



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Криксин Ю.А., Кучугов П.А.,
Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А.,
Тишкин В.Ф.

Построение точных решений
некоторых уравнений
гиперболического типа,
содержащих разрыв,
распространяющийся по
неоднородному фону

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Построение точных решений некоторых уравнений гиперболического типа, содержащих разрыв, распространяющийся по неоднородному фону / Ю.А.Криксин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 17. 14 с. doi:[10.20948/prepr-2018-17](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-17)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-17>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Ю.А. Криксин, П.А. Кучугов, М.Е. Ладонкина,
О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин

Построение точных решений
некоторых уравнений гиперболического типа,
содержащих разрыв,
распространяющийся по неоднородному фону

Москва — 2018

Криксин Ю.А., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.

Построение точных решений некоторых уравнений гиперболического типа, содержащих разрыв, распространяющийся по неоднородному фону

В работе построены точные решения для квазилинейного уравнения переноса и системы уравнений мелкой воды, которые содержат разрывы, распространяющиеся по неоднородному фону. Эти решения могут быть использованы в качестве тестовых задач для верификации вновь создаваемых программных комплексов и численных методов.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение переноса, система уравнений мелкой воды, точное решение, разрывный метод Галёркина

Yury Anatolievich Kriksin, Pavel Alexandrovich Kuchugov, Marina Eugenievna Ladonkina, Olga Alexandrovna Nekliudova, Vladimir Fedorovich Tishkin

Construction of exact solutions of certain equations of hyperbolic type containing a discontinuity propagating along a non-homogeneous background

Exact solutions for the quasilinear transport equation and a system of shallow water equations that contain discontinuities propagating along an inhomogeneous background were constructed in this paper. These solutions can be used as test tasks for verification of newly created software packages and numerical methods.

Key words: quasi-linear transport equation, shallow water equations, exact solution, discontinuous Galerkin method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 17-01-00361-а, № 16-01-00333.

Оглавление

Введение	3
Построение точных решений, содержащих разрыв, распространяющийся по неоднородному фону	3
Квазилинейное уравнение переноса.....	3
Система уравнений мелкой воды	5
Примеры численных решений	11
Заключение.....	13
Список литературы.....	13

Введение

Уравнения и системы уравнений типа законов сохранения [1-4] возникают во многих практических приложениях, в связи с чем их численное решение представляет значительный интерес. С этой целью разрабатываются всё более совершенные численные методы и алгоритмы. Важной составляющей этого процесса является этап верификации вычислительного алгоритма, при этом особый интерес представляет поведение численных решений в областях, содержащих сильные и слабые разрывы. Много работ посвящены построению аналитического решения для сложных задач, имеющих прикладное значение [5-11]. Однако в данных работах рассматриваются либо кусочно-постоянные начальные данные [5-9], либо решения, исключаяющие разрывы [10,11].

В то же время наиболее важным является исследование точности расчетных методик на модельных задачах, в которых разрывы распространяются по неоднородному фону. Однако существует немного задач, имеющих точные решения такого рода.

В данной работе авторы проводят построение разрывных решений для квазилинейного уравнения переноса и системы уравнений мелкой воды, используя характеристический подход.

Построение точных решений, содержащих разрыв, распространяющийся по неоднородному фону

Квазилинейное уравнение переноса

Простейшим примером квазилинейного уравнения переноса является уравнение Хопфа [12], с помощью которого может быть описано движение газа невзаимодействующих частиц. В одномерном случае оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Общим решением уравнения (1) является функциональная зависимость $G(x - ut, u) = 0$. В частности, можно рассмотреть семейство решений вида

$$u(x, t) = \frac{x + A}{t + B}. \quad (2)$$

Уравнение (1) допускает существование разрывных решений. Сконструируем такое решение с использованием двух различных решений вида (2):

$$u = \begin{cases} u_L = (x + A)/(t + B), & x \leq x_f, \\ u_R = (x + C)/(t + D), & x > x_f, \end{cases} \quad (3)$$

