ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 15 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Дудникова Т.В.

О неравновесных состояниях кристаллической решетки

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дудникова Т.В. О неравновесных состояниях кристаллической решетки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 15. 26 с. doi:10.20948/prepr-2018-15
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-15

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

Т. В. Дудникова

О неравновесных состояниях кристаллической решетки

Москва — 2018

Дудникова Т.В.

О неравновесных состояниях кристаллической решетки

Рассматривается задача Коши для бесконечной кристаллической решетки в $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, со случайными начальными условиями. Изучается поведение распределений решений при $t \to \infty$. Главная цель – найти предельные стационарные неравновесные состояния, в которых существует постоянный ненулевой поток тепла, проходящий через решетку.

Ключевые слова: неравновесные состояния, кристаллическая решетка, задача Коши, случайные начальные данные, слабая сходимость мер, гиббсовские меры, плотность потока энергии

Tatiana Vladimirovna Dudnikova

On the non-equilibrium states of the crystal lattice

We consider the Cauchy problem for an infinite crystal lattice in $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, with random initial data. We study the behavior of the distributions of the solutions as $t \to \infty$. The main goal is to find the limiting stationary non-equilibrium states in which there is a constant non-zero heat flux passing through the lattice.

Key words: non-equilibrium states, crystal lattice, Cauchy problem, random initial data, weak convergence of measures, Gibbs measures, energy current density

Оглавление

1. Введение

Данная работа касается математических проблем обоснования статистической физики. Мы рассмотрим неравновесные состояния (т.е. вероятностные меры на фазовом пространстве), при которых в изучаемой модели имеется постоянный поток тепла.

Проблема математического обоснования статистической физики возникла в 19 веке, когда Максвелл, Больцман и Гиббс применили равновесные (гиббсовские) статистические распределения для вычисления средних значений физических величин: средних энергий и скоростей молекул газа, величины свободного пробега и т.п. (см. книгу [14]). Это привело к хорошим результатам для теплоемкости газов и твердых тел, электропроводности металлов и т.д. Такой подход оказался удивительно успешным в классической и еще более в квантовой физике, но математическое обоснование роли равновесных мер до сих пор является открытой проблемой.

Эргодическая теория Биркгофа и фон Неймана была одной из первых попыток такого обоснования (см. [5, 37, 38]). Однако эргодичность реальных физических систем (газов, жидкостей, электронов в металлах и пр.) до сих пор не доказана. Далее эргодическая теория получила бурное развитие для гладких конечномерных динамических систем начиная с 1939 г. в работах Хопфа (об эргодичности геодезического потока на многообразиях (постоянной) отрицательной кривизны [45]) и Аносова и Синая (1967) (об эргодичности У-систем, [3, 42]), подробнее см. в обзорной статье [4].

В 50-х годах появляются работы, в которых впервые изучаются бесконечномерные системы, отвечающие движению бесконечного числа невзаимодействующих частиц (см. статью Добрушина [15]). Первые достижения на этом пути – результат Волковысского и Синая (1971) для идеального газа [11] и Синая (1972) для одномерных твердых шариков [43]. Эргодические свойства системы твердых стержней были также исследованы в работе Айзенмана, Голдстейна и Лейбовица [1, 2], а для газа Лоренца – в работе Бунимовича и Синая [9]. Для решетчатых систем эргодичность и перемешивание впервые были доказаны Лэнфордом и Лейбовицем в 1975 г. в статье [33] для начальных мер, которые являются абсолютно непрерывными относительно канонической гауссовой меры. В 1977 г. Лейбовиц и Шпон [44] доказали сходимость к равновесию для одномерной цепочки гармонических осцилляторов в случае *двухтемпературных* начальных мер, т.е. когда начальная случайная функция "далеко слева" (при $x < -N$) и "далеко справа" (при $x > N$) совпадает с двумя различными однородными случайными процессами, которые имеют гиббсовские распределения с температурами $T_L \neq T_R$. Эта работа является продолжением исследований Лейбовица и др. (см., например, [36, 41]), где изучаются стационарные состояния *конечного* гармонического кристалла, т.е.

одномерной цепочки N гармонических осцилляторов, которые на правом и левом концах связаны с двумя тепловыми резервуарами с температурами T_L и T_R.

В 1977 г. в своем докладе на заседании Московского математического общества (см. [16]) Добрушин высказал новую идею обоснования равновесных распределений, отличную от эргодичности: равновесная мера должна появиться как предельная теорема, вытекающая из условий перемешивания на начальные распределения. Эти условия перемешивания были введены Добрушиным и Суховым [16, 17] при исследовании сходимости к равновесным мерам для свободного движения в системах бесконечного числа частиц или одномерных твердых стержней. Затем аналогичные результаты в этом направлении были получены Болдригини, Пеллегринотти и Триоло в статье [6] для одномерных решетчатых систем. В работах Наказавы [36] и Райдера, Лейбовица, Лиеба [41] был предложен метод построения равновесных мер в двухтемпературной задаче. Однако сходимость распределений решений при $t \to \infty$ не рассматривалась.

В 80-х годах Комеч, Копылова и Ратанов впервые начали изучать эргодические свойства динамических систем, описываемых гиперболическими уравнениями в частных производных (см. [30, 31, 39]). Они доказали сходимость распределений решений к равновесным мерам при условии, что начальная мера является трансляционно-инвариантной и удовлетворяет условиям перемешивания типа Ибрагимова [29]. Используя условие перемешивания, мы доказали сходимость для волновых уравнений и уравнений Клейна–Гордона (см. статью [21] и список литературы в ней) в случае не трансляционно-инвариантных начальных мер. Для многомерных кристаллов сходимость была доказана сначала в трансляционно-инвариантном случае [19], а затем и для двухтемпературной задачи [20]. Данная работа развивает наши предыдущие результаты [20] на более общий класс начальных мер.

Отметим, что во многих работах изучается поток тепла в конечной неупорядоченной (*disordered*) цепочке осцилляторов, массы которых предполагаются случайными. Такая модель была впервые рассмотрена Дайсоном [23]. Позднее результаты были получены Матсудом и Ишии [35], Лейбовицем *et al.* (см., например, [13, 12]). Также многие авторы изучают сходимость к неравновесным состояниям и теплопроводность для *нелинейных* систем, см. [7, 34] для подробного списка литературы. Например, эргодические свойства и долговременное поведение были изучены Фидалео и Ливерани [27] для слабого возмущения бесконечной цепочки гармонических осцилляторов как модель 1D гармонического кристалла с дефектами и Яксичем и Пилле [28] для конечной цепочки негармонических осцилляторов, взаимодействующей с одним резервуаром. Конечная цепочка нелинейных осцилляторов, взаимодействующая с двумя резервуарами, была изучена Экманном, Рей-Белле и другими [24, 25, 40]. Для такой системы существование неравновесных состояний и сходимость к ним были изучены в [24, 40]. В работе [25] Экманн, Пилле и Рей-Белле показали, что тепло (в среднем) течет от “теплого” резервуара к “холодному”. Закон Фурье для гармонического кристалла со стохастическими резервуарами был доказан Бонетто, Лейбовицем и Луккаринем [8]. В данной работе мы вычисляем поток энергии для *бесконечного* многомерного *гармонического* кристалла.

Перейдем к формулировке результатов. В данной работе рассматривается кристаллическая решетка в гармоническом приближении (или так называемый гармонический кристалл) в $\mathbb{Z}^d$. Мы изучаем задачу Коши и предполагаем, что начальные данные $Y_0(x)$, $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{Z}^d$, являются случайным элементом гильбертового пространства $\mathcal{H}_\alpha$, см. определение 2.1 ниже. Предполагается, что распределение случайного поля $Y_0(x)$ является борелевской вероятностной мерой μ_0 с нулевым средним и ковариацией, убывающей при $|x-y|^{-N}$ с некоторым $N>d$. Кроме того, налагается условие **S3** (см. раздел 2.2), которое означает, грубо говоря, что начальные данные $Y_0(x)$ близки к некоторым пространственно-однородным случайным полям $Y_{\mathbf{n}}(x)$ с распределениями $\mu_{\mathbf{n}}$ при $(-1)^{n_j}x_j\to+\infty$ для любых $j=1,\dots,k$, где число $k\in[1,d]$, а $\mathbf{n}$ обозначает вектор $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_k)$ с координатами $n_j\in\{1,2\}$. Обозначим через μ_t, $t\in\mathbb{R}$, вероятностную меру, которая является распределением решения $Y(x,t)$ динамических уравнений со случайными начальными данными Y_0. Мы изучаем асимптотику μ_t при $t\to\infty$. Первая цель работы – доказать сходимость корреляционных функций мер μ_t к пределу,

$$Q_t(x,y)\equiv\int_{\mathcal{H}_\alpha}\Big(Y_0(x)\otimes Y_0(y)\Big)\,\mu_t(dY_0)\to Q_\infty(x,y),\ \ t\to\infty,\ \ x,y\in\mathbb{Z}^d. \quad (1.1)$$

Точные формулы для предельной ковариации Q_∞ даны в (2.18)–(2.23). Они позволяют вывести выражение для предельной плотности потока энергии $\mathbf{J}_\infty$ в терминах начальной ковариации.

