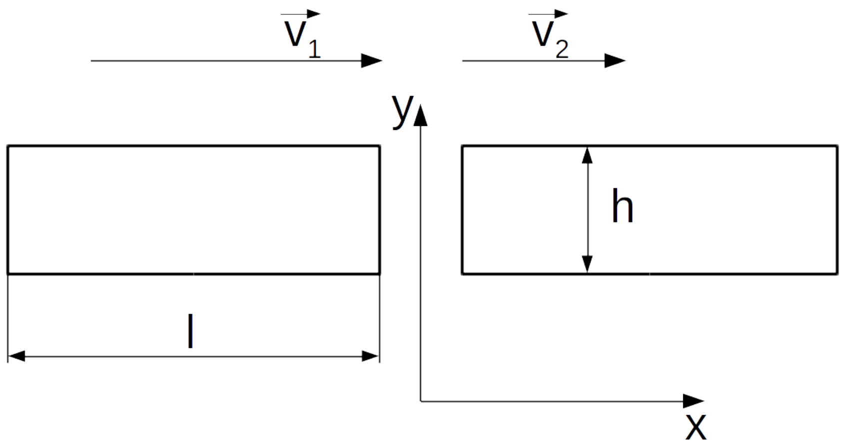


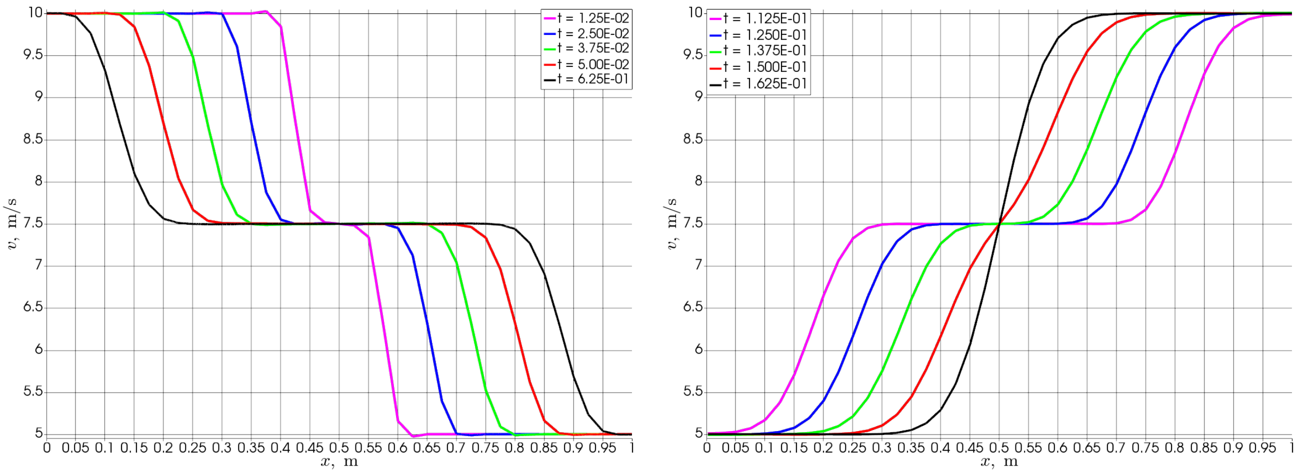

Рис. 2. Схема расчетной области

При $t > 0$ вдоль каждого из стержней по направлению от контактной границы к свободному концу начнет распространяться волна сжатия со скоростью звука $c$. Контактная граница будет двигаться со скоростью $\dfrac{v_1 + v_2}{2}$. В момент, когда волны достигнут свободных концов стержней, оба стержня будут подвергнуты равномерному сжатию. Затем волны сжатия отразятся от свободных концов в виде волн растяжения. Когда обе волны достигнут плоскости контакта, стержни отделятся друг от друга и при этом обменяются скоростями: левый стержень будет двигаться со скоростью $v_2$, а правый — со скоростью $v_1$.

Рассмотрим численное решение задачи, полученное в квазиодномерной постановке, то есть при условии, что перемещения точек стержней вдоль вертикальной оси $u_y = 0$. Пусть $l = 0{,}5$ м, $h = 0{,}2$ м, а контактная граница находится в точке $x = 0{,}5$ м. Заданы модуль Юнга стержней $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$ и плотность $\rho = 7800$ кг/м$^3$, а также начальные скорости $v_1 = 10$ м/с, а $v_2 = 5$ м/с.

На рис. 3(а) изображены графики скорости точек стержней в разные моменты времени, демонстрирующие движение двух волн сжатия. Решение получено с помощью неявной схемы. Расчет проводился с шагом $\tau = 6{,}25 \cdot 10^{-4}$

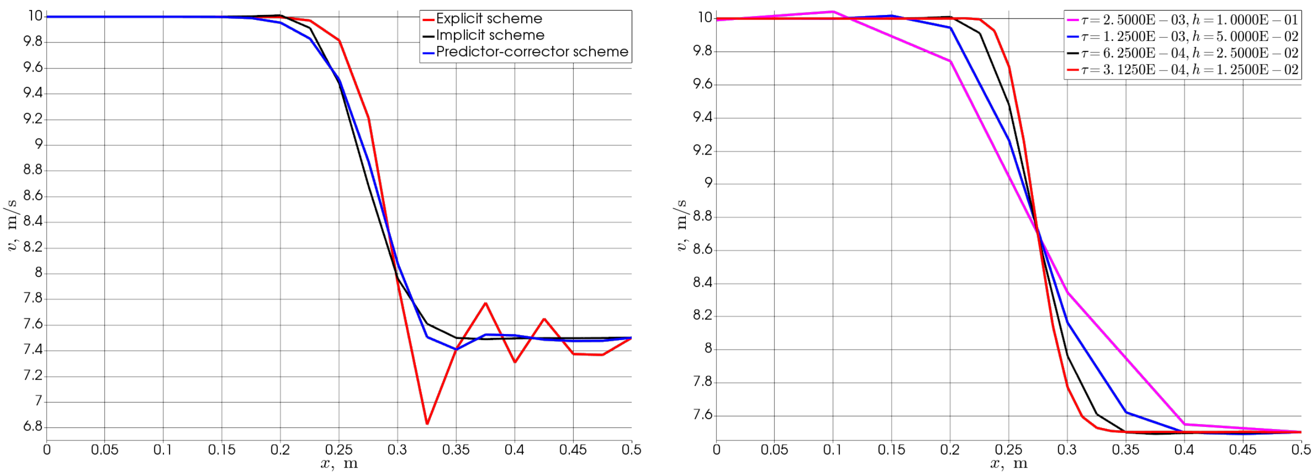
по времени и с шагом $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ по пространству. Моменты времени указаны в миллисекундах. На рис. 3(б) изображены аналогичные графики скорости после отражения обеих волн от свободных концов стержней, по ним можно проследить движение волны растяжения.




