



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 199 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ильин С.С., Лукин В.В.,
Шумилов Ю.Ю.

Методика численной
оптимизации расположения
спутников связи на орбитах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин С.С., Лукин В.В., Шумилов Ю.Ю. Методика численной оптимизации расположения спутников связи на орбитах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 199. 23 с. doi:[10.20948/prepr-2018-199](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-199)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-199>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

С.С. Ильин, В.В. Лукин, Ю.Ю. Шумилов

Методика численной оптимизации расположения
спутников связи на орбитах

Москва — 2018

С.С. Ильин, В.В. Лукин, Ю.Ю. Шумилов

Методика численной оптимизации расположения спутников связи на орбитах

Представлена методика численной оптимизации размещения группировки спутников связи на орбитах. Рассмотрены круговые орбиты и параметры группировки, аналогичные системе спутниковой связи „Гонец“. Постановка задачи позволяет рассматривать задачи оптимизации площади покрытия и максимального времени ожидания. Для численного решения задачи оптимизации использован метод роя частиц. В качестве демонстрации работоспособности методики приведены результаты решения задач размещения группировки спутников для относительно небольшого числа спутников.

Ключевые слова: спутниковая система связи, оптимизация, метод роя частиц, группировка спутников.

Sergei Sergeevich Il'in, Vladimir Vladimirovich Lukin, Yury Yurievch Shumilov

Technique for numerical optimizing the disposing of communication satellites in orbits

A technique for numerical optimization of the orbital disposition of a communication satellites constellation is presented. Circular orbits and constellation parameters similar to the satellite communication system „Gonets“ are considered. The statement of the problem allows us to consider the problem of optimizing the area of coverage and the maximum communication waiting time. For the numerical solution of the optimization problem the particle swarm method was used. As a demonstration of the technique efficiency the results for the problems of disposing a constellation of satellites for a relatively small number of satellites are presented.

Key words: communication satellite system, optimization, particle swarm optimization, satellites constellation.

1. Введение

Спутниковые системы связи являются одним из наиболее развивающихся направлений обмена информацией. Такой вид связи широко используют в коммерческих, военных и гражданских целях. Обеспечение непрерывной спутниковой связи в регионах, где покрытие другими видами связи невозможно, или в случаях, когда общедоступные каналы связи не являются достаточно защищенными, ставит задачу формирования обеспечивающей связь спутниковой группировки, отвечающей требованию оптимальности площади поверхности, на которой связь доступна (поверхности покрытия) и времени ожидания связи на этой поверхности. Эти параметры к тому же зачастую связаны с финансовыми показателями контрактов на поставку услуг связи. Неоптимальное расположение спутников может привести к неоправданно большим экономическим затратам, потому что цена запуска спутников на орбиту велика, а возможности по изменению параметров орбиты спутника достаточно ограничены [1].

Задача оптимального размещения спутников связи на орбитах исследуется с того момента, как спутниковые системы связи стали удобным средством передачи информации [2–5]. В случае расчета равномерного по поверхности Земли покрытия задача имеет аналитическое решение с равномерным расположением спутников по выбранному числу орбит [6]. Более сложный вариант, возникающий при необходимости оптимизации размещения спутников на орбите для покрытия выделенной территории, допускает лишь численное исследование и стал доступен для исследования лишь при достаточном развитии вычислительных мощностей (например, [7]).

В работе рассмотрен численный метод приближённого вычисления площади покрытия Земли спутниками связи и максимального времени ожидания связи на всей планете, а также оптимизации этих величин как функций параметров орбит. Метод реализован в виде программного комплекса на языке C++ и допускает модификацию как по количеству спутников в оптимизируемой группировке и структуре самой группировки, так и — в перспективе — по выделению участков поверхности, на которых связь должна быть обеспечена с нулевой задержкой.

2. Постановка задачи

Рассмотрим постановку задачи оптимизации расположения спутников связи на орбитах для случая связи „пользователь-спутник“.

Пусть S — замкнутая гладкая поверхность выпуклого тела Ω с уравнением

$$S(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , в котром задана декартова система координат $Oxyz$ с центром в точке O . Будем считать, что S — поверхность планеты

Земля, а точка O является её центром масс, причём ось вращения планеты направлена вдоль оси z .