Мы применяем полученные результаты к частному случаю, когда $\mu_{\mathbf{n}}$ – гиббсовские меры, соответствующие различным температурам $T_{\mathbf{n}}>0$ (определение гиббсовских мер см. в разделе 4). Поэтому наша модель может быть представлена как “система + 2^k резервуаров”, где “резервуары” состоят из частиц кристалла, которые находятся в областях $\{x\in\mathbb{Z}^d:\ (-1)^{n_j}x_j> a,\,\forall j=1,\dots,k\}$ с некоторыми $a>0$, $k\ge1$ и $n_j\in\{1,2\}$, а “система” – это остальная часть кристалла. В начальный момент времени $(t=0)$ резервуары имеют гиббсовские распределения с соответствующими температурами $T_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_k)$ (в случае $d=k=1$ аналогичная модель была изучена

Шпоном и Лейбовицем [44]). Мы покажем, что плотность потока энергии $\mathbf{J}_\infty$ постоянна. Более того, при дополнительных условиях симметрии на кристалл координаты потока энергии $\mathbf{J}_\infty \equiv (J^1_\infty, \dots, J^d_\infty)$ имеют вид $J^l_\infty = 0$ при $l = k+1, \dots, d$, и

$$J^l_\infty = -c_l \sum \Big(T_{\mathbf{n}}\Big|_{n_l=2} - T_{\mathbf{n}}\Big|_{n_l=1} \Big) \quad \text{при} \quad l = 1, \dots, k, \tag{1.2}$$

с некоторыми числами $c_l > 0$. Здесь суммирование берется по $n_1, \dots, n_{l-1}$, $n_{l+1}, \dots,\ n_k \in \{1{,}2\}$ (см. замечание 4.2 и формулу (4.9)). Таким образом, гармонический кристалл обладает сверхпроводимостью [7], так как градиент температуры отсутствует в формуле (1.2) (напомним, что закон Фурье теплопроводности есть $\mathbf{J} = -\kappa \nabla T(x)$).

Для бесконечной 1D цепочки гармонических осцилляторов на полупрямой с ненулевым граничным условием мы получили результаты (1.1) и (1.3) в работе [22] и доказали, что имеется отрицательный предельный поток энергии в начале координат (см. [22, Remark 2.11]).

Второй результат работы – это доказательство слабой сходимости мер μ_t на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\alpha$ с $\alpha < -d/2$ к предельной мере μ_∞:

$$\mu_t \rightharpoondown \mu_\infty, \quad t \to \infty. \tag{1.3}$$

Это означает сходимость интегралов

$$\int f(Y)\mu_t(dY) \to \int f(Y)\mu_\infty(dY) \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

для любого ограниченного непрерывного функционала f на $\mathcal{H}_\alpha$. Более того, предельная мера μ_∞ является трансляционно-инвариантной гауссовой мерой на $\mathcal{H}_\alpha$ с ковариацией Q_∞, определенной в (1.1). Аналогичная сходимость справедлива при $t \to -\infty$, так как изучаемая система обратима по времени.

2. Главные результаты

2.1. Модель. Рассмотрим дискретную подгруппу Γ пространства $\mathbb{R}^d$, которая изоморфна $\mathbb{Z}^d$. Мы можем допустить, что $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ после подходящей замены координат. *Решетка* в $\mathbb{R}^d$ – это множество точек вида $\overline{r}_\lambda(x) = x + \xi_\lambda$, где $x \in \mathbb{Z}^d$, $\xi_\lambda \in \mathbb{R}^d$, $\lambda = 1, \dots, \Lambda$. Точки решетки представляют собой равновесные положения атомов (молекул, ионов,...) кристалла. Обозначим через $r_\lambda(x,t)$ положения атомов в момент времени t. Тогда динамика отклонений $r_\lambda(x,t) - \overline{r}_\lambda(x)$ подчиняется уравнениям вида

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) = -\sum\limits_{y \in \mathbb{Z}^d} V(x-y)u(y,t), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $u(x,t) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)), u_0 = (u_{01},\ldots,u_{0n}), v_0 = (v_{01},\ldots,v_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, $n = \Lambda d$; $V(x)$ – вещественная матрица взаимодействия (или сила), $(V_{kl}(x))$, $k,l = 1,...,n$. Аналогичные уравнения были рассмотрены в [6, 19, 33, 44]. Ниже система (2.1) изучается с произвольным $n = 1,2,...$

Пусть $Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t)) \equiv (u(\cdot,t), \dot u(\cdot,t)), Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0(\cdot), v_0(\cdot))$. Тогда уравнения (2.1) могут быть переписаны в виде

$$\dot Y(t) = \mathcal{A}(Y(t)), \quad t \in \mathbb{R}; \quad Y(0) = Y_0. \tag{2.2}$$

Формально, эта система гамильтонова, так как

$$\mathcal{A}(Y) = J \begin{pmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Y = J\nabla H(Y), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathcal{V}$ – оператор свертки с матричным ядром V, I – единичная матрица, и H – гамильтониан следующего вида

$$H(Y) := \frac{1}{2}\langle v, v\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{V}u, u\rangle, \quad Y = (u,v), \tag{2.4}$$

где кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}\langle v,v\rangle = \frac{1}{2}\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} |v(x)|^2$, а потенциальная энергия равна $\frac{1}{2}\langle \mathcal{V}u, u\rangle = \frac{1}{2}\sum\limits_{x,y\in\mathbb{Z}^d}\Big(V(x-y)u(y), u(x)\Big)$, $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Предполагается, что начальные данные Y_0 принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, определенному ниже.

Определение 2.1. *$\mathcal{H}_\alpha$ – гильбертово пространство пар $Y \equiv (u(x), v(x))$ $\mathbb{R}^n$-значных функций, зависящих от $x \in \mathbb{Z}^d$, с нормой*

$$\|Y\|_\alpha^2 \equiv \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\Big(|u(x)|^2 + |v(x)|^2\Big)(1+|x|^2)^\alpha < \infty. \tag{2.5}$$

Мы накладываем следующие условия **E1**–**E6** на матрицу V.

E1 Существуют положительные константы C, γ, такие, что $\|V(x)\| \le Ce^{-\gamma|x|}$ для всех $x \in \mathbb{Z}^d$. Здесь $\|V(x)\|$ обозначает норму матрицы.

Пусть $\hat V(\theta)$ обозначает дискретное преобразование Фурье функции $V(x)$:

$$\hat V(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i(x,\theta)} V(x)\,, \quad \theta \in \mathbb{T}^d,$$

где через $\mathbb{T}^d$ обозначается d-мерный тор $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$.

E2 Матрица $V(x)$ действительна и симметрична, т.е.,
$V_{lk}(-x) = V_{kl}(x) \in \mathbb{R}$, $k, l = 1, \dots, n$, $x \in \mathbb{Z}^d$.

Из условий **E1** и **E2** вытекает, что $\hat{V}(\theta)$ – действительно-аналитическая эрмитова матричнозначная функция от $\theta \in \mathbb{T}^d$.

E3 Матрица $\hat{V}(\theta)$ неотрицательно определена при всех $\theta \in \mathbb{T}^d$.

Это условие означает, что уравнение (2.1) – гиперболическое, подобно волновым уравнениям и уравнениям Клейна–Гордона, рассмотренным в [21].

Введем эрмитову неотрицательно определенную матрицу

$$\Omega(\theta) = \big(\hat{V}(\theta)\big)^{1/2} \geq 0. \tag{2.6}$$

Матрица $\Omega(\theta)$ имеет собственные значения $\omega_\sigma(\theta)$, $\sigma = 1, \dots, s$ (так называемые "дисперсионные соотношения"), $0 \leq \omega_1(\theta) < \omega_2(\theta) < \dots < \omega_s(\theta)$, $s \leq n$, с кратностью $r_\sigma = \operatorname{tr} \Pi_\sigma(\theta)$. Через $\Pi_\sigma(\theta)$ обозначаются соответствующие спектральные проекторы.

Лемма 2.1. *(см. [19, Lemma 2.2]). Пусть выполнены условия* **E1** *и* **E2**. *Тогда существует замкнутое подмножество $\mathcal{C}_* \subset \mathbb{T}^d$ лебеговой меры нуль, такое, что справедливы следующие утверждения.*
(i) Для любой точки $\Theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*$ существует окрестность $\mathcal{O}(\Theta)$, такая, что каждое $\omega_\sigma(\theta)$ может быть выбрано как действительно-аналитическая функция в $\mathcal{O}(\Theta)$.
(ii) Собственное значение $\omega_\sigma(\theta)$ имеет постоянную кратность в $\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*$.
(iii) Справедливо следующее спектральное разложение

$$\Omega(\theta) = \sum_{\sigma=1}^{s} \omega_\sigma(\theta)\Pi_\sigma(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*, \tag{2.7}$$

где ортогональная проекция Π_σ – действительно-аналитическая функция на $\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*$.

Кроме того, матрица V удовлетворяет следующему условию.

E4 Для любых $l = 1, \dots, d$ и $\sigma = 1, \dots, s$ функции $\partial_{\theta_l}\omega_\sigma(\theta)$ не равны нулю тождественно на множестве $\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*$.

Чтобы доказать сходимость (1.3), мы предполагаем более сильное условие **E4'**.

E4' Для любых $\sigma = 1, \dots, s$ определитель матрицы вторых производных функции $\omega_\sigma(\theta)$ не равен тождественно нулю на множестве $\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{\theta \in \mathbb{T}^d : \det \hat{V}(\theta) = 0\}, \\ \mathcal{C}_\sigma &= \textstyle\bigcup_{l=1}^{d} \{\theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_* : \partial_{\theta_l}\omega_\sigma(\theta) = 0\},\ \sigma = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тогда лебегова мера множеств $\mathcal{C}_\sigma$ равна нулю, $\sigma = 0,1,...,s$ (см. [19, Lemma 2.3]).

E5 Для любых $\sigma \neq \sigma'$ тождества $\omega_\sigma(\theta) \pm \omega_{\sigma'}(\theta) \equiv \mathrm{const}_\pm$, $\theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*$, не выполнены с константами $\mathrm{const}_\pm \neq 0$.

E6 $\|\hat{V}^{-1}(\theta)\| \in L^1(\mathbb{T}^d)$.