(а) Волны сжатия (б) Волны растяжения

Рис. 3. Численное решение для $v$

На рис. 4(а) изображены графики скорости в левом стержне в один и тот же момент времени $t = 0{,}0375$ мс и при использовании одних и тех же шагов $\tau = 6{,}25 \cdot 10^{-4}$ и $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$, но полученные с помощью разных схем: явной (explicit), неявной (implicit) и схемы предиктор-корректор (predictor-corrector). По графикам видно, что неявная схема сильнее размывает фронт волны, чем явная, но в отличие от явной схемы не дает осцилляций решения. Схема предиктор-корректор представляет собой некоторый компромисс между явной и неявной схемой.




(а) (б)

Рис. 4. Зависимость численного решения от выбранной схемы (а) и шагов $\tau$ и $h$ (б)

Для исследования зависимости формы фронта волны, получаемой в расчетах с помощью неявной схемы, от шагов сетки проведена серия расчетов с четырьмя различными значениями шагов $\tau$ и $h$ (рис. 4(б)). Все графики построены для фиксированного момента времени $t = 0{,}0375$ мс. По графикам видно, что чем меньше шаги сетки, тем «круче» получается фронт волны.

Зная скорость распространения волны $c$, можно вычислить продолжительность соударения, как время, требующееся волне для прохождения двух длин стержня [3]:

$$T = \frac{2l}{c},$$

где скорость $c$ находится из соотношения:

$$c = \sqrt{\frac{\widetilde{E}}{\rho}}.$$

В случае плоского деформированного состояния $\widetilde{E}$ находится следующим образом:

$$\widetilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Для заданных параметров задачи получаем $c \approx 6020{,}2$ м/с, $T \approx 0{,}16611$ мс. Продолжительность соударения $T$ можно найти и численно — это момент времени, в который напряжения на контактной границе становятся положительными. В таблице 1 приведены найденные численно продолжительности соударения для разных шагов $\tau$ и $h$ для трех использованных схем ($T_{expl}$ — для явной схемы, $T_{impl}$ — для неявной, $T_{pred}$ — для схемы предиктор-корректор). В таблице также приведены шаги Куранта $\tau_{cour} = \dfrac{h}{c}$ для всех используемых сеток. Из таблицы видно, что при измельчении шагов найденная численно продолжительность соударения приближается к теоретической.

Таблица 1. Численно найденные времена соударения

| $h$, м | $\tau$, мс | $\tau_{cour}$, мс | $T_{expl}$, мс | $T_{impl}$, мс | $T_{pred}$, мс |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $2{,}5000 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}6611 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}7250 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}6500 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}7000 \cdot 10^{-1}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}2500 \cdot 10^{-3}$ | $8{,}3054 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}7000 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}6625 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}6875 \cdot 10^{-1}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | $6{,}2500 \cdot 10^{-4}$ | $4{,}1527 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}6875 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}6625 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}6750 \cdot 10^{-1}$ |
| $1{,}25 \cdot 10^{-2}$ | $3{,}1250 \cdot 10^{-4}$ | $2{,}0763 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}6781 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}6625 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}6656 \cdot 10^{-1}$ |

### 3.2. Задача о контакте двух труб в упругой постановке

Рассмотрим два соприкасающихся полых цилиндра. Пусть внутренний радиус меньшего цилиндра равен $a$, внешний радиус большего цилиндра равен $b$, а внутренний радиус большего цилиндра совпадает с внешним радиусом меньшего и равняется $r_{cont}$. На внутренней поверхности меньшего цилиндра задано давление $p_a$, а на внешней поверхности большего цилиндра давление равно нулю.

Симметрия задачи позволяет рассматривать четверть поперечного сечения цилиндров (рис. 5), задав при этом на нижней границе условие $u_y = 0$, а на левой границе условие $u_x = 0$.

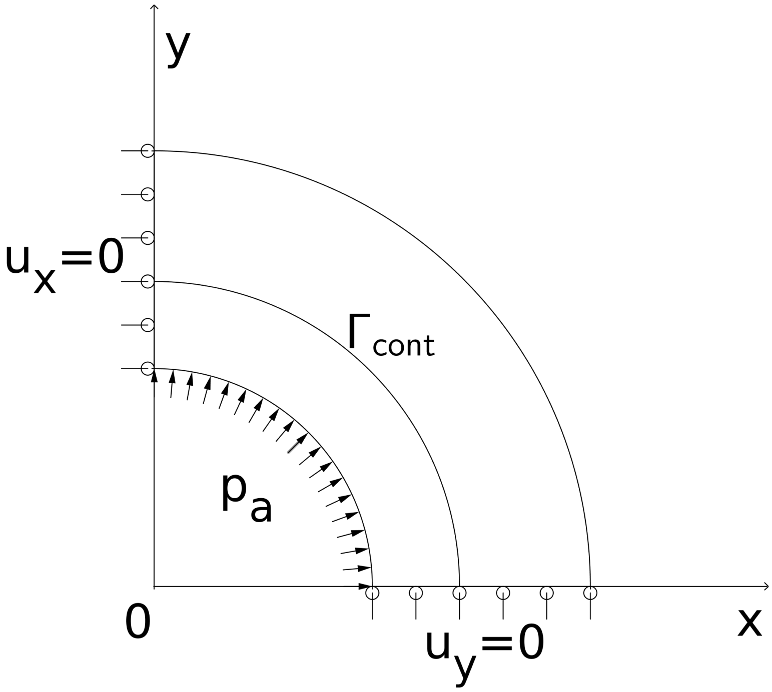



Рис. 5. Расчетная область (1/4 поперечного сечения)

Все задачи в данной работе решены в декартовой системе координат, но для отображения результатов и сравнения численных решений с аналитическими проводилось преобразование полученных перемещений и напряжений в полярную систему координат.

Считаем, что внутреннее давление $p_a = p_a(t)$ зависит от времени следующим образом(рис. 6):

$$p_a(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t_1} p_1, & t \leqslant t_1, \\ p_1, & t > t_1, \end{cases}$$

где $p_1$ и $t_1$ — некоторые заданные давление и время соответственно.