Вне тела Ω заданы n точек (спутников) $A_i, i = 1, \dots, n$, движущихся по плоским замкнутым кривым (орбитам) ξ_i , не имеющим общих точек с S и описываемым параметрически заданными вектор-функциями

$$\vec{r}(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))^T, \quad t \in [0, T_i],$$

где t — время, T — период обращения точки A_i вокруг Ω , $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ — гладкие функции. Если задан определённый класс орбит для спутников A_i (к примеру, эллиптические или круговые), то каждая кривая в общем случае задаётся параметрами, собранными в вектор $\vec{\mu}_i, i = 1, \dots, n$ с компонентами

$$\vec{\mu}_i = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^l).$$

Пусть каждый спутник A_i является вершиной конуса связи P_i с углом раствора $\alpha \in (0, \pi]$, причём ось конуса проходит через точку O , т.е. спутник „направлен“ на центр масс планеты. Обозначим $S_{A_i}(t)$ мгновенную область покрытия i -го спутника — множество тех точек поверхности S , которые попали внутрь конуса связи P_i спутника A_i и для которых спутник „виден“ в момент времени t . Под „видимостью“ будем понимать условие установления устойчивой связи¹. Для простоты в качестве условия установления связи будем понимать требование, чтобы отрезок, соединяющий точку и спутник, пересекался с поверхностью S не более одного раза.

Определим полосу покрытия спутником A_i за время T следующим образом:

$$S_{A_i} = \bigcup_{t \in [0, T]} S_{A_i}(t), \quad S_{A_i} \subset S, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим за S_A подмножество тех точек сферы, которые хотя бы раз были обеспечены связью спутниками A_i за время T :

$$S_A = \bigcup_{i=1}^n S_{A_i}.$$

Сопоставим множеству S_A его площадь C_A . Поскольку S_A является ограниченным множеством, граница которого состоит из кусков гладких границ множеств S_{A_i} , то определение площади такого множества является корректным.

Поскольку сама площадь C_A зависит от параметров орбит $\{\vec{\mu}_i\}_{i=1}^n$, то можно поставить задачу нелинейной многомерной оптимизации площади покрытия по орбитам за время $t \in [0, T]$:

$$C_A(\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_n) \rightarrow \max_{\{\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_n\}}. \quad (2)$$

¹В качестве одного из эмпирических требований устойчивой связи абонента со спутником в реальных системах является восхождение спутника над горизонтом на угол $\approx 10^\circ$.

Рассмотрим наравне с указанной другую задачу оптимизации характеристик системы связи. Определим максимальное время ожидания связи для заданной конфигурации спутников следующим образом. Рассмотрим произвольную точку M сферы и те промежутки времени внутри отрезка $[0, T]$, когда у неё отсутствует связь со спутниками, т.е. точка не входит ни в одну текущую область покрытия $S_{A_i}(t)$, $t \in [0, T]$. Обозначим за τ_M^k , $k = 0, \dots, k_M$, длительность k -го промежутка времени для точки M , когда связь отсутствует. Тогда выражение для максимального времени ожидания будет иметь вид:

$$T_{\max} = \max_{\substack{M \in S \\ k=0, \dots, k_M}} \tau_M^k.$$

Максимальное время ожидания связи зависит от параметров орбит. *Задача оптимизации максимального времени ожидания связи* имеет вид

$$T_{\max}(\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_n) \rightarrow \min_{\{\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_n\}} \max_{\substack{M \in S \\ k=0, \dots, k_M}} \tau_M^k, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

В дальнейшем для простоты будем рассматривать в качестве поверхности S сферу. В то же время описываемая в данной работе методика допускает анализ произвольной формы поверхности планеты.

2.1. Параметры орбит спутников

Будем рассматривать спутниковые системы с идеальными круговыми орбитами [8]. Положение спутника на орбите A_i , $i = 1, \dots, n$, в пространстве определяется высотой орбиты (радиусом окружности) и углами Эйлера (рис. 1)

$$(H_i, \psi_i, \theta_i, \varphi_{i,0}),$$

где H_i — высота орбиты над поверхностью Земли, ψ_i — долгота восходящего узла, θ_i — наклонение орбиты, а $\varphi_{i,0}$ — начальная фаза спутника. Примем, что

$$\psi_i \in [0, 2\pi], \quad \theta_i \in [0, \pi], \quad \varphi_{i,0} \in [0, 2\pi].$$

Будем считать, что для всех спутников высота орбиты является равной $H_i = H$, $i = 1, \dots, n$. Однако довольно легко адаптировать рассматриваемый далее алгоритм приближенного вычисления покрытия для работы со спутниками, находящимися на разных высотах.

