ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 142 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Повещенко Ю.А., Гасилов В. А., Ладонкина М. Е., Подрыга В.О., Насекин И.С.

Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в цилиндрической геометрии

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в цилиндрической геометрии / Ю.А.Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 142. 22 с. doi:10.20948/prepr-2018-142
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-142

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Ю.А. Повещенко, В.А. Гасилов,
М.Е. Ладонкина, В.О. Подрыга, И.С. Насекин

Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в цилиндрической геометрии

Москва — 2018

Повещенко Ю.А., Гасилов В.А., Ладонкина М.Е., Подрыга В.О., Насекин И.С.

Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в цилиндрической геометрии

В работе на нерегулярных сетках, на топологическую и геометрическую структуру которых наложены минимальные разумные ограничения, применительно к разностным схемам для задач теории упругости построены аппроксимации операций векторного анализа в цилиндрической геометрии. С учетом энергетического баланса среды построены семейства интегрально согласованных аппроксимаций операций векторного анализа, достаточные для дискретного моделирования этих процессов с учетом кривизны пространства, вызванного цилиндрической геометрией системы. Скалярное произведение в пространстве тензорных сеточных функций, компонент тензора деформаций выбирается согласованно с энергией деформированного тела. На (r, z)–нерегулярных сетках с дифференциальным вращением по азимутальной координате θ построены и исследованы разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в смещениях. Рассмотренные аппроксимации сохраняют свойства дивергентности, самосопряженности и знакоопределенности дифференциальных операторов, а также применимы для решения нестационарных задач гидродинамики с учетом упругих процессов.

Ключевые слова: разностные схемы, метод опорных операторов, теория упругости, цилиндрическая геометрия.

Poveshchenko Yu.A., Gasilov V.A., Ladonkina M.E., Podryga V.O., Nasekin I.S.

Difference schemes of support operator method for equations of elasticity theory in cylindrical geometry

In the work on irregular grids, on the topological and geometric structure of which minimal reasonable restrictions are imposed, the approximations of the vector analysis operations in cylindrical geometry are constructed with respect to difference schemes for problems of the theory of elasticity. In view of the energy balance of the medium, families of integrally consistent approximations of vector analysis operations are constructed that are sufficient for discrete modeling of these processes taking into account the curvature of the space caused by the cylindrical geometry of the system. The scalar product in the space of tensor grid functions, the components of the strain tensor, is chosen in accordance with the energy of the deformed body. On (r, z)–irregular grids by differential rotation in the azimuthal coordinate θ, the difference schemes of the method of support operators for the equations of the theory of elasticity in displacements are constructed and investigated. The approximations considered preserve the properties of divergence, self-adjointness and sign-definiteness of differential operators, and also are applicable to the solution of non-stationary problems of hydrodynamics with allowance for elastic processes.

Key words: difference schemes, method of support operators, theory of elasticity, cylindrical geometry.

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению и исследованию разностных схем метода опорных операторов на нерегулярных сетках [1-6]. Разностные аппроксимации построены для нестационарной системы уравнений теории упругости, включающей описание энергобаланса упругой и внутренней энергии среды. Для построения интегрально согласованных аппроксимаций к уравнениям балансов импульса и энергии упругой среды использован метод опорных операторов. Рассматривается случай аксиальных симметричных деформаций, описание соответствующих процессов производится в цилиндрической (r,z)-геометрии.

Чтобы осветить существо возникающих здесь специфических проблем, проведем некоторые рассуждения на качественном уровне.

Известно, что континуальные смещения в сплошной среде локально делятся на три группы движений [7]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})=\mathbf{u}(\mathbf{r})+(\mathrm{t}_{\mathbf{u}},\delta\mathbf{r})+\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}\times\delta\mathbf{r}$$

параллельный перенос $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, деформацию $(\mathrm{t}_{\mathbf{u}},\delta\mathbf{r})$, определяемую симметризованным тензором смещений $\mathrm{t}_{\mathbf{u}}$, и, наконец, твердотельное вращение с угловой скоростью $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Причем физические характеристики среды – тензор напряжений $X_{\mathbf{u}}=2\mu\mathrm{t}_{\mathbf{u}}+\nu\,\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\delta$ и энергия (деформации) $E=\frac{1}{2}\int\limits_{O}\left(2\mu\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}^{2}\right)+\nu\,\mathrm{tr}^{2}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\right)dV$ – не зависят ни от первой, ни от третьей группы движений, а определяются только деформацией. Здесь $\mu>0$ и $\nu\geq 0$ – коэффициенты Ламе (об остальных обозначениях см. п.2).

В работе получены дискретные аналоги самосопряженных и знакоопределенных операций и дифференциальных операторов $\operatorname{div}\mathrm{t}_{\mathbf{u}}$, $\operatorname{div}\left(\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\delta\right)$ [8] для моделирования силовых полей упругих процессов, а также $\int\limits_{O}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}^{2}\right)dV$ и $\int\limits_{O}\mathrm{tr}^{2}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})dV$, достаточные для моделирования упруго-зависимых энергетических балансов среды с учетом кривизны пространства цилиндрической геометрии системы. Данные конструкции применимы для решения нестационарных задач гидродинамики с учетом упругих процессов [9].

Следуя [10], скалярное произведение в пространстве тензорных сеточных функций, компонент тензора деформаций, выбирается интегрально согласованно с энергией деформированного тела. В силу этого рассмотренные в

[10] 3d–конструкции, используемые на нерегулярных (r,z)-сетках с дифференциальным вращением по азимутальной координате θ, сохраняют свойства дивергентности, самосопряженности и знакоопределенности дифференциальных операторов при предельном переходе $\theta \to 0$, но уже в 2d задаче, поставленной в некоторой области (r,z)-плоскости цилиндрической координатной системы.

