

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 153 за 2018 г.</u>



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

Рогов Б.В.

Дисперсионные и диссипативные свойства полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рогов Б.В. Дисперсионные и диссипативные свойства полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 153. 30 с. doi:<u>10.20948/prepr-2018-153</u> URL: <u>http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-153</u> Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.Келдыша Российской академии наук

Б.В.Рогов

Дисперсионные и диссипативные свойства полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа

Москва — 2018

Рогов Б.В.

Дисперсионные и диссипативные свойства полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа

Представлен Фурье-анализ полностью дискретных бикомпактных схем пространственной аппроксимации четвертого порядка для уравнений гиперболического типа. Такой анализ проведен на примере модельного линейного уравнения переноса. Результаты Фурье-анализа представлены в виде графиков зависимости дисперсионных и диссипативных характеристик бикомпактных схем от безразмерного волнового числа и числа Куранта. Проведено сравнение дисперсионных и диссипативных свойств бикомпактных схем с аналогичными свойствами других широко используемых разностных схем для уравнений гиперболического типа. Показано, что бикомпактные схемы имеют одно из лучших спектральных разрешений среди сравниваемых разностных схем.

Ключевые слова: уравнения гиперболического типа, бикомпактные схемы, дисперсия, диссипация

Boris Vadimovich Rogov

Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations

The Fourier analysis of fully discrete bicompact fourth-order spatial approximation schemes for hyperbolic equations is presented. This analysis is carried out on the example of a model linear advection equation. The results of Fourier analysis are presented as graphs of the dependence of the dispersion and dissipative characteristics of the bicompact schemes on the dimensionless wave number and the Courant number. The dispersion and dissipative properties of bicompact schemes are compared with those of other widely used difference schemes for hyperbolic equations. It is shown that bicompact schemes have one of the best spectral resolutions among the difference schemes being compared.

Key words: hyperbolic equations, bicompact schemes, dispersion, dissipation

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-01-00857-а.

1. Введение

Для численного моделирования переноса акустических, электромагнитных и упругих волн на большие расстояния и в течение длительного времени необходимы схемы, обладающие малыми диссипацией и дисперсией. В качестве схем с такими свойствами широко используются симметричные компактные схемы, которые имеют лучшее спектральное разрешение по сравнению с классическими симметричными разностными схемами того же порядка точности [1-3]. Однако пространственный шаблон известных симметричных компактных схем содержит не менее трех целых узлов по каждому пространственному направлению, поэтому эти схемы можно использовать в расчетах лишь на равномерных или слабо неравномерных сетках [1,4,5].

квазилинейного Для решения одномерного численного уравнения переноса в работе [6] была предложена полудискретная бикомпактная схема четвертого порядка пространственной аппроксимации, построенная методом прямых на пространственном шаблоне, который расположен в пределах одной ячейки разностной сетки и состоит из двух целых и одного полуцелого узла. Число дифференциально-разностных уравнений схемы равно двум, поэтому эффективный разностный порядок полудискретной схемы, определяемый как разность общего числа узлов шаблона и числа уравнений схемы, равен единице совпадает с порядком дифференциального уравнения переноса по пространственной переменной. Следствием равенства порядков является совпадение числа граничных условий для дифференциальной и разностной Кроме того, в случае знакоопределенности скорости переноса задач. полудискретную схему можно решать маршевым по пространственной переменной методом [6]. Порядок аппроксимации бикомпактной схемы сохраняется при переходе от равномерной к существенно неравномерной сетке. Для интегрирования уравнений полудискретной схемы по времени было предложено использовать многостадийные А- и L-устойчивые диагональнонеявные методы Рунге-Кутты (РК), вычислительно эффективные по сравнению с полностью неявными методами РК [7]. Схема [6] была обобщена на случай системы уравнений и на многомерный случай в работах [8-10].

Полудискретная симметричная бикомпактная [6] схема является бездиссипативной. Ее дисперсионный анализ дан в работе [11]. В настоящей работе представлен Фурье-анализ двух полностью дискретных бикомпактных схем – одной диссипативной и одной бездиссипативной. Эти схемы получены путем интегрирования по времени полудискретной схемы неявным методом Эйлера и по правилу трапеций [7] и являются двухслойными по времени. Каждая из схем состоит из двух разностных уравнений для значений искомой сеточной функции в целых и полуцелых узлах. Перед выполнением Фурьеанализа двухслойные бикомпактные разностные схемы преобразуются к трехслойным схемам, состоящим из одного разностного уравнения для значений искомой сеточной функции в целых узлах. Проведено сравнение дисперсионных и диссипативных характеристик исследованных бикомпактных схем с аналогичными характеристиками известных разностных схем для расчета гиперболических уравнений.

2. Полудискретная симметричная бикомпактная схема

Для скалярного одномерного квазилинейного уравнения переноса

$$L_{1}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{df(u)}{du} > 0 \tag{1}$$

первое уравнение полудискретной бикомпактной схемы [6] четвертого порядка аппроксимации по x получается путем интегрирования уравнения (1) по ячейке $[x_j, x_{j+1}]$ неравномерной пространственной сетки и использования квадратурной формулы Симпсона:

$$\frac{h_{j+1/2}}{6}\frac{d}{dt}\left(u_{j+1}+4u_{j+1/2}+u_{j}\right)+f_{j+1}-f_{j}=0,\ f_{j}=f(u_{j}),$$
(2)

где пространственный шаг $h_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j$. Второе уравнение схемы [6]

$$\frac{h_{j+1/2}}{4}\frac{d}{dt}\left(u_{j+1}-u_{j}\right)+f_{j+1}-2f_{j+1/2}+f_{j}=0,\ f_{j+1/2}=f\left(u_{j+1/2}\right)$$
(3)

получается путем конечно-разностной аппроксимации уравнения

$$(L_1 u)_{j+1} - (L_1 u)_j = 0, (4)$$

которое можно рассматривать как результат интегрирования по ячейке $[x_j, x_{j+1}]$ дифференциального следствия $\partial(L_u)/\partial x = 0$ уравнения (1).

Поскольку дальнейшие выкладки будут связаны только с ячейкой $[x_j, x_{j+1}]$, то ради краткости индекс у шага $h_{i+1/2}$ опустим.