где $x_f(t)$ — положение фронта ударной волны, выражение для которого необходимо найти, чтобы получить окончательное точное решение. Согласно [13-15], получаем:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_f + A}{t + B} + \frac{x_f + C}{t + D} \right), \quad (4)$$

или после интегрирования

$$x_f(t) = C_1 \sqrt{(t + B)(t + D)} + \frac{(A - C)t + AD - CB}{B - D}, \quad (5)$$

где C_1 — константа интегрирования, которая может быть определена при задании начального условия $x_f(0) = x_0$.

Приведём пример построенного точного решения (5), содержащего разрыв, распространяющийся по неоднородному фону, конкретизировав значения констант. Пусть $A=1$, $B=2$, $C=0$, $D=1$ и $x_0=1/2$. Для этого случая $C_1 = \sqrt{2}/4$. Соответствующие профили u в различные моменты времени приведены на рис. 1.

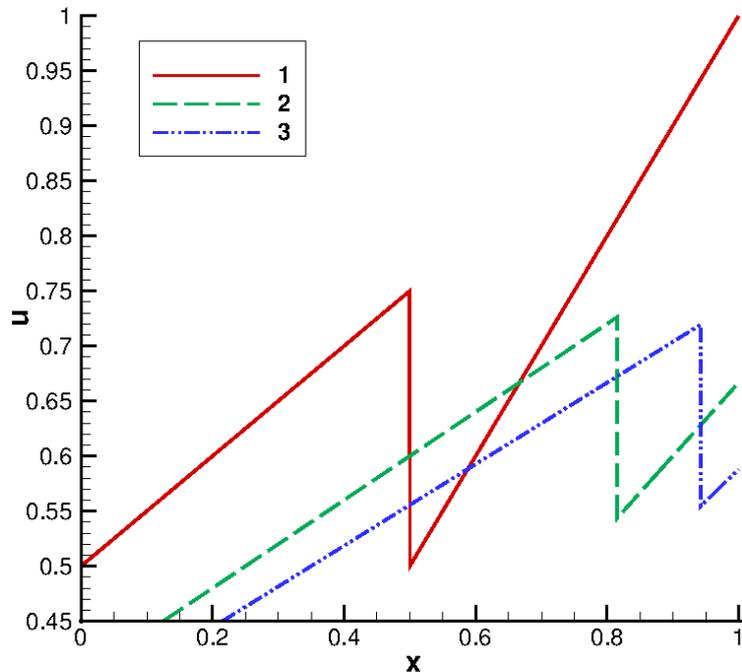


Рис. 1. Точное решение уравнения Хопфа на моменты времени $t = 0.0$ (1), 0.5 (2) и 0.8 (3).

Система уравнений мелкой воды

Обратимся к системе уравнений мелкой воды, для которой возможно проведение похожей процедуры по построению точного разрывного решения. Данная система уравнений может быть получена из системы уравнений гидродинамики в приближении, когда длина гравитационных волн велика по сравнению с глубиной жидкости [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где h – глубина жидкости, u – скорость течения в горизонтальном направлении, ускорение поля силы тяжести g примем равным 1. Система уравнений (6) может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial R^+}{\partial t} + (u + \sqrt{h}) \frac{\partial R^+}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial R^-}{\partial t} + (u - \sqrt{h}) \frac{\partial R^-}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $R^\pm = u \pm 2\sqrt{h}$ – инварианты Римана для системы (6).