2. Постановка задачи

В пространственной области O с границей ∂O рассмотрим уравнения теории упругости в смещениях:

$$\mathrm{div} X_{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad X_{\mathbf{u}} = 2\mu\, \mathrm{t}_{\mathbf{u}} + \nu\, \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\delta, \;\; \mathrm{t}_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} + \nabla\mathbf{u}\right)$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с соответствующим интегральным соотношением:

$$\int\limits_O \mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u}X^T\right)dV + \int\limits_O \mathbf{u}\; \mathrm{div}X dV = \int\limits_{\partial O} \left(X\mathbf{u}, \mathbf{ds}\right),$$

$$\mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u}X^T\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}X\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}X\right)|_{X=X^T}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор смещений, X – произвольный тензор, $X_{\mathbf{u}}$ – тензор напряжений, $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ – объемная плотность внешних сил в пространственной точке $\mathbf{r}$, $\mu > 0$ и $\nu \ge 0$ – коэффициенты Ламе, δ – метрический тензор. Символом tr( ) обозначается след тензора, индексом T – транспонирование.

Вклад в баланс внутренней энергии моделируемой среды, связанный с деформационными процессами (либо их частью, например, только деформацией сдвига), дается как $E = E\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}^2\right), \mathrm{tr}^2\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\right)$. Кроме того, изменение этой энергетической компоненты E связано с диссипативной функцией $d = \mathrm{tr}\left(X_{\mathbf{u}}\, \mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)$, где $X_{\mathbf{u}}$ – тензор напряжений (либо его сдвиговая часть), определяемый возникшими в среде смещениями $\mathbf{u}$, а $\mathrm{t}_{\mathbf{v}}$ – симметризованный тензор скоростей деформаций, определяемый полем скоростей $\mathbf{v}$ движущейся среды.

Таким образом, для моделирования описанных выше упругих процессов в сплошной среде (равно как и более сложных, например, с учетом ее пластичности) достаточно построить дивергентные, самосопряженные и знакоопределенные разностные аналоги тензорных операций векторного анализа $\operatorname{div} t_{\mathbf{u}}$, $\operatorname{div}\left(\operatorname{tr}\left(t_{\mathbf{u}}\right)\delta\right)$ для моделирования силовых полей упругих процессов.

Для моделирования энергий деформации E и диссипативных функций d, их изменяющих, необходима на ячейках Ω сеточной среды аппроксимация интегралов $\left(\int_{\Omega} \operatorname{tr}\left(t_{\mathbf{u}} t_{\mathbf{v}}\right) dV\right)_{\underline{\Delta}}$ и $\left(\int_{\Omega} \operatorname{tr}\left(t_{\mathbf{u}}\right) \operatorname{tr}\left(t_{\mathbf{v}}\right) dV\right)_{\underline{\Delta}}$. Этой цели и посвящено дальнейшее изложение работы.

3. Метрические сетки метода опорных операторов

Следуя [10], для сеток такого типа, состоящих из ячеек (Ω), образованных узлами (ω), гранями (σ) и ребрами (λ), построим замкнутую «сопряженную» сетку, состоящую из доменов $d(\omega)$, т.е. «приузловых» объемов, построенных около узлов ω (см. рис. 1).

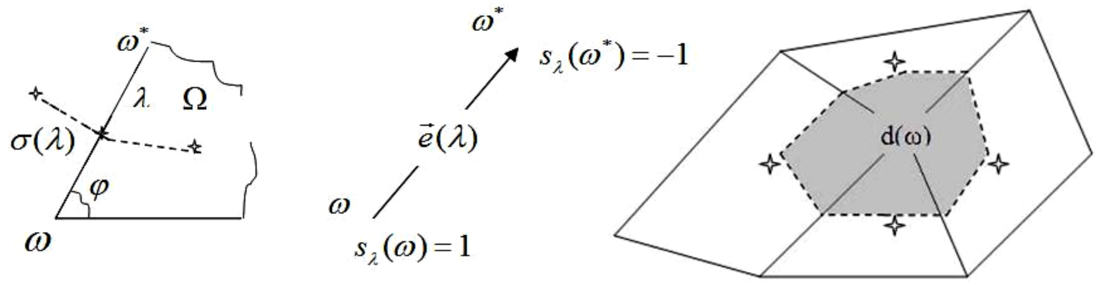


Рис. 1. Построение 2d-базисов в координатной (r, z)-плоскости цилиндрической системы координат.

Грани приузлового домена определяются метрическим оператором сетки $\boldsymbol{\sigma}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$. Базисы $\varphi(\lambda)$ здесь попарно входят в ячейки $\Omega(\lambda)$, примыкающие к ребру λ. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов (с естественным условием нормировки $\sum_{\varphi(\Omega)} V_{\varphi} = V_{\Omega}$). Она определяет конструкцию замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток. Это треугольно-четырехугольные 2D сетки, тетраэдральные, параллелепипедные, призматические и т.д. 3D сетки, а также их мортарные сшивки, адаптивные сетки (с введением новых узлов в ячейках Ω). Далее будут построены разностные аппроксимации операторов, входящих в основную систему уравнений упругости. Для всех упомянутых типов сеток эти аппроксимации сохраняют свойства самосопряженности и знакоопределенности соответствующих исходных дифференциальных операторов.