Систему уравнений (2), (3) можно получить иным способом. Для этого запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \psi(x, u), \qquad (5)$$

где

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial t} \,. \tag{6}$$

Для интегрирования уравнения (5) по x на временном слое t = const используем схему Лобатто IIIA (см., например, [7]), которая является

В результате такого интегрирования на отрезке [*x_j*, *x_{j+1}*] получим систему двух разностных уравнений

$$f_{j+1} = f_j + \frac{h}{6} \left(\psi_j + 4\psi_{j+1/2} + \psi_{j+1} \right), \tag{7}$$

$$f_{j+1/2} = f_j + \frac{h}{24} \Big(5\psi_j + 8\psi_{j+1/2} - \psi_{j+1} \Big), \tag{8}$$

где $\psi_j = \psi(x_j, u_j), \psi_{j+1/2} = \psi(x_{j+1/2}, u_{j+1/2})$. Отметим, что схема Лобатто ША является А-устойчивой, а значит, и абсолютно устойчивой. Ее шаблон состоит из двух целых узлов и одного полуцелого узла, которые являются узлами квадратуры Симпсона – частного случая квадратуры Лобатто [7].

Далее вместо уравнения (8) будем использовать комбинацию уравнений (7) и (8)

$$f_{j+1} - 2f_{j+1/2} = -f_j - \frac{h}{4} (\psi_{j+1} - \psi_j), \qquad (9)$$

которая получается путем вычитания из уравнения (7) уравнения (8), умноженного на два. Если в уравнения (7), (9) сделать подстановку (6), то уравнение (7) перейдет в уравнение (2), а уравнение (9) – в (3).

Фактически в полудискретную неявную бикомпактную схему 4-го порядка пространственной аппроксимации встроена схема Лобатто IIIA для численного интегрирования уравнения (1) по дискретной переменной *х*.

В случае линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ c = const > 0$$
(10)

полудискретная бикомпактная схема (2), (3) может быть записана в виде

$$\frac{h}{6c}\frac{d}{dt}\left(u_{j+1} + 4U_{j+1/2} + u_{j}\right) + u_{j+1} - u_{j} = 0,$$

$$\frac{h}{4c}\frac{d}{dt}\left(u_{j+1} - u_{j}\right) + u_{j+1} - 2U_{j+1/2} + u_{j} = 0,$$
(11)

где $U_{j+1/2}(t) \equiv u_{j+1/2}(t)$. Систему уравнений (11) можно рассматривать как систему уравнений для двух зависящих от времени сеточных функций, одна из которых, $u_j(t)$, определена на множестве целых узлов, а другая $U_{j+1/2}(t)$ – на множестве полуцелых узлов [11]. При этом функцию $u_j(t)$ можно считать основной функцией, а функцию $U_{j+1/2}(t)$ – вспомогательной функцией, позволяющей на минимальном пространственном шаблоне из двух целых узлов добиться четвертого порядка аппроксимации по *x* для схемы (11).

В заключение этого пункта укажем на некоторую нестандартность полудискретной бикомпактной схемы (2), (3) для уравнения (1).

Из уравнения (1) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f(u)}{\partial x}.$$
(12)

Формально заменим производные по времени в уравнениях (2), (3) производными по пространству согласно формуле (12). В результате получим

$$\frac{1}{6}f'_{j} + \frac{2}{3}f'_{j+1/2} + \frac{1}{6}f'_{j+1} = \frac{1}{h}(f_{j+1} - f_{j}),$$
(13)

$$\frac{1}{4}f'_{j+1} - \frac{1}{4}f'_{j} = \frac{1}{h} \Big(f_{j+1} - 2f_{j+1/2} - f_{j} \Big), \tag{14}$$

где $f' \equiv \partial f / \partial x$. Уравнения (13) и (14) можно интерпретировать как приближенные связи, которые вводят уравнения (2) и (3), между значениями функции *f* и значениями ее производной *f'* на сетке. Видно, что эти связи различны, и одно уравнение не получается из другого путем сдвига индекса при всех величинах на одну величину, например на 1/2.

Чтобы понять «нестандартность» полудискретной бикомпактной схемы (2), (3), приведем для сравнения полудискретную компактную схему четвертого порядка пространственной аппроксимации из работы [12]. Эта схема, так же как и бикомпактная схема, состоит из двух дифференциально-разностных уравнений:

$$\frac{1}{24}\frac{d}{dt}\left(u_{j-1}+22u_{j}+u_{j+1}\right)+\frac{1}{h}\left(f_{j+1/2}-f_{j-1/2}\right)=0,$$
(15)

$$\frac{1}{24}\frac{d}{dt}\left(u_{j-3/2} + 22u_{j-1/2} + u_{j+1/2}\right) + \frac{1}{h}(f_j - f_{j-1}) = 0$$
(16)

на равномерной пространственной сетке с шагом $h = x_{j+1} - x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$. Шаблон схемы (15), (16) состоит из трех целых и трех полуцелых узлов, в то время как шаблон бикомпактной схемы (2), (3) состоит из двух целых и одного полуцелого узла. Подстановка (12) в уравнения (15), (16) дает приближенные связи между значениями f и f' в узлах шаблона

$$\frac{1}{24}f'_{j-1} + \frac{11}{12}f'_{j} + \frac{1}{24}f'_{j+1} = \frac{1}{h}(f_{j+1/2} - f_{j-1/2}),$$
(17)

$$\frac{1}{24}f'_{j-3/2} + \frac{11}{12}f'_{j-1/2} + \frac{1}{24}f'_{j+1/2} = \frac{1}{h}(f_j - f_{j-1}).$$
(18)

Уравнение (18) получается из уравнения (17) с помощью смещения индекса на 1/2.

3. Дисперсионные свойства полудискретных бикомпактных схем

Полудискретные бикомпактные схемы четного порядка пространственной аппроксимации построены на симметричном пространственном шаблоне [6, 13, 14] и являются симметричными и бездиссипативными. Дисперсионные свойства полудискретных бикомпактных схем четвертого порядка точности исследованы в работе [11], а аналогичные свойства полудискретных схем более высокого порядка точности – в работах [13, 14]. В работе [15] найдена оптимизированная полудискретная симметричная бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации, она имеет схемную групповую скорость, наименее уклоняющуюся от точной групповой скорости. В настоящей работе получено выражение для численного (модифицированного, эффективного) волнового числа полудискретной бикомпактной схемы четвертого порядка точности по методике работы [16].