3. Методика численного решения задач оптимизации

3.1. Приближённое вычисление площади покрытия

Аналитическое вычисление площади покрытия является сложной задачей, поскольку области покрытия спутников могут пересекаться произвольным

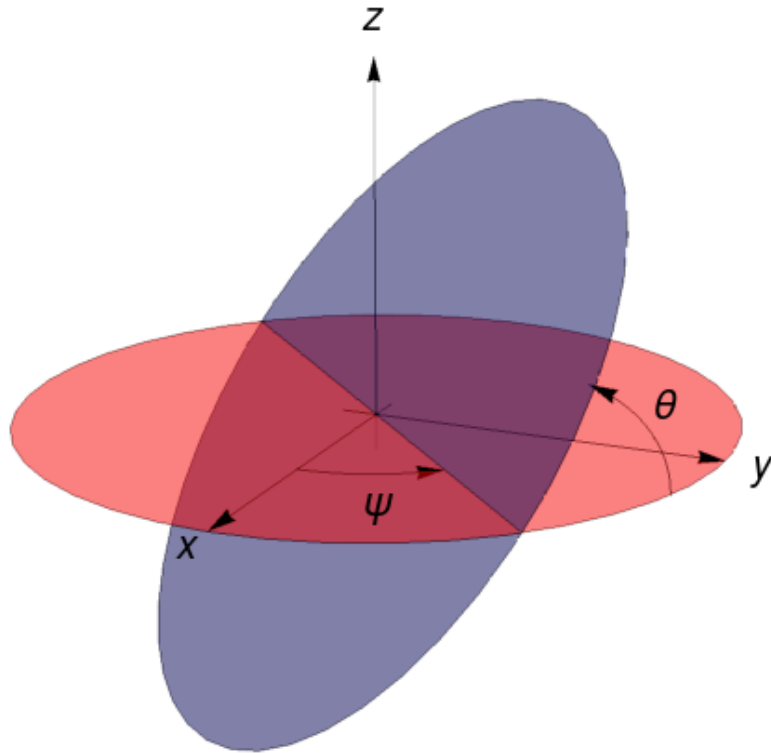


Рис. 1. Плоскость круговой орбиты спутника задаётся двумя углами: долготой восходящего узла ψ и наклоном θ

образом. Приближённый расчёт площади выполним следующим образом. Зададим на поверхности S треугольную сетку и используем ее для вычисления площади покрытия. Заметим, что проверять условие вхождения ячейки сетки в область покрытия можно разными способами. В данной работе будем проверять вхождение в область покрытия центра масс треугольника.

Введём равномерную сетку по времени

$$W_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, L, \tau = \frac{T}{L}\}.$$

Найдём положения спутников в моменты времени t_k . Для случая круговых орбит есть аналитические формулы, в более же сложных случаях их положения могут быть результатом работы какого-либо численного метода.

При проверке вхождения ячейки j в мгновенную область покрытия отдельно взятого спутника i в момент времени t_k перейдём в ортонормированный базис, в котором уравнение конуса для данного имеет наиболее простой вид

$$x^2 + y^2 = (z - (H + R))^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (4)$$

где R — радиус Земли, проведя ось z через спутник и центр масс планеты. Ранее мы определили, что точка входит в область покрытия, если

- 1) точка входит в конус покрытия;

2) точка видна для спутника связи.

Отметим ячейки, вошедшие в область покрытия спутника. Эти шаги необходимо проделать со всеми спутниками и всеми ячейками сетки. Суммируя площади отмеченных ячеек, получим мгновенную площадь покрытия для группировки спутника.

Для вычисления области покрытия за отрезок времени $t \in [0, T]$ необходимо провести аналогичные вычисления, сдвигая спутники вдоль орбит с некоторым малым шагом по времени δt . После останова алгоритма мы отметим все ячейки, хотя бы раз попавшие в зону покрытия за требуемый промежуток времени. Осталось лишь просуммировать их площади.

3.2. Приближённое вычисление максимального времени ожидания

Сопоставим каждому центру масс $M_i, i = 1, \dots, N$, треугольников сетки текущее время ожидания w_i и текущее максимальное время ожидания w_i^{\max} , которые в начале работы алгоритма (при $t = 0$) равны нулю для всех точек.