Дальнейшее изложение носит общий характер, конкретный выбор локальных базисных объемов V_φ иллюстрируется на примере треугольно-четырехугольной 2D сетки.

В области O введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек (Ω), базисов (φ), узлов (ω), ребер (λ) и связанных с ними $(\boldsymbol{\sigma}(\lambda))$ – границами балансовых узловых доменов $d(\omega)$ (см. рис. 1).

Базисы φ создаются системой исходных (ковариантных) ортов $\mathbf{e}(\lambda)$, образованных ребрами. Под центрами ячеек Ω и ребер λ будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов ω их образующих. Кривая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром $\partial\lambda$), представляет собой поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda) = \sum\limits_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$, ориентированную так же, как и орт $\mathbf{e}(\lambda)$. Здесь $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ – орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами $\mathbf{e}(\lambda)$.

Базисный объем дается формулой $V_\varphi = \dfrac{1}{6}\left|\mathbf{e}(\lambda_1)\times\mathbf{e}(\lambda_2)\right|$ для треугольной ячейки Ω, содержащей базис φ, и $V_\varphi = \dfrac{1}{4}\left|\mathbf{e}(\lambda_1)\times\mathbf{e}(\lambda_2)\right|$ для четырехугольной ячейки, если $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ – ребра, образующие базис φ. Наконец, $\sum\limits_{\varphi(\lambda)}$ – суммирование по всем базисам φ, в образовании которых приняло участие ребро λ. Замкнутые вокруг узла ω поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda(\omega))$ образуют узловые домены $d(\omega)$.

К узлам отнесем искомую сеточную функцию $\mathbf{u}$. На ребрах выделим положительное направление (см. рис. 1) и отнесем к ним сеточную функцию

$$\Delta_\lambda \mathbf{u} = -\sum_{\omega(\lambda)} s_\lambda(\omega)\mathbf{u}_\omega = \mathbf{u}_{\omega'} - \mathbf{u}_\omega.$$

Сеточные тензорные поля X задаются своими представлениями в базисах X_φ. Внутреннюю дивергенцию тензорного поля DIN: $(\varphi)\to(\omega)$ определим, аппроксимируя теорему Гаусса на $d(\omega)$:

$$\mathrm{DIN}\, X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda), \quad \boldsymbol{\tau}_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda),\, X_\varphi),$$

где $\sum\limits_{\lambda(\omega)}$ – суммирование по всем ребрам λ, имеющим общий узел ω.

Обозначая через $(\ )_\Delta$ аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\left(\int\limits_O \mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u}X^T\right)dV\right)_\Delta = -\left(\int\limits_O \mathbf{u}\,\mathrm{div}X\,dV - \int\limits_{\partial O}\left(X\mathbf{u},\mathbf{ds}\right)\right)_\Delta =$$

$$= -\sum_\omega(\mathbf{u}_\omega, \mathrm{DIN}\,X) = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi X_\varphi\right) = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{u}_\varphi X_\varphi^T) \equiv$$

$$< \nabla\mathbf{u},\ X > = < X, \nabla\mathbf{u} > = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}X_\varphi)\Big|_{X_\varphi = X_\varphi^T} = < \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}, X >.$$

Здесь $<\nabla\mathbf{u},\mathrm{X}>$ определяется как скалярное произведение сеточных тензорных полей, аппроксимирующее $\left(\int\limits_O \mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u}X^T\right)dV\right)_\Delta$.

Тензорные поля $\dfrac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}$, $\nabla\mathbf{u}$ и $\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}$, а также тензорное поле напряжений $X_{\Delta\mathbf{u}}$ даются своими представлениями в базисах:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)}\Delta_\lambda\mathbf{u}\bullet\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \quad \nabla\mathbf{u}_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\bullet\Delta_\lambda\mathbf{u},$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi + \nabla\mathbf{u}_\varphi\right), \qquad X_{\Delta\mathbf{u}\varphi} = 2\mu\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi} + \nu\ \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi})\delta.$$

Под $\sum\limits_{\lambda(\omega)}$ понимается суммирование по ребрам λ, образующим базис φ.

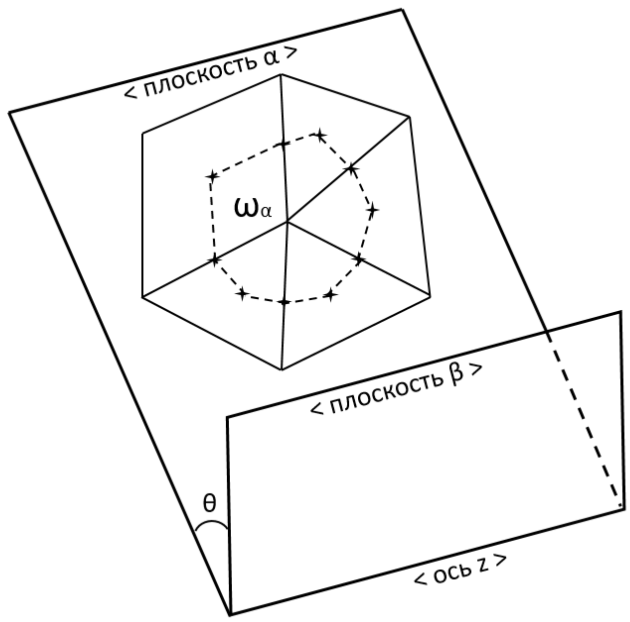
Отметим, что отсюда следуют самосопряженность и положительная определенность операции $\mathrm{DIN}\ \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}} = \left(\mathrm{DIN}\ \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)^* > 0$, поскольку $-\sum\limits_\omega(\mathbf{v}_\omega, \mathrm{DIN}\ \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}) = \sum\limits_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)$, а также самосопряженность и положительная определенность $\mathrm{DIN}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)\delta\right) = \left(\mathrm{DIN}\ \left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)\delta\right)\right)^* > 0$, поскольку $-\sum\limits_\omega\left(\mathbf{v}_\omega, \mathrm{DIN}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)\delta\right)\right) = \sum\limits_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)$.

