



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 141 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бахтин В.П., [Галанин М.П.](#),
Житлухин А.М., Лотоцкий А.П.,
[Родин А.С.](#)**

Сравнение различных
математических и
численных моделей
движения цилиндрического
лайнера и их проверка

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сравнение различных математических и численных моделей движения цилиндрического лайнера и их проверка / В.П.Бахтин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 141. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2018-141](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-141)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-141>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**В.П. Бахтин, М.П. Галанин, А.М. Житлухин,
А.П. Лотоцкий, А.С. Родин**

**Сравнение различных математических
и численных моделей движения
цилиндрического лайнера и их проверка**

Москва — 2018

Бахтин В.П., Галанин М.П., Житлухин А.М., Лотоцкий, А.П., Родин А.С.

Сравнение различных математических и численных моделей движения цилиндрического лайнера и их проверка

Рассмотрено движение цилиндрических лайнеров в ускорителях под действием электромагнитных сил. Проведены серия расчетов для моделирования движения центральной части цилиндрического лайнера и серия расчетов, моделирующая движение лайнера вблизи закрепленных концевых участков, обеспечивающих замыкание токовой цепи. Выполнено сравнение интегральных характеристик и профилей лайнера, полученных при использовании модели упругопластического лайнера и модели жидкого лайнера. Проведено исследование влияния выбранной кривой деформирования и выбранного коэффициента динамической вязкости на характеристики движения тела. Показаны результаты полномасштабного эксперимента по сжатию длинной тонкостенной оболочки лайнера с диаметром 90 мм импульсным током с амплитудой 6 МА.

Ключевые слова: цилиндрический лайнер, большие деформации, вязкая несжимаемая жидкость, тензор логарифмической деформации

Vitaliy Petrovich Bakhtin, Mikhail Pavlovich Galanin, Anatoliy Mikhailovich Zhitlukhin, Alexey Pavlovich Lotoskii, Aleksandr Sergeevich Rodin

Comparison of various mathematical and numerical models for cylindrical liner motion and their check

The cylindrical liner motion under the action of electromagnetic forces is discussed. A set of calculations was carried out for modeling the motion of liner central part (without the influence of the supports). Another series of calculations was carried out for modeling the liner motion near the supports. The comparison of integral characteristics and liner profiles for elasto-plastic model and incompressible liquid model was executed. The influence of deformation curves and values of dynamic viscosity coefficient for liner motion characteristics was investigated. Results of a full-scale experiment on compression of a long thin-walled liner with a diameter of 90 mm with pulse 6 MA current were shown.

Key words: cylindrical liner, large deformation, incompressible liquid, tensor of logarithmic strain

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00252).

1. Введение и постановка задачи

В термоядерных экспериментах с адиабатическим сжатием плазмы открытые торцы цилиндрического лайнера используются для заполнения внутреннего объема дейтериевой плазмой. Одновременно по этим торцам от неподвижных кольцевых контактов протекают большие токи, которые в Z-пинч конфигурации достигают величины более 10 МА [1]. Цилиндрические оболочки под действием продольного тока должны сжиматься с радиальными скоростями около 4-6 км/с, сохраняя полную герметичность и электропроводность. Указанные условия требуют профилирования толщины стенки лайнера на концах сжимаемой рабочей части оболочки. При этом желательно минимизировать длину концевой части с переходным сечением, поскольку она исключена из основного процесса обжатия плазмы.

Ввиду достаточно широкого диапазона, в котором варьируется энергетика экспериментов по сжатию плазмы, а соответственно, и начальные условия, величины токов и размеры, желательно иметь достаточно надежный расчетный инструмент для проектирования узлов разгона лайнеров.

Для описания движения подобных лайнеров обычно используют модель вязкой несжимаемой жидкости на фиксированной расчетной сетке (эйлеров подход) [2]. В рамках данной работы, которая является продолжением цикла, описанного в [3-5], рассмотрены математические и численные модели упругопластического тела (с учетом больших деформаций) и вязкой несжимаемой жидкости, реализованные на подвижных лагранжевых сетках.

Основная цель первой части проведенного исследования заключалась в сравнении результатов, полученных в серии расчетов для упругопластического лайнера с использованием различных кривых деформирования, и результатов, полученных в серии расчетов для жидкого лайнера с использованием различных коэффициентов динамической вязкости. При этом параметры материалов отличались в широком диапазоне.

Во второй части работы проведено сравнение результатов расчетов с данными полномасштабного эксперимента, выполненного на базе емкостного накопителя «ПУМА».

2. Математическая модель электродинамического ускорения цилиндрического лайнера

Рассмотрим электромагнитный ускоритель с цилиндрическим лайнером. В силу цилиндрической симметрии объекта для моделирования движения лайнера справедливо цилиндрически симметричное приближение. Область моделирования, соответствующая половине продольного сечения (схематично показана на рис. 1), включает в себя неподвижный проводник (индуктор) и ускоряемый проводник (лайнер). На данном этапе моделирования сделаем

предположение, что лайнер и индуктор соединены в одну последовательную электрическую цепь (цепь индуктора) и по ним течет заданный полный ток I_B (в одном направлении по индуктору и в противоположном направлении по лайнеру).

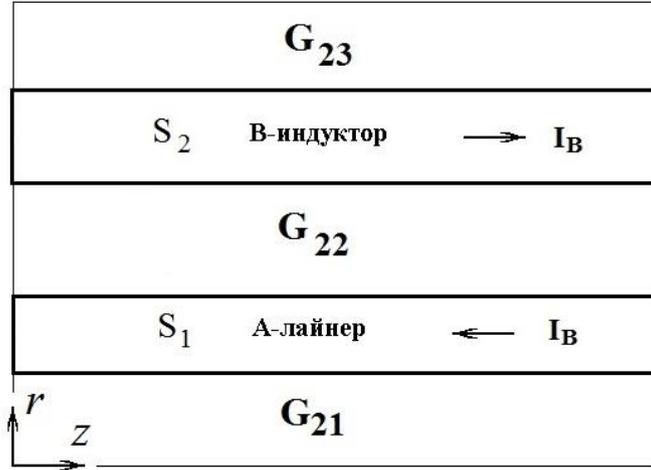


Рис. 1. Половина продольного сечения цилиндрического ускорителя (плоскость rz)

Будем использовать следующие обозначения (рис. 1): $G = G_1 \cup G_2$ – рассматриваемая область, $G_1 = \bigcup_{k=1}^2 S_k = \{\mathbf{r} \in G : \sigma > 0\}$ – проводящая подобласть, состоящая из 2 цилиндрических проводников (S_1 – лайнер, S_2 – индуктор), $G_2 = \{\mathbf{r} \in G : \sigma = 0\}$ – подобласть диэлектрика, состоящая из трех не связанных друг с другом подобластей G_{21} , G_{22} , G_{23} (см. рис. 1). ∂G_1 и ∂G_2 – границы G_1 и G_2 соответственно.

Для описания электромагнитных полей используем систему уравнений Максвелла в МГД-приближении [4, 6]. В силу симметрии области, начальных и граничных условий считаем, что векторы напряженности магнитного (\mathbf{H}) и электрического (\mathbf{E}^*) полей и вектор скорости (\mathbf{v}) имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (0, H_\varphi, 0)^T, \\ \mathbf{E}^* &= (E_r^*, 0, E_z^*)^T, \\ \mathbf{v} &= (v_r, 0, v_z)^T. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для рассматриваемой расчетной области с учетом приближения (2.1) напряженность магнитного поля в диэлектрических подобластях полностью определяется значениями полных токов, которые протекают через проводники:

$$H_\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \in G_{21} \\ \frac{2I_B}{r}, & \vec{r} \in G_{22} \\ 0, & \vec{r} \in G_{23} \end{cases} \quad (2.2)$$

В проводниках для магнитного поля используется следующее уравнение [4]

$$\text{rot} \frac{1}{4\pi\sigma} \text{rot} \mathbf{H} - \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

В качестве граничных условий на торцах проводников поставлено условие равенства нулю нормальной производной H_φ , а на других границах — условие непрерывности H_φ при переходе от диэлектрика к проводнику.

В рассматриваемом приближении ток, текущий по цепи индуктора, считался заданной величиной.

Приведем математическую модель упругопластического тела с учетом произвольных деформаций, примененную в [3-5], для описания электромагнитного ускорения лайнера.

Уравнение движения лайнера в момент времени t , записанное в текущих лагранжевых координатах \tilde{a}_j (в дальнейшем будем использовать обозначение UL-координаты), имеет следующий вид [7]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_{\tilde{a}} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_{\tilde{a}} \mathbf{u}) + \mathbf{f}, \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$(\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_{\tilde{a}} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_s} = 0,$$

$$\mathbf{u} |_{\Gamma_u} = \mathbf{u}^*. \quad (2.5)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$ — вектор перемещения, $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ — вектор скорости, $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ — вектор ускорения, ρ — текущая плотность вещества, $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ — вектор силы Лоренца, действующей на тело, $\nabla_{\tilde{a}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_j} \mathbf{k}_j$ — оператор дифференцирования по UL-координатам, \mathbf{S} — второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгоффа [7], Γ_s — часть границы, на которой заданы силовые условия, Γ_u — часть границы, на которой заданы кинематические условия.

Во всех формулах подразумевается использование цилиндрических координат: $\tilde{a}_1 = r$, $\tilde{a}_2 = \varphi$, $\tilde{a}_3 = z$. При вычислении градиентов и иных операторов применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Компоненты тензора напряжений \mathbf{S} связаны с компонентами тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ соотношениями:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{a}_k} S_{kl} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{a}_l}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где x_i – эйлеровы координаты, а $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{a}_j} \right|$ – якобиан соответствующего преобразования координат.

Отметим, что в каждый фиксированный момент времени t текущие лагранжевы координаты \tilde{a}_i совпадают с эйлеровыми координатами x_i , различие между UL- и эйлеровым подходами проявляется в использовании разных определений скоростей величин. В то же время непрерывное изменение отсчетной конфигурации для UL-подхода используется только в теоретических исследованиях. На практике отсчетная конфигурация пересчитывается для дискретных значений времени, поэтому обычно при переходе к новому моменту времени $t + \Delta t$ уравнения движения (2.4) записываются относительно известных координат \tilde{a}_i , которые относятся к моменту времени t , и отличаются от эйлеровых координат x_i , относящихся к моменту времени $t + \Delta t$.

Основные соотношения теории пластического течения для случая больших деформаций сформулированы следующим образом [7]:

– тензор скорости деформации \mathbf{d} можно представить в виде суммы упругой \mathbf{d}^e и пластической \mathbf{d}^p составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p; \quad (2.6)$$

– определяющее соотношение задано формулой:

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p); \quad (2.7)$$

– пластическая составляющая тензора скорости деформации определяется по ассоциативному закону пластического течения:

$$\mathbf{d}^p = \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \boldsymbol{\sigma}'. \quad (2.8)$$

Здесь \mathbf{C}^E – стандартный тензор коэффициентов упругости, λ – параметр модели, аналогичный множителю Лагранжа, $\boldsymbol{\sigma}'$ – девиатор тензора напряжений Коши, $f_y(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = 3J_2(\boldsymbol{\sigma}') - \sigma_y^2(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$ – функция текучести Мизеса для материала с изотропным упрочнением, $J_2(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$ – второй инвариант девиатора тензора напряжений, σ_y – предел текучести материала, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ – эффективная пластическая деформация.

Компоненты тензора скорости деформации заданы равенствами (в декартовой и цилиндрической системах координат)

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r}, \quad d_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad d_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (2.9)$$

В данной работе в качестве производной в определяющем соотношении (2.7) использована производная Трусделла σ^{Tr} [7]:

$$\sigma^{Tr} = \dot{\sigma} - \mathbf{l}^T \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{l} + \sigma \operatorname{tr}(\mathbf{d}), \quad (2.10)$$

где \mathbf{l} – тензор градиента скоростей ($l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$), \mathbf{l}^T – транспонированный тензор,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{d}) = d_{kk}.$$

Отметим, что в примененной модели функция текучести не зависит от первого инварианта тензора напряжений, поэтому первый инвариант тензора скорости деформации d_{kk} , который по сути определяет изменение объемной деформации, состоит только из упругой составляющей ($d_{kk}^p = 0$).

В описанной модели использовано аддитивное разложение тензора скорости деформации на упругую и пластическую составляющую, но полная пластическая деформация в данной модели не определена. Для металлов пластические деформации (при наличии больших деформаций) чаще всего значительно превосходят упругие, поэтому можно рассматривать различные тензоры полной деформации.

В многомерном случае для получения адекватной информации о деформированном состоянии тела (при наличии больших деформаций) используют тензор логарифмической деформации (тензор Генки) $\mathbf{E}^{(H)}$ [7, 12].

Чтобы посчитать значение тензора Генки, нужно сначала выполнить полярное разложение градиента деформации \mathbf{F} [12] на правый тензор кратностей удлинений \mathbf{U} и ортогональный тензор ротации (поворота) \mathbf{R} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}. \quad (2.11)$$

Затем нужно найти собственные значения λ_k и собственные векторы $\mathbf{N}^{(k)}$ тензора \mathbf{U} . Тогда компоненты тензора Генки вычисляются по следующим формулам [12]:

$$E_{ij}^{(H)} = \sum_{k=1}^3 \ln \lambda_k N_i^{(k)} N_j^{(k)}. \quad (2.12)$$

Мерой объемной деформации может служить первый инвариант тензора Генки $E_{ii}^{(H)}$. В качестве меры девиаторной части деформации можно применять интенсивность логарифмической деформации ($\mathbf{E}'^{(H)}$ девиатор тензора Генки):

$$E_u^{(H)} = \sqrt{\frac{2}{3} E_{ij}'^{(H)} E_{ij}'^{(H)}}. \quad (2.13)$$

Для описания движения вязкой несжимаемой жидкости использована система уравнений Навье–Стокса [8] (в эйлеровых координатах):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla_x \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f},$$

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.14)$$

с граничными условиями

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_\sigma} = 0,$$

$$\mathbf{v} \Big|_{\Gamma_v} = 0. \quad (2.15)$$

Здесь $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{v}$ — полная (субстанциональная) производная

вектора скорости, $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{k}_j$ — оператор дифференцирования по эйлеровым

координатам x_j , Γ_σ — часть границы, на которой заданы силовые условия, Γ_v — часть границы, на которой заданы кинематические условия, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор напряжений, компоненты которого заданы равенствами

$$\tilde{\sigma}_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta d_{ij}, \quad (2.16)$$

где p — гидродинамическое давление, $\eta = \rho \nu$ — коэффициент динамической вязкости, ν — коэффициент кинематической вязкости.