Рассмотрим линейное уравнение переноса (10) на всей оси x. Его решением, основанным на гармонике с действительным волновым числом k, является функция

$$u(x,t) = f(t)e^{ikx}$$
(19)

где i — мнимая единица, а функция f(t) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$df/dt = -ickf \tag{20}$$

Если пространственная производная в (10) аппроксимируется конечноразностной формулой, то вместо (20) будет такое ОДУ [16]

$$df/dt = -ick^*f \tag{21}$$

где k^* — численное (модифицированное, эффективное) волновое число. Интегрирование уравнения (21) дает для функции f общее решение

$$f(t) = Ce^{-ick^*t}$$
(22)

где C – произвольная постоянная. Решение полудискретной конечноразностной схемы, соответствующее функции (22), имеет в узлах $x = x_j$ следующий вид:

$$u_{i}(t) = Ce^{-ick^{*}t}e^{ikx_{j}}.$$
(23)

Найдем численное волновое число, связанное с полудискретной бикомпактной схемой, состоящей из двух взаимосвязанных уравнений (11). Будем искать нетривиальное решение системы уравнений (11) для сеточных функций $u_i(t)$ и $U_{i+1/2}(t)$ в виде, подобном виду (23):

$$u_{j}(t) = C_{1}e^{-ick^{*}t}e^{ikx_{j}}, \quad U_{j+1/2}(t) = C_{2}e^{-ick^{*}t}e^{ikx_{j+1/2}}, \quad C_{1} = const, \quad C_{2} = const, \quad (24)$$

где

$$C_1^2 + C_2^2 > 0. (25)$$

В результате подстановки функций (24) в систему уравнений (11) получим систему двух однородных линейных уравнений относительно коэффициентов *C*₁ и *C*₂

$$\begin{bmatrix} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) - \frac{1}{6}\varphi^* \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} C_1 - \frac{1}{3}\varphi^* C_2 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}\varphi^* \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} C_1 - C_2 = 0,$$
 (26)

где $\varphi = kh$ и $\varphi^* = k^*h$ – точное (физическое) и численное безразмерные волновые числа. Система линейных уравнений (26) имеет нетривиальное

решение, удовлетворяющее условию (25), если ее определитель равен нулю. Последнее равенство приводит к следующей связи между величинами φ и φ^* :

$$(\varphi^*)^2 + 6 \operatorname{ctg}(0.5\varphi)\varphi^* - 12 = 0.$$
(27)

Ранее эта связь была получена в работе [11]. Квадратное относительно φ^* уравнение (27) имеет положительный дискриминант, а следовательно, его решения есть действительные числа, т.е. $\text{Im}(k^*)=0$. Это означает, что полудискретная бикомпактная схема является бездиссипативной. Заметим, что это свойство является обычным для симметричных полудискретных схем.

Если $Im(k^*) = 0$, то численное волновое число k^* связано с численной фазовой скоростью c^* следующим соотношением [16]:

$$\frac{c^*}{c} = \frac{k^*}{k}.$$
(28)

Соотношение (28) вместе с уравнением (27) описывает зависимость c^* от волнового числа k для бикомпактной схемы (2), (3), т.е. описывает ее дисперсионные свойства.

Из (27) получаем явную зависимость φ от φ^*

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{6\varphi^*}{12 - (\varphi^*)^2}\right).$$
(29)

Кривая, описываемая уравнением (29), проходит через точку (0,0) в плоскости (φ, φ^*) . Обращение этой зависимости в области $\varphi \in [0, \pi]$ дает формулу [11]

$$\varphi^* = 3 \left[\sqrt{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4}{3}} - \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \frac{4\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}.$$
(30)

Кривая, описываемая уравнением (30), проходит через точку (0,0) в плоскости (φ, φ^*) и показана на рис. 1. На этом рисунке также показаны кривые зависимости φ^* от φ для ряда полудискретных компактных схем с порядком пространственной аппроксимации от четырех до восьми из работ [12,17]. Видно, что бикомпактная схема имеет лучшее спектральное разрешение не только среди схем четвертого порядка аппроксимации, но и среди схем более высокого порядка аппроксимации. Из рис. 1 также видно, что нормированная групповая скорость $c_g/c = d\varphi^*/d\varphi$ [18] распространения энергии пакета волн не меньше единицы в случае бикомпактной схемы. В случае схемы ССS-Т4 [12]

нормированная групповая скорость является неотрицательной величиной и меньше единицы. Компактные схемы из [17] в области коротких волн имеют отрицательную групповую скорость.



Рис. 1. Безразмерное эффективное волновое число как функция безразмерного точного волнового числа для различных симметричных полудискретных схем. Кривые: 1 – бикомпактная схема 4-го порядка аппроксимации; 2 – компактная схема CCS-T4 4-го порядка [12]; 3, 4 и 5 – трехдиагональные стандартные компактные схемы 4-го, 6-го и 8-го порядка соответственно [17]. Толстой прямой показана идеальная зависимость $\varphi^* = \varphi$.

Из формул (28) и (30) получаем выражение для нормированной численной фазовой скорости полудискретной бикомпактной схемы

$$\frac{c^*}{c} = \frac{\varphi^*}{\varphi} = \frac{4 \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\varphi\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)}.$$
(31)

4. Полностью дискретные бикомпактные схемы

Вычислительные задачи решаются с помощью полностью дискретных схем. Анализ Фурье полудискретных схем позволяет лишь оценить свойства полностью дискретных схем в пределе малых значений числа Куранта. О важности исследований полностью дискретных схем, т.е. исследований взаимовлияния на свойства схем пространственной и временной дискретизаций, указано, например, в работах [19,20].

Ниже будут представлены две полностью дискретные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса (10) в двухслойном и трехслойном вариантах.

Рассмотрим полностью дискретную схему BiC4-BE, получаемую путем интегрирования полудискретной схемы (11) неявным методом Эйлера:

$$(u_{j+1}^{n+1} + 4U_{j+1/2}^{n+1} + u_{j}^{n+1}) - (u_{j+1}^{n} + 4U_{j+1/2}^{n} + u_{j}^{n}) + 6\kappa (u_{j+1}^{n+1} - u_{j}^{n+1}) = 0,$$

$$(u_{j+1}^{n+1} - u_{j}^{n+1}) - (u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n}) + 4\kappa (u_{j+1}^{n+1} - 2U_{j+1/2}^{n+1} + u_{j}^{n+1}) = 0,$$
(32)

где *n* – номер временного слоя, $\kappa = c\tau/h$ – число Куранта, τ – шаг по времени.