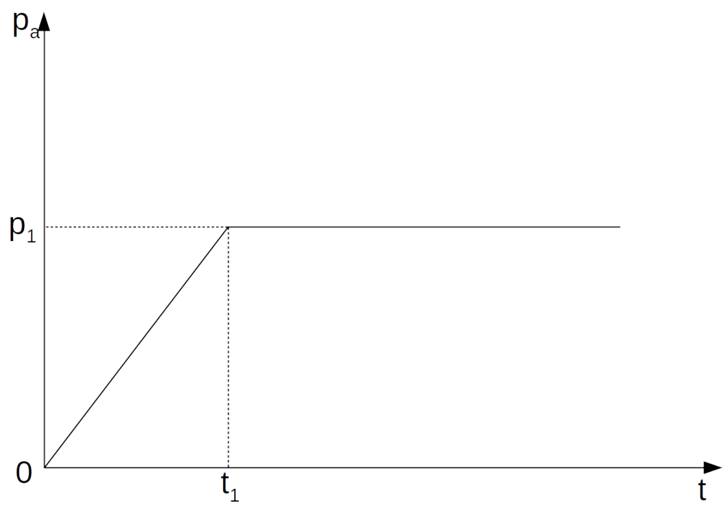



Рис. 6. График зависимости $p_a(t)$

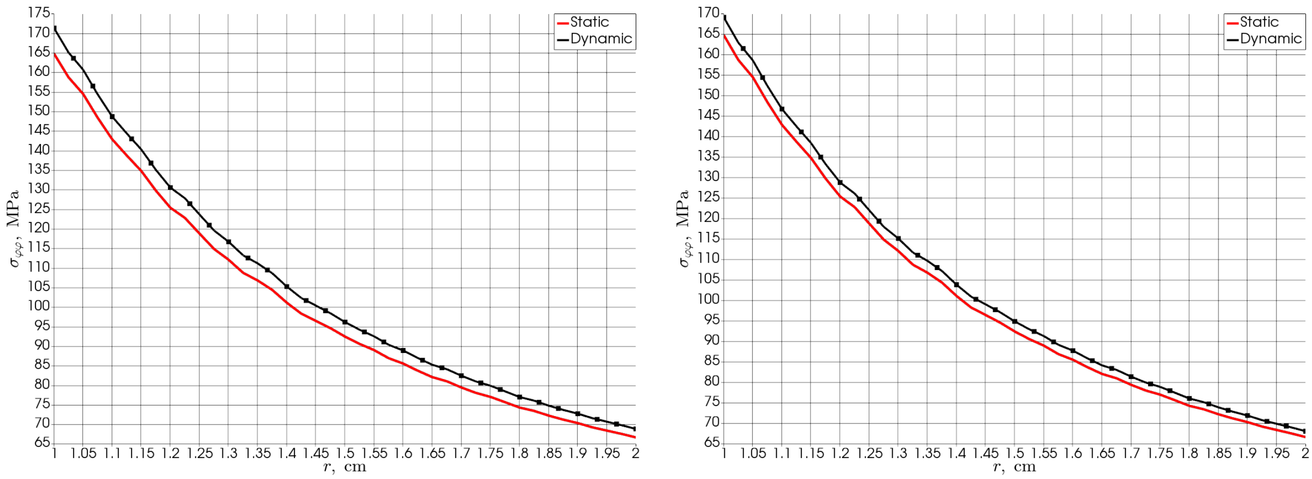
Примем $E = 210$ ГПа, $\nu = 0{,}4$, $a = 1$ см, $b = 2$ см, $r_{cont} = 1{,}4$ см, $p_1 = 100$ МПа, $t_1 = 3$ мс. Для оценки результатов решения контактных задач выполнено их сравнение с результатами решения задач, в которых рассматриваемая конструкция являлась единым телом.

Параметры сеток, используемых в расчетах, а также соответствующие шаги по времени $\tau$ приведены в таблице 2. Сетка для одного тела идентична сетке для двух тел, так как в ней присутствует внутреннее ограничение при $r = 1{,}4$ см.

Таблица 2. Параметры сеток и шаги по времени $\tau$

| Шаг сетки $h$ | Число элементов | Число узлов | $\tau$ |
|---|---|---|---|
| $10^{-1}$ | 752 | 412 | $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | 2935 | 1537 | $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | 11831 | 6051 | $3{,}75 \cdot 10^{-3}$ |

Сначала сравним решение динамической задачи для одного тела с решением статической задачи при $p_a = p_1 = \text{const}$. В статической постановке рассматриваемая задача имеет аналитическое решение [4, 20]. Проведенные расчеты показали, что численное решение статической задачи стремится к аналитическому при измельчении сетки. На рис. 7 приведены графики решений для $\sigma_{\varphi\varphi}$ динамической и статической задач на сетке с $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ в моменты времени $t_1$ и $2t_1$. По графикам видно, что решение динамической задачи отличается от решения статической наличием волн, из-за которых значения напряжений изменяются по времени. Значение напряжения в динамической задаче колеблется относительно положения равновесия — значения напряжения в статической задаче. Амплитуда колебаний уменьшается со временем за счет численной вязкости схемы.




(а) (б)

Рис. 7. Графики решения для $\sigma_{\varphi\varphi}$ в моменты времени $t_1$ (а) и $2t_1$ (б)

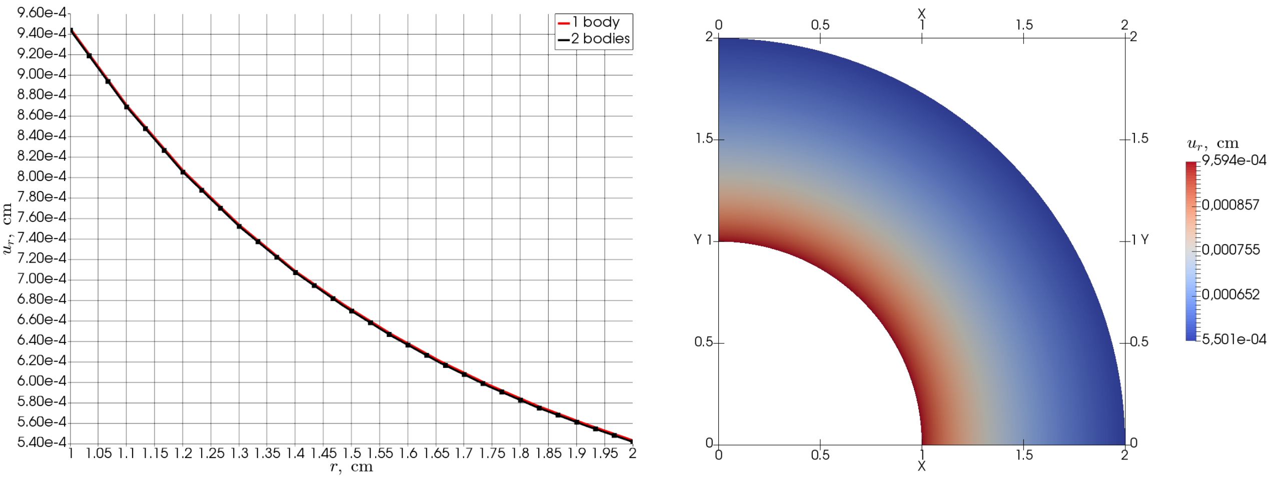
Численное решение динамической контактной задачи для двух труб будем сравнивать с численным решением динамической задачи для одной трубы без контакта на той же сетке и с тем же шагом по времени $\tau$. Для полного совпадения решений в контактной задаче должны быть поставлены условия прилипания на контактной границе. Но в рассмотренной постановке задачи касательные перемещения на контактной границе близки к нулю, поэтому решения задач для одного и двух тел не должны различаться и в случае условий проскальзывания.