В приведенных моделях не учитываются влияние температуры (в том числе фазовых переходов, связанных с плавлением и испарением вещества) и возможное разрушение материала лайнера под действием нагрузок, превышающих предельно допустимый уровень.

3. Численная модель электродинамического ускорения цилиндрического лайнера

Численная модель для расчета электромагнитных величин получена после применения к уравнению (2.3) метода Галеркина [4].

Численная модель для упругопластического лайнера основана на применении принципа возможных перемещений к уравнению движения (2.4). Для формирования локальных и глобальных касательных матриц и матриц масс использованы стандартные конечно-элементные процедуры. Данная модель подробно описана в [7, 9].

Кроме стандартного метода конечных элементов (МКЭ), в котором в качестве независимых переменных выступали только перемещения узлов сетки, в данной работе использован смешанный МКЭ [10], в котором в качестве независимых переменных выступают и перемещения, и давления. Смешанный МКЭ применялся и для модели вязкой несжимаемой жидкости, и для модели упругопластического тела.

Примем следующее правило: у величин, зависящих от времени, будем соответствующий момент времени обозначать левым верхним индексом: например, 0g – значение функции $g(t)$ в момент времени $t=0$. Для упрощения записи величины, относящиеся к моменту времени $t + \Delta t$, по умолчанию будем писать без индекса (кроме случаев, когда это необходимо для большей ясности).

Рассмотрим основные положения данного метода [10]. После применения метода возможных перемещений к системе (2.14) (с учетом граничных условий (2.15)) получим следующие уравнения для момента времени $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} \delta v_i dV + \int_V \tilde{\sigma}_{ij} \delta d_{ij} dV &= \int_V f_i \delta v_i dV, \\ \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dV &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где δv_i , δp — вариации компонент вектора скорости и давления.

Введем следующие векторные обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \{d_{rr}, d_{\varphi\varphi}, d_{zz}, d_{rz}\}^T, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \{\tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}, \tilde{\sigma}_{zz}, \tilde{\sigma}_{rz}\}^T = -p\mathbf{m} + 2\eta\mathbf{d}, \\ \mathbf{m} &= \{1, 1, 1, 0\}^T. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя (3.2), можно переписать (3.1) в векторном виде:

$$\begin{aligned} \int_V \delta \mathbf{v}^T \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV + \int_V \delta \mathbf{d}^T 2\eta \mathbf{d} dV - \int_V \delta \mathbf{d}^T \mathbf{m} p dV &= \int_V \delta \mathbf{v}^T \mathbf{f} dV, \\ \int_V \delta p \mathbf{m}^T \mathbf{d} dV &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем следующие пространственные аппроксимации для вектора скорости и для давления в момент времени $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{x}) &\approx \hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n_v} N_{vi} \hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{N}_v \hat{\mathbf{V}}, \\ p(t + \Delta t, \mathbf{x}) &\approx \hat{p} = \sum_{i=1}^{n_p} N_{pi} \hat{p}_i = \mathbf{N}_p \hat{\mathbf{P}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\mathbf{N}_v = [N_{v1}\mathbf{I}_2, N_{v2}\mathbf{I}_2, \dots, N_{vn_v}\mathbf{I}_2]$ – матрица базисных функций, используемых для аппроксимации скорости, \mathbf{I}_2 – единичная матрица размерности 2,

$\hat{\mathbf{V}} = [\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{n_v}]^T$ – вектор значений скорости в узлах сетки в момент времени $t + \Delta t$, n_v – количество узлов сетки, в которых задается скорость,

$\mathbf{N}_p = [N_{p1}, N_{p2}, \dots, N_{pn_p}]$ – вектор-строка базисных функций, используемых для

аппроксимации давления, $\hat{\mathbf{P}} = [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_{n_p}]^T$ – вектор значений давления в момент времени $t + \Delta t$, отнесенных к соответствующим точкам сетки, n_p – количество точек, в которых задается давление.

Рассмотрим слагаемое с производной по времени в первом уравнении (3.3). Если воспользоваться связью эйлеровых x_j и глобальных лагранжевых координат a_j (относящихся к начальному положению тела), в том числе формулами

$$V = J^0 V, \quad {}^0 \rho = J \rho, \quad J = |\partial x_i / \partial a_j|,$$

то можно записать следующую цепочку преобразований:

$$\int_V \delta \mathbf{v}^T \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \delta \hat{\mathbf{V}}^T \int_{{}^0 V} \mathbf{N}_v^T(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}(t, \mathbf{x})}{dt} \rho J d^0 V = \delta \hat{\mathbf{V}}^T \int_{{}^0 V} \mathbf{N}_v^T(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{a})}{\partial t} {}^0 \rho d^0 V.$$

Для дискретизации производной по времени воспользуемся стандартной разностной аппроксимацией:

$$\delta \hat{\mathbf{V}}^T \int_{{}^0 V} \mathbf{N}_v^T(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{a})}{\partial t} {}^0 \rho d^0 V \approx \delta \hat{\mathbf{V}}^T \int_{{}^0 V} \mathbf{N}_v^T(\mathbf{a}) \mathbf{N}_v^T(\mathbf{a}) {}^0 \rho d^0 V \frac{\hat{\mathbf{V}} - {}^t \hat{\mathbf{V}}}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Введем следующие локальные матрицы и векторы для каждого КЭ ($\hat{\mathbf{V}}^{(fe)}$ — вектор значений скорости в узлах, относящихся к рассматриваемому КЭ):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(fe)} &= \mathbf{B}^{(fe)} \hat{\mathbf{V}}^{(fe)}, \\ \mathbf{K}_d^{(fe)} &= \int_{{}^0 V^{(fe)}} 2\eta \mathbf{B}^{(fe)T} \mathbf{B}^{(fe)} dV, \\ \mathbf{C}^{(fe)} &= - \int_{{}^0 V^{(fe)}} \mathbf{B}^{(fe)T} \mathbf{m} \mathbf{N}_p^{(fe)} dV, \\ \mathbf{M}^{(fe)} &= \int_{{}^0 V^{(fe)}} {}^0 \rho \mathbf{N}_v^{(fe)T} \mathbf{N}_v^{(fe)} dV, \\ \mathbf{R}^{(fe)} &= \int_{{}^0 V^{(fe)}} \mathbf{N}_v^{(fe)T} \mathbf{f} dV + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}^{(fe)} {}^t \mathbf{V}^{(fe)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обобщим их стандартным образом для всей области (введем глобальные матрицы и векторы).

Тогда, используя (3.4)-(3.6), систему (3.3) можно переписать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{K}_d & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{V}} \\ \hat{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (3.7)$$

Отметим, что матрица в системе (3.7) является симметричной, но имеет на диагонали нулевой блок.

Для модели упругопластического тела (2.4)-(2.8) изложенный алгоритм модифицируется следующим образом.

Для UL-подхода выполнены равенства (\mathbf{E} – тензор деформации Грина) [7]

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{d}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\sigma}^{Tr}, \quad (3.8)$$

которые позволяют вычислять соответствующие величины, не переходя к эйлеровым координатам.

Используя (3.8), можно переписать определяющее соотношение (2.7) в следующей инкрементальной форме (Δ – знак приращения величины):

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}^E (\Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^p), \quad (3.9)$$

где $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{S} - {}^t \mathbf{S}$, $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E} - {}^t \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{E}^p = \Delta \lambda \boldsymbol{\sigma}'$.

Тензор приращений напряжений $\Delta \mathbf{S}$ можно стандартным образом разделить на шаровую и девиаторную составляющие. Поскольку приращение пластической деформации является несжимаемым ($\Delta E_{ii}^p = 0$), то получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta S_{ii} &= \frac{(1-2\nu)}{E} \Delta E_{ii}, \\ \Delta S'_{ij} &= 2G (\Delta E'_{ij} - \Delta E_{ij}^p), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Введем величины: давление и приращение давления, задаваемые формулами

$$\begin{aligned} p &= \frac{S_{ii}}{3} = \frac{1}{3} (S_{rr} + S_{\varphi\varphi} + S_{zz}), \\ \Delta p &= \frac{\Delta S_{ii}}{3} = \frac{1}{3} (\Delta S_{rr} + \Delta S_{\varphi\varphi} + \Delta S_{zz}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тогда первое уравнение в (3.10) можно переписать следующим образом:

$$\Delta E_{ii} - \frac{1}{K} \Delta p = 0, \quad (3.12)$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ — модуль объемной упругости.

Отметим, что для несжимаемого материала ($\nu = 0.5$) модуль объемной упругости равен бесконечности, и уравнение (3.12) принимает вид

$$\Delta E_{ii} = 0,$$

который по сути является аналогом условия несжимаемости в уравнениях Навье—Стокса (2.14).

Если теперь рассматривать перемещения и давления как независимые переменные, то после применения метода возможных перемещений к

уравнениям (2.4) (с учетом граничных условий (2.5)) и (3.12) получим следующие уравнения для момента времени $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i d^tV + \int_V S_{ij} \delta E_{ij} d^tV &= \int_V f_i \delta u_i dV, \\ \int_V \left(\Delta E_{ii} - \frac{1}{K} \Delta p \right) \delta p d^tV &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где δu_i , δp — вариации компонент вектора перемещения и давления.

Значение компонент тензора напряжений S_{ij} в момент времени $t + \Delta t$ можно задать формулой:

$$S_{ij} = {}^tS_{ij} + \Delta S_{ij} = {}^tS_{ij} + \Delta p \delta_{ij} + 2G(\Delta E'_{ij} - \Delta E^p_{ij}). \quad (3.14)$$

Для учета нелинейности, связанной с пластическими деформациями, воспользуемся методом начальной деформации [11]. В данном методе выполняется итерационный процесс, в котором приращение пластической деформации ΔE^p_{ij} берется с предыдущей итерации, т.е. является известным.

Используя (3.14), первое уравнение (3.13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i d^tV + \int_V 2G \Delta E'_{ij} \delta E_{ij} d^tV + \int_V (\Delta p \delta_{ij}) \delta E_{ij} d^tV + \\ + \int_V ({}^tS_{ij} - 2G \Delta E^p_{ij}) \delta E_{ij} d^tV = \int_V f_i \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Введем следующие векторные обозначения:

$$\Delta \mathbf{E} = \{ \Delta E_{rr}, \Delta E_{\varphi\varphi}, \Delta E_{zz}, \Delta E_{rz} \}^T,$$

$$\Delta \mathbf{E}' = \mathbf{D}_d \Delta \mathbf{E},$$

$$\Delta \mathbf{S} = \{ \Delta S_{rr}, \Delta S_{\varphi\varphi}, \Delta S_{zz}, \Delta S_{rz} \}^T = p \mathbf{m} + 2G \mathbf{D}_d \Delta \mathbf{E}, \quad (3.16)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \left\{ {}^tS_{rr} - \Delta E^p_{rr}, {}^tS_{\varphi\varphi} - \Delta E^p_{\varphi\varphi}, {}^tS_{zz} - \Delta E^p_{zz}, 2{}^tS_{rz} - 2\Delta E^p_{rz} \right\}^T.$$

Используя (3.16), можно переписать (3.14)-(3.15) в векторном виде:

$$\begin{aligned} \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta (\Delta \mathbf{E})^T 2G \mathbf{D}_d \Delta \mathbf{E} d^tV + \int_V \delta (\Delta \mathbf{E})^T \bar{\mathbf{S}} d^tV + \\ + \int_V \delta (\Delta \mathbf{E})^T \mathbf{m} \Delta p d^tV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV, \\ \int_V \delta (\Delta p) \left(\mathbf{m}^T \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{K} \Delta p \right) d^tV = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Вектор приращения деформаций $\Delta \mathbf{E}$ можно представить в виде суммы линейной и нелинейной частей [7]:

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta},$$

$$\Delta \mathbf{e} = \left\{ \Delta u_{r,r}, \frac{\Delta u_r}{r}, \Delta u_{z,z}, \frac{1}{2}(\Delta u_{r,z} + \Delta u_{z,r}) \right\}^T, \quad (3.18)$$

$$\Delta \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta u_{r,r})^2 + (\Delta u_{z,z})^2, \left(\frac{\Delta u_r}{r} \right)^2, (\Delta u_{r,z})^2 + (\Delta u_{z,z})^2, \Delta u_{r,r} \Delta u_{r,z} + \Delta u_{z,r} \Delta u_{z,z} \right\}^T.$$

После подстановки (3.18) в (3.17) и линеаризации уравнений получим следующую систему:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta(\Delta \mathbf{e})^T 2GD_d \Delta \mathbf{e} d^tV + \int_V \delta(\Delta \mathbf{u}_g)^T \hat{\mathbf{S}} \Delta \mathbf{u}_g d^tV + \\ & + \int_V \delta(\Delta \mathbf{e})^T \mathbf{m} \Delta p d^tV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_V \delta(\Delta \mathbf{e})^T \bar{\mathbf{S}} d^tV, \\ & \int_V \delta(\Delta p) \left(\mathbf{m}^T \Delta \mathbf{e} - \frac{1}{K} \Delta p \right) d^tV = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

в которой использованы обозначения

$$\Delta \mathbf{u}_g = \left\{ \Delta u_{r,r}, \Delta u_{r,z}, \Delta u_{z,r}, \Delta u_{z,z}, \frac{\Delta u_r}{r} \right\},$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t S_{\varphi\varphi} - \Delta E_{\varphi\varphi}^p \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t S_{rr} - \Delta E_{rr}^p & {}^t S_{rz} - \Delta E_{rz}^p \\ {}^t S_{rz} - \Delta E_{rz}^p & {}^t S_{zz} - \Delta E_{zz}^p \end{bmatrix}.$$

Введем следующие пространственные аппроксимации для приращения вектора перемещения и для приращения давления в момент времени $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(t + \Delta t, \tilde{\mathbf{a}}) &= \mathbf{u}(t + \Delta t, \tilde{\mathbf{a}}) - \mathbf{u}(t, \tilde{\mathbf{a}}) \approx \Delta \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n_u} N_{ui} \Delta \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N}_u \Delta \hat{\mathbf{U}}, \\ \Delta p(t + \Delta t, \tilde{\mathbf{a}}) &= p(t + \Delta t, \tilde{\mathbf{a}}) - p(t, \tilde{\mathbf{a}}) \approx \Delta \hat{p} = \sum_{i=1}^{n_p} N_{pi} \Delta \hat{p}_i = \mathbf{N}_p \Delta \hat{\mathbf{P}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где (аналогично введенным ранее обозначениям) $\mathbf{N}_u = [N_{u1} \mathbf{I}_2, N_{u2} \mathbf{I}_2, \dots, N_{un_u} \mathbf{I}_2]$ – матрица базисных функций, используемых для аппроксимации перемещений,

$\Delta \hat{\mathbf{U}} = [\Delta \hat{\mathbf{u}}_1, \Delta \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \Delta \hat{\mathbf{u}}_{n_u}]^T$ – вектор значений приращений перемещений в узлах

сетки в момент времени $t + \Delta t$, $\Delta \hat{\mathbf{P}} = [\Delta \hat{p}_1, \Delta \hat{p}_2, \dots, \Delta \hat{p}_{n_p}]^T$ – вектор значений

приращения давления в момент времени $t + \Delta t$.