Схема (32), состоящая их двух разностных уравнений, является двухслойной схемой для двух сеточных функций $\{u_j^n\}$, $\{U_{j+1/2}^n\}$. Можно исключить из этой схемы функцию $\{U_{j+1/2}^n\}$ и получить следующую трехслойную бикомпактную схему для функции $\{u_i^n\}$:

$$(12\kappa^{2}+6\kappa+1)u_{j+1}^{n+1}-(12\kappa^{2}-6\kappa+1)u_{j}^{n+1}-2(3\kappa+1)u_{j+1}^{n}-2(3\kappa-1)u_{j}^{n}+u_{j+1}^{n-1}-u_{j}^{n-1}=0.$$
 (33)

Теперь рассмотрим полностью дискретную схему BiC4-CN [11], получаемую путем интегрирования полудискретной схемы (11) по правилу трапеций (схема Кранка–Никольсон для временной дискретизации) [7]:

$$(u_{j+1}^{n+1} + 4U_{j+1/2}^{n+1} + u_{j}^{n+1}) - (u_{j+1}^{n} + 4U_{j+1/2}^{n} + u_{j}^{n}) + 3\kappa \left[(u_{j+1}^{n+1} - u_{j}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n}) \right] = 0,$$

$$(u_{j+1}^{n+1} - u_{j}^{n+1}) - (u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n}) + 2\kappa \left[(u_{j+1}^{n+1} - 2U_{j+1/2}^{n+1} + u_{j}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n} - 2U_{j+1/2}^{n} + u_{j}^{n}) \right] = 0.$$
(34)

Путем исключения сеточной функции $\{U_{j+1/2}^n\}$ двухслойную схему (34) можно привести к трехслойной бикомпактной схеме для сеточной функции $\{u_i^n\}$

$$(3\kappa^{2} + 3\kappa + 1)u_{j+1}^{n+1} - (3\kappa^{2} - 3\kappa + 1)u_{j}^{n+1} + 2(3\kappa^{2} - 1)u_{j+1}^{n} - 2(3\kappa^{2} - 1)u_{j}^{n} + (3\kappa^{2} - 3\kappa + 1)u_{j+1}^{n-1} - (3\kappa^{2} + 3\kappa + 1)u_{j}^{n-1} = 0.$$
(35)

Отметим, что разностные порядки двухслойных вариантов бикомпактных схем (32) и (34) равны единице и по времени и по пространству, т.е. совпадают с порядками по t и по x линейного уравнения переноса (10). Здесь под разностным порядком схемы по x понимается разность между числом узлов шаблона схемы в направлении x и числом уравнений в схеме. Разностный порядок схемы по времени есть число временных слоев в схеме минус единица. Следствием равенства разностных и дифференциальных порядков является совпадение необходимых начальных и граничных условий для разностных и дифференциальных задач. Например, если ставить начально-краевую задачу для схемы (32) в первом квадранте плоскости (x, t), то требуется задать одно начальное условие при t = 0 и одно граничное условие при x = 0.

Возможность сведения двухслойной бикомпактной схемы на пространственном шаблоне из двух целых и одного полуцелого узлов к трехслойной схеме на шаблоне из двух целых узлов связана с первым разностным порядком двухслойной бикомпактной схемы по x. Однако трехслойная схема имеет второй разностный порядок по t, поэтому для нее, наряду с начальным условием на нулевом временном слое при t = 0, требуется задавать начальное условие на первом временном слое. В качестве такого условия мы будем рассматривать решение, рассчитанное на этом слое по соответствующей двухслойной бикомпактной схеме.

5. Фурье-анализ полностью дискретных бикомпактных схем

Фурье-анализ [21] можно выполнить непосредственно для двухслойных бикомпактных схем (32) и (34). Однако значительно проще такой анализ провести для трехслойных схем (33) и (35). Ниже излагается такой анализ.

Следуя практическому совету L.N. Trefethen [22], мы будем проводить Фурье-анализ бикомпактных схем не с помощью трудоемких выкладок, использующих преобразование Фурье, а путем выкладок, основанных на подстановке в разностные схемы для уравнения переноса (10) пробных сеточных функций

$$u_{j}^{n} = \lambda^{n} \exp(ij\varphi), \lambda = \rho \exp(-ikc^{*}\tau) = \rho \exp(-i\varphi\kappa c^{*}/c),$$

$$\rho = |\lambda|, \varphi = kh, \kappa = c\tau/h,$$
(36)

где λ – множитель послойного перехода (в зарубежной литературе его называют *amplification factor* [20-22]), который в общем случае является комплексной величиной; ρ – модуль этой величины. При этом разностная задача для уравнения (10) рассматривается на всей оси *x*.

Ниже излагаются результаты Фурье-анализа для двух трехслойных бикомпактных схем: схемы BiC4-BE (33) и схемы BiC4-CN (35). Обе схемы являются абсолютно устойчивыми. В них интегрирование уравнения переноса по пространственной переменной осуществляется по А-устойчивой схеме Лобатто IIIA [7], а интегрирование по времени – по L-устойчивой неявной схеме Эйлера и по А-устойчивому правилу трапеций [7].

Схема BiC4-BE. Подставляя пробную функцию (36) в схему (33), получим характеристическое уравнение для множителя перехода λ

$$(12\kappa^{2}+1)\lambda - i6\kappa \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)(\lambda-1) - 2 + \frac{1}{\lambda} = 0.$$
(37)

Сделаем следующую подстановку

$$\lambda = \frac{1 - i\xi}{1 + \xi^2} \tag{38}$$

в уравнение (37), тогда для величины ξ получим квадратное уравнение

$$\xi^2 + 6\kappa \operatorname{ctg}(\varphi/2)\xi - 12\kappa^2 = 0.$$
(39)

Дискриминант этого уравнения больше нуля, поэтому оно имеет два действительных корня

$$\xi_1 = 3\kappa \left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4}{3}} - \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right), \quad \xi_2 = -3\kappa \left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4}{3}} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right).$$

В формулах для этих корней перейдем от $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ к $\operatorname{tg}(\varphi/2)$

$$\xi_{1} = \frac{4\kappa \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}, \quad \xi_{2} = -\frac{4\kappa \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1}}.$$
(40)