Решения сравнивались в момент времени $t = t_1$, графики решений приведены на этот момент времени. Во всех расчетах использовалась неявная схема дискретизации по времени. Для решения контактной задачи использовался алгоритм на основе метода Шварца.

Одномерный график решения для $u_r$, полученный на сетке с шагом $h = 10^{-1}$, изображен на рис. 8(а). Отображены решения как динамической контактной задачи для двух труб (2 bodies), так и динамической задачи для одной трубы (1 body).

Видно, что даже для самой грубой сетки графики перемещений практически совпадают друг с другом.

Решение динамической контактной задачи для $u_r$, получаемое на сетке с шагом $2{,}5 \cdot 10^{-2}$, изображено на рис. 8(б) в виде двумерного распределения.




(а) (б)

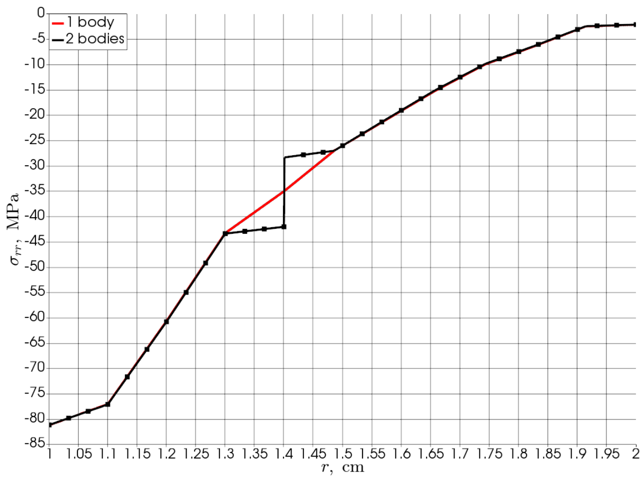
Рис. 8. Решение для $u_r$

В таблице 3 приведены нормы относительных разностей решений для $u_r$ динамических задач с контактом и без контакта в сеточных нормах $C$ и $L_2$. Из таблицы видно, что при уменьшении шага сетки разность решений стремится к нулю.

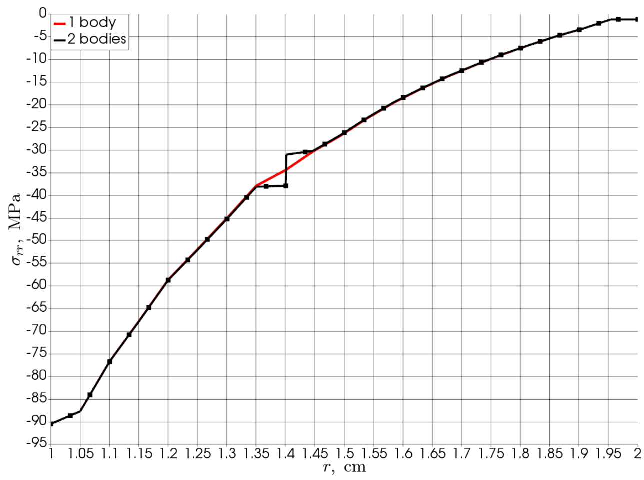
Таблица 3. Относительная разность между решениями для $u_r$

| Шаг сетки | Разность в $C$ | Разность в $L_2$ |
|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $1{,}5201 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}8979 \cdot 10^{-3}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}3694 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}3983 \cdot 10^{-4}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}5178 \cdot 10^{-5}$ | $1{,}1834 \cdot 10^{-5}$ |

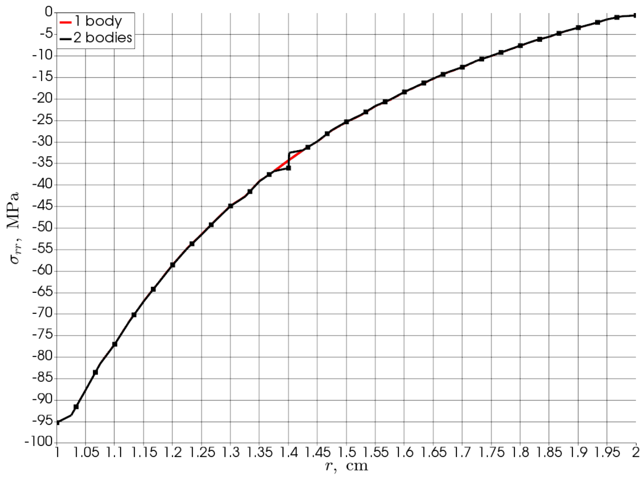
Аналогичные одномерные графики для $\sigma_{rr}$ для трех различных сеток изображены на рис. 9(а)-9(в). На графиках заметны разрывы на контактной границе. При расчетах напряжения считаются постоянными в пределах одного элемента, а для построения одномерных графиков используется переинтерполяция в узлы. Из-за переинтерполяции ошибка, которая максимальна на разрыве, становится еще более заметна визуально. Но при уменьшении шагов сетки величина разрыва сокращается.