Для дискретизации по времени второй производной в первом уравнении (3.17) воспользуемся стандартной разностной аппроксимацией:

$$\delta(\Delta \hat{\mathbf{U}})^T \int_V \mathbf{N}_u^T \ddot{\mathbf{u}} \rho dV \approx \delta(\Delta \hat{\mathbf{U}})^T \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u^0 \rho d^0V \frac{\Delta \hat{\mathbf{U}} - {}^t \Delta \hat{\mathbf{U}}}{\Delta t^2}. \quad (3.21)$$

Введем следующие локальные матрицы и векторы для каждого КЭ ($\Delta\hat{\mathbf{U}}^{(fe)}$ — вектор приращений перемещений в узлах, относящихся к рассматриваемому КЭ):

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{e}^{(fe)} &= \mathbf{B}_L^{(fe)} \Delta\hat{\mathbf{U}}^{(fe)}, \\
\Delta\mathbf{u}_g^{(fe)} &= \mathbf{B}_{NL}^{(fe)} \Delta\hat{\mathbf{U}}^{(fe)} \\
\mathbf{K}_d^{(fe)} &= \int_{V^{(fe)}} \mathbf{B}_L^{(fe)T} 2\mathbf{G} \mathbf{D}_d \mathbf{B}_L^{(fe)} d^tV + \int_{V^{(fe)}} \mathbf{B}_{NL}^{(fe)T} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{NL}^{(fe)} d^tV, \\
\mathbf{C}^{(fe)} &= \int_{V^{(fe)}} \mathbf{B}_L^{(fe)T} \mathbf{m} \mathbf{N}_p^{(fe)} d^tV, \\
\mathbf{M}^{(fe)} &= \int_{V^{(fe)}} \rho \mathbf{N}_u^{(fe)T} \mathbf{N}_u^{(fe)} d^0V, \\
\mathbf{A}^{(fe)} &= \int_{V^{(fe)}} \mathbf{N}_p^{(fe)T} \mathbf{N}_p^{(fe)} d^tV, \\
\mathbf{R}^{(fe)} &= \int_{V^{(fe)}} \mathbf{N}_u^{(fe)T} \mathbf{f} dV + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}^{(fe)} \Delta\hat{\mathbf{U}}^{(fe)}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Обобщим их стандартным образом для всей области (введем глобальные матрицы и векторы).

Тогда, используя (3.20)-(3.22), систему (3.19) можно переписать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_d & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{U}} \\ \Delta\hat{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \tag{3.23}$$

Отметим, что матрица в системе (3.23) является симметричной и не имеет на диагонали нулевого блока.

Описанная численная модель упругопластического тела протестирована на классической стационарной задаче нагружения толстостенной трубы внутренним давлением для идеального упругопластического материала и материала с линейным упрочнением [11]. В данной задаче материал является несжимаемым, все переменные зависят только от радиальной координаты (но расчетная область взята двумерной), деформации и перемещения остаются малыми. Результаты тестирования показали, что при измельчении сетки графики расчетных напряжений стремились к известным аналитическим решениям.

4. Моделирование движения центральной части лайнера (1d)

Сначала выполним моделирование движения центральной части лайнера. Расчетная область представляет собой половину участка продольного сечения цилиндрической оболочки с внутренним радиусом $R_0 = 48.4$ мм и постоянной толщиной $\Delta R_0 = 1.6$ мм. Высота участка равна $L = 3$ мм. На торцах расчетной

области перемещение по нормали равно нулю (торцы закреплены), на боковых поверхностях лайнера выполнено условие свободной границы, лайнер движется под действием объемной силы Лоренца. Для данной постановки задачи концевые зоны не входят в расчетную область и все величины фактически оказываются зависящими только от одной пространственной переменной r .

В расчетах в качестве параметров материала лайнера применялись следующие характеристики алюминия (Al): плотность $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 70.5 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$. Для моделирования пластических свойств Al использована модель упругопластического тела с линейным упрочнением, для которой предел текучести задается формулой [12]

$$\sigma_y = \sigma_{0y} + E_p \bar{\varepsilon}^p, \quad (4.1)$$

где σ_{0y} – начальный предел текучести, E_p – модуль пластичности, который задает наклон кривой деформирования в зоне пластичности, $\bar{\varepsilon}^p$ – эффективная пластическая деформация.

Поскольку в случае динамического нагружения материала его прочностные характеристики повышаются по сравнению со случаем стационарного нагружения, то выбрано значение $\sigma_{0y} = 60 \text{ МПа}$, модуль пластичности варьировался в различных расчетах в широком диапазоне.

Во всех расчетах ток, текущий по проводникам, задавался формулой $I_B = I_0 \sin \omega t$ с максимальной амплитудой $I_0 = 4 \text{ МА}$ и полупериодом, равным 50 мкс .

Поскольку магнитное поле в диэлектрике задано формулой (2.2), то сетка строилась только в лайнере (использовалась прямоугольная сетка). Характерный шаг по времени – $\tau = 0.2 \text{ мкс}$, характерный шаг пространственной сетки – $h = 0.2 \text{ мм}$.

Все расчеты проводились до момента времени, при котором минимальный радиус внутренней поверхности лайнера достигал 5 мм .

Расчеты для упругопластического лайнера проводились с использованием стандартного МКЭ с КЭ первого и второго порядка, а также с помощью смешанного МКЭ, в котором для аппроксимации перемещений применялись линейные базисные функции, а для аппроксимации давлений – кусочно-постоянные в пределах ячейки сетки базисные функции.

Рассмотрим результаты, полученные в трех расчетах для лайнера с идеальным упругопластическим материалом ($E_p = 0$): в первом расчете использованы стандартные КЭ 1 порядка ($h = 0.1 \text{ мм}$), во втором расчете – стандартные КЭ 2 порядка ($h = 0.2 \text{ мм}$), в третьем расчете – смешанные КЭ ($h = 0.2 \text{ мм}$).

В дальнейшем в качестве одного из результатов расчетов будет демонстрироваться объемная деформация ε_v . Данная деформация определялась двумя методами: в первом она вычислялась по формуле

$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0}$, где V — текущий объем рассматриваемой ячейки сетки, а V_0 — ее начальный объем; во втором методе в качестве меры объемной деформации брался первый инвариант тензора Генки E_{ii}^H . Результаты расчетов показали, что величины $\ln(1 + \varepsilon_V)$ и E_{ii}^H практически совпадают, а ε_V и E_{ii}^H очень близки друг к другу (во всех расчетах объемная деформация не превышала 10 %).

На рис. 2 показаны зависимости от времени максимальной объемной деформации сжатия ε_V (данная деформация является отрицательной) и максимального сжимающего давления (в МПа, данное давление тоже является отрицательным) для трех расчетов. Из рисунка видно, что первые два графика визуально неотличимы (кроме заключительного участка), а третий график находится достаточно близко от них. В конце первого расчета $\max|\varepsilon_V|=0.0412$, $\max|p|=1947$ МПа, в конце второго расчета $\max|\varepsilon_V|=0.0402$, $\max|p|=1902$ МПа, в конце третьего расчета $\max|\varepsilon_V|=0.0383$, $\max|p|=2052$ МПа.

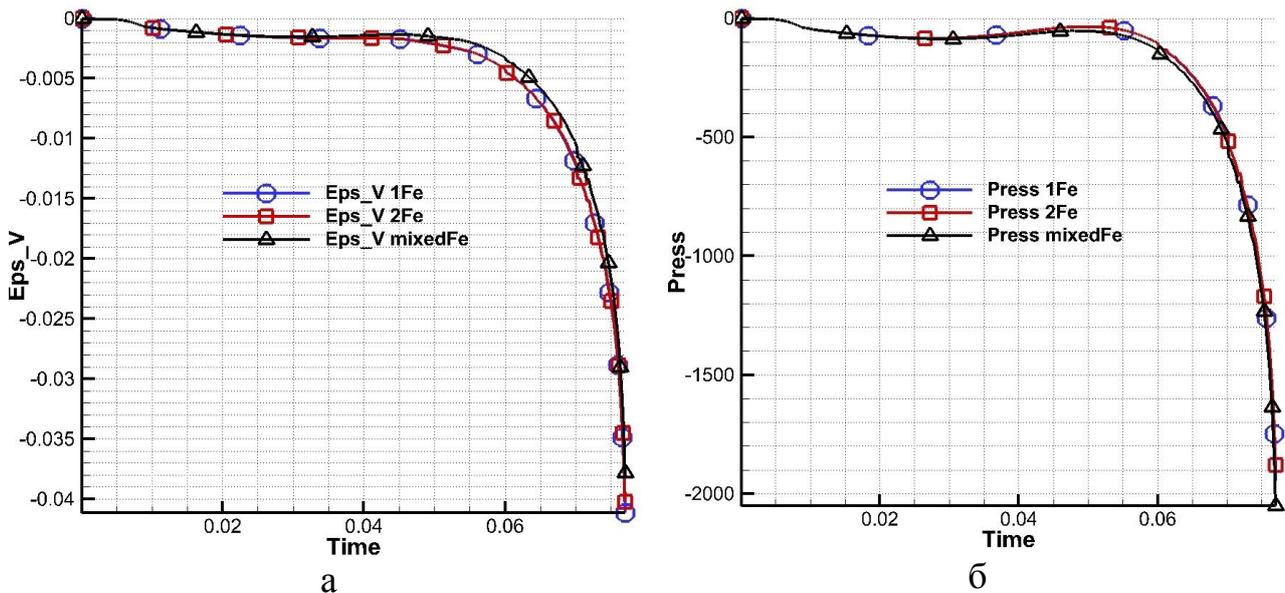


Рис. 2. Графики максимальной объемной деформации (а) и максимального давления для различных численных моделей

В конце проведенных расчетов интенсивность логарифмической деформации, которую можно рассматривать в качестве меры девиаторной части тензора, в несколько десятков раз превышала значение объемной деформации, поэтому можно утверждать, что в процессе сжатия материал лайнера становится слабосжимаемым. Известно, что при моделировании подобных материалов смешанный МКЭ показывает лучшие результаты, чем стандартный МКЭ [13]. Поэтому в дальнейшем в расчетах упругопластического лайнера использован смешанный МКЭ.

Рассмотрим серию расчетов с различными кривыми деформирования для лайнера. Значение модуля пластичности E_p подбиралось таким образом, чтобы охватить диапазон от полностью упругого лайнера (формально данный случай соответствует равенству $E_p = E$) до лайнера с идеально пластическим материалом.

На рис. 3 показаны графики скорости центра масс лайнера, а на рис. 4 – графики минимального (с учетом знака) давления в лайнере для различных расчетов.

Здесь и далее скорость нормирована на величину 100 м/с, координаты лайнера r, z – на величину 10 см, давление – на величину 1 МПа.