Рассмотрим область $-\infty < x < \infty$. В качестве фонового решения в области $x \geq x_0$ зададим решение в виде простой центрированной волны, для которой инвариант R^- остаётся постоянным. Положим

$$R_r^- = \beta. \quad (8)$$

В этом случае величины h и u будут определяться следующими выражениями:

$$u_r = \beta + 2\sqrt{h_r}, \quad \sqrt{h_r} = \frac{1}{3} \left(\beta + \frac{x+A}{t+B} \right), \quad (9)$$

где $u_r = u(x \geq x_0, t)$, $h_r = h(x \geq x_0, t)$. Будем считать, что в области $x < x_0$ сохраняется другой инвариант, а именно R^+ . Пусть

$$R_l^+ = \alpha. \quad (10)$$

Соответствующее решение системы (6) также может быть задано в виде простой центрированной волны:

$$u_l = \alpha - 2\sqrt{h_l}, \quad \sqrt{h_l} = \frac{1}{3} \left(\alpha - \frac{x+C}{t+D} \right). \quad (11)$$

Потребуем выполнения условий Гюгонио на разрыве:

$$\begin{cases} h_l^* u_l^* - h_r^* u_r^* = W(h_l^* - h_r^*), \\ h_l^* (u_l^*)^2 + \frac{(h_l^*)^2}{2} - h_r^* (u_r^*)^2 - \frac{(h_r^*)^2}{2} = W(h_l^* u_l^* - h_r^* u_r^*), \end{cases} \quad (12)$$

где W – скорость движения разрыва, $h_{l,r}^*$ и $u_{l,r}^*$ — значения соответствующих функций справа и слева от разрыва. Исключая из уравнений (12) W , можно получить

$$\frac{h_l^* + h_r^*}{2} (h_l^* - h_r^*)^2 = h_l^* h_r^* (u_l^* - u_r^*)^2, \quad (13)$$

или с учётом (8) и (10)

$$\frac{h_l^* + h_r^*}{2} (h_l^* - h_r^*)^2 = h_l^* h_r^* (\alpha - \beta - 2\sqrt{h_l^*} - 2\sqrt{h_r^*})^2, \quad (14)$$

решая которое, можно определить величины h_l^* и u_l^* на разрыве. Для согласования решений (9) и (11) слева и справа от разрыва значения констант в (11) должны определяться с учётом следующего условия:

$$\frac{C + x_0}{D} = \alpha - 3\sqrt{h_l^*}, \quad (15)$$

полученного в начальный момент времени $t = 0$.

Точное решение в произвольный момент времени t в области, ограниченной слева характеристикой $x_0 + (u_l^* - \sqrt{h_l^*})t$ (см. рис. 2), будет определяться функциями (11), а ограниченной справа фронтом ударной волны $x_f(t)$ – функциями (9). В области же между указанной характеристикой и разрывом, в которой значение R^+ будет оставаться постоянным, решение по-прежнему будет представлять собой простую волну, которая, однако, уже не будет центрированной. На этом интервале точное решение определяется с использованием метода характеристик. Опишем данную процедуру более подробно.