4. Метрические сетки метода опорных операторов в цилиндрической геометрии

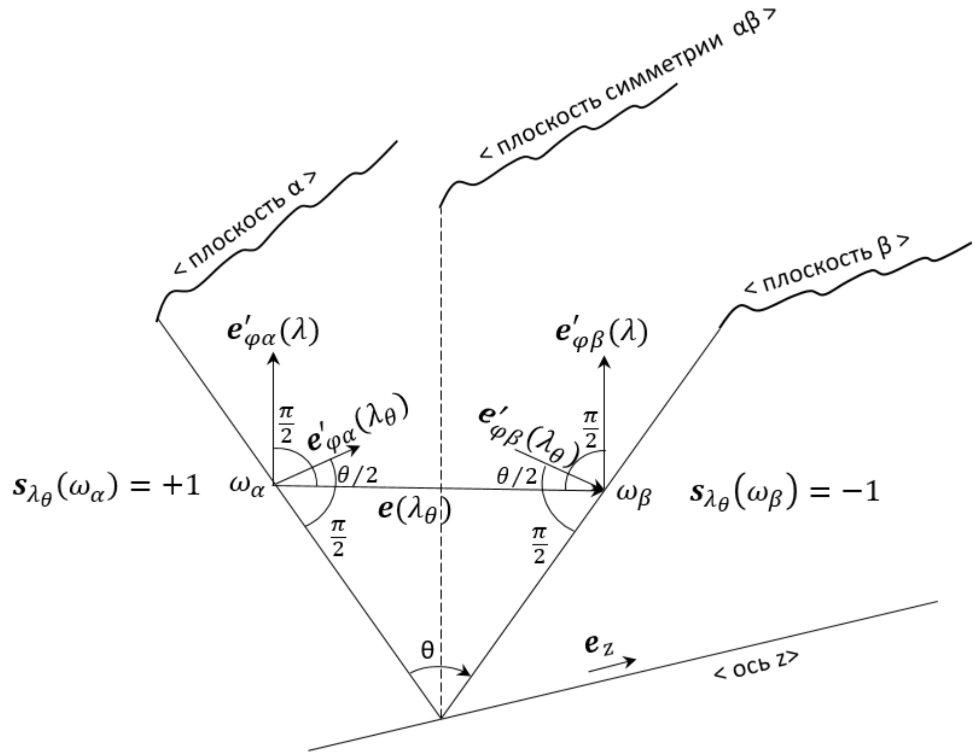
Задачи с осевой симметрией будем рассматривать как трехмерные, где сеточные функции зависят только от переменных (r,z) и не зависят от азимутальной координаты θ. В недеформированном состоянии упругое тело занимает трехмерную область O с границей ∂O. При этом область O есть результат вращения вокруг оси симметрии z двумерной (r,z)-области. В двумерной области на плоскости (r,z) строится нерегулярная сетка (см. рис. 1, 2а). Эта сетка состоит из двумерных ячеек (Ω), узлов (ω), а также двумерных базисов (Φ) и ребер (λ) их образующих. Сетку в трехмерной области O построим путем последовательных поворотов двумерной сетки вокруг оси симметрии z на «малый» угол θ. Заметаемые при таком повороте плоскими ячейками «тонкие» в азимутальном направлении тела также будем называть ячейками, но уже трехмерными и обозначать (Ω). Трехмерные базисы (φ) при этом образуются из двумерных (Φ) (состоящих из ребер (λ)) добавлением «азимутального» ребра λ_θ трехмерной ячейки Ω. На рис. 2 орты $\mathbf{e}(\lambda_\theta)$ соединяют узлы ω_α и ω_β соседних (r,z)-плоскостей α и β в направлении азимутального вращения. Таким образом, трехмерная сетка заполняет всю трехмерную область. Ее ячейки (Ω) имеют размер θ (в радианах) по азимутальной переменной. Узлы (ω) не находятся на оси z. Из сказанного выше следует, что для определенной в узлах (ω) сеточной функции $\mathbf{u}=\{\mathrm{u}_r,\mathrm{u}_z,\mathrm{u}_\theta=0\}$ можно написать $\mathbf{u}=\mathrm{u}_r\mathbf{e}_r+\mathrm{u}_z\mathbf{e}_z+0\cdot\mathbf{e}_\theta$. Здесь $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_\theta$ - единичные радиальный, осевой и азимутальный орты для плоскости (r,z). Очевидно, для α и β плоскостей (см. рис. 2) выполнено $\mathrm{u}_{r\omega\alpha}=\mathrm{u}_{r\omega\beta}=\mathrm{u}_{r\omega}$, $\mathrm{u}_{z\omega\alpha}=\mathrm{u}_{z\omega\beta}=\mathrm{u}_{z\omega}$, $\mathbf{e}_{z\alpha}=\mathbf{e}_{z\beta}=\mathbf{e}_z$.