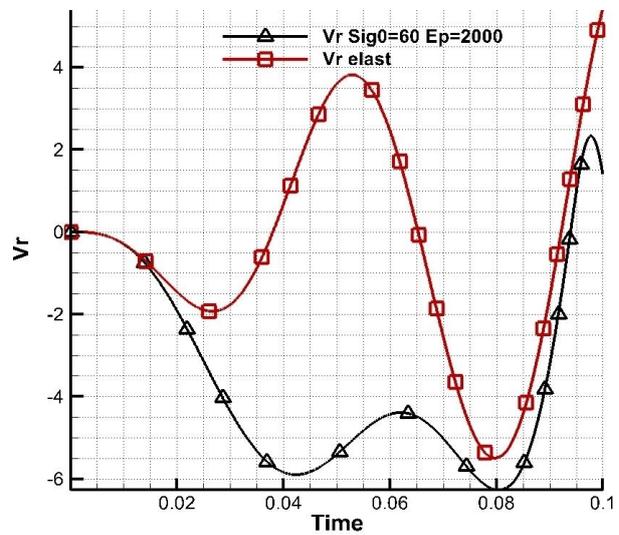
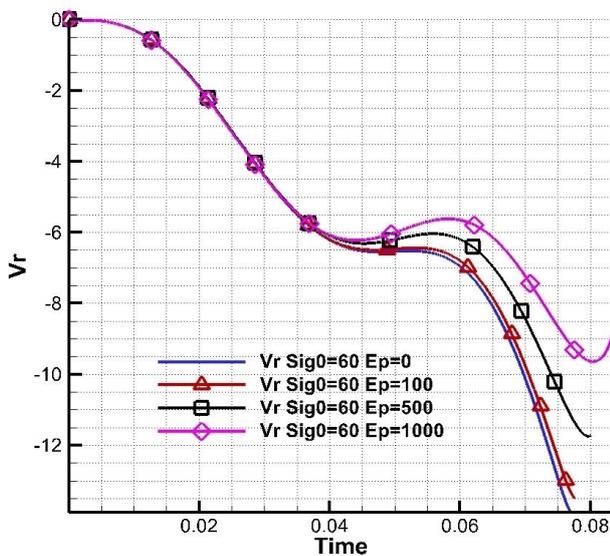


Рис. 3. Графики скорости центра масс лайнера для различных кривых деформирования

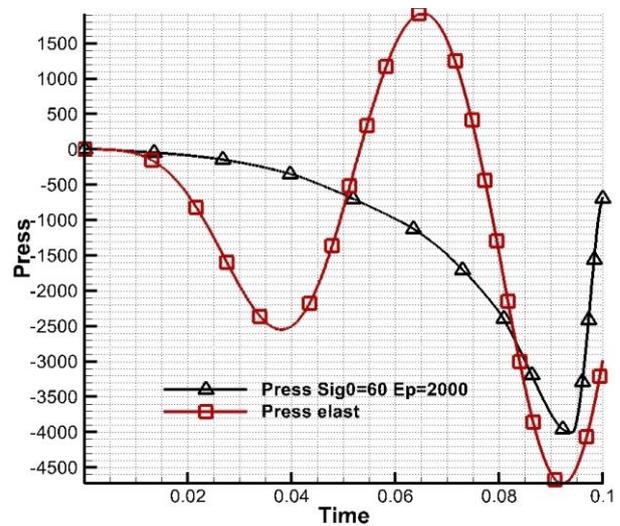
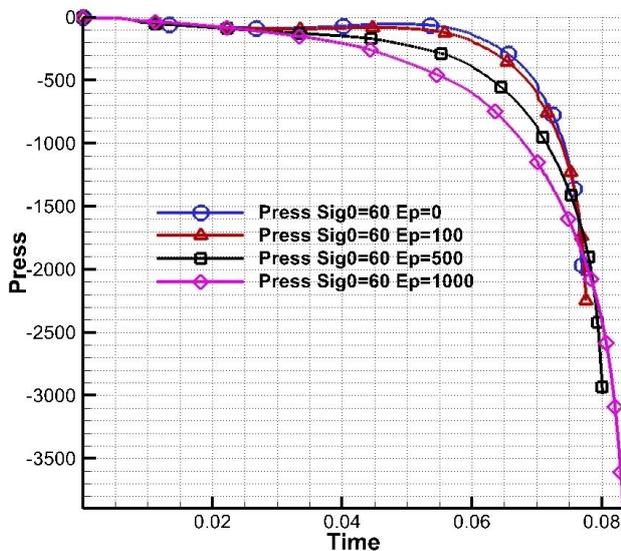


Рис. 4. Графики минимального давления в лайнере для различных кривых деформирования

На рис. 5 показаны графики минимальной (с учетом знака) объемной деформации в лайнере, на рис. 6 – графики максимальной интенсивности логарифмической деформации в лайнере, на рис. 7 – графики изменения толщины лайнера (нормированы на 10 см) для различных расчетов.

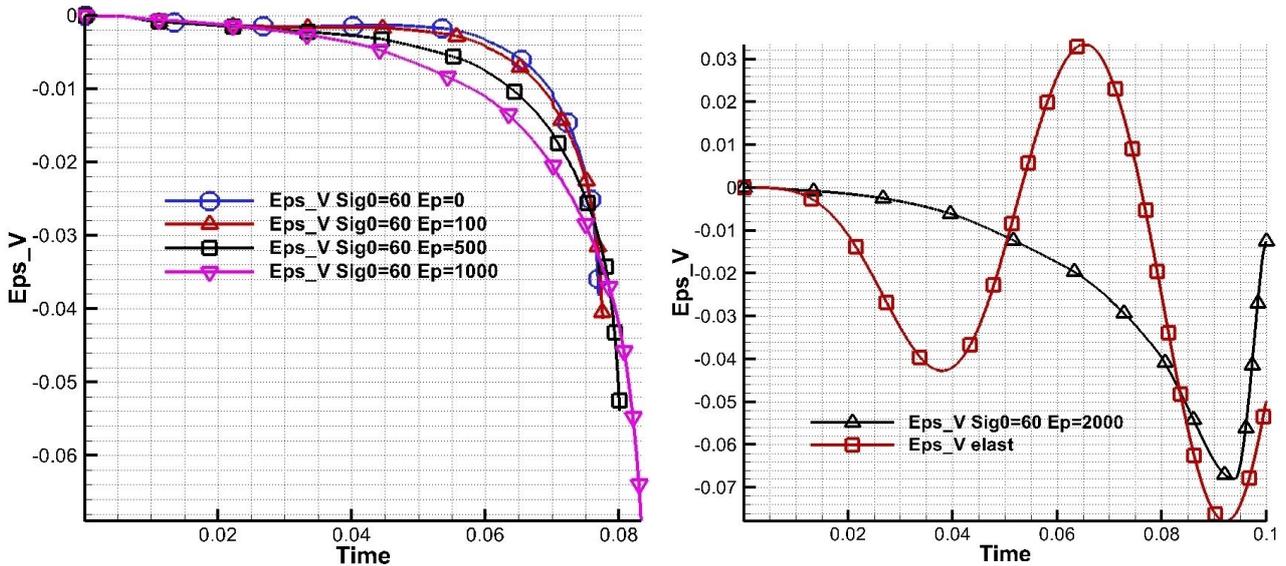


Рис.5. Графики минимальной объемной деформации в лайнере для различных кривых деформирования

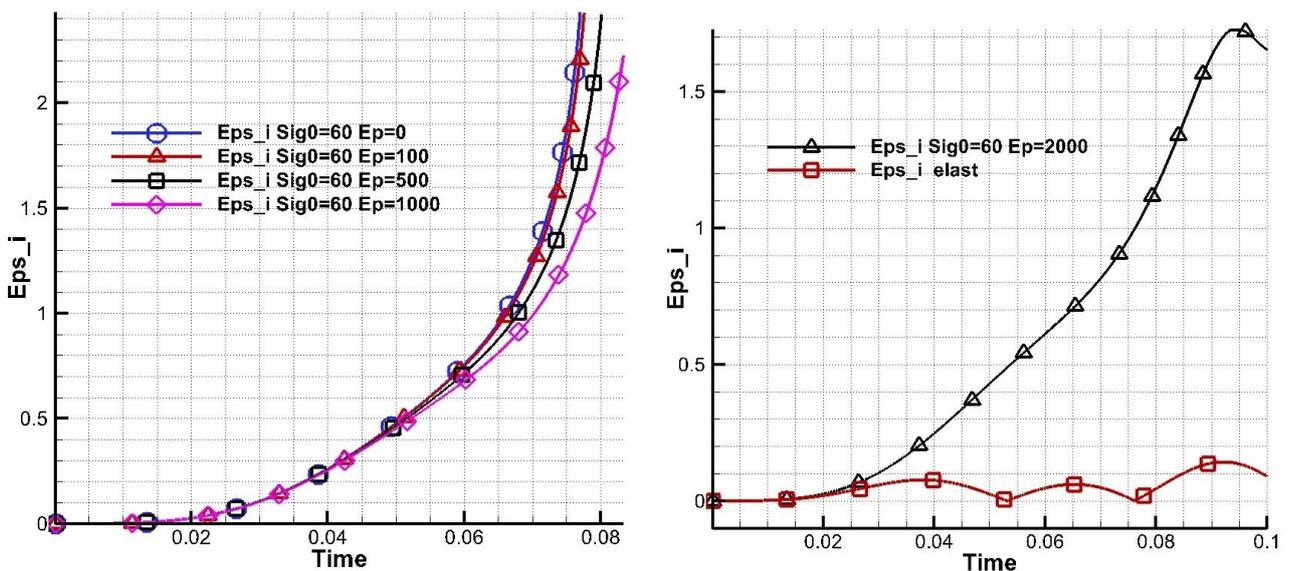


Рис. 6. Графики максимальной интенсивности логарифмической деформации для различных кривых деформирования

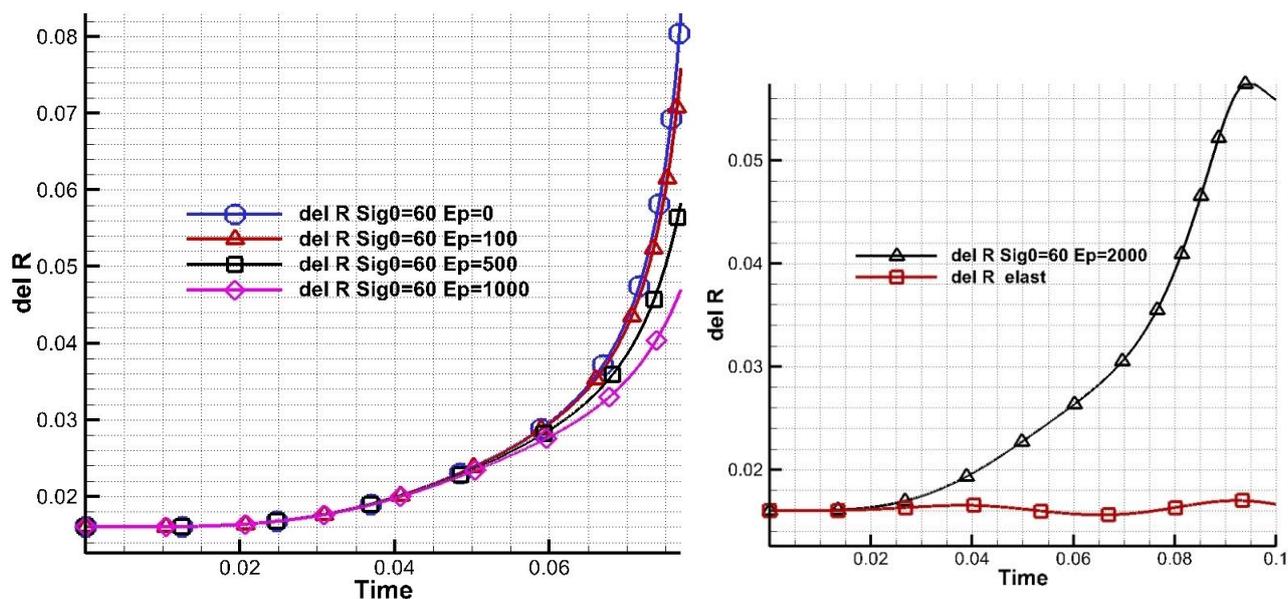


Рис. 7. Графики изменения толщины лайнера для различных кривых деформирования

Из приведенных графиков видно, что в расчете с идеально упругопластическим материалом лайнер двигался быстрее всего (скорость центра масс в конце расчета составляла порядка -1400 м/с), при этом его толщина увеличивалась более чем в 5 раз (с 1.6 мм до 8.3 мм). Максимальная объемная деформация (сжатия) достигала величины 3.8%, максимальная интенсивность логарифмической деформации – 245%, максимальное сжимающее давление – 2050 МПа.

Увеличение модуля пластичности приводит к увеличению зоны упругости, следовательно, к увеличению роли внутренних упругих сил, которые сопротивляются процессу сжатия лайнера и замедляют его движение, поэтому для расчета с $E_p = 500$ МПа максимальная (по модулю) скорость центра масс составила величину около 1200 м/с, для расчета с $E_p = 1000$ МПа – 960 м/с, для расчета с $E_p = 2000$ МПа – 600 м/с. Для расчетов с $E_p \geq 500$ МПа ближе к концу расчетов сила упругой реакции материала начинала превышать силу Лоренца, поэтому ускорение тела меняло знак. Для расчета с $E_p = 2000$ внутренняя поверхность лайнера достигла минимального радиуса 10 мм, после чего оболочка стала двигаться в противоположную сторону. При увеличении модуля пластичности также наблюдается рост объемных деформаций сжатия и максимальных сжимающих давлений, максимальная интенсивность логарифмической деформации и изменение толщины лайнера уменьшаются.

Для полностью упругого лайнера в характеристиках движения наблюдаются колебания: сначала в процессе сжатия внутренняя поверхность оболочки достигла радиуса 45 мм, затем в процессе растяжения она сдвинулась до радиуса 51.5 мм, затем снова сжалась до радиуса 42 мм и т.д. Аналогичные колебания наблюдаются для минимального давления, минимальной объемной

деформации, изменения толщины оболочки: за сжатием следует растяжение, затем снова сжатие и т.д. Толщина оболочки меняется в пределах 25-50%, максимальная объемная деформация сжатия достигала величины 8%, а интенсивность логарифмической деформации – 14 %.

Рассмотрим серию расчетов для модели жидкого лайнера с различными коэффициентами вязкости. Для значения коэффициента вязкости, соответствующего расплавленному алюминию (порядка 10^{-3} Па·с), в процессе расчета возникал перехлест сетки, поэтому для расчетов выбраны следующие значения $\eta = 0.001, 0.1, 0.5, 1.0$ (значения нормированы на величину $4 \cdot 10^4$ Па·с). Таким образом, использованные величины вязкости отличаются от реалистичного значения минимум на 4 порядка.

На рис. 8,а показаны графики скорости центра масс лайнера, а на рис. 8,б – графики максимального давления в лайнере для различных расчетов.

В дальнейшем графики и распределения давления приводятся с обратным знаком для наглядности сравнения с давлением, соответствующим упругопластическому телу.

Из приведенных графиков видно, что в расчете с минимальной вязкостью ($\eta = 0.001$) лайнер двигался быстрее всего (скорость центра масс в конце расчета составила величину около 1350 м/с). Увеличение вязкости приводит к увеличению роли внутренних сил, которые сопротивляются процессу сжатия лайнера и замедляют его движение, при этом значения максимальных давлений увеличиваются.