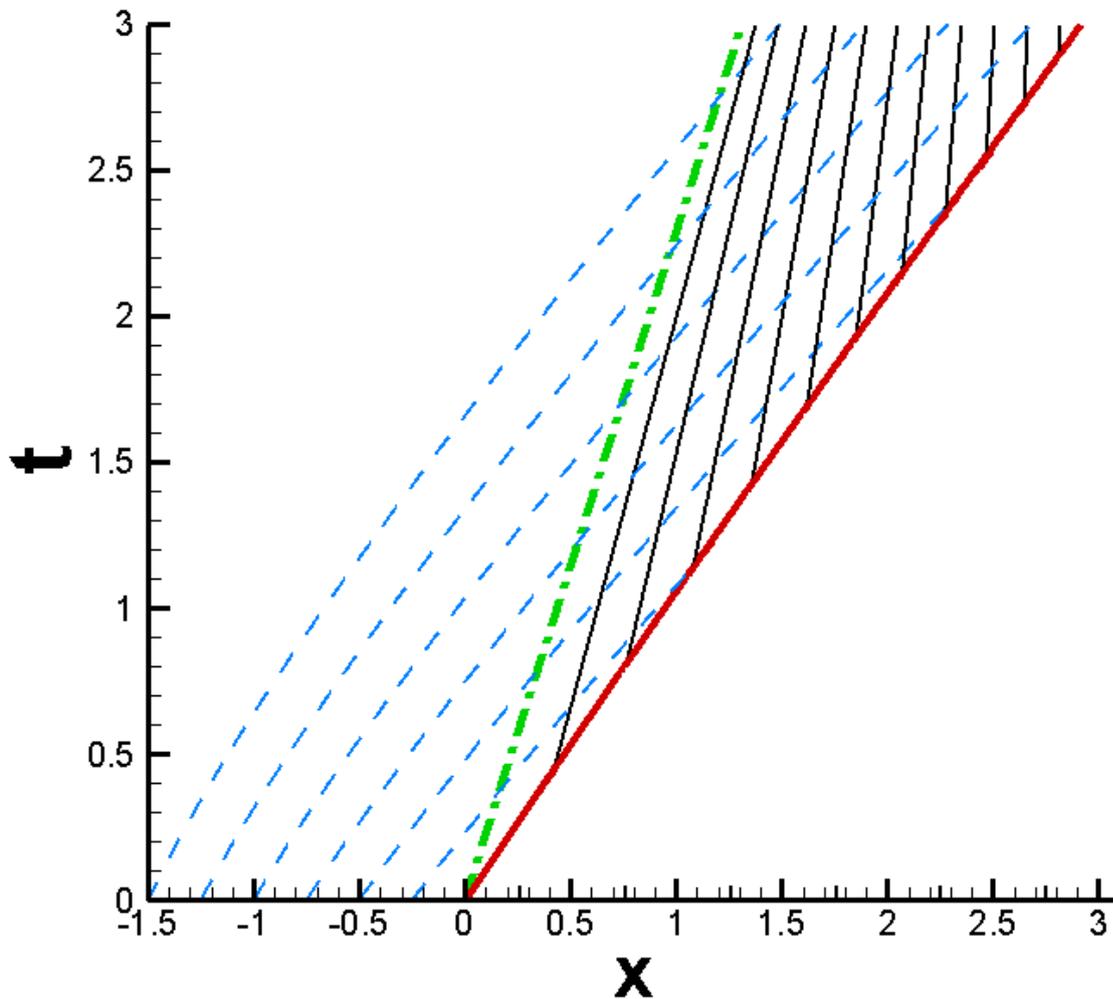


Рис. 2. Траектория движения ударной волны и семейство характеристик: красная (сплошная толстая) линия – траектория движения фронта ударной волны, зеленая (штрихпунктирная толстая) – характеристика с наклоном $u - \sqrt{h}$, выходящая из точки начального положения разрыва, синие (сплошные тонкие) линии – поле характеристик, выходящих из траектории движения ударной волны, на которых сохраняется значение $R^- = u_i^* - 2\sqrt{h_i^*}$, голубые (штриховые тонкие) линии – поле характеристик, на которых сохраняется значение инварианта $R^+ = u_i + 2\sqrt{h_i}$ и по которым это значение переносится на фронт ударной волны.

Значения перед фронтом разрыва h_r^* и u_r^* в каждый момент времени определяются по формулам (9). Решая уравнение (14), находим значения h_l^* и u_l^* как функции x_f и t , где x_f — положение фронта разрыва. Из (12) определяем скорость движения разрыва $W(x_f, t)$. Траектория движения разрыва $x_f(t)$ теперь определяется как решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx_f}{dt} &= W(x_f, t), \\ x_f(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из каждой точки этой траектории $x_f(t)$, t выпускаем характеристику, на которой сохраняется значение $R^- = u_l^* - 2\sqrt{h_l^*}$. В этом случае эти характеристики будут иметь постоянный наклон, т.е. будут прямыми линиями. Наконец, определяем точку пересечения x^* прямой $t=T$ и характеристики. Значения функций u и h в данную точку переносятся по характеристикам в соответствии со значениями инвариантов Римана.