Введем также орт $\mathbf{e}_1(\lambda_\theta)=\mathbf{e}_{r\beta}-\mathbf{e}_{r\alpha}=\dfrac{1}{r}\mathbf{e}(\lambda_\theta)$, $\mathrm{r}=\mathrm{r}_{\omega(\varphi)}$ – расстояние от оси z до центрального узла ω базиса φ. Очевидно также, что при $\theta\to 0$ орты $\mathbf{e}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_1(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)$ стремятся быть перпендикулярными плоскости (r,z) и быть однонаправленными с ортом $\mathbf{e}_\theta$, направление которого совпадает с азимутальным вращением (по углу θ) этой плоскости. В свою очередь, орты взаимных базисов $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ в пределе $\theta\to 0$ принадлежат (r,z)-плоскости. Т.е. $\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)=\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$. Для модулей базисных векторов предельный переход $\theta\to 0$

дает $\lim\limits_{\theta\to 0}\left|\mathbf{e}_1\left(\lambda_\theta\right)\right| = 0$ и $\lim\limits_{\theta\to 0}\left|\mathbf{e}\left(\lambda_\theta\right)\right| = \lim\limits_{\theta\to 0}(r\theta) = 0$.



а)



б)

Рис. 2. Построение 3d-базисов.

Поскольку для приращения сеточной функции $\mathbf{u}$ вдоль ребра λ_θ справедливо $\Delta_{\lambda_\theta}\mathbf{u} = \mathrm{u}_r\left(\mathbf{e}_{r\beta} - \mathbf{e}_{r\alpha}\right) = \mathrm{u}_r\mathbf{e}_1\left(\lambda_\theta\right) = \frac{1}{r}\mathbf{e}\left(\lambda_\theta\right)$, то формулы раздела 3, определяющие разностный аналог симметричного тензора $\mathrm{t}_\mathbf{u}$, в базисах сетки φ запишутся в виде:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi),\lambda_\theta(\varphi)} \Delta_\lambda\mathbf{u}\bullet\mathbf{e}'_\varphi(\lambda) + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}\left(\lambda_\theta\right)\bullet\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\ ,$$

$$\nabla\mathbf{u}_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi),\lambda_\theta(\varphi)} \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\bullet\Delta_\lambda\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\bullet\mathbf{e}\left(\lambda_\theta\right),$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi + \nabla\mathbf{u}_\varphi\right),$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right) = \sum_{\lambda(\varphi)}\left(\Delta_\lambda\mathbf{u},\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\right) + \frac{\mathrm{u}_r}{r}.$$

Внутреннюю дивергенцию тензорного поля DIN: $(\varphi)\to(\omega)$ определим аналогично разделу 3:

$$\mathrm{DIN}\,X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda) + \sum_{\lambda_\theta(\varphi)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta),$$

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), X_\varphi\right),$$

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta) = \sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\ \sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2} V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), X_\varphi\right).$$

В обозначении $\{4\,|\,8\}$ цифра 4 соответствует количеству суммируемых базисов $\varphi(\lambda)$ для граничного ребра λ в (r,z)-плоскости, а цифра 8 соответствует внутреннему ребру λ.

Базисные объемы V_φ здесь выбираются так, что

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}V_\varphi = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2\theta}\frac{S_{\Phi(\varphi)}}{S_{\Omega\supset\Phi(\varphi)}}\cdot V_{\Omega\supset\varphi} = \frac{1}{2}S_{\Phi(\varphi)}\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi} = \frac{1}{2}V_{\Phi(\varphi)}\,, V_\Phi = S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}.$$

Здесь $V_{\Omega\supset\varphi}$ – объем трехмерной ячейки Ω, содержащей базис φ. $S_{\Omega\supset\Phi(\varphi)}$ – соответствующая этой ячейке площадь в плоскости (r,z). Очевидно, $S_{\Omega} = \sum\limits_{\Phi(\Omega)} S_{\Phi}$.

Площади S_{Φ} в плоских базисах Φ в плоскости (r,z) определяются аналогично значениям площадей V_{φ} для треугольных и четырехугольных ячеек $\Omega\supset\Phi$, содержащих эти базисы (см. раздел 3). Под величиной $\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}$ понимается расстояние от оси z до центра тяжести ячейки Ω.

5. Предельный переход $\theta\to 0$ в разностных аппроксимациях тензорных операций векторного анализа

Моделирование соответствующего цилиндрической геометрии кривизны пространства выполним посредством предельного перехода по азимутальному углу $\theta\to 0$ в построенных в разделах 3, 4 интегрально согласованных сеточных конструкциях метода опорных операторов.

Нам в дальнейшем понадобятся двумерные (в (r,z)-плоскости) разностные аналоги полученных в разделе 4 трехмерных тензорных операций для тензора смещений $\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}$, полученного путем симметризации тензора градиента поля смещений, и дивергенции DIN: $(\varphi)\to(\omega)$, а также двумерный разностный аналог тождества $\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})$.

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_{\Phi} = \sum_{\lambda(\Phi)} \Delta_{\lambda}\mathbf{u}\bullet\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),$$

$$(\nabla\mathbf{u})_{\Phi} = \sum_{\lambda(\Phi)} \mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\bullet\Delta_{\lambda}\mathbf{u},$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_{\Phi} + \nabla\mathbf{u}_{\Phi}\right),$$

$$\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} = \operatorname{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}) = \sum_{\lambda(\Phi)} \left(\Delta_{\lambda}\mathbf{u},\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right),$$

$$\mathrm{DIV}_2 : (\omega)\to(\Phi).$$

Далее для $\mathrm{DIN}_2:(\Phi)\to(\omega)$ имеем:

$$\mathrm{DIN}_2 X=\sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda),\quad \boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),X_\Phi\right),$$
$$V_\Phi=S_\Phi\cdot \mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}.$$

В обозначении $\{2\,|\,4\}$ цифра 2 соответствует количеству суммируемых базисов $\Phi(\lambda)$ для граничного ребра λ в (r,z)-плоскости, а цифра 4 соответствует внутреннему ребру λ.