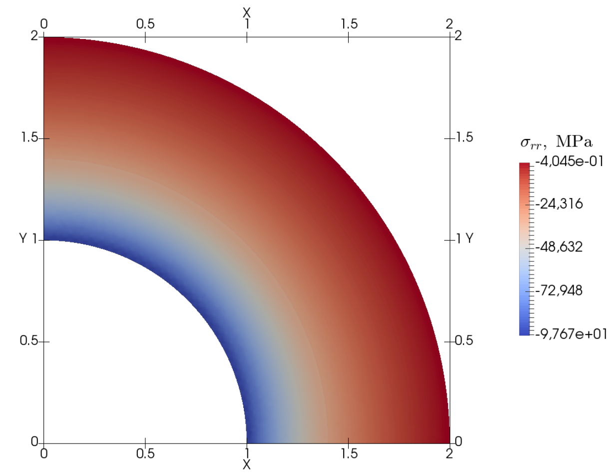

(а) $h = 10^{-1}$




(б) $h = 5 \cdot 10^{-2}$




(в) $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$




(г) $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$

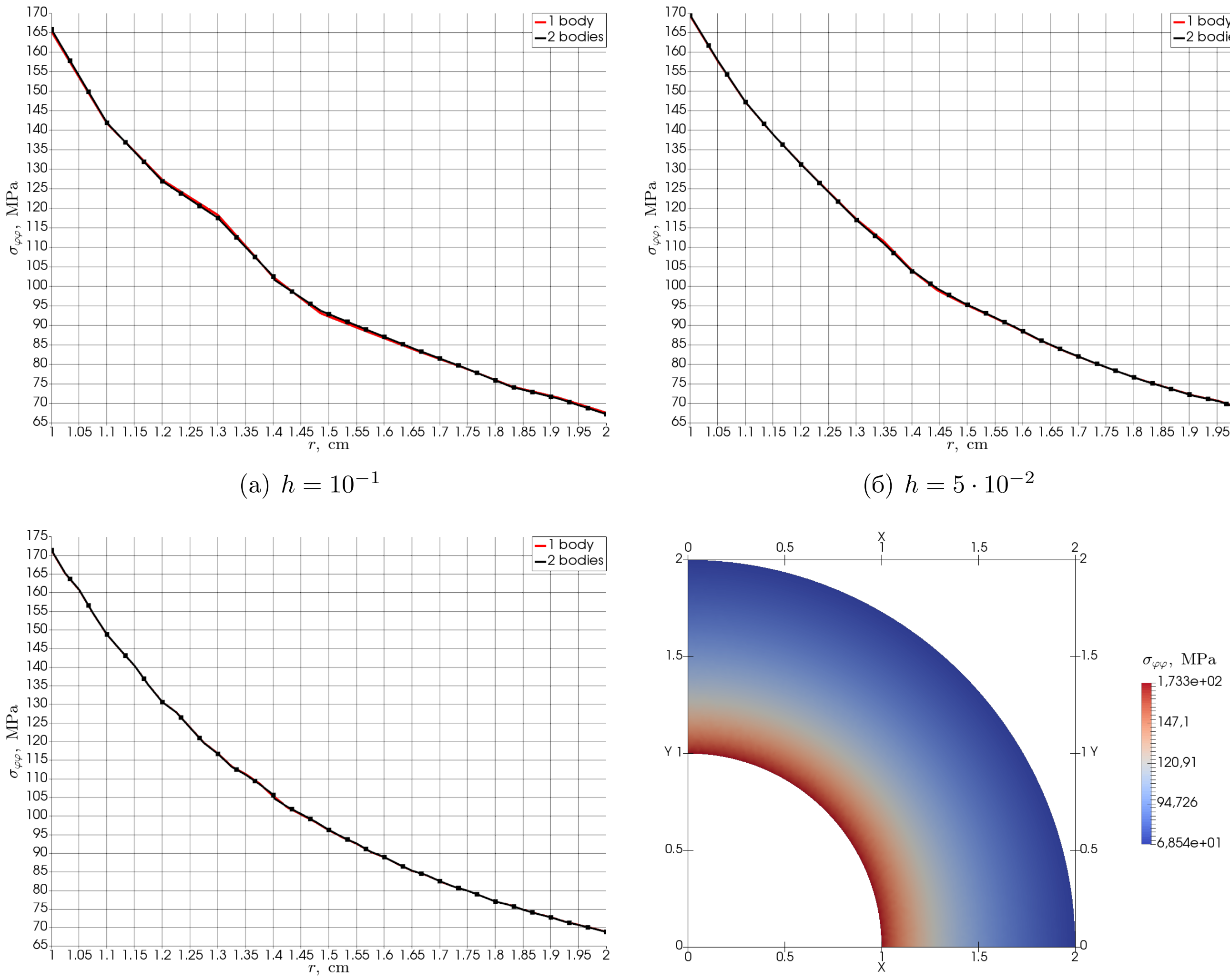
Рис. 9. Решения для $\sigma_{rr}$ на различных сетках

Двумерное распределение решения динамической контактной задачи для $\sigma_{rr}$, получаемое на сетке с шагом $2{,}5 \cdot 10^{-2}$, изображено на рис. 9(г). В таблице 4 приведены нормы относительных разностей решений для $\sigma_{rr}$ динамических задач с контактом и без контакта в сеточных нормах $C$ и $L_2$. При уменьшении шага сетки разность решений стремится к нулю.

Таблица 4. Относительная разность между решениями для $\sigma_{rr}$

| Шаг сетки | Разность в $C$ | Разность в $L_2$ |
|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $3{,}4269 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}9833 \cdot 10^{-3}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | $3{,}0841 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}785 \cdot 10^{-3}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | $3{,}3197 \cdot 10^{-4}$ | $3{,}8851 \cdot 10^{-4}$ |

Аналогичные одномерные графики для $\sigma_{\varphi\varphi}$ для трех различных сеток изображены на рис. 10(а)-10(в).




(а) $h = 10^{-1}$ (б) $h = 5 \cdot 10^{-2}$

(в) $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ (г) $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$

Рис. 10. Решения для $\sigma_{\varphi\varphi}$ на различных сетках

Двумерное распределение решения динамической контактной задачи для $\sigma_{\varphi\varphi}$, получаемое на сетке с шагом $2{,}5 \cdot 10^{-2}$, изображено на рис. 10(г).

В таблице 5 приведены нормы относительных разностей решений для $\sigma_{\varphi\varphi}$ динамических задач с контактом и без контакта в сеточных нормах $C$ и $L_2$. При уменьшении шага сетки разность решений стремится к нулю.

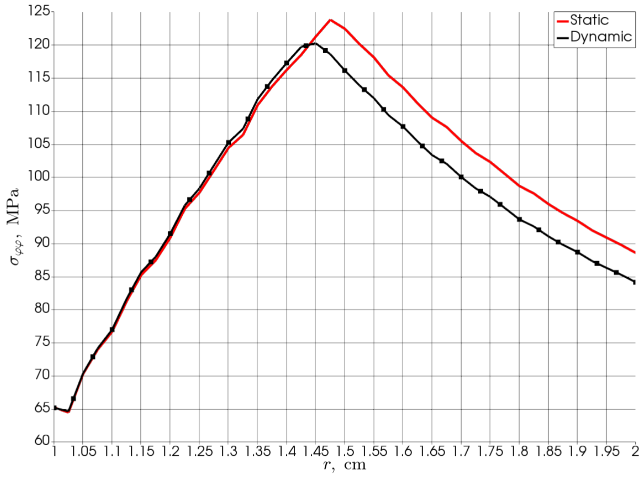
Таблица 5. Относительная разность между решениями для $\sigma_{\varphi\varphi}$

| Шаг сетки | Разность в $C$ | Разность в $L_2$ |
|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $1{,}005 \cdot 10^{-2}$ | $4{,}3693 \cdot 10^{-3}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | $4{,}0548 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}7628 \cdot 10^{-3}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | $9{,}8212 \cdot 10^{-4}$ | $5{,}1192 \cdot 10^{-4}$ |