В момент времени $t = 0$ следует вычислить покрытую спутниками область. Если точка M_i не попала в область покрытия, следует увеличить w_i на время τ . Если же точка попала в область, то время w_i^{\max} обновляется:

$$w_i^{\max} = \max \{w_i^{\max}, w_i\},$$

а w_i обнуляется. Далее по очереди для каждого момента времени t_k процесс повторяется снова, пока $t \leq T$. В результате приближённое максимальное время ожидания w^{\max} будет вычислено по формуле:

$$w^{\max} = \max_{i=1, \dots, N} w_i^{\max}.$$

3.3. Построение равномерной треугольной сетки на сфере

Приведём алгоритм построения на сфере равномерной треугольной сетки из правильного икосаэдра [9] (рис. 2). Идея заключается в том, чтобы взять произвольную грань икосаэдра, поделить её ребра пополам и соединить на ней новые точки. В результате на грани образуются четыре правильных треугольника. Эти действия следует повторить для всех граней икосаэдра. На следующей итерации процесс повторяется, но уже для всех новых треугольников. После заданного числа итераций все точки проецируются на сферу.

В результате работы алгоритма получается равномерная сетка, пригодная для дальнейших вычислений. Примеры сеток приведены на рис. 3. После генерации следует вычислить площади всех треугольников сетки по формуле Герона и их центры масс.

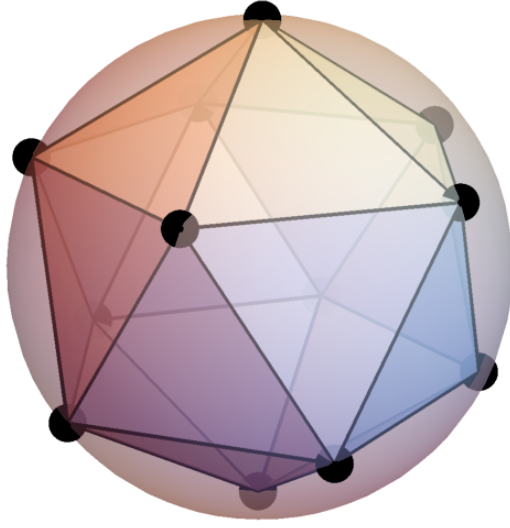


Рис. 2. Начальный правильный икосаэдр в алгоритме генерации сетки

3.4. Видимость точек сферы со спутника

Пусть произвольный спутник имеет координаты $\{0, 0, R + H\}$, где R — радиус Земли. Границей его области покрытия будет окружность на сфере. Найдём высоту плоскости, в которой лежит граница. На рисунках 4 и 5 эта высота равна ON . Рассмотрим два случая. В первом случае область покрытия спутника ограничена только горизонтом. Второй случай — когда область покрытия ограничена линией пересечения конуса с поверхностью Земли. Для первого случая (рис. 4)

$$ON = R \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \angle MSN \right) = R \sin \angle MSN = \frac{R^2}{H + R}. \quad (5)$$

Для второго случая воспользуемся теоремой синусов (рис. 5):

$$\frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{H + R}{\sin \gamma}.$$

Отсюда

$$\sin \gamma = \frac{H + R}{R} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Получаем, что если

$$\frac{H + R}{R} \sin \frac{\alpha}{2} \geq 1,$$

то область покрытия ограничена только горизонтом, поэтому следует воспользоваться формулой (5). Найдём угол β :

$$\gamma = \pi - \arcsin \left(\frac{H + R}{R} \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