Среди корней (40) первый корень является физически корректным, для него нормированная численная фазовая скорость

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda = \frac{1}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg} \xi$$
(41)

стремится к единице при $\varphi \to 0$, т.е. при $h \to 0$ для фиксированного значения волнового числа k. Второй корень (40) является «паразитным», его влияние на численное решение исключается путем правильного выбора начальных и граничных условий в разностной задаче (см. [11, 13, 14]). Подставляя первый корень в формулы (38) и (41), получим

$$\rho = |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}, \quad \frac{c^*}{c} = \frac{1}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg} \xi_1 = \frac{1}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg} \left(\frac{4\kappa \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}} \right). \tag{42}$$

Из формул (40), (42) следует, что

$$\rho = 1, \quad \frac{c^*}{c} = \frac{4 \operatorname{tg}(\varphi/2)}{\varphi \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)},$$

когда число Куранта к стремится к нулю. Последняя формула совпадает с формулой (31) для численной фазовой скорости полудискретной бикомпактной схемы.

С учетом формулы (42) находим нормированную групповую скорость

$$\frac{c_g}{c} = \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \frac{c^*}{c} \right) = \frac{2 \left(1 + 1 / \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)}{16\kappa^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{4}{3} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)^2} .$$
(43)

Из формулы (43) следует, что групповая скорость является положительной величиной для всех значений числа Куранта в области $\varphi \in [0, \pi]$.

На рис. 2 и 3 для схемы BiC4-BE приведены графики зависимостей модуля множителя перехода, численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа для различных значений числа Куранта.



Рис. 2. Зависимости модуля множителя перехода от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Кривые 1-5 соответствуют значениям числа Куранта κ , равным 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 и 2.0.



Рис. 3. Зависимости численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Кривые 1-5 соответствуют значениям числа Куранта κ , равным 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 и 2.0. Толстые кривые показывают зависимости для полудискретной бикомпактной схемы.

Схема BiC4-CN. Подставляя пробную функцию (36) в схему (35), получим характеристическое уравнение для множителя перехода λ

$$(3\kappa^{2}+1)\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)-i3\kappa\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)+2(3\kappa^{2}-1)=0.$$
(44)

Сделаем следующую подстановку

$$\lambda = e^{i\theta} \tag{45}$$

в уравнение (44), тогда для величины θ получим уравнение

$$(3\kappa^2 + 1)\cos\theta + 3\kappa \operatorname{ctg}(\varphi/2)\sin\theta + 3\kappa^2 - 1 = 0.$$
(46)

Это уравнение приводится к квадратному уравнению для $ctg(\theta/2)$

$$3\kappa^{2}\operatorname{ctg}^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\kappa\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 0.$$
(47)

Дискриминант этого квадратного уравнения больше нуля, поэтому оно имеет два действительных корня

15

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_{1}}{2}\right) = -\frac{1}{2\kappa}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{\operatorname{ctg}^{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4}{3}}\right), \ \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_{2}}{2}\right) = \frac{1}{2\kappa}\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4}{3}} - \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right).$$
(48)

Переходя в формулах (48) от котангенсов к тангенсам, получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_{1}}{2}\right) = -\frac{2\kappa \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}, \ \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_{2}}{2}\right) = \frac{2\kappa \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1}}.$$
(49)

Поскольку величины θ_1 и θ_2 являются действительными, то модуль ρ множителя перехода λ равен единице согласно формуле (45). Это означает, что схема BiC4-CN является бездиссипативной.

Среди корней (49) первый корень является физически корректным, ему соответствует нормированная численная фазовая скорость

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda = -\frac{\theta}{\varphi\kappa},\tag{50}$$

которая стремится к единице при $\varphi \to 0$, т.е. при $h \to 0$ для фиксированного значения волнового числа k. Другой корень является «паразитным», его влияние на численное решение исключается путем правильного выбора начальных и граничных условий в разностной задаче (см. [11, 13, 14]). Подставляя первый корень θ_1 в формулу (50), получим

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{\theta_1}{\varphi\kappa} = \frac{2}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\kappa \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}\right).$$
(51)

Из формулы (51) следует, что

$$\frac{c^*}{c} = \frac{4 \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\varphi\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)},$$

когда число Куранта к стремится к нулю. Последняя формула совпадает с формулой (31) для численной фазовой скорости полудискретной бикомпактной схемы.

С учетом формулы (51) находим нормированную групповую скорость

$$\frac{c_s}{c} = \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \frac{c^*}{c} \right) = \frac{2 \left(1 + 1 / \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)}{4\kappa^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \frac{4}{3} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)^2}.$$
 (52)

Из формулы (52) следует, что групповая скорость является положительной величиной для всех значений числа Куранта в области $\varphi \in [0, \pi]$.

Сравнение формул (42), (43) с формулами (51), (52) показывает, что графики зависимостей численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа при фиксированном значении числа Куранта $\kappa = \kappa_0$ для схемы BiC4-CN совпадают с аналогичными графиками для схемы BiC4-BE, взятыми при значении числа Куранта $\kappa = \kappa_0/2$.

На рис. 4 для схемы BiC4-CN приведены графики зависимостей численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа для различных значений числа Куранта.



Рис. 4. Зависимости численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Кривые 1-5 соответствуют значениям числа Куранта κ , равным 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 и 2.0. Толстые кривые показывают зависимости для полудискретной бикомпактной схемы.

В этом пункте будет дано сравнение дисперсионных и диссипативных свойств бикомпактных схем BiC4-BE и BiC4-CN с аналогичными свойствами компактных **ДВVXСЛОЙНЫХ** трехточечных схем четвертого порядка пространственной трехслойной «Крест» аппроксимации, схемы (схемы Leapfrog [23] в зарубежной литературе) и трехслойной схемы Айзерлиса [24]. К последней схеме на равномерной пространственно-временной сетке приводится двухслойная схема «КАБАРЕ» [25, 26].