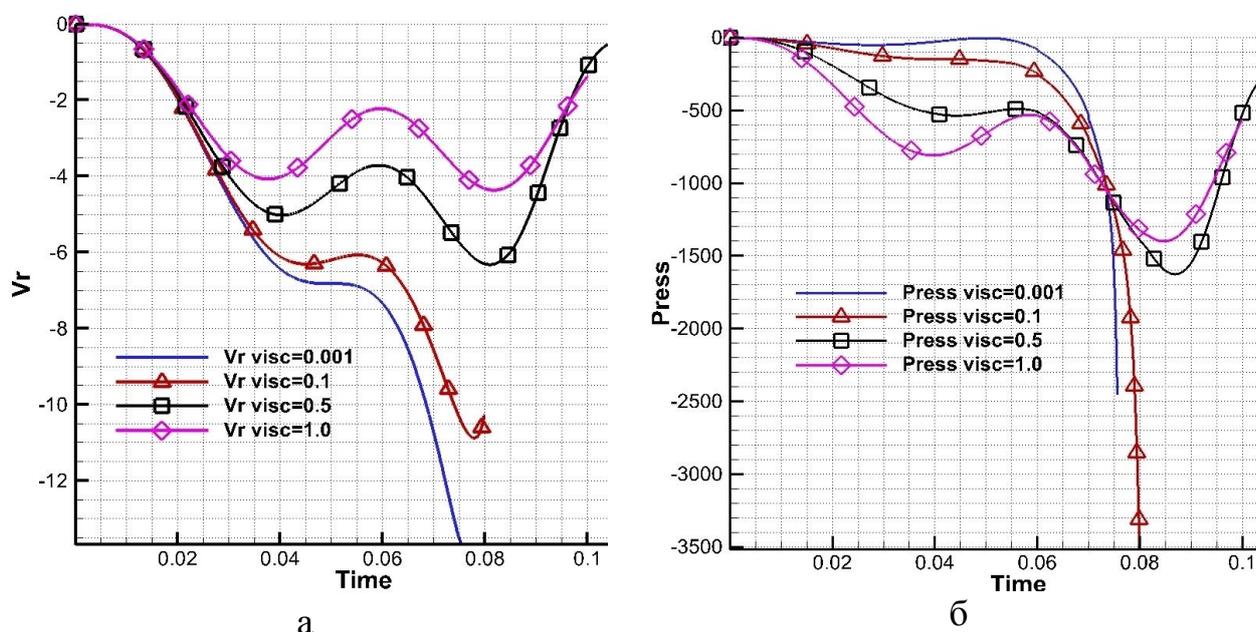


Рис. 8. Графики усредненной радиальной скорости лайнера (а) и максимального давления (б) для различных значений вязкости в модели жидкого лайнера

Для значений $\eta = 0.5$ и $\eta = 1.0$ (отличаются от реалистичного на 7 порядков) характеристики движения приобретают волнообразный характер:

лайнера за рассмотренный промежуток времени не достигает радиуса 5 мм. В зависимости от соотношения электромагнитной силы и внутренних сил ускорение тела меняло знак, но, в отличие от расчета с упругим телом, скорость всегда оставалась отрицательной.

Сопоставим некоторые характеристики движения, полученные в расчетах с упругопластическим лайнером и с жидким лайнером.

На рис. 9 показаны графики скорости центра масс лайнера (а) и максимального (сжимающего) давления (б) для расчетов с упругопластическим лайнером ($E_p = 100$ МПа) и жидким лайнером ($\eta = 0.05$), на рис. 10 – для расчетов с упругопластическим лайнером ($E_p = 500$ МПа) и жидким лайнером ($\eta = 0.1$), на рис. 11 – для расчетов с упругопластическим лайнером ($E_p = 1000$ МПа) и жидким лайнером ($\eta = 0.175$).

Из сравнения графиков видно, что для различных кривых деформирования, заложенных в модель упругопластического лайнера, можно подобрать значения коэффициента вязкости в модели жидкого лайнера, которые дают достаточно близкие характеристики движения. При этом для кривых деформирования, предусматривающих большое упрочнение материала (увеличение роли упругих сил), зазор между получаемыми характеристиками становится больше (модель жидкого лайнера не может воспроизвести эффекты, вызванные упругостью).

Отметим, что модель жидкого лайнера является более простой для реализации, чем модель упругопластического лайнера, и позволяет проводить более быстрые расчеты (если применяются одинаковые сетки).

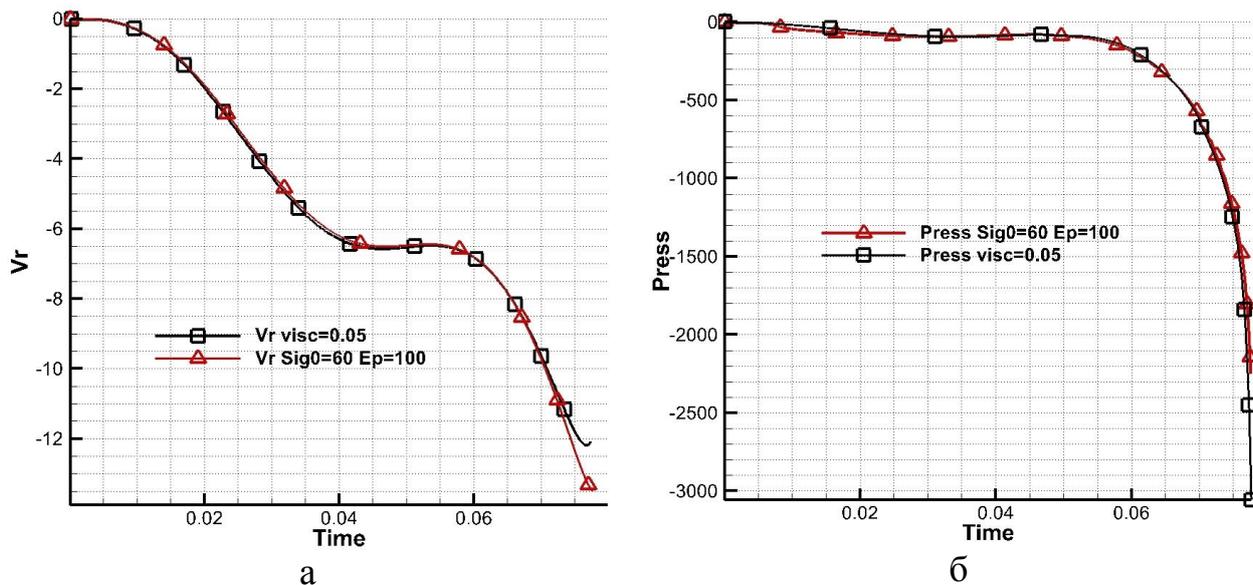


Рис. 9. Графики скорости центра масс (а) и максимального (сжимающего) давления (б) для расчетов с упругопластическим лайнером ($E_p = 100$ МПа) и жидким лайнером ($\eta = 0.05$)

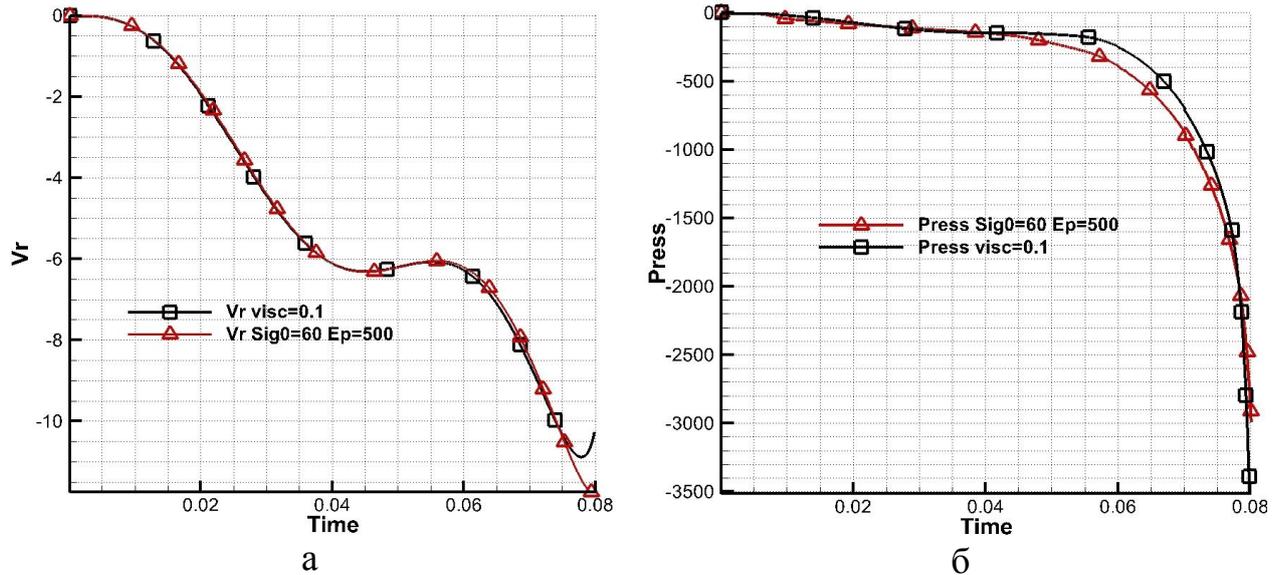


Рис. 10. Графики скорости центра масс (а) и максимального (сжимающего) давления (б) для расчетов с упругопластическим лайнером ($E_p = 500$ МПа) и жидким лайнером ($\eta = 0.1$)

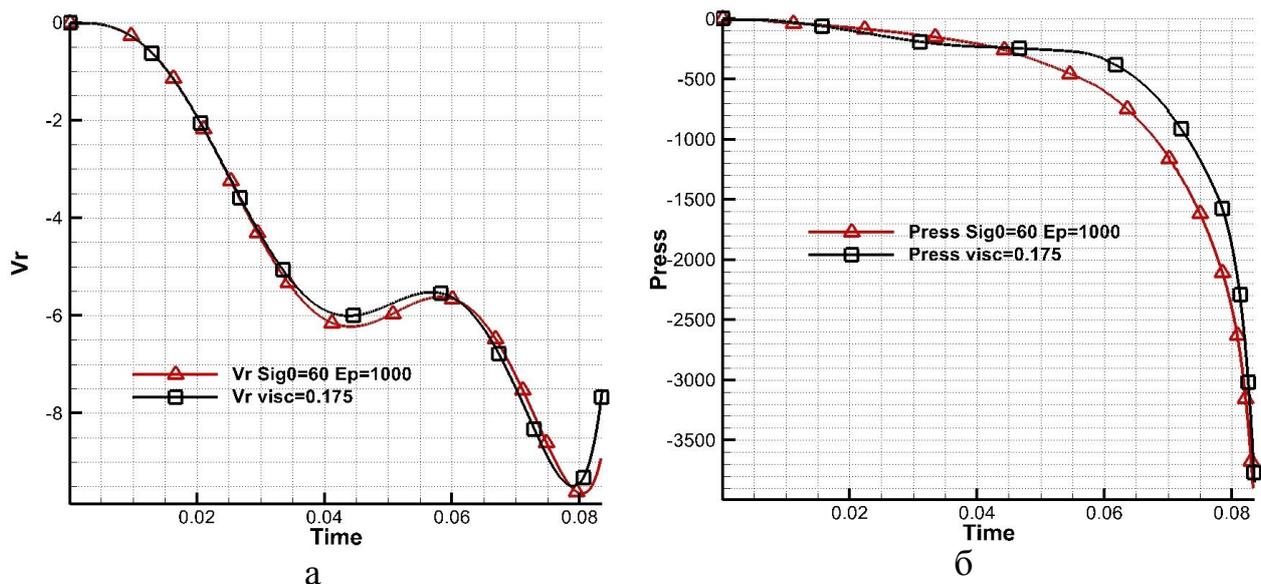


Рис. 11. Графики скорости центра масс (а) и максимального (сжимающего) давления (б) для расчетов с упругопластическим лайнером ($E_p = 1000$ МПа) и жидким лайнером ($\eta = 0.175$)

5. Моделирование движения лайнера вблизи опоры (2d)

Теперь выполним моделирование движения лайнера вблизи опоры, расположенной в концевой части устройства. Расчетная область, соответствующая участку половины продольного сечения, показана на рис. 12. Для предотвращения обрыва оболочки ближе к опоре толщина лайнера увеличивается от номинального значения ΔR_0 до величины ΔR_1 . Увеличение

толщины происходит на участке длиной $\Delta Z_1 = 40$ мм, длина расчетной области равна 100 мм (удвоенный внешний радиус), высота участка опоры – 10 мм.

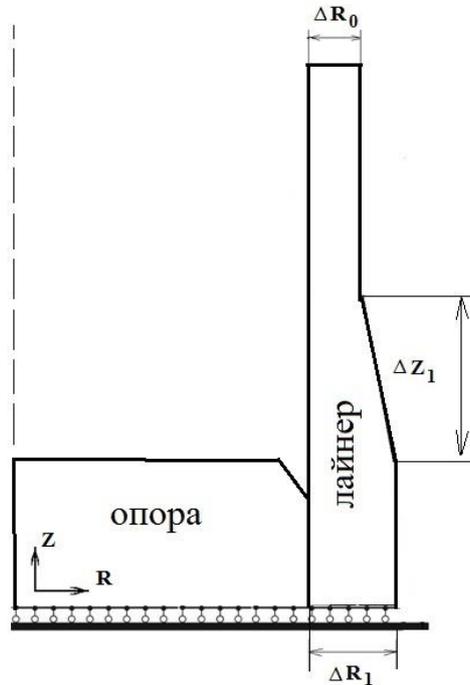


Рис. 12. Расчетная область для участка лайнера вблизи опоры

В [4] рассмотрены результаты серии расчетов для определения оптимального начального профиля лайнера, для которого возникающие в процессе движения деформации не превышают предельно допустимых величин и не приводят к обрыву лайнера. В расчетах применялась модель упругопластического тела с линейным упрочнением ($E_p = 400$ МПа), предполагалось, что утолщение оболочки происходит по линейному закону. Расчеты [4] показали, что выбор $\Delta R_1 = 3\Delta R_0$ является оптимальным, поэтому в данной работе использовалось аналогичное значение ΔR_1 .

На рис. 13 приведены распределения радиальной скорости и давления в лайнере в конце расчетов, в которых изменение толщины в начальном профиле происходило по линейному закону, а на рис. 14 – аналогичные распределения, полученные в расчетах, в которых изменение толщины в начальном профиле происходило по дуге окружности (в этом случае производная толщины лайнера по z тоже является непрерывной). В расчетах использованы модели упругопластического тела ($E_p = 0$) и вязкой жидкости ($\eta = 0.05$).