Прделаем описанную выше процедуру для конкретных значений констант. Пусть $\beta=0$, $\alpha=3/2$, $x_0=0$, $A=1/2$, $B=1$, $D=1$, а C определяется в соответствии с (15). Уравнение (14) можно переписать в виде

$$P(\xi) = 0, \quad (17)$$

где P — полином с постоянными коэффициентами, $\xi = \sqrt{h}$. График зависимости приведён на рис. 3.

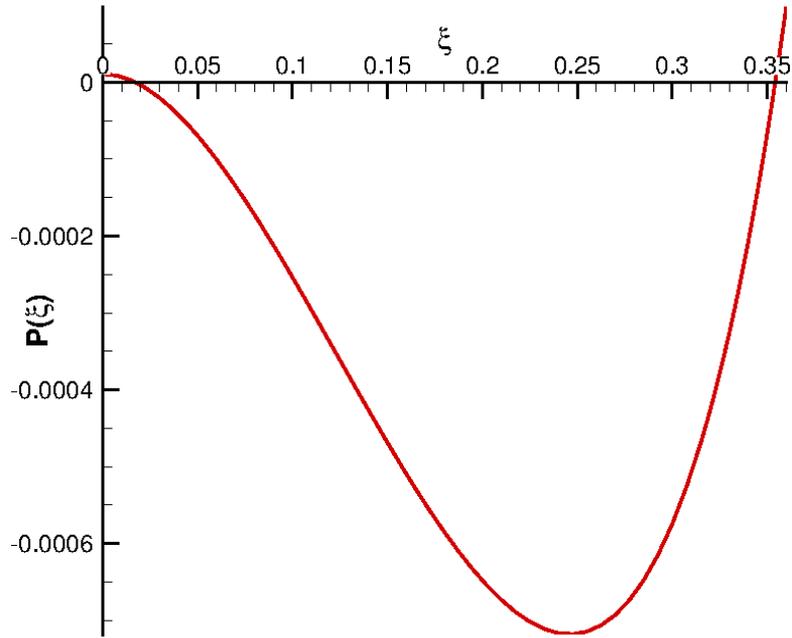


Рис. 3. Зависимость функции $P(\xi)$.

Построив ряд Штурма для $P(\xi)$ и применяя теорему Штурма [16], можно определить, что уравнение (17) имеет два корня на положительной полуоси, причём один из них соответствует ударной волне сжатия ($h_l^* > h_r^*$), другой – ударной волне разрежения ($h_l^* < h_r^*$). Из физических соображений выбираем первый из них. Для данного случая система характеристик приведена на рис. 2, а эволюция точного решения – на рис. 4.