Трехточечные компактные схемы. Если при t = const проинтегрировать уравнение (1) по отрезку $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, а затем аппроксимировать интеграл от *u* по квадратурной формуле Симпсона, то получим полудискретную трехточечную компактную схему четвертого порядка пространственной аппроксимации [17]

$$\frac{h}{3}\frac{d}{dt}\left(u_{j-1}+4u_{j}+u_{j+1}\right)+f_{j+1}-f_{j-1}=0.$$
(53)

Эту схему можно получить и другими способами. Например, в монографии [21] эта схема получается с помощью конечно-элементного метода Галеркина. В случае линейного уравнения переноса (10) схема (53) будет иметь вид

$$\frac{h}{3}\frac{d}{dt}\left(u_{j-1}+4u_{j}+u_{j+1}\right)+c\left(u_{j+1}-u_{j-1}\right)=0.$$
(54)

Ниже будет представлен Фурье-анализ двух полностью дискретных компактных схем C4-BE и C4-CN для линейного уравнения переноса (10). Схема C4-BE получается путем интегрирования полудискретной схемы (54) неявным методом Эйлера, а схема C4-CN – по правилу трапеций [7].

(а) Схема С4-ВЕ. Интегрирование уравнения (54) неявным методом Эйлера дает полностью дискретную разностную схему С4-ВЕ

$$u_{j-1}^{n+1} + 4u_{j}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - \left(u_{j-1}^{n} + 4u_{j}^{n} + u_{j+1}^{n}\right) + 3\kappa \left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right) = 0.$$
(55)

Подставляя пробную функцию (36) в схему (55), получим линейное характеристическое уравнение для множителя перехода λ . Его решение есть

$$\lambda = \frac{1 - i\xi}{1 + \xi^2}, \quad \xi = \frac{3\kappa \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$
(56)

Из формулы (56) находим величины ρ , c^*/c и c_g/c

$$\rho = \left|\lambda\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda = \frac{1}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg} \xi = \frac{1}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg} \left(\frac{3\kappa \sin\varphi}{2 + \cos\varphi}\right), \quad (57)$$

$$\frac{c_g}{c} = \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \frac{c^*}{c} \right) = \frac{3(1 + 2\cos\varphi)}{9\kappa^2 \sin^2 \varphi + (2 + \cos\varphi)^2} \,. \tag{58}$$

На рис. 5 и 6 для схемы С4-ВЕ приведены графики зависимостей модуля фазовой и групповой скоростей от множителя перехода, численных безразмерного волнового числа для различных значений числа Куранта. На этих же рисунках приведены аналогичные графики для схемы BiC4-BE. Из графиков на рис. 5 видно, что диссипативная схема С4-ВЕ слабо подавляет высокочастотные гармоники со значениями безразмерного волнового числа $\varphi \approx \pi$. Наоборот, схема BiC4-BE наиболее сильно подавляет самые короткие волны, разрешимые на разностной сетке, со значениями волнового числа $\phi \approx \pi$. Этот эффект согласуется со свойством монотонности схемы BiC4-BE, исследованным в [6, 8]. Из графиков на рис. 6 видно, что схема BiC4-BE исправляет существенный недостаток схемы С4-ВЕ, связанный с наличием отрицательных значений групповой скорости при $\phi > 3\pi/4$. Схемы с таким недостатком очень чувствительны к гладкости расчетной сетки. Для этих схем пространственной сетки (отклонение неоднородность отношения ллин соседних ячеек от единицы) не должна превышать 8-10% (см. [4]). При превышении степени допустимого сгущения/разрежения сетки возникают сильные отраженные паразитные волны.



Рис. 5. Зависимости модуля множителя перехода от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Кривые 1-5 соответствуют значениям числа Куранта κ , равным 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 и 2.0. Сплошные кривые соответствуют схеме С4-ВЕ, а штриховые кривые – схеме BiC4-BE.



Рис. 6. Зависимости численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Кривые 1-5 соответствуют значениям числа Куранта κ , равным 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 и 2.0. Сплошные кривые соответствуют схеме С4-ВЕ, а штриховые кривые – схеме BiC4-BE.

(b) Схема С4-СN. Интегрирование уравнения (54) по правилу трапеций дает полностью дискретную разностную схему С4-СN

$$u_{j-1}^{n+1} + 4u_{j}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - \left(u_{j-1}^{n} + 4u_{j}^{n} + u_{j+1}^{n}\right) + \frac{3}{2}\kappa\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}\right) = 0.$$
(59)

Подставляя пробную функцию (36) в схему (59), получим характеристическое уравнение для множителя перехода λ

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = i \frac{3\kappa \sin\varphi}{2(2+\cos\varphi)}.$$
(60)

Если сделать подстановку

$$\lambda = e^{i\theta} \tag{61}$$

в уравнение (60), то нетрудно получить решение для величины θ

$$\theta = -2 \arctan\left(\frac{3\kappa \sin \varphi}{2(2 + \cos \varphi)}\right). \tag{62}$$

Из формул (61), (62) следует, что $\rho = |\lambda| = 1$, т.е. схема C4-CN является устойчивой и бездиссипативной. Из этих формул находим численные фазовую и групповую скорости

20

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda = -\frac{\theta}{\varphi\kappa} = \frac{2}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\kappa\sin\varphi}{2(2+\cos\varphi)}\right),\tag{63}$$

$$\frac{c_g}{c} = \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \frac{c^*}{c} \right) = \frac{3(1 + 2\cos\varphi)}{\frac{9}{4}\kappa^2 \sin^2\varphi + (2 + \cos\varphi)^2}.$$
(64)

Сравнение формул (63), (64) с формулами (57), (58) показывает, что графики зависимостей численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа при фиксированном значении числа Куранта $\kappa = \kappa_0$ для схемы С4-СN совпадают с аналогичными графиками для схемы С4-ВЕ, взятыми при значении числа Куранта $\kappa = \kappa_0/2$.

На рис. 7 для схемы C4-CN приведены графики зависимостей численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа для различных значений числа Куранта. На этом же рисунке приведены аналогичные графики для схемы BiC4-CN. Из графиков на рис. 7 видно, что схема BiC4-CN исправляет существенный недостаток схемы C4-CN, связанный с наличием отрицательных значений групповой скорости при $\omega > 3\pi/4$. c^{*}/c_{1} 0.8 0 0.6 0.4 -2 0.2 0 φ Φ 0 2 0 2 3 1

Рис. 7. Зависимости численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Кривые 1-5 соответствуют значениям числа Куранта κ , равным 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 и 2.0. Сплошные кривые соответствуют схеме C4-CN, а штриховые кривые – схеме BiC4-CN.

Схема «Крест». Эта трехслойная схема имеет симметричный пространственно-временной шаблон в форме креста в плоскости (*x*, *t*). Для

линейного уравнения переноса (10) разностная схема «Крест» имеет следующий вид:

$$u_{j}^{n+1} - u_{j}^{n-1} + \kappa \left(u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n} \right) = 0.$$
(65)

В линейном приближении схема «Крест» является устойчивой при числах Куранта меньше единицы.