5.1. Аппроксимация силовых полей упругих процессов посредством операций $\mathrm{div}\,\mathrm{t}_{\mathbf{u}}$

Полагая $\mathrm{X}_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}$, вычислим при $\theta\to 0$, входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta\to 0$) поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\sum\limits_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$ балансной ячейки (балансного домена) $d(\omega)$ (см. рис. 1), перпендикулярную (r,z)-плоскости:

$$\lim_{\theta\to 0}\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\Big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}=\lim_{\theta\to 0}A_{X\lambda}\Big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}+\lim_{\theta\to 0}B_{X\lambda}\Big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}.$$

Вычисляя предел для $A_{X\lambda}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}$, получим

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}A_{X\lambda}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2\theta}\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda),\left\{\sum_{\tilde\lambda(\varphi)}^{2}\left[\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\tilde\lambda)+\mathbf{e}'_\varphi(\tilde\lambda)\cdot\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\right]\right\}\right)$$
$$=\left\{\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\frac{1}{2}\left\{\sum_{\tilde\lambda(\Phi)}^{2}\left[\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\Phi(\tilde\lambda)+\mathbf{e}'_\Phi(\tilde\lambda)\cdot\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\right]\right\}\right)\right\}=$$
$$=\left\{\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)\right\}=\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)\big|_{X_\Phi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}}.$$

Здесь индекс суммирования $\tilde\lambda$, также как и λ, обозначает ребро в плоскости (r,z).

Далее, для предела $B_{X\lambda}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}$ имеем:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}B_{X\lambda}\Bigg|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2\theta}\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda),\left\{\frac{\mathrm{u}_r}{r}\Big[\mathbf{e}(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}(\lambda_\theta)\Big]\right\}\right)=$$

$$=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\left\{\frac{\mathrm{u}_r}{r}\big(\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta\big)\right\}\right)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_\Phi\,\frac{\mathrm{u}_r}{r}\big(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\mathbf{e}_\theta\big)\mathbf{e}_\theta=0,$$

поскольку $\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\perp\mathbf{e}_\theta$.

Здесь использовано:
$\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}(\lambda_\theta)=\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta$, а также $\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)=\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$.

Окончательно:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\Bigg|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}=\cdot\,\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)\big|_{X_\Phi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}}.$$

Теперь аналогично, полагая $X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)$, действующую на боковую поверхность трехмерного балансного домена $d(\omega)$, лежащую в <плоскости симметрии $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) и в пределе (при $\theta\to 0$) совпадающую с плоскостью (r,z):

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}=\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\frac{1}{2}\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\Big[\Delta_\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\cdot\Delta_\lambda\mathbf{u}\Big]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\Big[\mathbf{e}(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}(\lambda_\theta)\Big]\right\}\right)=$$

$$=\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\Big[\big(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\Delta_\lambda\mathbf{u}\big)\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)+\big(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\big)\Delta_\lambda\mathbf{u}\Big]+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\Big[\big(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}(\lambda_\theta)\big)\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\big(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\big)^2\mathbf{e}(\lambda_\theta)\Big]\right\}.$$

Оценим второе слагаемое при $\theta\to 0$:

$$\lim_{\theta\to 0}\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\left[\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\right)\Delta_\lambda\mathbf{u}\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left[\sum_{\Omega(\lambda_\theta),\ \varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha,\varphi\beta\}\in\Omega}\frac{V_\varphi}{2}\left\{\sum_{\lambda(\varphi\alpha)}\left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)\right)\Delta_\lambda\mathbf{u}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\lambda(\varphi\beta)}\left(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda)\right)\Delta_\lambda\mathbf{u}\right\}\right]=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left[\sum_{\Omega(\lambda_\theta),\ \varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha,\varphi\beta\}\in\Omega}\frac{V_\varphi}{2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\sum_{\lambda(\varphi\alpha)}\left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)\right)\left(\sum_{\omega(\lambda_\theta)=\{\omega\alpha,\omega\beta\}}^{2}s_{\lambda_\theta}(\omega)\Delta_{\lambda(\omega)}\mathbf{u}\right)\right\}\right]=0.$$

Здесь мы воспользуемся тем фактом, что в силу симметрии относительно $<$плоскости $\alpha\beta>$ (см. рис. 2б) выполнено:

$$-\left(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda)\right)=\left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)\right),$$

а также тем, что угол между векторами $\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta)$ и $\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\le\left\{\left\langle \textit{угол}\ \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)\right\rangle\right\}\le\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}.$$

В силу этого:

$$\lim_{\theta\to 0}\left|\left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)\right)\right|\le\frac{1}{2r}\left|\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right|.$$

Также, очевидно:

$$\lim_{\theta\to 0}\sum_{\omega(\lambda_\theta)=\{\omega\alpha,\omega\beta\}}^{2}s_{\lambda_\theta}\Delta_{\lambda(\omega)}\mathbf{u}=0.$$

Наконец, $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1}{\theta}V_\varphi=\dfrac{1}{2}V_\Phi$.