На приведенных рисунках горизонтальной чертой обозначено положение опоры. Для расчетов с жидким лайнером давление для большего удобства приведено с обратным знаком. Все расчеты проводились до момента времени, при котором внутренняя поверхность лайнера достигала радиуса 5 мм. Для моделирования контакта с опорой использовалось условие прилипания.

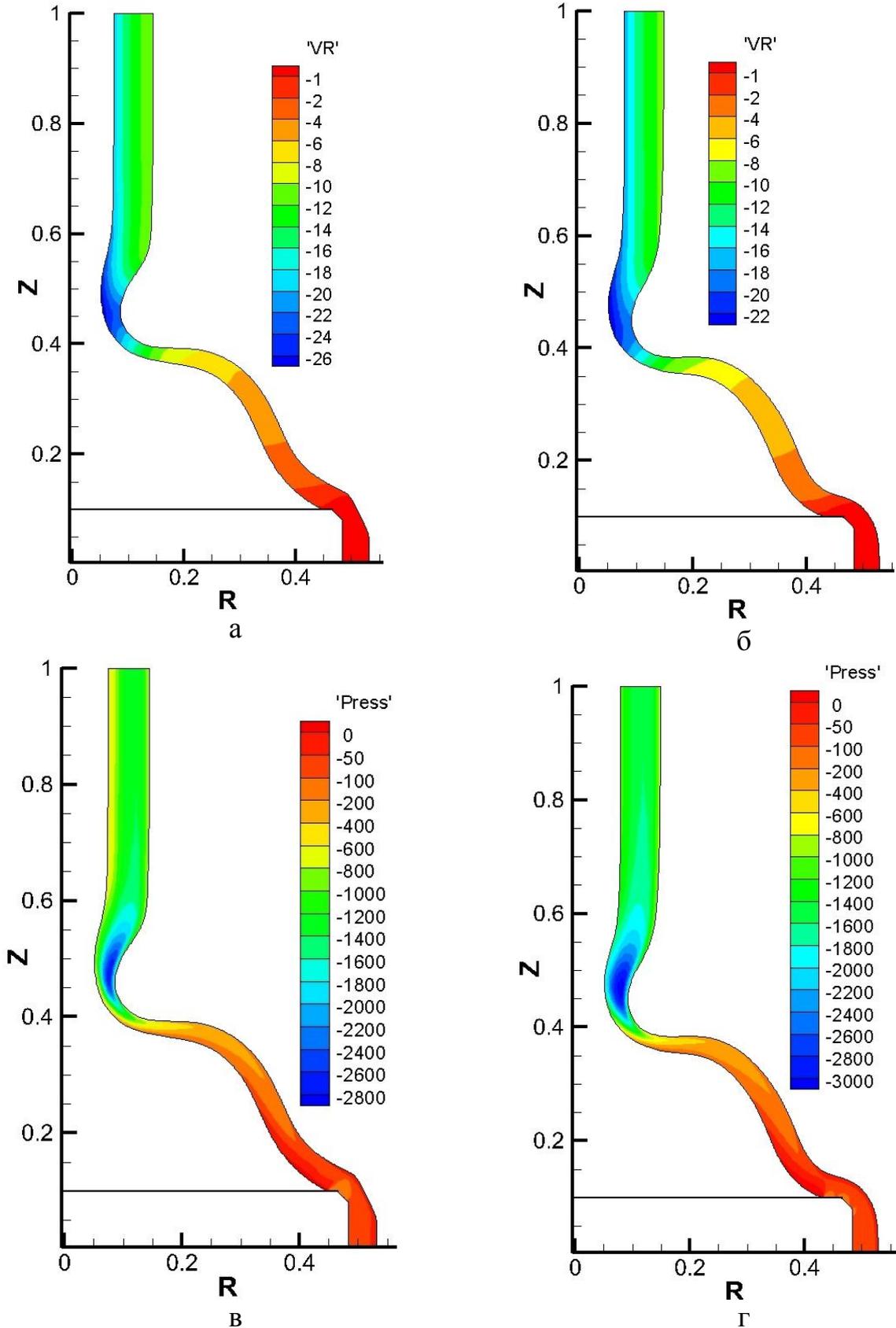


Рис. 13. Распределение радиальной скорости и давления в конце расчета при линейном изменении толщины оболочки: а, в – упругопластический лайнер ($E_p = 0$, $t = 75.8$ мкс); б, г – жидкий лайнер ($\eta = 0.05$, $t = 75.9$ мкс)

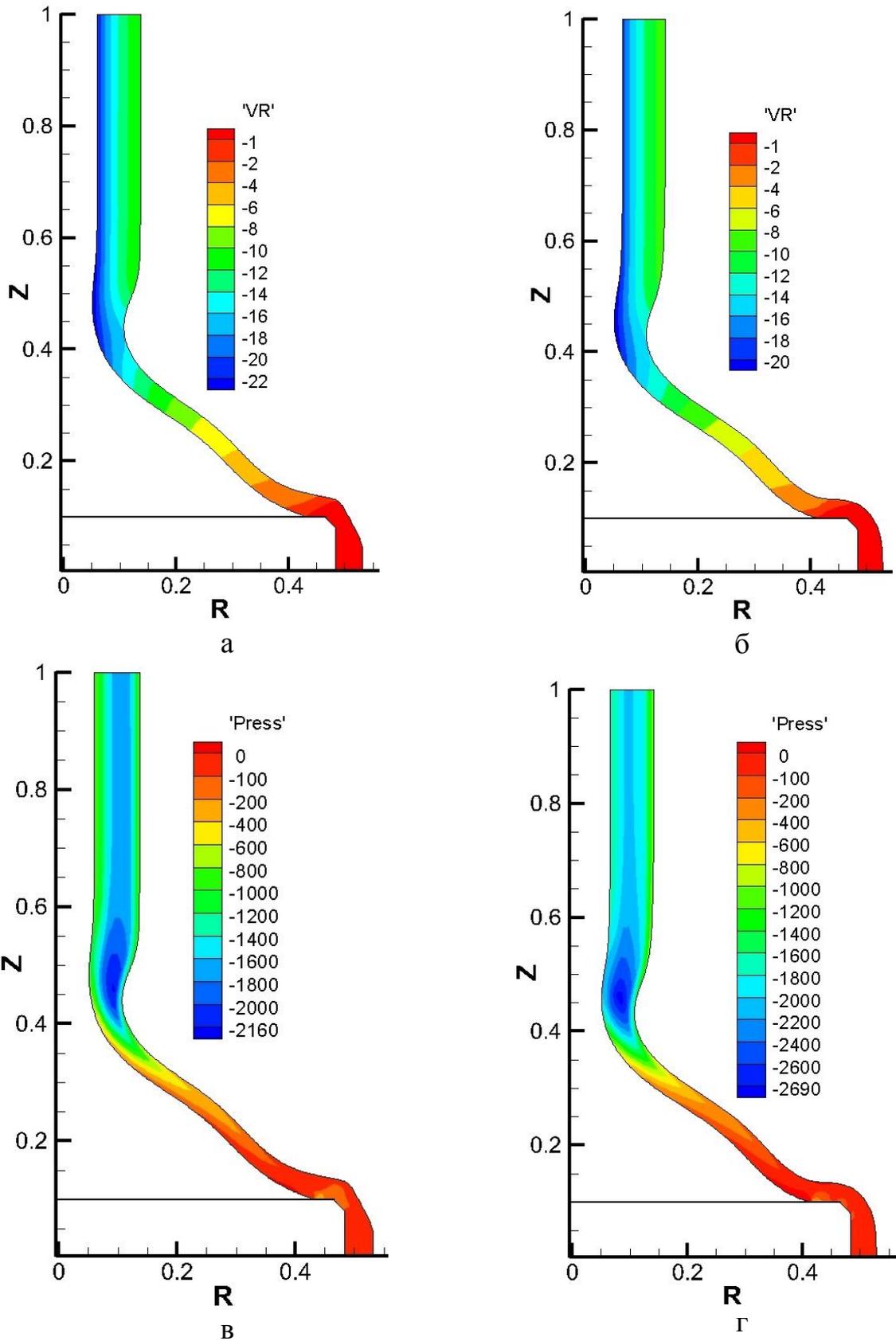


Рис. 14. Распределение радиальной скорости и давления в конце расчета при гладком изменении толщины оболочки: а, в – упругопластический лайнер ($E_p = 0$, $t = 76.5$ мкс); б, г – жидкий лайнер ($\eta = 0.05$, $t = 76.7$ мкс)

Сравнение рис. 13 и 14 показывает, что в расчетах, в которых изменение толщины в начальном профиле лайнера происходило линейным образом, на участке утолщения возникали значительные неоднородности. В расчетах, для которых изменение толщины происходило гладким образом (с непрерывной производной), возникающие неоднородности носили более умеренный характер. Формы лайнера, полученные для модели упругопластического тела и вязкой жидкости, похожи друг на друга. В то же время максимальные скорости для первой модели превосходят максимальные скорости для второй, а максимальные сжимающие давления для первой модели меньше.

Рассмотрим результаты, полученные в расчетах с другими кривыми деформирования и другими значениями вязкости (для начального профиля с гладким изменением толщины).

На рис. 15 приведены распределения давления в лайнере в конце расчета для модели упругопластического тела ($E_p = 1000$) и вязкой жидкости ($\eta = 0.175$). По сравнению с предыдущими расчетами видно, что теперь в точке начала утолщения оболочки неоднородность развивается сильнее (волнообразный участок лайнера двигается с опережением центральной части).

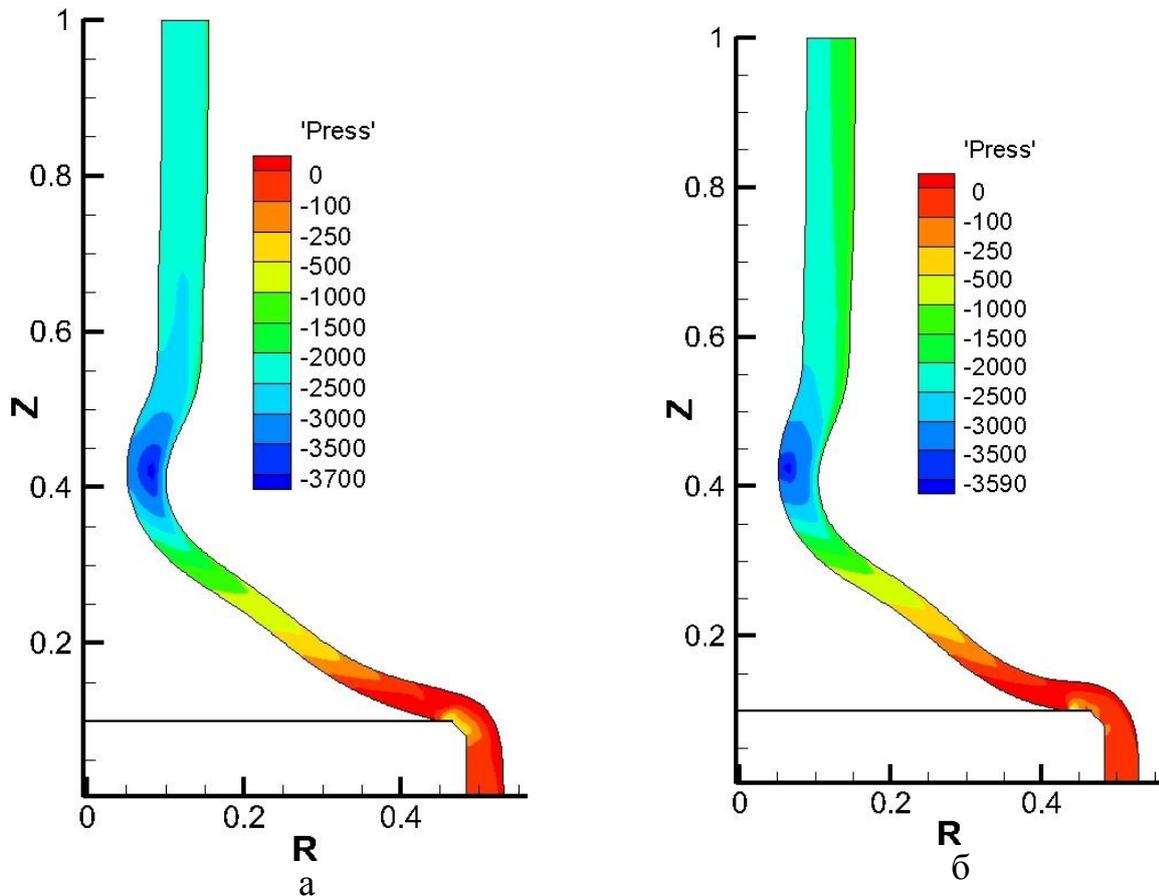


Рис. 15. Распределение давления в лайнере в конце расчета:
 а – упругопластический лайнер ($E_p = 1000$, $t = 80.7$ мкс);
 б – жидкий лайнер ($\eta = 0.175$, $t = 80.5$ мкс)

В расчете с упругопластическим лайнером максимальные сжимающие давления (около 3700 МПа) и максимальные скорости (около -1900 м/с) превышают аналогичные величины в расчете с жидким лайнером (3600 МПа и -1600 м/с).

На рис. 16 приведены распределения давления в лайнере в конце расчета для модели упругопластического тела ($E_p = 2000$) и вязкой жидкости ($\eta = 0.35$). Сравнение с предыдущими расчетами показывает, что дальнейшее увеличение модуля пластичности (увеличение роли упругой составляющей) или коэффициента вязкости приводит к возрастанию неоднородности (волнообразный участок лайнера двигается с еще бóльшим опережением центральной части), при этом общий наклон участка оболочки, примыкающего к опоре, становится более пологим, чем на рис. 14 и 15.

В расчете с упругопластическим лайнером максимальные сжимающие давления (около 5000 МПа) и максимальные скорости (около -1300 м/с) значительно превышают аналогичные величины в расчете с жидким лайнером (3700 МПа и -900 м/с), хотя профили лайнера вполне сопоставимы друг с другом.