Если $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, то условие **E6** выполнено.

Пример 2.2. *Кристалл со взаимодействием в соседних точках ("nearest neighbor crystal").* Для любого $d, n \geq 1$ рассмотрим решетку, соответствующую квадратичной форме (см. (2.4))

$$\langle \mathcal{V}u, u\rangle = \sum_{l=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{i=1}^{d} \kappa_l^2 |u_l(x+e_i) - u_l(x)|^2 + m_l^2 |u_l(x)|^2), \ \kappa_l > 0, \ m_l \geq 0, \quad (2.9)$$

где $e_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{id})$. Тогда условие **E1** выполнено, и $\hat{V}(\theta) = \Big(\omega_l^2(\theta)\delta_{kl}\Big)_{k,l=1}^{n}$ с

$$\omega_l(\theta) = \sqrt{2\kappa_l^2(1-\cos\theta_1) + ... + 2\kappa_l^2(1-\cos\theta_d) + m_l^2}, \quad l = 1, \ldots, n. \quad (2.10)$$

Следовательно, $V(x)$ удовлетворяет условиям **E2**–**E4'** и $\mathcal{C}_* = \emptyset$. В силу (2.10) равенства $\omega_l(\theta) \pm \omega_{l'}(\theta) \equiv \mathrm{const}_\pm$ с $\mathrm{const}_\pm \neq 0$ невозможны, поэтому условие **E5** тоже выполнено. В случае, когда все $m_l > 0$, множество $\mathcal{C}_0 = \{\theta \in \mathbb{T}^d : \det \hat{V}(\theta) = \omega_1^2(\theta) \cdot \cdots \cdot \omega_n^2(\theta) = 0\}$ пусто и условие **E6** не нужно. В противном случае, т.е. когда $m_l = 0$ для некоторого l, множество $\mathcal{C}_0 = \{0\}$. Тогда **E6** эквивалентно условию $\omega_l^{-2}(\theta) \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Последнее условие выполнено, если $d \geq 3$. Поэтому все условия **E1**–**E6** выполнены для решетки (2.9) в следующих случаях: (i) $d \geq 3$, (ii) $d = 1,2$ и все числа m_l положительны.

Обсудим условия, наложенные на матрицу $V(x)$. В аналогичной форме условия **E1**–**E4** возникают в работах [6, 33]. Условие **E1** означает экспоненциальное убывание взаимодействия в кристалле. Условие **E2** (**E3**) означает, что потенциальная энергия действительна (соответственно, неотрицательна). Условие **E4** исключает дискретную часть спектра. Условие **E4'** обеспечивает то, что стационарные точки фазовой функции невырождены вне множества лебеговой меры нуль. Мы также вводим условие **E5** в случае, когда $n > 1$, которое необходимо для сходимости коварiации Q_t. Оно может быть значительно ослаблено до условия **E5'**, см. замечание 2.6 (iv). Например, условие **E5'** выполнено в случае канонических гауссовых мер, которые рассматривались в [33], см. также раздел 4.1. Условия **E4** и **E5** выполнены для почти всех функций $V(x)$, удовлетворяющих условиям **E1**–**E3** (см. [19]). Кроме того, мы не требуем, чтобы $\omega_\sigma(\theta) \neq 0$. Например, $\omega_\sigma(0) = 0$ для решетки (2.9), если $m_l = 0$. Вместо этого мы требуем, чтобы $\text{mes}\{\theta \in \mathbb{T}^d : \omega_\sigma(\theta) = 0\} = 0$ и накладываем условие **E6**, которое аналогично условию iii) из статьи [33, p.171]. Условие **E6** выполнено для решетки (2.9), если $d \geq 3$ или $m_l > 0$.

Следующее предложение 2.3 доказано в [33, c.150], [6, c.128].

Предложение 2.3. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и выполнены условия* **E1** *и* **E2**. *Тогда для любых $Y_0 \in \mathcal{H}_\alpha$ существует, и притом единственное, решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\alpha)$ задачи Коши (2.2). Оператор $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ непрерывен в $\mathcal{H}_\alpha$.*

2.2. Условия на начальную меру. Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство с математическим ожиданием $\mathbb{E}$, а $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ обозначает борелевскую σ-алгебру в $\mathcal{H}_\alpha$. Предполагается, что $Y_0 = Y_0(\omega, \cdot)$ в уравнении (2.2) – измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha))$. Другими словами, для каждого $x \in \mathbb{Z}^d$ отображение $\omega \mapsto Y_0(\omega, x)$ является измеримым отображением $\Omega \to \mathbb{R}^{2n}$ относительно (пополненных) σ-алгебр Σ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда решение $Y(t) = U(t)Y_0$ является измеримой случайной функцией со значениями в $(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha))$ в силу Предложения 2.3. Обозначим через $\mu_0(dY_0)$ борелевскую вероятностную меру на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, которая является распределением функции Y_0. Без ограничения общности допустим, что $(\Omega, \Sigma, P) = (\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha), \mu_0)$ и $Y_0(\omega, x) = \omega(x)$ для $\mu_0(d\omega)$-почти всех $\omega \in \mathcal{H}_\alpha$ и любого $x \in \mathbb{Z}^d$.

Предположим, что начальная мера μ_0 удовлетворяет условиям **S1**–**S3**.

S1 μ_0 обладает нулевым средним значением:
$\mathbb{E}(Y_0(x)) \equiv \displaystyle\int (Y_0(x))\, \mu_0(dY_0) = 0,\ x \in \mathbb{Z}^d.$

Обозначим через $a \otimes b$ линейный оператор $(a \otimes b)c = a \sum_{j=1}^n b_j c_j$ для $a, b, c \in \mathbb{C}^n$.

S2 Начальные корреляционные функции

$$Q_0^{ij}(x, y) := \mathbb{E}\left(Y_0^i(x) \otimes Y_0^j(y)\right), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.11}$$

удовлетворяют оценке

$$|Q_0^{ij}(x, y)| \leq h(|x - y|), \quad \text{где} \quad r^{d-1}h(r) \in L^1(0, +\infty). \tag{2.12}$$

S3 Зафиксируем некоторое $k \in [1, d]$. Начальная ковариация $Q_0(x, y) = \left(Q_0^{ij}(x, y)\right)_{i,j=0,1}$ зависит от разности $x_l - y_l$ для $l = k+1, \ldots, d$:

$$Q_0(x, y) = q_0(\bar{x}, \bar{y}, \tilde{x} - \tilde{y}), \tag{2.13}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_d) \equiv (\bar{x}, \tilde{x})$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\tilde{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_d)$. Обозначим

$$\mathcal{N}^k := \{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k), n_j \in \{1,2\}\}. \tag{2.14}$$

Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{Z}^k$, таких, что $(-1)^{n_j} y_j > N(\varepsilon)\ \forall j = 1, \ldots, k$, справедлива следующая оценка

$$|q_0(\bar{y} + \bar{z}, \bar{y}, \tilde{z}) - q_{\mathbf{n}}(z)| < \varepsilon \quad \text{для любого } z = (\bar{z}, \tilde{z}) \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.15}$$

Здесь через $q_{\mathbf{n}}(z)$, $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^k$, обозначаются корреляционные матрицы некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_{\mathbf{n}}$ с нулевым средним значением в $\mathcal{H}_\alpha$.

Определение 2.4. *Мера μ называется трансляционно-инвариантной, если $\mu(T_h B) = \mu(B)$ для $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ и $h \in \mathbb{Z}^d$, где $T_h Y(x) = Y(x - h)$, $x \in \mathbb{Z}^d$.*

Заметим, что начальная мера μ_0 не является трансляционно-инвариантной, если $q_{\mathbf{n}}(z) \neq q_{\mathbf{n}'}(z)$ для некоторого $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}'$. В частности, если $k = 1$, то условие **S3** означает, что

$$Q_0(x, y) = q_0(x_1, y_1, \tilde{x} - \tilde{y}), \text{ где } x = (x_1, \tilde{x}),\ \tilde{x} = (x_2, \ldots, x_d), \tag{2.16}$$

$$q_0(y_1 + z_1, y_1, \tilde{z}) \to \begin{cases} q_1(z) & \text{при } y_1 \to -\infty, \\ q_2(z) & \text{при } y_1 \to +\infty, \end{cases} \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.17}$$

Начальные меры μ_0 с корреляцией, удовлетворяющей условиям (2.16) и (2.17), были изучены в [20]. Примеры мер μ_0, удовлетворяющих условиям **S1**–**S3**, даны в разделе 3.