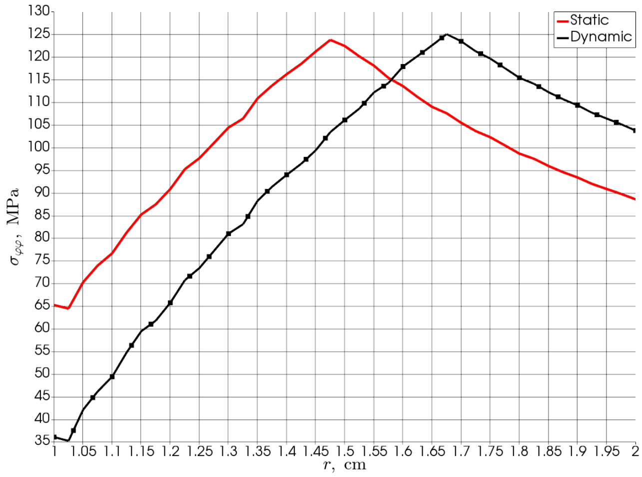
### 3.3. Задача о контакте двух труб в упругопластической постановке

Решим задачу о контакте двух труб, материал которых является идеальным упругопластическим. Рассмотрим плоское деформированное состояние, при этом $E = 210$ ГПа, $\nu = 0{,}4$, $\sigma_T = 140$ МПа, $a = 1$ см, $b = 2$ см, $r_{cont} = 1{,}4$ см, $p_1 = 100$ МПа, $t_1 = 3$ мс. Для решения контактной задачи применим алгоритм на основе метода Шварца.

Сравним решения динамической и статической задачи для упругопластического случая. На графиках 11(а) и 11(б) показаны графики $\sigma_{\varphi\varphi}$ на сетке с $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ в моменты времени $t_1$ и $2t_1$. При $t > t_1$ зона пластичности в динамической задаче становится больше, чем в статической. В обоих случаях в большем цилиндре также есть зона с пластическими деформациями.




(а)



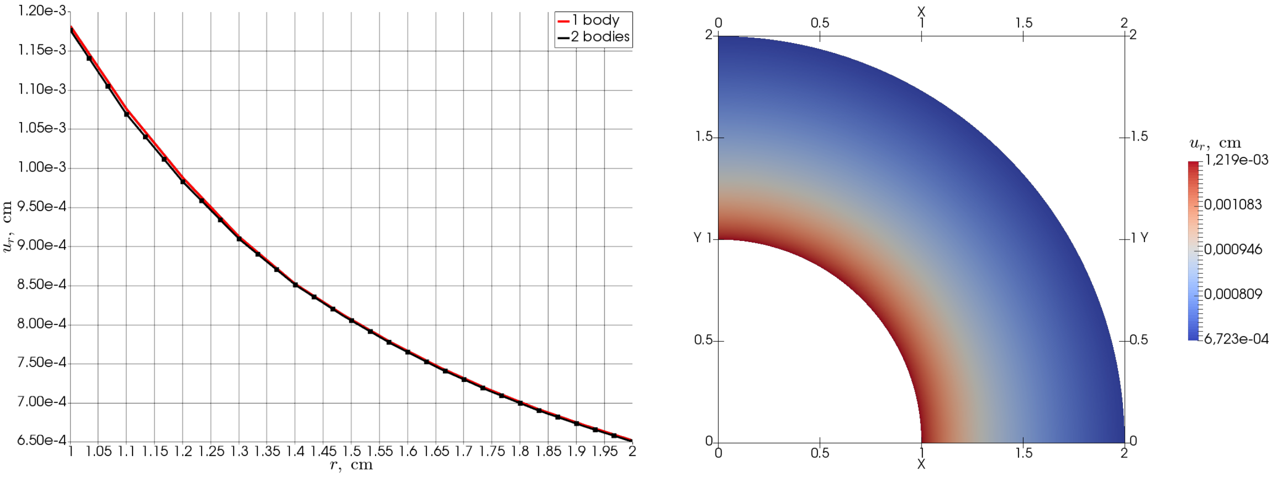

(б)

Рис. 11. Графики решения для $\sigma_{\varphi\varphi}$ в моменты времени $t_1$ (а) и $2t_1$ (б)

Нужно отметить, что после момента времени $2t_1$ зона пластичности перестает изменяться, а по телам двигаются упругие волны.

Теперь снова будем сравнивать численные решения для динамической контактной задачи с решениями динамической задачи без контакта, как и в предыдущем разделе, в момент времени $t_1$.

Одномерный график для $u_r$ на сетке с шагом $h = 10^{-1}$ представлен на рис. 12(а).




(а) (б)

Рис. 12. Решение для $u_r$

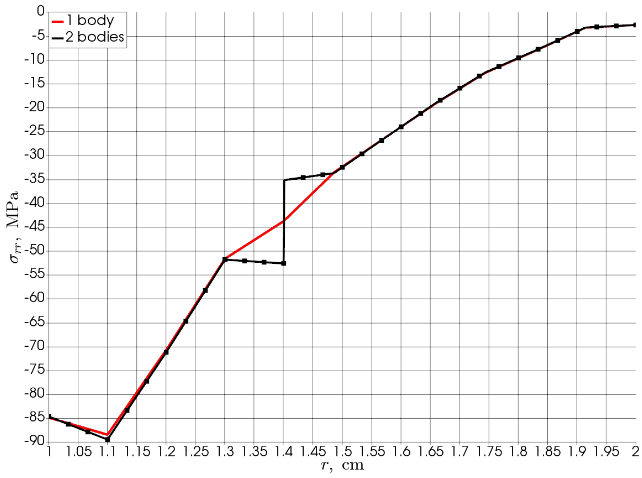
Двумерное распределение решения динамической контактной задачи для $u_r$, получаемое на сетке с шагом $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$, изображено на рис. 12(б).

В таблице 6 приведены нормы относительных разностей решений для $u_r$ динамических задач с контактом и без контакта в сеточных нормах $C$ и $L_2$. При уменьшении шага сетки разность решений стремится к нулю.

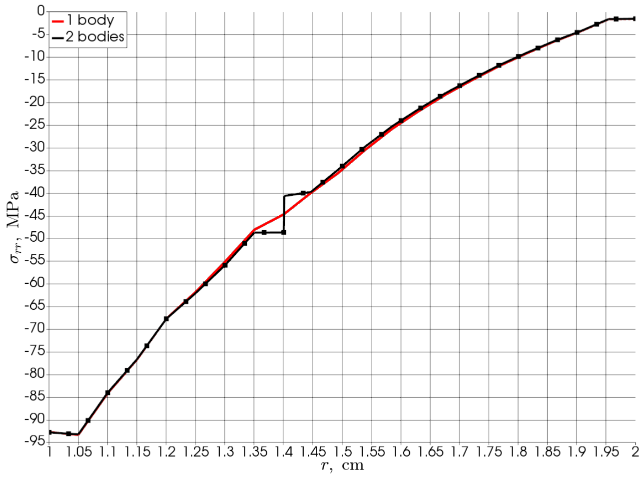
Таблица 6. Разность между решениями для $u_r$

| Шаг сетки | Разность в $C$ | Разность в $L_2$ |
|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $5{,}6916 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}7441 \cdot 10^{-3}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | $2{,}8762 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}3742 \cdot 10^{-3}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}1433 \cdot 10^{-3}$ | $6{,}3202 \cdot 10^{-4}$ |