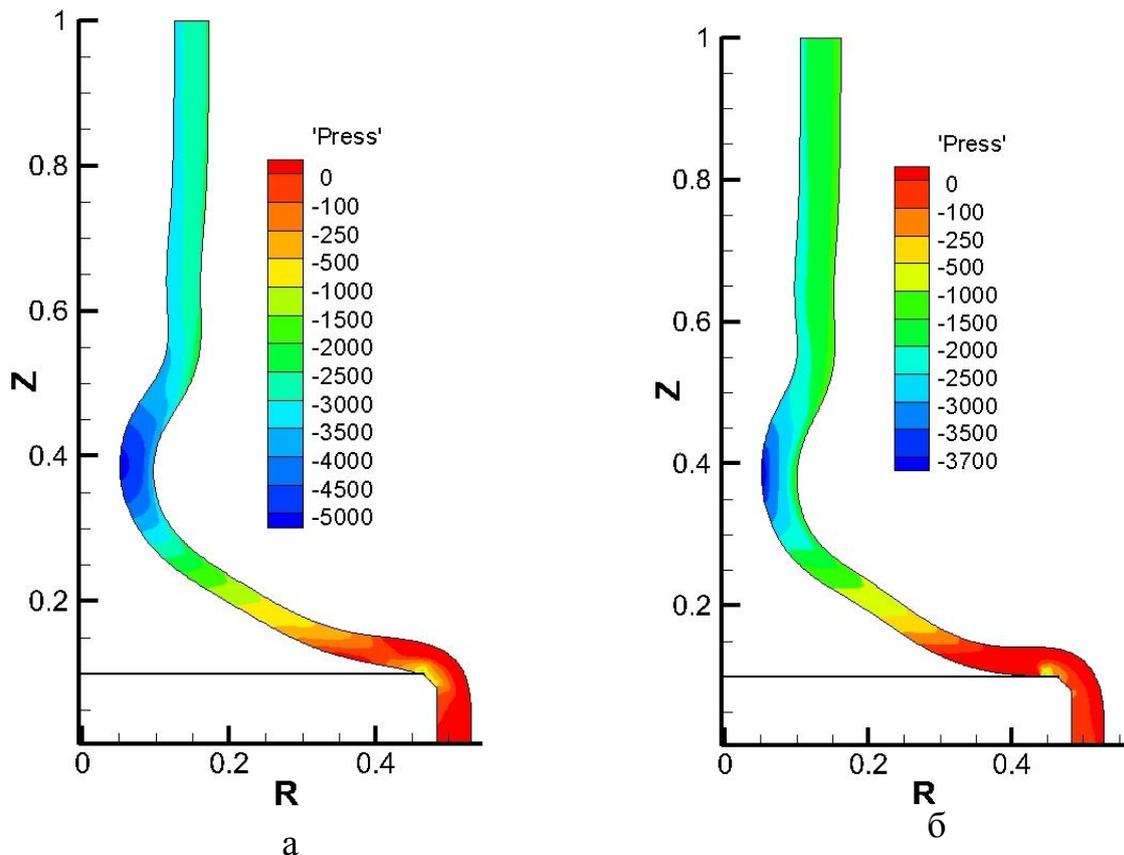


Рис. 16. Распределение давления в лайнере в конце расчета:

а – упругопластический лайнер ($E_p = 2000$, $t = 86.3$ мкс);

б – жидкий лайнер ($\eta = 0.35$, $t = 86.4$ мкс)

Все результаты для упругопластического лайнера получены с помощью смешанного МКЭ. Отметим, что при применении стандартного МКЭ с использованием КЭ 1 и 2 порядка получены совпадающие профили лайнера за исключением зоны контакта оболочки с опорой. В этой зоне, особенно для идеального упругопластического материала и для малых значений E_p , наблюдались проблемы со сходимостью метода (расчеты проводились для фиксированного значения максимального количества итераций).

Отметим, что для упругопластического лайнера требовалось в среднем 6 итераций для достижения заданного уровня сходимости, для жидкого лайнера – 2 или 3 итерации, т.е. вторая модель позволяет проводить более быстрые расчеты, чем первая (если для упругопластического лайнера применяется смешанный МКЭ и используются одинаковые сетки). Кроме того, если учитывать температурные эффекты и плавление материала, то модель жидкого лайнера позволяет это сделать более простым и экономным образом.

6. Эксперименты по разгону профилированных металлических оболочек

Для проверки способности предложенных моделей адекватно описывать исследуемые процессы проведем сравнение результатов расчетов и данных, полученных в натурном эксперименте, проведенном в ГНЦ РФ ТРИНИТИ.

Экспериментальная цилиндрическая алюминиевая оболочка с диаметром 90 мм показана на рис. 17. В основной (средней) части толщина ее стенки составляла 1,3 мм.



Рис. 17. Металлическая оболочка для экспериментов по импульсному сжатию

Концевые части выполнены с увеличением толщины стенки до 4 мм и имели специальную конфигурацию для надежного присоединения к выводам

коллектора источника токовых импульсов. В этом качестве использована конденсаторная батарея «ПУМА», ранее описанная в работе [14]. Схема эксперимента и расположение элементов диагностики приведены на рис.18. На рис. 19 показан общий вид системы, перед экспериментом. Узел сжатия оболочки закрыт защитным кожухом.

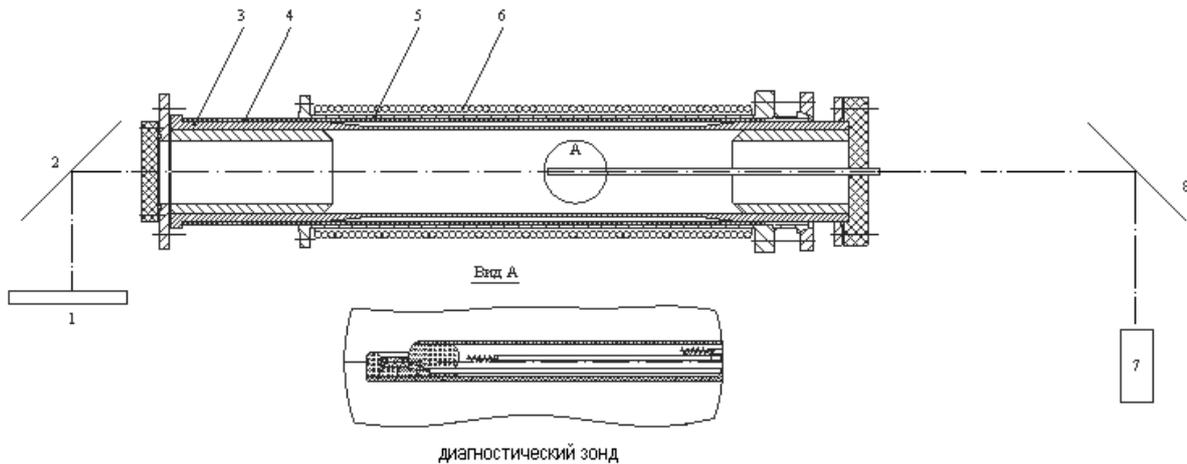


Рис. 18. Схема эксперимента для исследования сжатия металлической оболочки: 1 – лампа-вспышка, 2 – поворотное зеркало, 3 – металлическая оболочка, 4 – изоляция, 5 – обратный токопровод, 6 – соленоид начального магнитного поля, 7 – ВФУ, 8 – приемное зеркало фоторегистратора



Рис. 19. Общий вид системы, присоединенной к коллектору установки «ПУМА», перед экспериментом

Токовая конфигурация устройства – коаксиальный токопровод, внутренней поверхностью которого являлась исследуемая оболочка. На наружной стороне коаксиальной системы размещена соленоидальная обмотка, создающая слабое продольное магнитное поле, регистрируемое при сжатии потока магнитным зондом (вид А), располагаемым по оси. Показан осветитель, просвечивающий отверстие оболочки, и приемник изображения – сверхскоростной фоторегистратор ВФУ, щель которого расположена в диаметральной направлении отверстия оболочки. Поворотные зеркала использованы для предохранения осветителя и фоторегистратора от повреждения осколками оболочки после выстрела.

Осциллограммы разрядного тока через оболочку и напряжения на коллекторе установки показаны на рис. 20 при начальном напряжении 28 кВ на батарее «ПУМА» с емкостью 3 мФ.

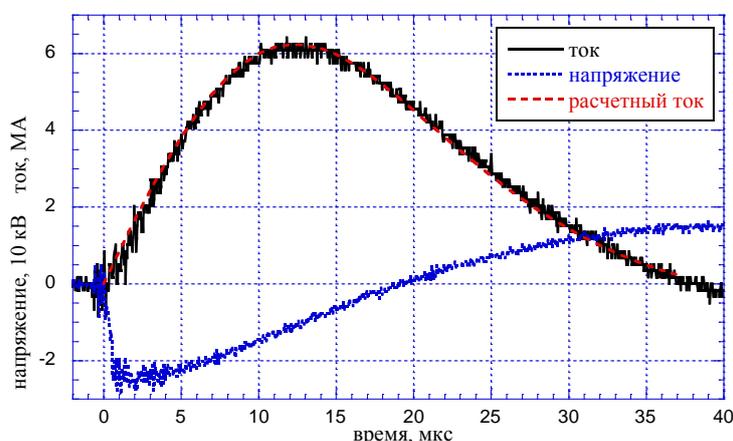


Рис. 20. Характерная осциллограмма ускоряющего тока и напряжения на токоподводящих выводах коллектора источника питания

На рис. 21 показана фоторазвертка светового пучка в диаметральной щели регистратора ВФУ. Она позволяет определить перемещение и скорость внутренней границы металлической оболочки во времени до удара по телу диагностического зонда. Отсутствие засветки в осевой зоне соответствует размещению диагностического зонда, показанного на рис. 18.

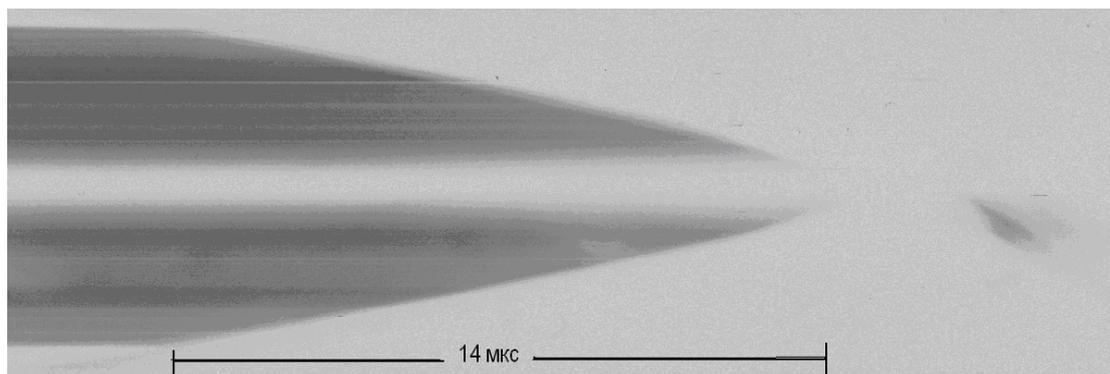


Рис. 21. Фрагмент фотопленки, снятой на ВФУ

Для проверочного контроля данных использовались показания магнитного зонда при начальном значении квазистационарного поля внутри оболочки 14 кЭ. Соответствующая осциллограмма приведена на рис. 22. Показания датчика давления в данной работе неактуальны (этап сжатия поля не моделировался).

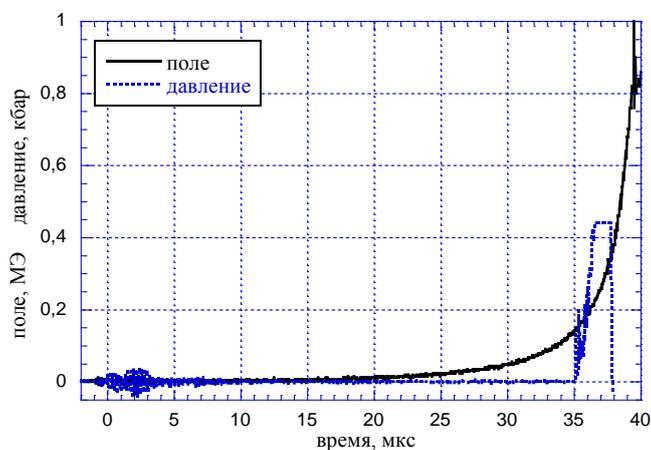


Рис. 22. Осциллограммы магнитного зонда и датчика давления в опыте по сжатию оболочки

Для моделирования описанного эксперимента проведены расчеты с применением моделей идеального упругопластического лайнера ($E_p = 0$) и жидкого лайнера ($\eta = 0.05$). В расчетах использованы значения тока, приведенные на рис. 20, и реальные геометрические размеры лайнера (по оси рассмотрен участок высотой 10 см). Начальное магнитное поле, создаваемое соленоидальной обмоткой, при разгоне оболочки не учитывалось.

На рис. 23 представлены графики зависимости от времени (по оси абсцисс в мкс) минимального радиуса точек, расположенных на внутренней поверхности лайнера (по оси ординат в мм). Сплошной линией показаны результаты расчета с использованием упругопластической модели (моделировалось движение центральной части лайнера (1d)), а маркерами отмечены экспериментальные данные. На рис. 23,а показаны графики за все время расчета, а на рис. 23,б более крупно продемонстрированы данные за промежуток времени от 25 до 40 мкс.

В эксперименте использованы два способа измерения положения внутренней поверхности лайнера: результаты обработки высокоскоростной съемки (маркеры прямоугольники) и результаты обработки осциллограммы магнитного зонда (маркеры треугольники).

На рисунке видно, что расчетная кривая достаточно хорошо коррелирует с данными натуральных экспериментов до момента времени 35 мкс. Потом значения радиуса, полученные после обработки высокоскоростной съемки, начинают убывать быстрее, чем два других графика. Это может быть связано с тем, что, как видно на рис. 22, после 35 мкс происходит рост величины сжимаемого магнитного поля. Это может приводить к испарению части вещества лайнера на

внутренней поверхности, изменяющего видимую границу. Вторым фактором расхождения данных – это игнорирование в расчете теплофизического состояния вещества оболочки, изменяющего ее механические свойства.