2.3. Сходимость корреляционных функций. Введем предельную корреляционную матрицу $Q_\infty(x, y) = (Q_\infty^{ij}(x, y))_{i,j=0}^1$ следующем образом:

$$Q_\infty(x, y) = q_\infty(x - y), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.18}$$

где $q_\infty(x)$ имеет вид (в преобразовании Фурье)

$$\hat{q}_\infty(\theta) = \sum_{\sigma=1}^{s} \Pi_\sigma(\theta)(\mathbf{M}_{k,\sigma}^+(\theta) + i\,\mathbf{M}_{k,\sigma}^-(\theta))\Pi_\sigma(\theta),\ \ \theta \in \mathbb{T}^d \setminus \mathcal{C}_*. \tag{2.19}$$

Здесь $\Pi_\sigma(\theta)$ – спектральная проекция из Леммы 2.1 (iii),

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{k,\sigma}^+(\theta) &= \frac{1}{2^k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^k} L_1^+(\hat{q}_{\mathbf{n}}(\theta)) \left[1 + S_{k,\mathbf{n}}^{\text{even}}(\omega_\sigma(\theta))\right], \\ \mathbf{M}_{k,\sigma}^-(\theta) &= \frac{1}{2^k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^k} L_2^-(\hat{q}_{\mathbf{n}}(\theta))\, S_{k,\mathbf{n}}^{\text{odd}}(\omega_\sigma(\theta)), \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$
\begin{aligned}
S_{k,\mathbf{n}}^{\mathrm{even}}(\omega_\sigma) &= \sum_{\mathrm{even}\, m\in\{1,\dots,k\}} \sum_{(p_1,\dots,p_m)\in\mathcal{P}_m(k)} \mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial\theta_{p_1}}\right)\cdot\ldots\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial\theta_{p_m}}\right)(-1)^{n_{p_1}+\ldots+n_{p_m}}\\
S_{k,\mathbf{n}}^{\mathrm{odd}}(\omega_\sigma) &= \sum_{\mathrm{odd}\, m\in\{1,\dots,k\}} \sum_{(p_1,\dots,p_m)\in\mathcal{P}_m(k)} \mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial\theta_{p_1}}\right)\cdot\ldots\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial\theta_{p_m}}\right)(-1)^{n_{p_1}+\cdots+n_{p_m}}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

где через $\mathcal{P}_m(k)$ обозначается множество всех сочетаний элементов из множества $\{1,\dots,k\}$, взятых по m (например, $\mathcal{P}_2(3)=\{(1{,}2),(2{,}3),(1{,}3)\}$),

$$
\begin{aligned}
L_1^+(\hat q_{\mathbf{n}}(\theta)) &:= \tfrac12\left(\hat q_{\mathbf{n}}(\theta)+C(\theta)\hat q_{\mathbf{n}}(\theta)C^*(\theta)\right),\\
L_2^-(\hat q_{\mathbf{n}}(\theta)) &:= \tfrac12\left(C(\theta)\hat q_{\mathbf{n}}(\theta)-\hat q_{\mathbf{n}}(\theta)C^*(\theta)\right),
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

$$
C(\theta)=\begin{pmatrix} 0 & \Omega(\theta)^{-1}\\ -\Omega(\theta) & 0\end{pmatrix},\quad C^*(\theta)=\begin{pmatrix} 0 & -\Omega(\theta)\\ \Omega(\theta)^{-1} & 0\end{pmatrix}. \tag{2.23}
$$

Рассмотрим некоторые примеры формул (2.20) и (2.21). Если $k=1$, то начальная ковариация Q_0 удовлетворяет условиям (2.16) и (2.17) и формулы (2.20) принимают вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1,\sigma}^+(\theta) &= \tfrac12 L_1^+\left(\hat q_2(\theta)+\hat q_1(\theta)\right),\\
\mathbf{M}_{1,\sigma}^-(\theta) &= \tfrac12 L_2^-\left(\hat q_2(\theta)-\hat q_1(\theta)\right)\mathrm{sgn}\left(\tfrac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_1}\right).
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Если $d=n=1$, то $\Pi_\sigma(\theta)\equiv 1$ и формулы (2.24) были получены в [6, p.139]. Для любых $d,n\ge 1$ и $k=1$ эти формулы были выведены в [20].

Если $k=2$, то условие **S3** равносильно тому, что $Q_0(x,y)=q_0(\bar x,\bar y,\tilde x-\tilde y)$, где

$$
q_0(\bar y+\bar z,\bar y,\tilde z)\to q_{n_1n_2}(z)\ \text{ при }\ (-1)^{n_1}y_1\to+\infty\ \text{ и }\ (-1)^{n_2}y_2\to+\infty.
$$

В этом случае формулы (2.20) имеют вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{2,\sigma}^+(\theta) &= \frac14\sum_{n_1,n_2=1}^{2} L_1^+\left(\hat q_{n_1n_2}(\theta)\right)\left[1+(-1)^{n_1+n_2}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_1}\right)\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_2}\right)\right],\\
\mathbf{M}_{2,\sigma}^-(\theta) &= \frac14\sum_{n_1,n_2=1}^{2} L_2^-\left(\hat q_{n_1n_2}(\theta)\right)\left[(-1)^{n_1}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_1}\right)+(-1)^{n_2}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Первым результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть $d,n\ge 1$, $\alpha<-d/2$, и выполнены условия* **E1**–**E6** *и* **S1**–**S3**. *Тогда имеет место сходимость (1.1), где Q_∞ введена в (2.18)–(2.23).*

Замечание 2.6. (i) В случае, когда начальная корреляционная функция является трансляционно инвариантной, т.е. $Q_0(x,y)=q_0(x-y)$, матрица $\hat{q}_\infty$ имеет вид

$$\hat{q}_\infty(\theta)=\sum_{\sigma=1}^{s}\Pi_\sigma(\theta)L_1^+(\hat{q}_0(\theta))\Pi_\sigma(\theta),\quad \theta\in\mathbb{T}^d\setminus\mathcal{C}_*. \tag{2.25}$$

(ii) Пусть начальная корреляция $Q_0(x,y)$ удовлетворяет более сильному условию, чем (2.15). А именно, допустим, что Q_0 имеет вид (2.13) и $\lim_{|\bar{y}|\to\infty}q_0(\bar{y}+\bar{z},\bar{y},\tilde{z})=q_*(z)$ для всех $z=(\bar{z},\tilde{z})\in\mathbb{Z}^d$. Тогда условие (2.15) выполнено с $q_{\mathbf{n}}(z)=q_*(z)$ для всех $\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k$. В этом случае справедлива Теорема 2.5 и $\hat{q}_\infty$ имеет вид (2.25) с $\hat{q}_*$ вместо $\hat{q}_0$. Поэтому Теорема 2.5 обобщает результат статьи [19, Proposition 3.2], где сходимость (1.1) была доказана в случае, когда $Q_0(x,y)=q_0(x-y)$.

(iii) Предположим, что начальная корреляционная функция вида

$$Q_0(x,y)=T(\bar{x}+\bar{y})r_0(x-y)\ \text{ или }\ Q_0(x,y)=\sqrt{T(\bar{x})T(\bar{y})}r_0(x-y),$$

где $T(\bar{x})$ – некоторая ограниченная неотрицательная последовательность на $\mathbb{Z}^k$, а $r_0(x)=(r_0^{ij}(x))$ – корреляционная матрица некоторой трансляционно-однородной меры на $\mathcal{H}_\alpha$, обладающей нулевым средним и удовлетворяющей условию **S2**. Допустим, что для любого $\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $\bar{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{Z}^k$: $(-1)^{n_j}x_j>N(\varepsilon)$, где $j=1,\dots,k$, имеет место оценка $|T(\bar{x})-T_{\mathbf{n}}|<\varepsilon$. Тогда условие (2.15) выполнено с $q_{\mathbf{n}}(x)=T_{\mathbf{n}}r_0(x)$. В этом случае справедлива Теорема 2.5, и формулы (2.20) могут быть записаны в более простой форме:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^+_{k,\sigma}(\theta)&=L_1^+(\hat{r}_0(\theta))\cdot\frac{1}{2^k}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k}T_{\mathbf{n}}\left[1+S^{\rm even}_{k,\mathbf{n}}(\omega_\sigma(\theta))\right],\\ \mathbf{M}^-_{k,\sigma}(\theta)&=L_2^-(\hat{r}_0(\theta))\cdot\frac{1}{2^k}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k}T_{\mathbf{n}}\,S^{\rm odd}_{k,\mathbf{n}}(\omega_\sigma(\theta)).\end{aligned}\tag{2.26}$$

(iv) Условие **E5** на матрицу V может быть значительно ослаблено. А именно, достаточно наложить следующее условие.

E5' Если для некоторого $\sigma\neq\sigma'$ $\omega_\sigma(\theta)+\omega_{\sigma'}(\theta)\equiv{\rm const}_+$ или $\omega_\sigma(\theta)-\omega_{\sigma'}(\theta)\equiv{\rm const}_-$ с ${\rm const}_\pm\neq0$, то либо $p^{11}_{\sigma\sigma'}(\theta)-\omega_\sigma(\theta)\omega_{\sigma'}(\theta)p^{00}_{\sigma\sigma'}(\theta)\equiv0$ и $\omega_\sigma(\theta)p^{01}_{\sigma\sigma'}(\theta)+\omega_{\sigma'}(\theta)p^{10}_{\sigma\sigma'}(\theta)\equiv0$, либо $p^{11}_{\sigma\sigma'}(\theta)+\omega_\sigma(\theta)\omega_{\sigma'}(\theta)p^{00}_{\sigma\sigma'}(\theta)\equiv0$ и $\omega_\sigma(\theta)p^{01}_{\sigma\sigma'}(\theta)-\omega_{\sigma'}(\theta)p^{10}_{\sigma\sigma'}(\theta)\equiv0$. Здесь по определению

$$p^{ij}_{\sigma\sigma'}(\theta):=\Pi_\sigma(\theta)\hat{q}^{ij}_{\mathbf{n}}(\theta)\Pi_{\sigma'}(\theta),\ \ \theta\in\mathbb{T}^d,\ \ \sigma,\sigma'=1,\dots,s,\ \ i,j=0,1. \tag{2.27}$$

2.4. Слабая сходимость мер. Для того чтобы доказать сходимость (1.3) мер μ_t, мы наложим более сильное условие **S4** на меру μ_0, чем оценка (2.12). Чтобы сформулировать это условие, обозначим через $\sigma(\mathcal{A})$ ($\mathcal{A}\subset\mathbb{Z}^d$) σ-алгебру в пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, порожденную начальными данными $Y_0(x)$, где $x\in\mathcal{A}$. Введем коэффициент перемешивания Ибрагимова вероятностной меры μ_0 (ср. [29, Определение 17.2.2]) следующим образом

$$\varphi(r)\equiv \sup_{\substack{\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbb{Z}^d:\\ \mathrm{dist}(\mathcal{A},\mathcal{B})\ge r}} \ \sup_{\substack{A\in\sigma(\mathcal{A}),B\in\sigma(\mathcal{B})\\ \mu_0(B)>0}} \frac{|\mu_0(A\cap B)-\mu_0(A)\mu_0(B)|}{\mu_0(B)}. \qquad (2.28)$$

Определение 2.7. *Мера μ_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова, если $\varphi(r)\to 0$ as $r\to\infty$.*

S4 Начальная средняя плотность “энергии” равномерно ограничена:

$$\mathbb{E}[|u_0(x)|^2+|v_0(x)|^2]=\mathrm{tr}\,Q_0^{00}(x,x)+\mathrm{tr}\,Q_0^{11}(x,x)\le e_0<\infty,\ \ x\in\mathbb{Z}^d. \qquad (2.29)$$

Более того, μ_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова, и

$$\int_0^\infty r^{d-1}\varphi^{1/2}(r)\,dr<\infty. \qquad (2.30)$$

Замечание 2.8. В силу [29, Lemma 17.2.3] и условий **S1** и **S4** справедлива оценка (2.12) с $h(r)=Ce_0\varphi^{1/2}(r)$, где число e_0 – из оценки (2.29).