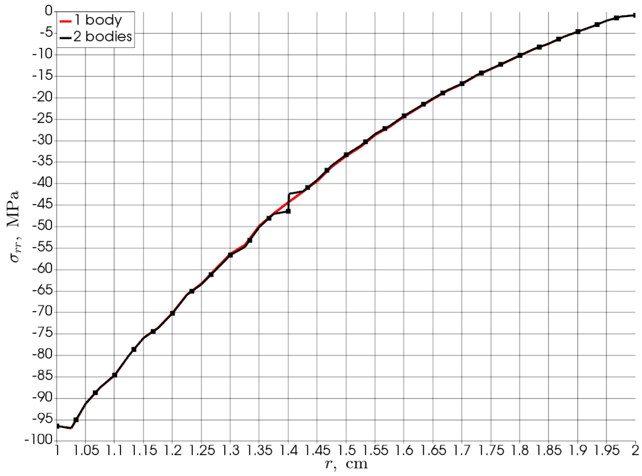
Одномерные графики для $\sigma_{rr}$ для трех различных сеток изображены на рис. 13(а)-13(в).



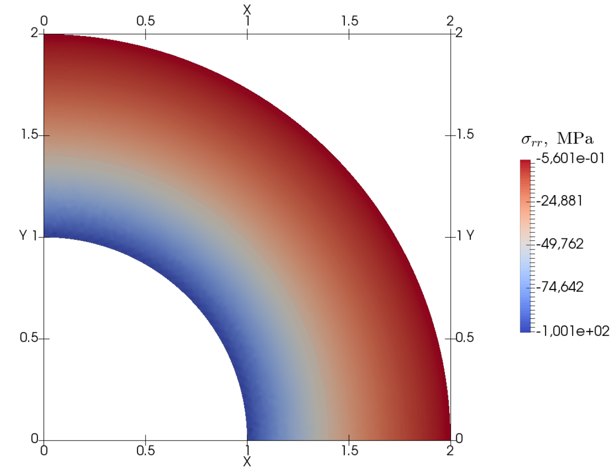

(а) $h = 10^{-1}$




(б) $h = 5 \cdot 10^{-2}$




(в) $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$




(г) $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$

Рис. 13. Решения для $\sigma_{rr}$ на различных сетках

Двумерное распределение решения динамической контактной задачи для $\sigma_{rr}$, получаемое на сетке с шагом $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$, изображено на рис. 13(г).

В таблице 4 приведены нормы относительных разностей решений для $\sigma_{rr}$ динамических задач с контактом и без контакта в сеточных нормах $C$ и $L_2$. При уменьшении шага сетки разность решений стремится к нулю.

Таблица 7. Разность между решениями для $\sigma_{rr}$

| Шаг сетки | Разность в $C$ | Разность в $L_2$ |
|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $1{,}2176 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}0914 \cdot 10^{-2}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | $8{,}8204 \cdot 10^{-3}$ | $8{,}081 \cdot 10^{-3}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | $4{,}042 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}2902 \cdot 10^{-3}$ |

Одномерные графики для $\sigma_{\varphi\varphi}$ для трех различных сеток изображены на рис. 14(а)-14(в).

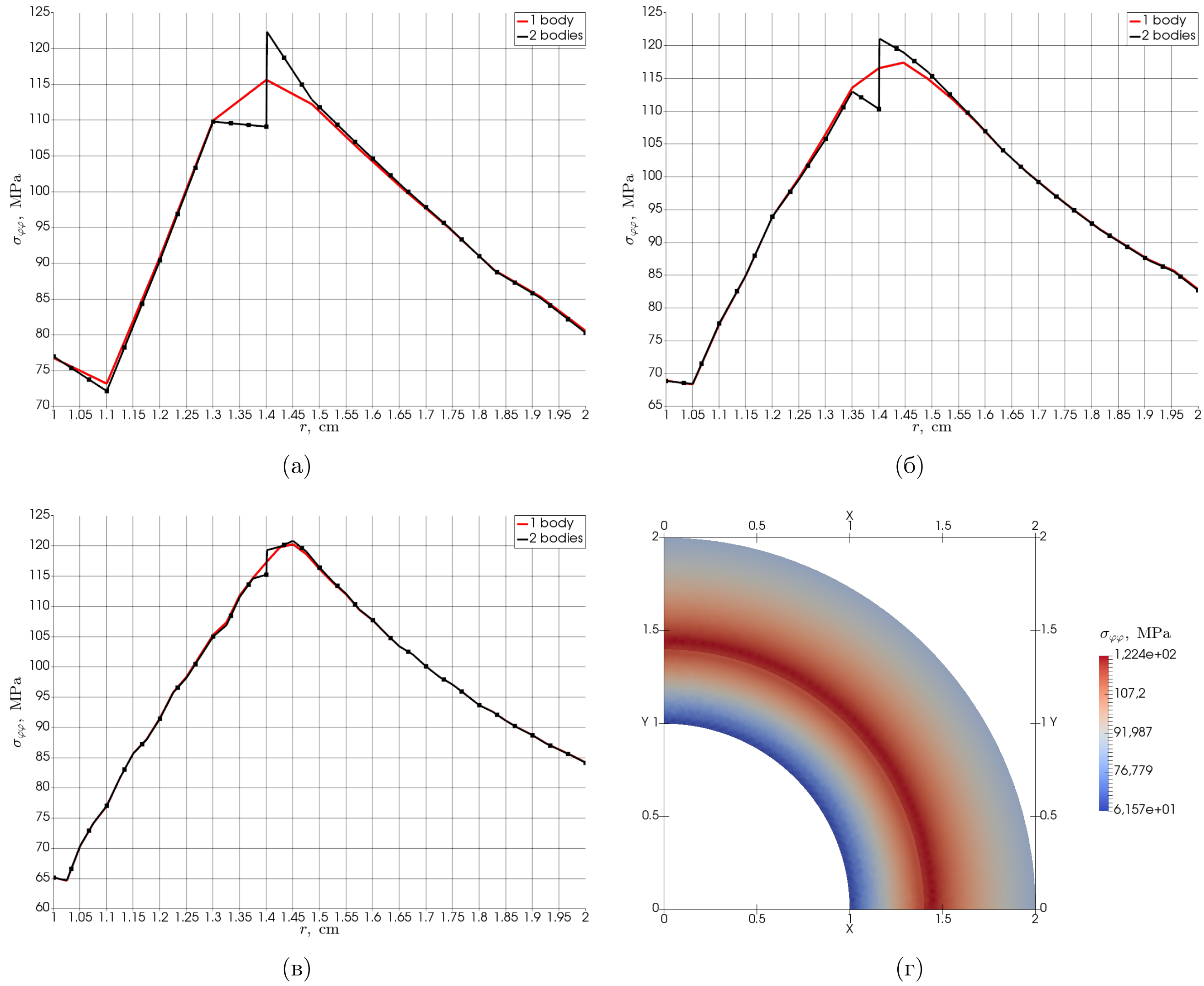



Рис. 14. Решения для $\sigma_{\varphi\varphi}$ на различных сетках

Двумерное распределение решения динамической контактной задачи для $\sigma_{\varphi\varphi}$, получаемое на сетке с шагом $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$, изображено на рис. 14(г). В таблице 8 приведены нормы относительных разностей решений для $\sigma_{\varphi\varphi}$ динамических задач с контактом и без контакта в сеточных нормах $C$ и $L_2$. При уменьшении шага сетки разность решений стремится к нулю.