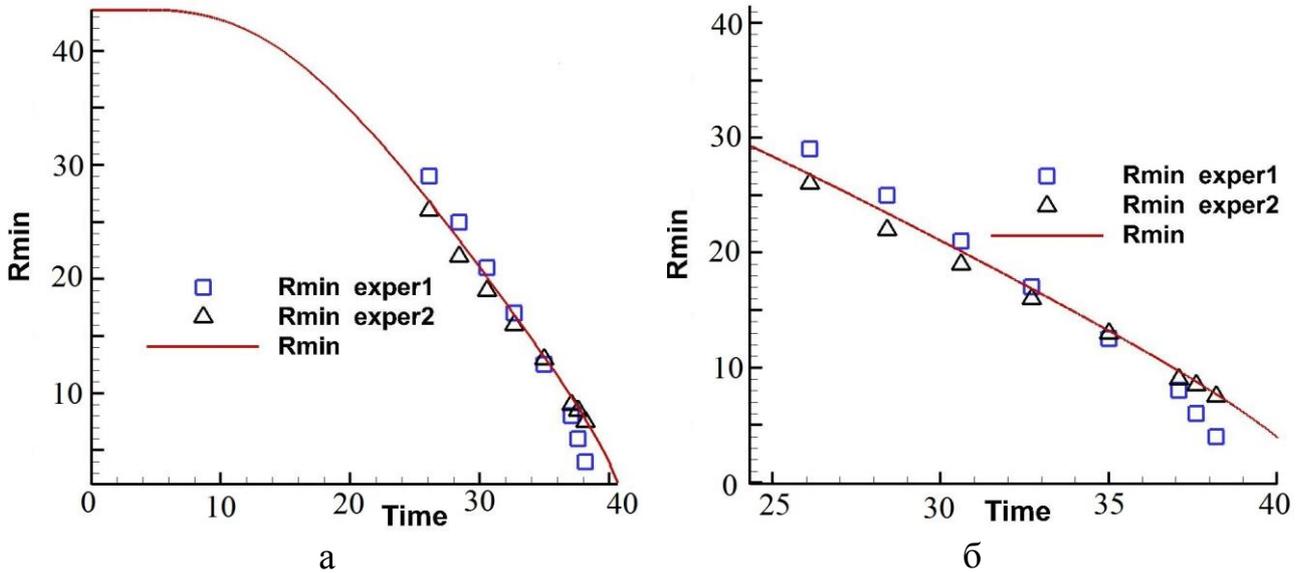


Рис. 23. Изменение радиуса внутренней поверхности лайнера

На рис. 24 показаны графики зависимости от времени радиуса внутренней поверхности и скорости центра масс лайнера, полученные в расчете с упругопластическим телом (графики без маркера) и в расчете с вязкой жидкостью (графики с маркером).

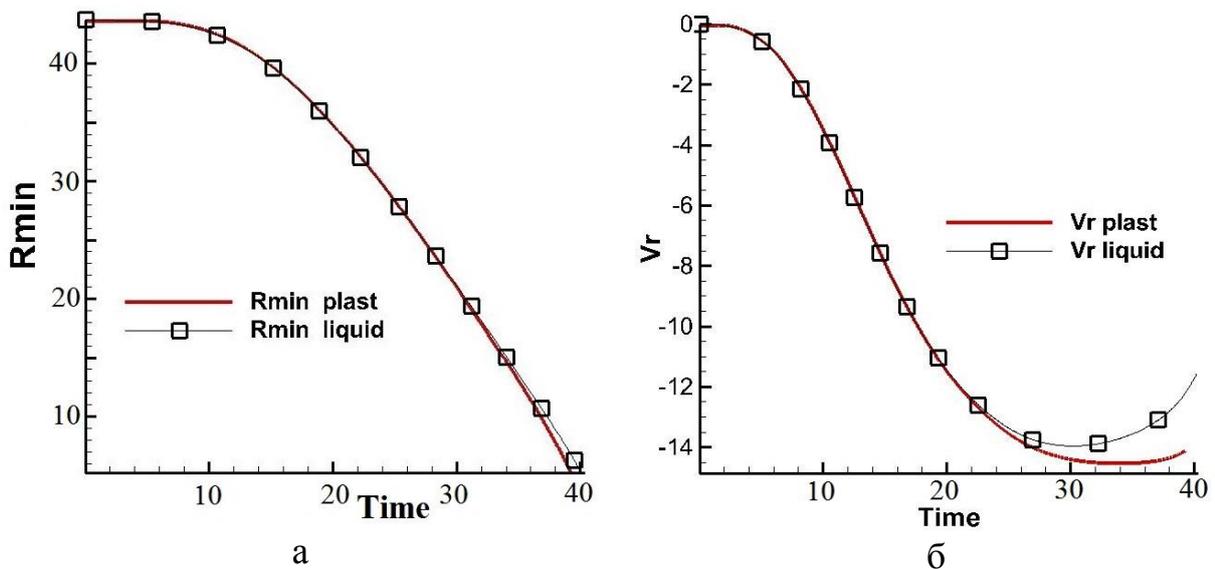


Рис. 24. Расчеты для двух моделей: а – изменение радиуса внутренней поверхности; б – изменение скорости центра масс лайнера

Кроме моделирования движения центральной части, выполнено моделирование поведения лайнера вблизи концевой зоны. Отметим важное обстоятельство: фоторегистратор не показывает посторонних засветок на всем протяжении процесса сжатия. Это говорит о целостности оболочки, так как в противном случае нарушение контакта в цепи с большими токами не могло бы остаться незамеченным. Но при обратном разлете оболочки под действием сжатого магнитного поля происходит отрыв торцевых частей лайнера от центрального участка. При скоростях цилиндрической оболочки около 1,5 км/с подобный отрыв неизбежен, но в расчетах этап торможения и разрушения пока не учитывается. На рис. 25,а показан фрагмент оторвавшегося торцевого участка лайнера после срабатывания, а на рис. 25,б показана форма лайнера вблизи закрепления, полученная в конце расчета его ускорения (40 мкс). Для большего удобства результаты осесимметричного расчета развернуты в трехмерную картину с помощью графического редактора платформы Теметос [15]). Можно заметить качественное сходство показанных фрагментов. Профили лайнера для моделей упругопластического тела и вязкой жидкости достаточно близки друг к другу.

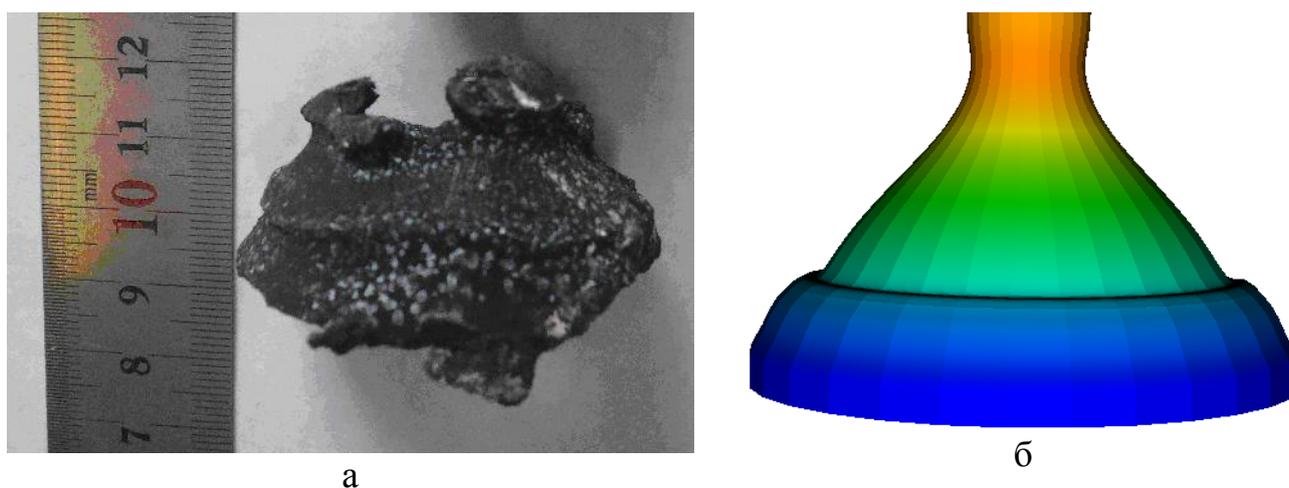


Рис. 25. Фрагмент торцевого участка цилиндрической оболочки:
а – эксперимент (после срабатывания); б – расчет (этап ускорения)

Таким образом, описанные математические и численные модели позволяют достаточно адекватно описать этап ускорения цилиндрического лайнера электромагнитным полем. Следует отметить, что и в эксперименте и в расчетах желаемый результат – сохранение целостности сжимаемого объема – получен при относительно небольшом сокращении рабочей длины устройства. Подтверждено, что переходная часть сжимаемой оболочки к токоподводу может иметь длину, не превышающую ее начальный радиус.

Заключение

В работе рассмотрено применение различных математических и численных моделей для описания движения цилиндрического лайнера под действием электромагнитных сил.

Приведены математические модели упругопластического тела для произвольных деформаций и вязкой несжимаемой жидкости. Выведены соотношения численной модели, полученной с помощью смешанного МКЭ.

Проведена серия расчетов для моделирования движения центральной части цилиндрического лайнера (без учета неоднородностей, возникающих на концевых участках устройства). Поскольку в подобных устройствах лайнер должен сохранять полную герметичность и электропроводность, то проведена другая серия расчетов, моделирующая движение лайнера вблизи закрепленных концевых участков. Выполнено сравнение интегральных характеристик (скорость центра масс лайнера, изменение его толщины и т.д.) и профилей лайнера, полученных при использовании модели упругопластического лайнера с различными кривыми деформирования и модели жидкого лайнера с различными коэффициентами динамической вязкости. Показано, что, подбирая значение коэффициента вязкости, можно получить интегральные характеристики движения и профиль жидкого лайнера, сопоставимые с характеристиками и профилем, вычисленными для упругопластического тела.

В районе токоподводов длина образующей лайнера растет при сжатии. По этой причине в задаче плоского лайнера [4] модель жидкого лайнера, по-видимому, неприменима. В данной постановке задачи с цилиндрической оболочкой радиальное сжатие компенсирует растяжение, и модель работает в определенных рамках геометрии оболочки. Проведенное исследование может служить обоснованием использования модели жидкого лайнера (более простой по сравнению с моделями упругопластического тела) для описания движения тела в подобных устройствах (для определенной области значений параметров установки).

Неустойчивости, приводящие к нарушению аксиальной симметрии сжимаемой цилиндрической оболочки и ее внутренней границы, в данной работе не рассматривались. Учет подобных неустойчивостей может потребоваться при решении полной задачи о сжатии оболочкой исследуемых объектов воздействия (магнитного поля и плазмы).

Список литературы

[1] J.H. Degnan, D.I. Amdahl, M. Domonkos et al. Flux and Magnetized Plasma Compression Driven by Shiva Star // Proceeding of International Conference Megagauss 2012 (Maui, HI, USA, 14-19 October 2012). Sarov. 2014. P. 156-164.

[2] А.М. Буйко, С.Ф. Гаранин, В.В. Змушко. Расчеты магнитной имплозии лайнера для эксперимента ALT-3 // Международная конференция «XIV

Харитоновские научные чтения». Сборник докладов. Саров: ФГУП «РФЯЦ ВНИИЭФ». 2013. С. 257-264.

[3] М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин, И.А. Щеглов. Движение лайнера в поперечном сечении магнитного компрессора // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. №2. С. 65-84.

[4] М.П. Галанин, М.К. Крылов, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин. Экспериментальное и численное исследование влияния начального профиля лайнера на его движение вблизи концевой части области // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 103. 31 с.

[5] М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин. Решение интегро-дифференциального уравнения, описывающего распределение электромагнитного поля в магнитном компрессоре // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 7. С. 927-936.

[6] М.П. Галанин, Ю.П. Попов. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. Математическое моделирование. М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с.

[7] С.Н. Коробейников. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Издательство СО РАН. 2000. 262 с.

[8] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. The Finite Element Method. Volume 3: Fluid Dynamics. Butterworth Heinemann. 2000. p. 348

[9] А.С. Родин. Модель движения пластического лайнера в магнитном компрессоре и ее применение // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2009. №50. 32 с.

[10] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Butterworth Heinemann. 2000. 707 p.

[11] Н.Н. Малинин Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

[12] M. Kojic, K.-J. Bathe.-J. Inelastic Analysis of Solids and structures. New-York: Springer-Verlag. 2005. 414 p.

[13] D. Pantuso. A finite element procedure for the analysis of thermo-mechanical solids in contact. The work to the degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering. 1997. 180 p.

[14] Е.В. Грабовский, В.П. Бахтин, А.М. Житлухин, В.Ф. Левашов, А.П. Лотоцкий, Д.А. Топорков, Н.М. Умрихин, Н.М. Ефремов, М.К. Крылов, Г.Н. Хомутильников, Ю.Н. Сулимин, М.П. Галанин, А.С. Родин. Исследования работы импульсного магнитного компрессора с электродинамическим разгоном лайнера // ЖТФ. 2014. Т. 54, №7. С. 126-135.

[15] М.П. Галанин, М.М. Горбунов-Посадов, А.В. Ермаков, В.В. Лукин, А.С. Родин, К.Л. Шаповалов. Архитектура программной платформы сопровождения вычислительного эксперимента Теметос // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. №99. 23 с.

Оглавление

1. Введение и постановка задачи	3
2. Математическая модель электродинамического ускорения цилиндрического лайнера	3
3. Численная модель электродинамического ускорения цилиндрического лайнера	8
4. Моделирование движения центральной части лайнера (1d).....	14
5. Моделирование движения лайнера вблизи опоры (2d).....	22
6. Эксперименты по разгону профилированных металлических оболочек.....	28
Заключение.....	34
Список литературы.....	34