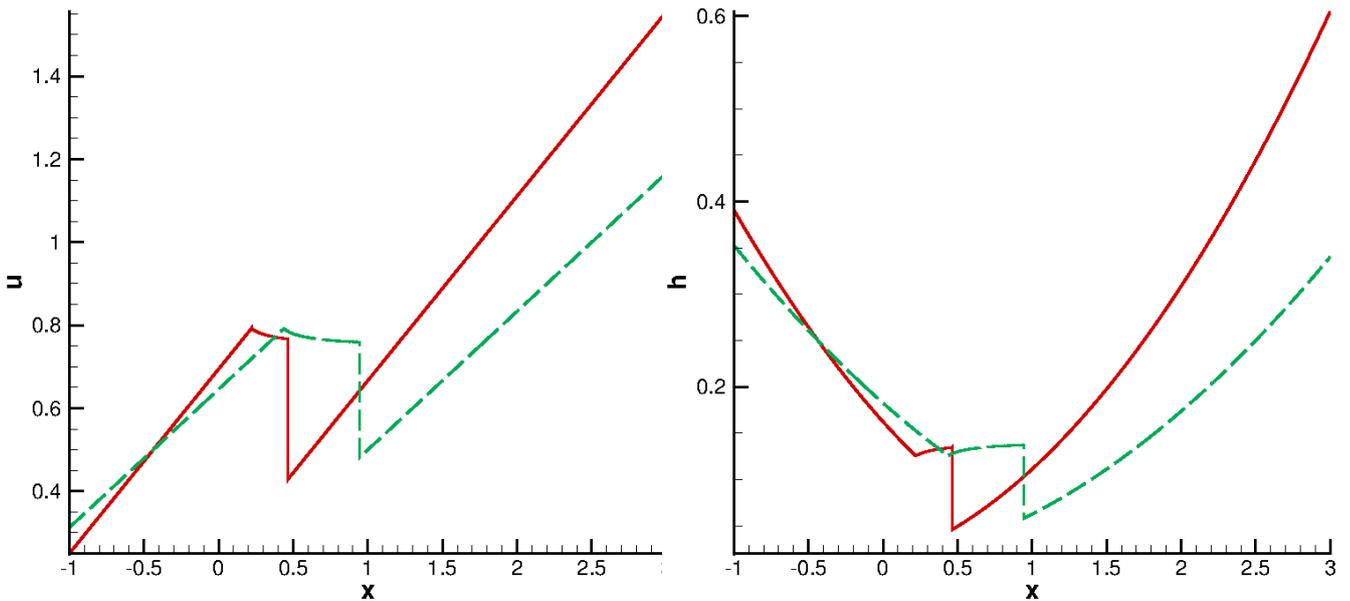


Рис. 4. Точное решение системы уравнений мелкой воды в моменты времени 0.5 (сплошные линии) и 1.0 (пунктирные линии).

Примеры численных решений

Приведём в данном разделе численные решения уравнения Хопфа и системы уравнений мелкой воды, для которых были построены точные решения, содержащие разрыв, полученные с использованием разрывного метода Галёркина [17,18]. Для представления области моделирования использовались сетки различной степени подробности. Численное решение в ячейке определяется коэффициентами разложения по базисным функциям. Приведённые ниже результаты относятся к случаю использования двух базисных функций, т.е. линейной интерполяции.

Представленные на рис. 5 и 6 результаты для уравнения Хопфа и системы уравнений мелкой воды позволяют говорить о близости построенного точного решения и численного. При этом при уменьшении шага сетки наблюдается приближение численного решения к точному, что особенно отчётливо видно в окрестности разрыва.