Таблица 8. Разность между решениями для $\sigma_{\varphi\varphi}$

| Шаг сетки | Разность в $C$ | Разность в $L_2$ |
|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $1{,}0616 \cdot 10^{-2}$ | $6{,}4351 \cdot 10^{-3}$ |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | $7{,}8988 \cdot 10^{-3}$ | $4{,}7874 \cdot 10^{-3}$ |
| $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ | $5{,}045 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}6954 \cdot 10^{-3}$ |

На рис. 15 изображено распределение интенсивности напряжений $\sigma_{\text{и}}$ для динамической контактной задачи на сетке с шагом $h = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$.

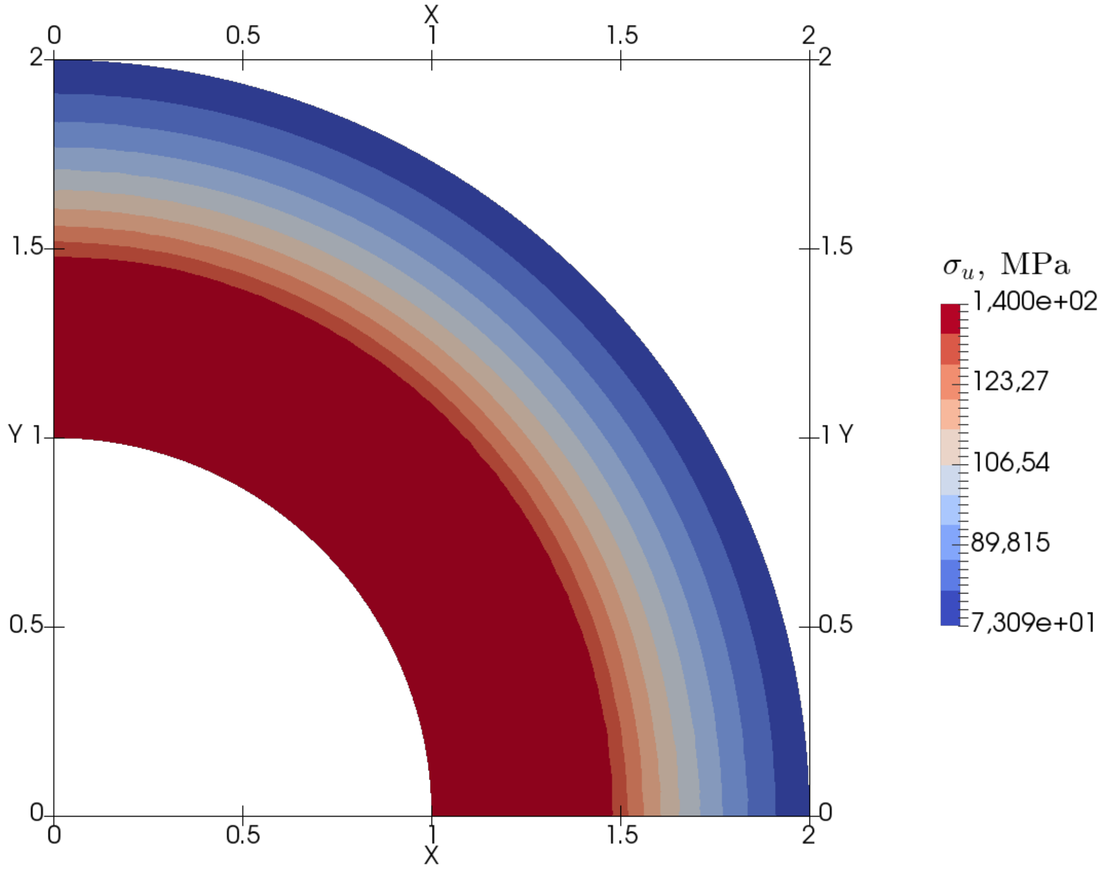



Рис. 15. Распределение $\sigma_{\text{и}}$

# 4. Заключение

Рассмотрены динамические задачи механики деформируемого твердого тела для упругих и упругопластических материалов. Для численного решения данных задач использован метод конечных элементов. Предложен алгоритм на основе метода Шварца для решения контактных задач.

Рассмотрены численные решения тестовых задач. Решена задача о столкновении двух упругих стержней в квазиодномерной постановке, и продемонстрировано распространение волн в твердом теле. Решены задачи о динамическом контакте упругих и упругопластических труб при меняющейся во времени нагрузке.

Показано, что предложенный вариант метода Шварца для учета контактного взаимодействия позволяет получать корректные результаты, которые при измельчении сетки сходятся к решению, полученному для одного тела.

## Список литературы

[1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. - 512 с.

[2] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. М.: Наука, 1970. - 492 с.

[3] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975, - 576 с.

[4] Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. М.: Машиностроение, 1975. - 400 с.

[5] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. - 704 с.

[6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 168 с.

[7] Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. - 448 с.

[8] Зенкевич О.Ц. Метод конечных элементов в технике, М.: Мир, 1975. - 541 с.

[9] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. - 591 с.

[10] Котович А.В., Станкевич И.В. Решение задач теории упругости методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. - 106 с.

[11] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method: The Basis, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. - 708 pp.

[12] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method: Solid Mechanics, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. - 477 pp.

[13] Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. (2-е изд.). М.: Изд-во МГУ, 1995. - 366 с.

[14] Bonet J., Wood R.D. Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. - 283 pp.

[15] Родин А.С. Решение задачи контакта двух упругих тел методом Шварца при использовании сеток с существенно отличающимися шагами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 120. 28 с.

[16] Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. - 304 с.

[17] Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И. Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Математическое моделирование термоупругогопластического контактного взаимодействия системы тел // Mathematica Montisnigri. 2014. Т. 30. С. 99-114.

[18] Станкевич И.В., Яковлев М.Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца //Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". Спец-выпуск: Прикладная математика. 2011 г. С. 134-141.

[19] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел // Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. 2015. Т.55, No8. С. 1429-1443.

[20] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - 10-е издание, перераб. и доп. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. - 592 с.

# Содержание