Подставляя пробную функцию (36) в схему (65), получим характеристическое уравнение для множителя перехода λ

$$\lambda^2 + i(2\kappa\sin\varphi)\lambda - 1 = 0. \tag{66}$$

Квадратное уравнение (66) имеет два комплексных корня

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} - i\kappa \sin \varphi, \quad \lambda_2 = -\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} - i\kappa \sin \varphi. \tag{67}$$

Модули этих корней равны единице, поэтому схема «Крест» является бездиссипативной. Среди корней (67) первый корень является физически корректным, ему соответствует нормированная численная фазовая скорость

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda , \qquad (68)$$

которая стремится к единице при $\varphi \to 0$, т.е. при $h \to 0$ для фиксированного значения волнового числа k. Другой корень является «паразитным», его влияние на численное решение исключается путем правильного выбора начальных и граничных условий в разностной задаче.

Подставляя величину λ_1 в формулу (68), находим нормированную численную фазовую скорость

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda_1 = \frac{1}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg}\left(\frac{\kappa \sin \varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}\right),\tag{69}$$

а затем – нормированную групповую скорость

$$\frac{c_g}{c} = \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \frac{c^*}{c} \right) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} \,. \tag{70}$$

На рис. 8 для схемы «Крест» приведены графики зависимостей численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа для различных значений числа Куранта. На этом же рисунке приведены аналогичные графики для схемы BiC4-CN. Из графиков на рис. 8 видно, что

схема «Крест» имеет существенный недостаток, связанный с наличием отрицательных значений групповой скорости при $\varphi > \pi/2$.



Рис. 8. Зависимости численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Кривые 1-4 соответствуют значениям числа Куранта κ , равным 0.1, 0.2, 0.5 и 0.9. Сплошные кривые соответствуют схеме «Крест», а штриховые кривые – схеме BiC4-CN.

Схема Айзерлиса (схема «КАБАРЕ»). Эта трехслойная разностная схема впервые предложена в работе [24] и для линейного уравнения переноса (10) имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n} + u_{j}^{n} - u_{j}^{n-1} \right) + \kappa \left(u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n} \right) = 0.$$
(71)

Пространственно-временной шаблон схемы Айзерлиса является несимметричным. Схема относится к классу «ориентированных» схем, т.е. зависимых от направления переноса (знака фазовой скорости *c*). Она является устойчивой при числах Куранта, меньших или равных единице.

Подставляя пробную функцию (36) в схему (71), получим характеристическое уравнение для множителя перехода λ

$$\lambda^2 - (1 - 2\kappa) \left(1 - e^{-i\varphi} \right) \lambda - e^{-i\varphi} = 0.$$
(72)

Характеристическое уравнение (72) для схемы (71) совпадает с аналогичным уравнением для двухслойной схемы «КАБАРЕ» [26].

По теореме Виета для двух корней λ_1 и λ_2 уравнения (72) имеем два уравнения

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (1 - 2\kappa)(1 - e^{-i\varphi}), \tag{73}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -e^{-i\varphi} \,. \tag{74}$$

Будем искать решение системы уравнений (73), (74) в таком виде:

$$\lambda_1 = e^{-i\varphi_1}, \ \lambda_2 = -e^{-i\varphi_2}.$$
 (75)

Подставляя (75) в (73) и приравнивая отдельно действительные и мнимые части левой и правой частей уравнения (73), после несложных преобразований получим систему двух уравнений для определения φ_1 и φ_2

$$\sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = (1 - 2\kappa)\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),\tag{76}$$

$$\sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = (1 - 2\kappa) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$
(77)

Подставляя (75) в уравнение (74), получаем третье уравнение для определения φ_1 и φ_2

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \,. \tag{78}$$

Однако три уравнения (76)-(78) для φ_1 и φ_2 являются совместными. Если сделать подстановку (78) в левую часть уравнения (76) и сократить одинаковый множитель $\sin(\varphi/2)$ в левой и правой части уравнения, то в итоге получим уравнение

$$\sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = (1 - 2\kappa)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{79}$$

Если сделать подстановку (78) в левую часть уравнения (77) и сократить одинаковый множитель $\cos(\varphi/2)$ в левой и правой части уравнения, то опять получим уравнение (79). Таким образом, для определения двух величин φ_1 и φ_2 имеем два независимых уравнения (78) и (79). Решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{2} - \arcsin\left((1 - 2\kappa)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right), \quad \varphi_2 = \frac{\varphi}{2} + \arcsin\left((1 - 2\kappa)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right). \quad (80)$$

Подставляя (80) в (75), получим аналитические выражения для корней характеристического уравнения (72)

$$\lambda_{1} = \exp\left\{-i\left[\frac{\varphi}{2} - \arcsin\left((1 - 2\kappa)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right]\right\},\tag{81}$$

$$\lambda_2 = -\exp\left\{-i\left[\frac{\varphi}{2} + \arcsin\left((1 - 2\kappa)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right]\right\}.$$
(82)

Модули этих корней равны единице, поэтому схема Айзерлиса является бездиссипативной. Среди корней (81), (82) первый корень является физически корректным, ему соответствует нормированная численная фазовая скорость

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda , \qquad (83)$$

которая стремится к единице при $\varphi \to 0$, т.е. при $h \to 0$ для фиксированного значения волнового числа k. Другой корень является «паразитным», его влияние на численное решение исключается путем согласованного задания начальных условий на нулевом и первом временных слоях в трехслойной схеме [25, 26]. Подставляя величину λ_1 в формулу (83), находим нормированную численную фазовую скорость

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\varphi} \operatorname{arcsin}\left((1 - 2\kappa) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \right],$$
(84)

а затем находим нормированную численную групповую скорость

$$\frac{c_g}{c} = \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \frac{c^*}{c} \right) = \frac{1}{2\kappa} \left(1 - \frac{(1 - 2\kappa)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 - (1 - 2\kappa)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} \right).$$
(85)

При стремящемся к нулю числе Куранта из (84), (85) можно получить следующие формулы для c^*/c и c_{e}/c :

$$\frac{c^*}{c} = \frac{2}{\varphi} \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right), \ \frac{c_g}{c} = \frac{1}{\cos^2\left(\varphi/2\right)}.$$
(86)

Из этих формул следует, что схема Айзерлиса имеет особенность при числе Куранта $\kappa = 0$: ее фазовая и групповая скорости стремятся к бесконечности при $\varphi \to \pi$.