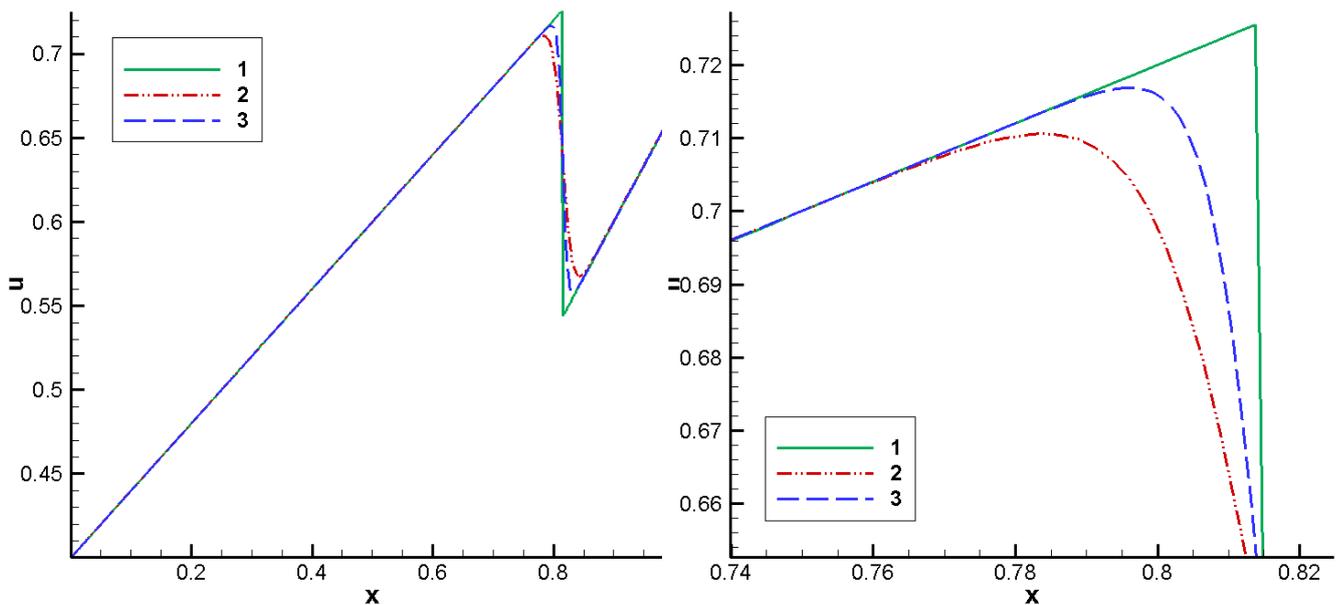


Рис. 5. Точное решение уравнения Хопфа (1) и численное решение разрывным методом Галёркина с использованием сеток, содержащих 400 ячеек (2) и 800 (3) ячеек, на всём интервале (слева) и в окрестности разрыва (справа) в момент времени $t = 0.5$.