Определение 2.9. *Обозначим через μ_t борелевскую вероятностную меру на $\mathcal{H}_\alpha$, которая является распределением $Y(t)$: $\mu_t(B)=\mu_0(U(-t)B)$ для любого $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$, $t\in\mathbb{R}$. Корреляционные функции меры μ_t определяются следующим образом:*

$$Q_t^{ij}(x,y)=\mathbb{E}\left(Y^i(x,t)\otimes Y^j(y,t)\right),\quad i,j=0,1,\ \ x,y\in\mathbb{Z}^d. \qquad (2.31)$$

Здесь $Y^i(x,t)$ – координаты случайного решения $Y(t)=(Y^0(\cdot,t),Y^1(\cdot,t))$. Обозначим через $\mathcal{Q}_t$ квадратичную форму с матричным ядром $(Q_t^{ij}(x,y))_{i,j=0,1}$,

$$\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi)=\int|\langle Y,\Psi\rangle|^2\,\mu_t(dY)=\sum_{i,j=0,1}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}\Big(Q_t^{ij}(x,y),\Psi^i(x)\otimes\Psi^j(y)\Big),\ t\in\mathbb{R},$$

где $\Psi=(\Psi^0,\Psi^1)\in\mathcal{S}:=S\oplus S$, $S\equiv S(\mathbb{Z}^d)\otimes\mathbb{R}^n$, через $S(\mathbb{Z}^d)$ обозначается пространство последовательностей, убывающих быстрее любой степени $1/|x|$, $\langle Y,\Psi\rangle:=\sum_{i=0,1}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\big(Y^i(x),\Psi^i(x)\big)$. Ниже скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают также эрмитово скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L^2(\mathbb{T}^d)\otimes\mathbb{R}^n$ или в их различных расширениях.

Для вероятностной меры μ на $\mathcal{H}_\alpha$ обозначим через $\hat\mu$ характеристический функционал (преобразование Фурье): $\hat\mu(\Psi) \equiv \displaystyle\int \exp(i\langle Y, \Psi\rangle)\,\mu(dY)$, $\Psi \in \mathcal{S}$.

Мера μ называется *гауссовой* (с нулевым средним значением), если ее характеристический функционал имеет вид $\hat\mu(\Psi) = \exp\Big\{-\dfrac{1}{2}\mathcal{Q}(\Psi, \Psi)\Big\}$, $\Psi \in \mathcal{S}$, где $\mathcal{Q}$ – вещественная неотрицательная квадратичная форма в $\mathcal{S}$.

Теорема 2.10. *Пусть $d, n \geq 1$, $\alpha < -d/2$ и выполнены условия* **E1**–**E3**, **E4'**, **E5**, **E6**, **S1**, **S3**, *и* **S4**. *Тогда справедливы следующие утверждения.*
(i) Меры μ_t слабо сходятся в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\alpha$,

$$\mu_t \to \mu_\infty \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{2.32}$$

Предельная мера μ_∞ является гауссовой, трансляционно-инвариантной мерой на $\mathcal{H}_\alpha$. Характеристический функционал меры μ_∞ имеет вид $\hat\mu_\infty(\Psi) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)\}$, $\Psi \in \mathcal{S}$, где $\mathcal{Q}_\infty$ – квадратичная форма с матричным ядром $Q_\infty(x, y)$, определенным в (2.18).
(ii) Мера μ_∞ является стационарной, т.е. $[U(t)]^*\mu_\infty = \mu_\infty$, $t \in \mathbb{R}$.
(iii) Поток $U(t)$ является перемешивающим относительно меры μ_∞, т.е. для любых $f, g \in L^2(\mathcal{H}_\alpha, \mu_\infty)$,

$$\lim_{t\to\infty}\int f(U(t)Y)g(Y)\,\mu_\infty(dY) = \int f(Y)\,\mu_\infty(dY)\int g(Y)\,\mu_\infty(dY).$$

В частности, поток $U(t)$ эргодичен относительно меры μ_∞.

Утверждение (i) Теоремы 2.10 вытекает из Лемм 2.2 и 2.3.

Лемма 2.2. *Семейство мер $\{\mu_t,\, t \in \mathbb{R}\}$ слабо компактно в $\mathcal{H}_\alpha$ с любым $\alpha < -d/2$, и справедлива следующая оценка:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|U(t)Y_0\|_\alpha^2 < \infty. \tag{2.33}$$

Лемма 2.3. *Для любых $\Psi \in \mathcal{S}$ характеристические функционалы сходятся к гауссовскому функционалу,*

$$\hat\mu_t(\Psi) := \int e^{i\langle Y,\Psi\rangle}\mu_t(dY) \to \exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi, \Psi)\Big\}, \quad t \to \infty. \tag{2.34}$$

Лемма 2.2 (Лемма 2.3) обеспечивает существование (соответственно, единственность) предельной меры μ_∞. Эти леммы могут быть доказаны, используя методы из работы [20]. Утверждение (ii) Теоремы 2.10 вытекает из сходимости (2.32), так как группа $U(t)$ непрерывна в $\mathcal{H}_\alpha$ в силу Предложения 2.3. Эргодичность и перемешивание предельных мер μ_∞ могут быть доказаны, используя те же рассуждения, как в работе [19].

3. Примеры начальных мер

Для простоты допустим, что $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^1$, и построим гауссовы начальные меры μ_0, удовлетворяющие условиям **S1**–**S4**. Если $k = 1$ (см. условие **S3**), то пример такой меры μ_0 был построен в [20]. Повторим это построение. Сначала введем меры μ_n, $n = 1{,}2$, на $\mathcal{H}_\alpha$ с помощью корреляционных функций $q_n^{ij}(x-y)$, которые равны нулю для $i \neq j$, и

$$\hat{q}_n^{ii}(\theta) := F_{z\to\theta}[q_n^{ii}(z)] \in L^1(\mathbb{T}^d), \quad \hat{q}_n^{ii}(\theta) \geq 0,\ i = 0{,}1. \tag{3.1}$$

Тогда в силу теоремы Минлоса [32] существуют борелевские гауссовые меры μ_n на $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha < -d/2$, с корреляционными функциями $q_n^{ij}(x-y)$, поскольку

$$\begin{aligned} \int \|Y\|_\alpha^2 \mu_n(dY) &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} (1+|x|^2)^\alpha \mathrm{tr}\ (q_n^{00}(0) + q_n^{11}(0)) \\ &= C(\alpha,d) \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{tr}\ (\hat{q}_n^{00}(\theta) + \hat{q}_n^{11}(\theta))\, d\theta < \infty. \end{aligned}$$

Введем (Y_1, Y_2) как единичную случайную функцию на вероятностном пространстве $(\mathcal{H}_\alpha \times \mathcal{H}_\alpha, \mu_1 \times \mu_2)$. Тогда $Y_n(x)$, $n = 1{,}2$, являются независимыми гауссовыми векторами на $\mathcal{H}_\alpha$. Кроме того, введем функции $\zeta_n \in C(\mathbb{Z})$ следующим образом

$$\zeta_1(s) = \begin{cases} 1, & \text{при}\ \ s < -a, \\ 0, & \text{при}\ \ s > a, \end{cases} \quad \zeta_2(s) = \begin{cases} 1, & \text{при}\ \ s > a, \\ 0, & \text{при}\ \ s < -a, \end{cases} \quad \text{где}\ \ a > 0. \tag{3.2}$$

Наконец, определим борелевскую вероятностную меру μ_0 как распределение случайной функции $Y_0(x) = \zeta_1(x_1)Y_1(x) + \zeta_2(x_1)Y_2(x)$. Тогда корреляционные функции меры μ_0 имеют вид

$$Q_0(x,y) = q_1(x-y)\zeta_1(x_1)\zeta_1(y_1) + q_2(x-y)\zeta_2(x_1)\zeta_2(y_1), \tag{3.3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \tilde{x})$, $y = (y_1, \tilde{y}) \in \mathbb{Z}^d$, и $q_n(x-y)$ – корреляционные матрицы мер μ_n. Поэтому $Q_0(x,y)$ имеет вид $Q_0(x,y) = q_0(x_1, y_1, \tilde{x} - \tilde{y})$, и

$$q_0(y_1 + z_1, y_1, \tilde{z}) = \left\{ \begin{array}{lll} q_1(z), & \text{если} & y_1 < -a - |z_1| \\ q_2(z), & \text{если} & y_1 > a + |z_1| \end{array} \right| \ z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{Z}^d.$$

Следовательно, мера μ_0 удовлетворяет условиям **S1** и **S3**. Допустим, дополнительно к (3.1), что

$$q_n^{ii}(z) = 0 \quad \text{при} \quad |z| \geq r_0. \tag{3.4}$$

Тогда условие **S2** выполнено. Более того, условие **S4** тоже выполнено с $\varphi(r) = 0$, $r \geq r_0$. Оценки (3.1) и (3.4) справедливы, например, если мы возьмем

$q_n^{ii}(z) = f(z_1)f(z_2)\cdot\dots\cdot f(z_d)$, где

$$f(z) = \begin{cases} N_0 - |z|, & \text{при } |z| \le N_0, \\ 0, & \text{при } |z| > N_0 \end{cases} \quad \text{с} \quad N_0 := [r_0/\sqrt{d}],$$

(через $[\cdot]$ обозначается целая часть). Тогда $\hat{f}(\theta) = (1-\cos N_0\theta)/(1-\cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}^1$, и справедлива оценка (3.1).