Таким образом, в силу выполненной оценки имеем:

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{\theta}\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)\Big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}\right]=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{\theta}\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\left\{\frac{\mathrm{u}_r}{r}\left[\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\right)^2\mathbf{e}(\lambda_\theta)\right]\right\}\right].$$

Мы воспользовались равенствами $\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\Delta_\lambda\mathbf{u}\right)=0$, т.к. $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\perp\Delta_\lambda\mathbf{u}$ и очевидным свойством взаимного базиса $\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}_\varphi(\lambda_\theta)\right)=1$.

Вклад от обеих боковых поверхностей, входящих в $\mathrm{DIN\,X}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi},\theta\to 0}$ “упругих” сил $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)$, оценивается как

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{\theta}\sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2}s_{\lambda_\theta}(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)\right]\Bigg|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{\Phi(\omega)}S_\Phi\,\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\right]\left(-\frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}_r\right)\left[2\frac{1}{r\theta\cos(\theta/2)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\right.$$

$$\left.+4\frac{1}{\left(r\theta\cos(\theta/2)\right)^2}(r\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\theta\to 0}=-\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\mathbf{e}_r.$$

Здесь $V_{2\omega}=\sum\limits_{\Phi(\omega)}V_\Phi$, $V_\Phi=S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}$.

В итоге, с учетом вычисленных ранее «упругих» сил $\lim\limits_{\theta\to 0}\left[\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\Big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}\right]$, действующих на поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ (см. рис. 1), окончательно получаем:

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{\theta}\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right\}\right]=\mathrm{DIN}_2\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right\}-\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}\mathbf{e}_rV_{2\omega}.$$

5.2. Аппроксимация нормальных силовых полей упругих процессов посредством операций $\mathrm{div}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\delta\right)$

Полагая $\mathrm{X}_{\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{X}}(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta\to 0$) поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\sum\limits_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)$ балансного домена $\mathrm{d}(\omega)$ (см. рис. 1), перпендикулярную (r,z)-плоскости:

$$\boldsymbol{\tau}_{X}(\lambda)\Big|_{X_{\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}=\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_{\varphi}\left(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta\right)=\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)V_{\varphi}\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),$$

$$\boldsymbol{\tau}_{X}(\lambda)\Big|_{X_{\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta,\theta\to 0}=\theta\left\{\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_{r}}{r}\right]V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right\}.$$

Суммарный вклад всех таких сил в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ составит:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega)\boldsymbol{\tau}_{X}(\lambda)\Bigg|_{X_{\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}=\sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega)\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_{r}}{r}\right]V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)=$$

$$=\mathrm{DIN}_{2}\left\{\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_{r}}{r}\right]\delta\right\}.$$

Теперь аналогично, полагая $\mathrm{X}_{\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{X}}(\lambda_{\theta})$, действующую на боковую поверхность трехмерного балансного домена $\mathrm{d}(\omega)$, лежащую в <плоскости симметрии $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) и в пределе (при $\theta\to 0$) совпадающую с плоскостью (r,z).

$$\boldsymbol{\tau}_{X}(\lambda_{\theta})\Big|_{X_{\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}=\sum_{\Omega(\lambda_{\theta})}\sum_{\varphi(\lambda_{\theta})\in\Omega}^{2} V_{\varphi}\left(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}),\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\left(\Delta_{\lambda}\mathbf{u},\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)\right)+\frac{\mathrm{u}_{r}}{r}\right\}\delta\right)=$$

$$=\sum_{\Omega(\lambda_{\theta})}\sum_{\varphi(\lambda_{\theta})\in\Omega}^{2} V_{\varphi}\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)+\frac{\mathrm{u}_{r}}{r}\right\}\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}).$$

Отметим, что в силу симметрии относительно плоскостей $\{\alpha\beta\}$ (см. рис. 2б) величина $\Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)=\left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\right)$ является постоянной при поворотах базисов φ на малые углы $\theta \ll 1$, (как и объемы V_φ *и* $\frac{\mathrm{u}_r}{r}$. Очевидно также, что $\lim\limits_{\theta\to 0} \Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)=\left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right)$.

Суммарный вклад всех сил в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ составит:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left[\sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)\Big|_{X_\varphi=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\left\{\sum_{\lambda(\Phi)}\Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right\}\right]\left(-\mathbf{e}_r\right)\left[2\frac{1}{r\theta\cos(\theta/2)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=$$

$$=-\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\sum_{\lambda(\Phi)}\left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\right\}=$$

$$=-\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\right\}.$$

В итоге, с учетом вычисленных ранее «упругих» сил $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\big|_{X_\varphi=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}$, действующих на поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ (см. рис. 1), окончательно получим:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta\right\}=\left\{\mathrm{DIN}_2\left\{\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\delta\right\}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\right\}\right\}.$$

5.3. Аппроксимация энергии деформации упругих процессов

Как отмечалось в разделе 2, для моделирования энергии деформации и диссипативных функций, их изменяющих, на ячейках сетки Ω необходима аппроксимация интегралов:

$$\left(\int_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} \text{ и } \left(\int_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}},$$

где $\mathbf{u}$ – смещения, $\mathbf{v}$ – поле скоростей движущейся среды.

С учетом полученного в разделах 4 и 5 будем иметь:

$$\lim_{\theta\to 0} \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi} = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta,$$

$$\lim_{\theta\to 0} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r}{r} = \mathrm{DIV}_2\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}.$$

Здесь $\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) = \mathrm{DIV}_2\mathbf{u} = \sum\limits_{\lambda(\Phi)} \left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right)$.