На рис. 9 и 10 для схемы Айзерлиса приведены графики зависимости численных фазовой и групповой скоростей от безразмерного волнового числа

для различных значений числа Куранта. На этих же рисунках приведены аналогичные графики для схемы BiC4-CN. Из сравнения графиков на этих рисунках можно сделать вывод, что в области чисел Куранта $0 \le \kappa \le 0.4$ схема BiC4-CN имеет лучшее спектральное разрешение, чем у схемы Айзерлиса, а в области чисел Куранта $0.5 \le \kappa \le 1.0$ лучшее спектральное разрешение имеет схема Айзерлиса. Это неудивительно, поскольку, с одной стороны, схема Айзерлиса имеет вышеуказанную особенность при числе Куранта $\kappa = 0$, а с другой стороны, эта схема для линейного уравнения переноса (10) имеет точное решение при числах Куранта, равных 0.5 и 1 [25, 26].

Отметим, что при расчетах линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, а также квазилинейных гиперболических уравнений подобрать пространственно-временную разностную сетку, которая обеспечивает выполнение условия $0 \le \kappa \le 0.4$ для локального числа Куранта κ , значительно проще, чем подобрать такую сетку, обеспечивающую выполнение условия $0.5 \le \kappa \le 1.0$.

7. Заключение

В работе представлен Фурье-анализ двух полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа. Такой анализ проведен на примере модельного линейного уравнения переноса. Перед выполнением Фурье-анализа двухслойные бикомпактные разностные схемы, состоящие из двух разностных уравнений для значений искомой сеточной функции в целых и полуцелых узлах, преобразуются к трехслойным схемам, состоящим из одного разностного уравнения для значений сеточной функции в целых узлах. Результаты Фурьеанализа представлены в виде графиков зависимостей дисперсионных и диссипативных характеристик бикомпактных схем от безразмерного волнового числа и числа Куранта. Проведено сравнение дисперсионных и диссипативных свойств бикомпактных схем с аналогичными свойствами других широко используемых разностных схем для уравнений гиперболического типа. Показано, что бикомпактные схемы имеют одно из лучших спектральных разрешений среди сравниваемых разностных схем.

Кроме того, в работе рассматриваются элементы нестандартности бикомпактных схем и проводится их сравнение с известными компактными схемами.



Рис. 9. Зависимости численной фазовой скорости от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Сплошные кривые показывают зависимости для схемы Айзерлиса, штриховые кривые – для схемы BiC4-CN.

27



28

Рис. 10. Зависимости численной групповой скорости от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта. Сплошные кривые показывают зависимости для схемы Айзерлиса, штриховые кривые – для схемы BiC4-CN.

Библиографический список

1. Colonius T., Lele S.K. Computational aeroacoustics: progress on nonlinear problems of sound generation // Prog. Aerosp. Sci. 2004. V. 40. P. 345–416.

2. Ekaterinaris J.A. High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics // Prog. Aerosp. Sci. 2005. V. 41. P. 192–300.

3. Kurbatskii K.A., Mankbadi R.R. Review of computational aeroacoustics algorithms // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2004. V. 18. P. 533-546.

4. Bogey C., Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations // J. Comput. Phys. 2004. V. 194. P. 194–214.

5. Xu D., Deng X., Chen Y., Wang G., Dong Y. Effect of nonuniform grids on high-order finite difference method // Adv. Appl. Math. Mech. 2017. V.9, No.4. P. 1012-1034.

6. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонная высокоточная компактная схема бегущего счета для квазилинейных уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 2. С. 172-177.

7. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

8. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 4. С. 672-695.

9. Рогов Б.В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т.53, №2. С. 264-274.

10. Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 150–163.

11. Рогов Б.В., Брагин М.Д. О свойствах спектрального разрешения симметричных бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации // Докл. АН. 2017. Т. 475, № 2. С. 140-144.

12. Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W. A new class of central compact schemes with spectral-like resolution I: Linear schemes // J. Comput. Phys. 2013. V. 248. P. 235–256.

13. Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2017. Т.476, №4. С. 381–386.

14. Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Семейство симметричных бикомпактных схем со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 144. 28 с. doi:10.20948/prepr-2018-144

URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-144

15. Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Оптимизированная симметричная бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации с малой дисперсией для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2018. Т. 478, № 6. С.631-636.

16. Zingg D.W. Comparison of high-accuracy finite-difference methods for linear wave propagation // SIAM J. Sci. Comput. 2000. V. 22, No. 2. P. 476–502.

17. Lele S.K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution // J. Comput. Phys. 1992. V. 103. P. 16-42.

18. Trefethen L.N. Group velocity in finite difference schemes // SIAM Rev. 1982. V. 24, No. 2. P. 113–136.

19. Sengupta T.K., Dipankar A., Sagaut P. Error dynamics: beyond von Neumann analysis // J. Comput. Phys. 2007. V. 226, No. 2. P. 1211–1218.

20. Sengupta T.K. High accuracy computing methods: fluid flows and wave phenomena. Delhi: Cambridge University Press, 2013.

21. Vichnevetsky R., Bowles J.B. Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations. Philadelphia: SIAM, 1982.

22. Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations, unpublished text, 1996; freely available online http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdetext.html.

23. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows, Vol. 1: Fundamentals of Numerical Discretization. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.

24. Iserles A. Generalized leapfrog methods // IMA J. Numer. Anal. 1986. V. 6, No. 3. P. 381-392.

25. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Козубская Т.К., Максимов Н.В. Схема «КАБАРЕ» для численного решения задач аэроакустики: обобщение на линеаризованные уравнения Эйлера в одномерном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 12. С. 2265-2280.

26. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткий И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 2013. 472 с.

Оглавление

1. Введение	3
2. Полудискретная симметричная бикомпактная схема	4
3. Дисперсионные свойства полудискретных бикомпактных схем	7
4. Полностью дискретные бикомпактные схемы	10
5. Фурье-анализ полностью дискретных бикомпактных схем	12
6. Сравнение бикомпактных схем с известными разностными схемами	
для уравнения переноса	18
7. Заключение	26
Библиографический список	29
* *	