Для любых $k \ge 1$ определим меру μ_0 следующим образом. Сначала введем меры $\mu_{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n} \in \mathcal{N}^k$) на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$ с помощью корреляционных функций $q_{\mathbf{n}}^{ij}(x-y)$, которые равны нулю при $i \ne j$ и удовлетворяют оценкам (3.1). Во-вторых, введем $(Y_{\mathbf{n}}(x))_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k}$ как единичную случайную функцию на вероятностном пространстве $\Big((\mathcal{H}_\alpha)^{2^k}, \bigotimes\limits_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k}\mu_{\mathbf{n}}\Big)$. Тогда $Y_{\mathbf{n}}(x)$, $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^k$, – независимые гауссовые векторы в $\mathcal{H}_\alpha$. Далее возьмем функции $\overline{\zeta}_{\mathbf{n}} \in C(\mathbb{Z}^k)$, такие, что

$$\overline{\zeta}_{\mathbf{n}}(\bar{x}) = \zeta_{n_1}(x_1)\cdot\dots\cdot\zeta_{n_k}(x_k), \;\; \bar{x} = (x_1,\dots,x_k), \;\; \mathbf{n} = (n_1,\dots,n_k), \;\; n_j \in \{1{,}2\},$$

где функции ζ_n определены в (3.2). Наконец, определим борелевскую вероятностную меру μ_0 как распределение случайной функции

$$Y_0(x) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k} \overline{\zeta}_{\mathbf{n}}(\bar{x}) Y_{\mathbf{n}}(x), \;\; x = (\bar{x},\tilde{x}) \in \mathbb{Z}^d, \quad \tilde{x} = (x_{k+1},\dots,x_d). \tag{3.5}$$

Тогда корреляционные функции меры μ_0 имеют вид

$$Q_0(x,y) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k} q_{\mathbf{n}}(x-y)\overline{\zeta}_{\mathbf{n}}(\bar{x})\overline{\zeta}_{\mathbf{n}}(\bar{y}), \tag{3.6}$$

где $x = (\bar{x},\tilde{x})$, $y = (\bar{y},\tilde{y}) \in \mathbb{Z}^d$, и $q_{\mathbf{n}}(x-y)$ – корреляционные матрицы мер $\mu_{\mathbf{n}}$. Поэтому $Q_0(x,y) = q_0(\bar{x},\bar{y},\tilde{x}-\tilde{y})$, и для любого $z = (\bar{z},\tilde{z}) \in \mathbb{Z}^d$

$$q_0(\bar{y}+\bar{z},\bar{y},\tilde{z}) = q_{\mathbf{n}}(z) \quad \text{при } (-1)^{n_j}y_j > a + |z_j|, \quad j = 1,\dots,k.$$

Следовательно, мера μ_0 удовлетворяет условиям **S1** и **S3**. Если $q_{\mathbf{n}}^{ii}(z) = 0$ при $|z| \ge r_0$, то условия **S2** и **S4** тоже выполнены.

4. Поток энергии

Применим Теорему 2.5 в случае, когда $\mu_{\mathbf{n}}$ являются гиббсовскими мерами, соответствующими положительным температурам $T_{\mathbf{n}}$, и выведем выражение для предельной средней плотности потока энергии $\mathbf{J}_\infty = (J_\infty^1, ..., J_\infty^d)$. Кроме того, при дополнительных условиях на матрицу взаимодействия V мы получим, что $J_\infty^l = 0$ при $l = k+1, \ldots, d$, и J_∞^l удовлетворяет (1.2) при $l = 1, \ldots, k$.

Сначала выведем выражение для потока энергии в случае решений с конечной энергией $u(x,t)$ (см. (2.4)). Для полупространства $\Omega_l := \{x \in \mathbb{Z}^d : x_l \geq 0\}$ определим энергию в области Ω_l (ср. (2.4)) как

$$\mathcal{E}_l(t) := \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega_l} \Big\{ |\dot{u}(x,t)|^2 + \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \Big(u(x,t), V(x-y) u(y,t) \Big) \Big\}.$$

Введем новые переменные: $x = x' + me_l$, $y = y' + pe_l$, где $x', y' \in \mathbb{Z}^d$ с $x'_l = y'_l = 0$, $e_l = (\delta_{l1}, \ldots, \delta_{ld})$, $l = 1, \ldots, d$. Применяя уравнения (2.1), получим

$$\dot{\mathcal{E}}_l(t) = \sum_{x'} J^l(x', t).$$

Здесь $J^l(x',t)$ обозначает плотность потока энергии в направлении e_l:

$$\begin{aligned} J^l(x',t) := \frac{1}{2} \sum_{y'} \Big\{ &\sum_{m \leq -1,\, p \geq 0} \Big(\dot{u}(x' + me_l, t), V(x' + me_l - y' - pe_l) u(y' + pe_l, t) \Big) \\ &- \sum_{m \geq 0,\, p \leq -1} \Big(\dot{u}(x' + me_l, t), V(x' + me_l - y' - pe_l) u(y' + pe_l, t) \Big) \Big\}, \end{aligned}$$

где $x', y' \in \mathbb{Z}^d$ с $x'_l = y'_l = 0$. Теперь пусть $u(x,t)$ – случайное решение уравнения (2.1) с начальной мерой μ_0, удовлетворяющей условиям **S1**–**S3**. Из сходимости (1.1) вытекает, что

$$\mathbb{E}\left(J^l(x',t)\right) \to J_\infty^l := -\frac{1}{2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} z_l \,\mathrm{tr}\, \Big[q_\infty^{10}(z) V^T(z) \Big] \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Применяя преобразование Фурье и равенство $\hat{V}^*(\theta) = \hat{V}(\theta)$, получим

$$J_\infty^l = -\frac{(2\pi)^{-d}}{2} \,\mathrm{tr} \int_{\mathbb{T}^d} i\, \hat{q}_\infty^{10}(\theta) \partial_{\theta_l} \hat{V}(\theta)\, d\theta, \quad l = 1, \ldots, d, \tag{4.1}$$

где $\hat{q}_\infty^{10}(\theta)$ выражается через $\hat{q}_{\mathbf{n}}(\theta)$, см. (2.19)–(2.22).

4.1. Гиббсовские меры. Формально гиббсовские меры g_β определяются следующим образом:

$$g_\beta(du_0, dv_0) = \frac{1}{Z}\, e^{-\beta H(u_0,v_0)} \prod_{x\in\mathbb{Z}^d} du_0(x)dv_0(x),$$

где Z – нормирующий множитель, H – гамильтониан, введенный в (2.4), $\beta = T^{-1}$, а $T > 0$ – соответствующая температура. Введем гиббсовские меры g_β как гауссовы меры с корреляционными матрицами, определенными с помощью преобразования Фурье

$$\hat q^{00}_\beta(\theta) = T\hat V^{-1}(\theta), \quad \hat q^{11}_\beta(\theta) = TI, \quad \hat q^{01}_\beta(\theta) = \hat q^{10}_\beta(\theta) = 0. \tag{4.2}$$

Пусть ℓ^2_α обозначает банахово пространство векторнозначных функций $u(x) \in \mathbb{R}^n$ с конечной нормой $\|u\|^2_\alpha \equiv \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d}(1+|x|^2)^\alpha |u(x)|^2 < \infty$.

Зафиксируем $\alpha < -d/2$. Введем гауссовы борелевские вероятностные меры $g^0_\beta(du)$, $g^1_\beta(dv)$ в пространствах ℓ^2_α с характеристическими функционалами

$$\left.\begin{aligned} \hat g^0_\beta(\psi) &= \int \exp\{i\langle u,\psi\rangle\}\, g^0_\beta(du) = \exp\Big\{-\frac{\langle \mathcal{V}^{-1}\psi,\psi\rangle}{2\beta}\Big\} \\ \hat g^1_\beta(\psi) &= \int \exp\{i\langle v,\psi\rangle\}\, g^1_\beta(dv) = \exp\Big\{-\frac{\langle \psi,\psi\rangle}{2\beta}\Big\} \end{aligned}\right|\ \psi\in S\equiv S(\mathbb{Z}^d)\otimes\mathbb{R}^n.$$

В силу теоремы Минлоса [32] борелевские вероятностные меры g^0_β, g^1_β существуют на пространстве ℓ^2_α, потому что *формально*

$$\begin{aligned} \int \|u\|^2_\alpha\, g^0_\beta(du) &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}(1+|x|^2)^\alpha \sum_{i=1}^n \int u_i(x)u_i(x)\, g^0_\beta(du) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}(1+|x|^2)^\alpha\, \mathrm{tr}\, q^{00}_\beta(0) < \infty, \end{aligned}$$

так как $\alpha < -d/2$ и в силу (4.2)

$$\mathrm{tr}\, q^{00}_\beta(0) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{tr}\, \hat q^{00}_\beta(\theta)\, d\theta = T(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}\mathrm{tr}\, \hat V^{-1}(\theta)\, d\theta < \infty.$$

Последняя оценка очевидна, если $\mathcal{C}_0 = \emptyset$. Если $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$, то она вытекает из условия **E6**. Аналогично,

$$\int \|v\|^2_\alpha\, g^1_\beta(dv) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}(1+|x|^2)^\alpha\, \mathrm{tr}\, q^{11}_\beta(0) = C\,T\,n < \infty, \quad \alpha < -d/2.$$

Наконец, определим гиббсовские меры $g_\beta(dY)$ как борелевские вероятностные меры $g^0_\beta(du)\times g^1_\beta(dv)$ на пространстве $\{Y\in\mathcal{H}_\alpha : Y=(u,v)\}$.