Поэтому для первого интеграла получим:

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\theta}\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\sum_{\varphi(\Omega)} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)V_\varphi$$

$$= \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \mathrm{tr}\left[\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta\right)\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta\right)\right] S_\Phi =$$

$$= \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r \mathrm{v}_r}{r^2}\right] S_\Phi.$$

Для второго интеграла:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} = \sum_{\varphi(\Omega)} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)V_\varphi =$$

$$= \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\right] S_\Phi =$$

$$= \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\right] S_\Phi.$$

Окончательно имеем:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} = \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r \mathrm{v}_r}{r^2}\right] S_\Phi,$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} = \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\right] S_\Phi.$$

5.4. Итоговая сводка формул

В заключение приведем итоговую сводку базовых формул метода опорных операторов, полученную для аппроксимации силовых полей упругих процессов посредством операций $\mathrm{div}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)$ и $\mathrm{div}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\delta\right)$, а также соответствующих энергий деформаций и диссипативных функций, их изменяющих, в виде интегралов на ячейках сетки $\int\limits_{\Omega}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV$ и $\int\limits_{\Omega}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV$ в цилиндрической геометрии.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\mathrm{DIN}=\left[\mathrm{DIN}_2\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right\}-\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}\mathbf{e}_r V_{2\omega}\right],$$

$$V_{2\omega}=\sum_{\Phi(\omega)}V_\Phi,\ V_\Phi=S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi};$$

$$\mathrm{DIN}_2 X=\sum_{\lambda(\omega)}s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda),\ \boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),X_\Phi\right),$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\Phi+\nabla\mathbf{u}_\Phi\right),$$

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\Phi=\sum_{\lambda(\Phi)}\Delta_\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\ \nabla\mathbf{u}_\Phi=\sum_{\lambda(\Phi)}\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\cdot\Delta_\lambda\mathbf{u};$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta\right\}=\left\{\mathrm{DIN}_2\left\{\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\delta\right\}-\right.$$
$$\left.-\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)}V_\Phi\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\right\}\right\};$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(\int\limits_{\Omega}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}=\mathrm{r}_\Omega\sum_{\Phi(\Omega)}\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r\mathrm{v}_r}{r^2}\right]S_\Phi,$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\left(\int_{\Omega}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} = \mathrm{r}_{\Omega}\sum_{\Phi(\Omega)}\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u}+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v}+\frac{\mathrm{v}_r}{r}\right]S_{\Phi},$$

$$\mathrm{DIN}_2\mathbf{u} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) = \sum_{\lambda(\Phi)}\left(\Delta_{\lambda}\mathbf{u}, \mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right).$$

Заключение

В работе на структурно-нерегулярных сетках, на топологическую и геометрическую структуру которых наложены минимальные ограничения, и на которых введены метрические соотношения соответственно методу опорных операторов, получены сеточные аппроксимации для самосопряженных и знакоопределенных операций $\mathrm{div}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)$ и $\mathrm{div}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\delta\right)$. Построенные аппроксимации инвариантны к твердотельным поворотам деформируемого образца. Они используются для моделирования силовых полей упругих процессов, а также аппроксимации интегралов вида $\int_{O}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}^2\right)dV$ и $\int_{O}\mathrm{tr}^2\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)dV$, и необходимы при расчете энергетического баланса деформируемой упругой среды. Разностные аппроксимации построены при описании упругих деформаций в цилиндрической геометрии. Дискретная задача с осевой симметрией рассматривалась первоначально как трехмерная, в дальнейшем предполагалась зависимость определенным образом выбранных сеточных функций только от переменных (r,z). При таком «погружении» 2d-цилиндрически-симметричного упругого тела в трехмерное пространство скалярное произведение во введенном для аппроксимации пространстве сеточных функций выбиралось по принципу интегрального согласования с выражением для энергии деформированного тела. Такой подход обеспечил дивергентность, самосопряженность и знакоопределенность разностных аналогов операций $\mathrm{div}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)$ и $\mathrm{div}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\delta\right)$ как в варианте 3d -аппроксимаций, так и при предельном переходе $\theta\to 0$, и дал возможность использовать эти свойства в их двумерных (r,z)–аналогах. Отметим, что раскрытие неопределенностей при использовании предельного перехода $\theta\to 0$ для построения 2d- разностных аналогов исходных дифференциальных операторов с учетом азимутальной симметрии тензоров-диадиков естественным образом привело к разностным аналогам членов вида $\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}$ и $\frac{\mathrm{u}_r}{r}$. Силовые и энергетические характеристики упругих деформаций в построенных разностных схемах инвариантны не только по отношению к параллельному переносу, но и к твердотельным вращениям разностной среды.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15081-офи_м, 18-07-00841-а, 18-51-18004-Болг_а.

Библиографический список

1. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, №. 7. С. 1317-1327.
2. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 5. С. 1092-1096.
3. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Самарский А.А., Фаворский А.П. Шашков М.Ю. Вариационно-операторные разностные схемы для уравнений математической физики. Тбилиси: изд. ТГУ, 1983.
4. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике // ДАН СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1285-1288.
5. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29, № 3. С. 371-381.
6. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30, № 10. С. 1477-1486.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Москва: Наука, 1987.
8. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996.
9. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Цыгвинцев И.П. Однородные разностные схемы для решения сопряжённых задач гидродинамики и упругости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 13. 17 с. doi:10.20948/prepr-2018-13
10. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Матем. моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86-96.

Оглавление