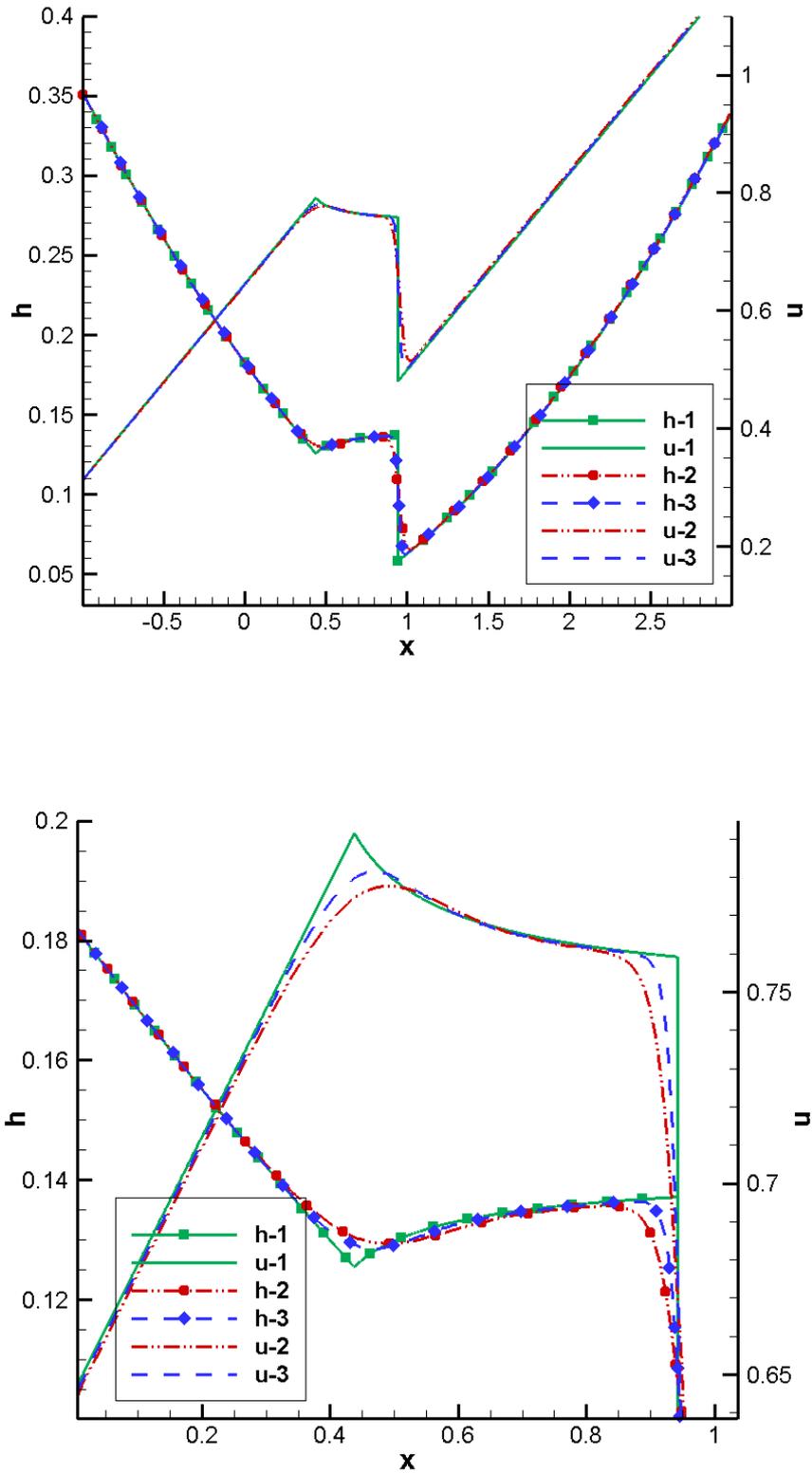


Рис. 6. Точное решение системы уравнений мелкой воды (1) и численное решение разрывным методом Галёркина с использованием сеток, содержащих 500 ячеек (2) и 1000 (3) ячеек, на всём интервале (вверху) и в окрестности разрыва (внизу) в момент времени $t = 1.0$.

Заключение

В работе с использованием метода характеристик построены точные разрывные решения для квазилинейного уравнения переноса, а также для системы уравнений мелкой воды. Результаты расчетов, выполненные по программам, реализующим разрывный метод Галёркина, показали хорошее совпадение с построенными решениями, подтверждая возможность их использования в качестве тестовых задач для верификации программных комплексов и численных методов.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
2. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд.-во иностр. лит., 1959.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений // М.: Физматлит, 2001.
4. Остапенко В.В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды: Курс лекций. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 2004.
5. Остапенко В.В., Шинкаренко Е.В. Течения, возникающие после прохождения прерывной волны над уступом дна // Механика жидкости и газа № 1, 2009.
6. Остапенко В.В. Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // Прикладная механика и техническая физика, 2003, т.44, №4.
7. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Сравнение теории и численного эксперимента в задаче о разрушении плотины на скачке площади сечения прямоугольного канала // Механика жидкости и газа № 3, 2013, С. 12-23.
8. Карабут П.Е., Остапенко В.В. Задача о распаде разрыва малой амплитуды в двухслойной мелкой воде. Первое приближение // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 5. С. 27-39.
9. Хакимзянов Г.С., Баутин С.П., Дерябин С.Л., Соммер А.Ф., Шокина Н.Ю. Аналитическое и численное исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности линии уреза / Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика, URL: http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/38017/45082/Khachimzyanov_doklad_Yan90.pdf
10. Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах для расчета движения линии уреза в рамках модели мелкой воды. I. // Вычислительные технологии. Том 19, № 1, 2014, С. 1-25.

11. Teshukov V., Russo G., Chesnokov A. Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2d rotational flows // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 2004 Vol. 14, No. 10 pp. 1-29.

12. Hopf E., The partial differential equation // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1950, 3, pp. 201-230.

13. Олейник О.А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук*, 1957, № 12, С. 3-73.

14. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука 1978.

15. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Moussiaux A. Handbook of first order partial differential equations // *Differential and Integral Equations and Their Applications* 2002 vol.1.

16. Шафаревич И.Р. О решении уравнений высших степеней (метод Штурма). М.: Гостехиздат, 1954.

17. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2012, № 34, с. 1-31. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34>.

18. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // *Мат. модел.*, 2012, т. 24, № 12, с. 124-128.