Пусть g_0 – борелевская вероятностная мера на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, задающая распределение случайной функции Y_0, построенной в разделе 3 с гиббсовскими мерами $\mu_{\mathbf{n}}\equiv g_{\beta_{\mathbf{n}}}$ ($\beta_{\mathbf{n}}=1/T_{\mathbf{n}}$, $T_{\mathbf{n}}>0$), которые имеют корреляционные матрицы вида $q_{\mathbf{n}}\equiv q_{\beta_{\mathbf{n}}}$, где матрица q_β определена в (4.2). Обозначим через g_t распределение решения $U(t)Y_0$, $t\in\mathbb{R}$. Предположим, дополнительно, что $\mathcal{C}_0=\emptyset$, т.е. (ср. с условием **E6**)

$$\det\hat V(\theta)\neq 0,\quad \forall\theta\in\mathbb{T}^d. \tag{4.3}$$

Заметим, что в случае гиббсовских мер $\mu_{\mathbf{n}}\equiv g_{\beta_{\mathbf{n}}}$ условие **E5'** выполнено (см. Замечание 2.6 (iv)). Действительно, в силу (4.2) имеем

$$\begin{aligned}
p^{00}_{\sigma\sigma'}(\theta) &:= \Pi_\sigma(\theta)\hat q^{00}_{\mathbf{n}}(\theta)\Pi_{\sigma'}(\theta)=T_{\mathbf{n}}\omega_\sigma^{-2}(\theta)I\delta_{\sigma\sigma'},\quad \sigma,\sigma'=1,\dots,s,\\
p^{11}_{\sigma\sigma'}(\theta) &:= \Pi_\sigma(\theta)\hat q^{11}_{\mathbf{n}}(\theta)\Pi_{\sigma'}(\theta)=T_{\mathbf{n}}\, I\delta_{\sigma\sigma'},
\end{aligned}$$

где $p^{ij}_{\sigma\sigma'}(\theta)\equiv\Pi_\sigma(\theta)\hat q^{ij}_{\mathbf{n}}(\theta)\Pi_{\sigma'}(\theta)=0$ при $i\neq j$. Следующая теорема может быть доказана аналогично теореме 4.1 из работы [20].

Теорема 4.1. *Пусть $\alpha<-d/2$ и выполнены условия* **E1**–**E4** *и (4.3). Тогда существует гауссова борелевская мера g_∞ на $\mathcal{H}_\alpha$, такая, что*

$$g_t \xrightarrow{\mathcal{H}_\alpha} g_\infty,\quad t\to\infty. \tag{4.4}$$

4.2. Предельная ковариация и поток энергии в случае гиббсовских мер. Перепишем предельную ковариацию $\hat q_\infty(\theta)$ и предельный поток энергии $\mathbf{J}_\infty$, определённый в (4.1), в случае, когда $\mu_{\mathbf{n}}=g_{\beta_{\mathbf{n}}}$ – гиббсовские меры. Сначала применим (2.22) и получим

$$L_1^+(\hat q_{\mathbf{n}}(\theta))=T_{\mathbf{n}}\begin{pmatrix}\hat V(\theta)^{-1} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},\quad L_2^-(\hat q_{\mathbf{n}}(\theta))=T_{\mathbf{n}}\begin{pmatrix}0 & \Omega(\theta)^{-1}\\ -\Omega(\theta)^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\hat q^{11}_\infty(\theta) &= \hat V(\theta)\hat q^{00}_\infty(\theta)=\sum_{\sigma=1}^s\Pi_\sigma(\theta)\,\frac{1}{2^k}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k}T_{\mathbf{n}}\left[1+S^{\mathrm{even}}_{k,\mathbf{n}}(\omega_\sigma(\theta))\right],\\
\hat q^{10}_\infty(\theta) &= -\hat q^{01}_\infty(\theta)=-i\sum_{\sigma=1}^s\Pi_\sigma(\theta)\omega_\sigma^{-1}(\theta)\,\frac{1}{2^k}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k}T_{\mathbf{n}}S^{\mathrm{odd}}_{k,\mathbf{n}}(\omega_\sigma(\theta)),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где функции $S^{\mathrm{even}}_{k,\mathbf{n}}(\omega_\sigma)$ и $S^{\mathrm{odd}}_{k,\mathbf{n}}(\omega_\sigma)$ определены в (2.21). Подставим $\hat{q}^{10}_\infty(\theta)$ из (4.5) в правую часть (4.1) и, применяя (2.7), получим

$$J^l_\infty = -\frac{1}{2^k}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^k} T_{\mathbf{n}}\cdot\Big(\sum_{\mathrm{odd}\, m\in\{1,\dots,k\}}\ \sum_{(p_1,\dots,p_m)\in\mathcal{P}_m(k)} c^l_{p_1\dots p_m}\,(-1)^{n_{p_1}+\dots+n_{p_m}}\Big), \quad (4.6)$$

где $l=1,\dots,d$, а числа $c^l_{p_1\dots p_m}$ определяются следующим образом

$$c^l_{p_1\dots p_m} := \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{\sigma=1}^{s}\int_{\mathbb{T}^d} r_\sigma\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_{p_1}}\right)\cdot\dots\cdot\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_{p_m}}\right)\frac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_l}\,d\theta. \quad (4.7)$$

Замечание 4.2. При дополнительных условиях симметрии на матрицу взаимодействия V формулы (4.6) и (4.7) могут быть записаны проще. А именно, допустим, что либо **(a)** каждое собственное значение $\omega_\sigma(\theta)$ четно по каждой переменной $\theta_{k+1},\dots,\theta_d$, а если $k\ge 2$, то каждое $\omega_\sigma(\theta)$ четно по $k-1$ переменным из $\{\theta_1,\dots,\theta_k\}$; либо **(b)** каждое $\omega_\sigma(\theta)$ четно по каждой переменной $\theta_1,\dots,\theta_k$; либо **(c)** для каждого $p=1,\dots,k$ функции $\mathrm{sgn}\left(\dfrac{\partial\omega_\sigma(\theta)}{\partial\theta_p}\right)$ зависят только от переменной θ_p, а если $k\ge 3$, то каждое $\omega_\sigma(\theta)$ четно по $k-1$ переменным из $\{\theta_1,\dots,\theta_k\}$. Например, условия **(a)**, **(b)** и **(c)** выполнены для кристалла со взаимодействием в соседних точках, см. (2.10). При этих ограничениях на ω_σ числа $c^l_{p_1\dots p_m}$ из формулы (4.7) равны нулю, за исключением случая, когда $m=1$ и $l=p_1\in\{1,\dots,k\}$. Обозначим

$$c_l \equiv c^l_l = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{\sigma=1}^{s}\int_{\mathbb{T}^d} r_\sigma\left|\frac{\partial\omega_\sigma}{\partial\theta_l}(\theta)\right| d\theta > 0, \quad l=1,\dots,k. \quad (4.8)$$

Тогда

$$J^l_\infty = \begin{cases} -c_l\,\dfrac{1}{2^k}\,\sum{}'\left(T_{\mathbf{n}}\big|_{n_l=2} - T_{\mathbf{n}}\big|_{n_l=1}\right), & l=1,\dots,k,\\ 0, & l=k+1,\dots,d,\end{cases} \quad (4.9)$$

где суммирование $\sum'$ берется по $n_1,\dots,n_{l-1},n_{l+1},\dots,n_k\in\{1,2\}$. В частности, если $k=1$, то предельная плотность потока энергии равна

$$\mathbf{J}_\infty = -\frac{1}{2}\Big(c_1\,(T_2-T_1)\,,0,\dots,0\Big), \quad c_1>0. \quad (4.10)$$

В этом случае наша модель может быть рассмотрена как “система + 2 резервуара”, где под “резервуарами” мы понимаем “левую ” и “правую” части кристалла, состоящие из частиц с положением $x_1\le -a$ и $x_1\ge a$ соответственно (ср. [44]), а под “системой” – остальную (“среднюю”) часть. Предполагается, что при $t = 0$ резервуары находятся в термодинамическом равновесии с температурами T_1 и T_2. Следовательно, формула (4.10) соответствует Второму закону термодинамики (см., например, [7], [44]), т.е. тепло передается от “горячего” резервуара к “холодному”.

В случае когда $k = 2$, наша модель может быть рассмотрена как “система + 4 резервуара”, где резервуары состоят из частиц с $\{x_1, x_2 \le -a\}$, $\{x_1 \le -a, x_2 \ge a\}$, $\{x_1 \ge a, x_2 \le -a\}$ или $\{x_1, x_2 \ge a\}$. Начальные состояния резервуаров – это гиббсовские меры с соответствующими температурами T_{11}, T_{12}, T_{21} и T_{22}. Формула (4.9) принимает вид

$$\mathbf{J}_\infty = -\frac{1}{4}\Big(c_1\,(T_{21} - T_{11} + T_{22} - T_{12})\,, c_2\,(T_{12} - T_{11} + T_{22} - T_{21})\,,0,\dots,0\Big)$$

с константами $c_1, c_2 > 0$. Для любых $k \in [1, d]$ изучаемая модель может быть представлена как “система + 2^k резервуаров”, причем при $t = 0$ резервуары находятся в тепловом равновесии с температурами $T_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^k$.

Замечание 4.3. В работе [22] рассматривалась 1D цепочка гармонических осцилляторов на полупрямой с *ненулевым* граничным условием и изучалась следующая смешанная задача:

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot u(x,t) = (\Delta_L - m^2)u(x,t), \qquad x \in \mathbb{N}, \quad t > 0, \\ \ddot u(0,t) = -\kappa u(0,t) - m^2 u(0,t) - \gamma \dot u(0,t) + u(1,t) - u(0,t), \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \dot u(x,0) = v_0(x), \quad x \ge 0. \end{array}\right. \tag{4.11}$$

Здесь $u(x,t) \in \mathbb{R}$, $m \ge 0$, $\gamma \ge 0$, Δ_L обозначает вторую производную на $\mathbb{Z}$. На коэффициенты m, κ, γ системы накладываются следующие ограничения. Предположим, что если $\gamma > 0$, то $m > 0$ или $\kappa > 0$. Если $\gamma = 0$, то $\kappa \in (0,2)$. Дополнительно, если $\gamma \in (0,1)$ и $m = 0$, то $\kappa \ne 2(1-\gamma^2)$, а если $\gamma \in (0, (\sqrt{4+m^2} - m)/2]$ и $m \ne 0$, то $\kappa \ne 1 - \gamma^2 \pm \sqrt{(1-\gamma^2)^2 - m^2\gamma^2}$. В работе [22] мы получили результаты, аналогичные (1.1) и (1.3). Более того, для модели (4.11) предельный поток в начале координат равен

$$\mathbf{J}_\infty := -\gamma \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(\dot u(0,t)\right)^2.$$

Следовательно, в случае, когда $\gamma > 0$, получаем $\mathbf{J}_\infty \ne 0$ при условии, что $\int (Y^1(0))^2\, \mu_\infty(dY) \ne 0$ (предельные меры μ_∞, удовлетворяющие последнему условию, были построены в [22]).

Список литературы

[1] M. Aizenman, S. Goldstein, J.L. Lebowitz, Ergodic properties of an infinite one-dimensional hard rod system, *Commun. Math. Phys.* **39** (4):289–301 (1975).

[2] M. Aizenman, S. Goldstein, J.L. Lebowitz, Ergodic properties of infinite systems, *Lect. Notes. Phys.* **38**:112–144 (1975).

[3] Д.В. Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых поверхностях отрицательной кривизны, *Труды МИАН СССР* **90**:3–210 (1967).

[4] Д.В. Аносов, Я.Г. Синай, Некоторые гладкие эргодические системы, *УМН* **22**:107–172 (1967).

[5] G.D. Birkhoff, Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **17**:656–660 (1931).

[6] C. Boldrighini, A. Pellegrinotti, and L. Triolo, Convergence to stationary states for infinite harmonic systems, *J. Stat. Phys.* **30**:123–155 (1983).

[7] F. Bonetto, J.L. Lebowitz, and L. Rey-Bellet, Fourier law: a challenge to theorists, p.128-150 in: Fokas, A. (ed.) et al., Mathematical physics 2000. International congress, London, GB, Imperial College Press, London, 2000. arXiv: math-ph/0002052.

[8] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, and J. Lukkarinen, Fourier's law for a harmonic crystal with self-consistent stochastic reservoirs, *J. Stat. Phys.* **116** (1/4):783–813 (2004).

[9] L.A. Bunimovich, Ya.G. Sinai, Statistical properties of Lorentz gas with a periodic configuration of scatterers, *Commun. Math. Phys.* **78** (4):479–497 (1981).

[10] М.И. Вишик, А.В. Фурсиков, *Математические задачи статистической гидромеханики*, М.: Наука (1980).

[11] К.Л. Волковысский, Я.Г. Синай, Эргодические свойства идеального газа с бесконечным числом степеней свободы, *Функц. анализ и его приложения* **5** (3):19–21 (1971).

[12] A. Casher, J.L. Lebowitz, Heat flow in regular and disordered harmonic chains, *J. Math. Phys.* **12** (8):1701–1711 (1971).

[13] A.J. O'Connor, J.L. Lebowitz, Heat conduction and sound transmission in isotopically disordered harmonic crystals, *J. Math. Phys.* **15**:692–703 (1974).

[14] Дж. Гиббс, *Основные принципы статистической механики*, М.: Гостехтеориздат (1946).

[15] Р.Л. Добрушин, О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве, *Укр. мат. жс.* **8** (2):127–134 (1956).

[16] Р.Л. Добрушин, Проблема математического обоснования статистической механики, *УМН* **32**:164–165 (1977).

[17] Р.Л. Добрушин, Ю.М. Сухов, Временная асимптотика для некоторых вырожденных моделей временной эволюции систем с бесконечным числом частиц, В сб. *Современные проблемы математики. Итоги науки и техн. ВИНИТИ*, **14**:147–254 (1979).

[18] R.L. Dobrushin, Yu.M. Suhov, On the problem of the mathematical foundation of the Gibbs postulate in classical statistical mechanics, p. 325–340 in *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Lecture Notes in Physics **80** (Springer-Verlag, Berlin, 1978).

[19] T.V. Dudnikova, A.I. Komech, and H. Spohn, On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals, *J. Math. Phys.* **44**:2596–2620 (2003). ArXiv: math-ph/0210039.

[20] T. Dudnikova, A. Komech, and N. Mauser, Two-temperature problem for harmonic crystal, *J. Stat. Phys.* **114** (3/4):1035–1083 (2004). ArXiv: math-ph/0508048.

[21] Т.В. Дудникова, А.И. Комеч, О двухтемпературной задаче для уравнения Клейна–Гордона, *Теория вероят. и ее примен.* **50**:675–710 (2005).

[22] T.V. Dudnikova, On convergence to equilibrium for one-dimensional chain of harmonic oscillators on the half-line, *J. Math. Phys.* **58** (4):043301 (2017). ArXiv:1504.05132.

[23] F.J. Dyson, The dynamics of a disordered linear chain, *Phys. Rev.* **92** (6):1331–1338 (1953).

[24] J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet, and L. Rey-Bellet, Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures, *Commun. Math. Phys.* **201**:657–697 (1999).

[25] J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet, and L. Rey-Bellet, Entropy production in nonlinear, thermally driven Hamiltonian systems, *J. Stat. Phys.* **95** (1/2):305–331 (1999).

[26] J.-P. Eckmann, M. Hairer, Non-equilibrium statistical mechanics of strongly anharmonic chains of oscillators, *Commun. Math. Phys.* **212**:105–164 (2000).

[27] F. Fidaleo, C. Liverani, Ergodic properties for a quantum nonlinear dynamics, *J. Stat. Phys.* **97** (5/6):957–1009 (1999).

[28] V. Jakšić, C.-A. Pillet, Ergodic properties of classical dissipative systems. I, *Acta Math.* **181**:245–282 (1998).

[29] И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, М.: Наука (1965).

[30] A.I. Komech, Stabilisation of statistics in wave and Klein-Gordon equations with mixing. Scattering theory for solutions of infinite energy, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **65**:9–22 (1995).

[31] Е.А. Копылова, Стабилизация статистических решений уравнения Клейна–Гордона, *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, no.2:92–95 (1986).

[32] И.П. Корнфелььд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин, *Эргодическая теория*, М.: Наука (1980).

[33] O.E. Lanford III, J.L. Lebowitz, Time Evolution and Ergodic Properties of Harmonic Systems, in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Lecture Notes in Physics **38** (Springer-Verlag, Berlin, 1975).

[34] *Thermal Transport in Low Dimensions: From Statistical Physics to Nanoscale Heat Transfer*, S. Lepri (ed.), Lecture Notes in Physics **921** (Springer, 2016).

[35] H. Matsuda, K. Ishii, Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **45**:56–88 (1970).

[36] H. Nakazawa, On the lattice thermal conduction, *Supplement of the Progress of Theor. Phys.* **45**:231–262 (1970).

[37] J.von Neumann, Zur Operatorenmethode in der klassichen Mechanik, *Ann. Math.* **33**:587–642 (1932).

[38] J.von Neumann, Proof of the quasiergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18**:70–82 (1932).

[39] Н.Е. Ратанов, Асимптотическая нормальность статистических решений волнового уравнения, *Вестник Московского ун-та, сер. I. Математика. Механика.* no.4:73–75 (1985).

[40] L. Rey-Bellet, L.E. Thomas, Exponential convergence to non-equilibrium stationary states in classical statistical mechanics, *Commun. Math. Phys.* **225** (2):305–329 (2002).

[41] Z. Rieder, J.L. Lebowitz, and E. Lieb, Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state, *J. Math. Phys.* **8** (5):1073–1078 (1967).

[42] Я.Г. Синай, Классические динамические системы со счетно-кратным лебеговским спектром. II, *Изв. АН СССР. Сер. Математика* **30** (1):15–68 (1966).

[43] Я.Г. Синай, Эргодические свойства газа одномерных твердых шариков с бесконечным числом степеней свободы, *Функц. анализ и его приложения* **6** (1):41–50 (1972).

[44] H. Spohn, J. Lebowitz, Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems, *Comm. Math. Phys.* **54** (2):97–120 (1977).

[45] Э. Хопф, Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны, *УМН* **4** (2):129–170 (1949).