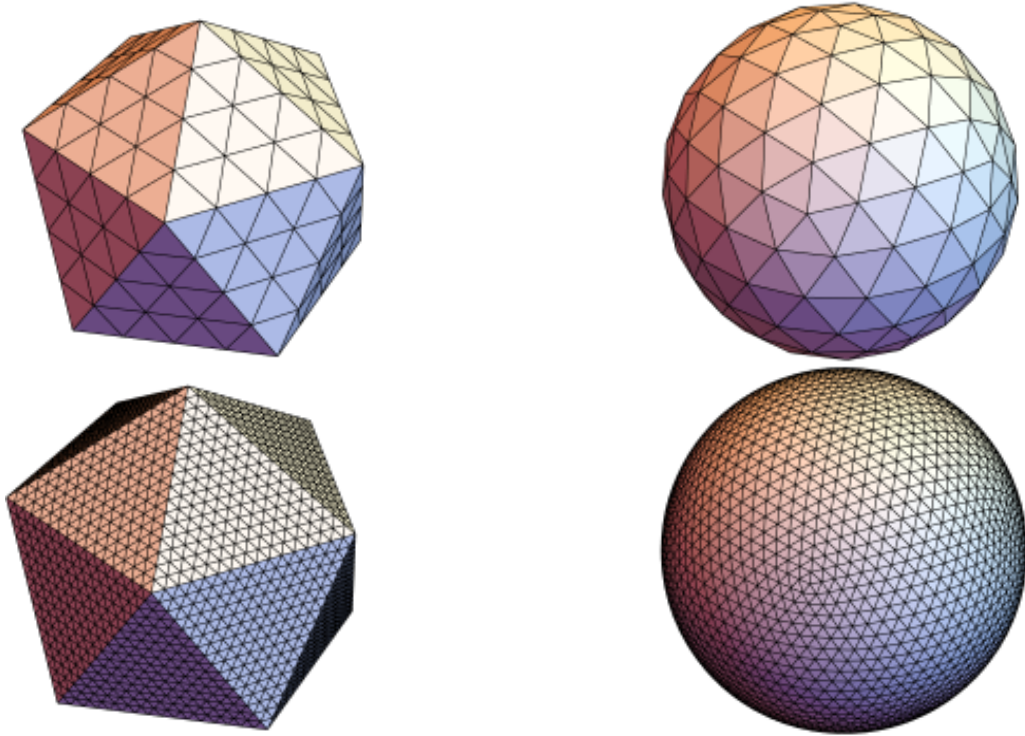


Рис. 3. Сверху и снизу рисунка расположен результат второй и четвёртой итераций соответственно. Справа — спроецированные на сферу точки

$$\beta = \pi - \frac{\alpha}{2} - \gamma = \arcsin\left(\frac{H+R}{R} \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$ON = R \cos \beta = R \cos\left(\arcsin\left(\frac{H+R}{R} \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Если ввести безразмерную высоту

$$H^* = \frac{H+R}{R},$$

обозначающую расстояние в радиусах Земли от спутника до её центра масс, и принять $R = 1$, то мы получим упрощённые формулы:

$$ON = \begin{cases} \frac{1}{H^*}, & H^* \sin \frac{\alpha}{2} \geq 1, \\ \cos\left(\arcsin\left(H^* \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}\right), & H^* \sin \frac{\alpha}{2} < 1. \end{cases}$$

На рисунке 6 можно увидеть пример учёта горизонта для спутника.

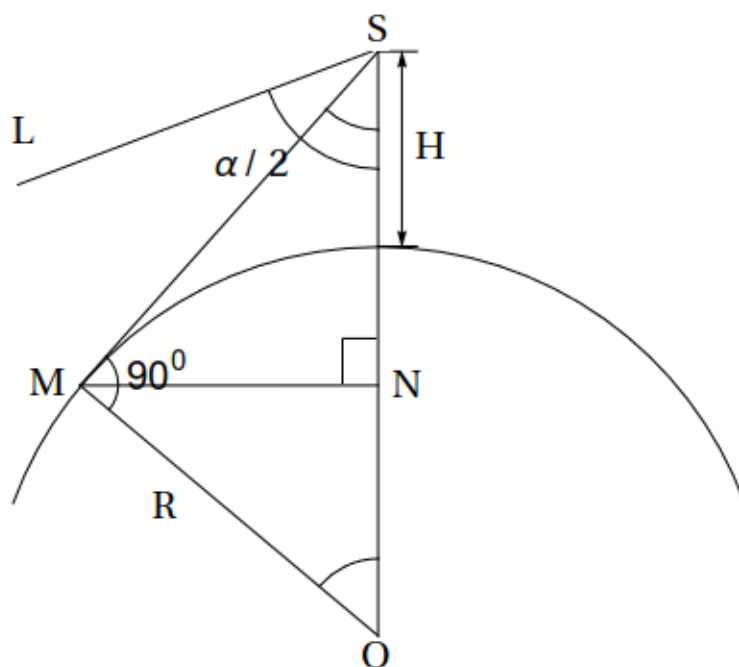


Рис. 4. Видимость точек сферы со спутника в случае ограничения горизонтом

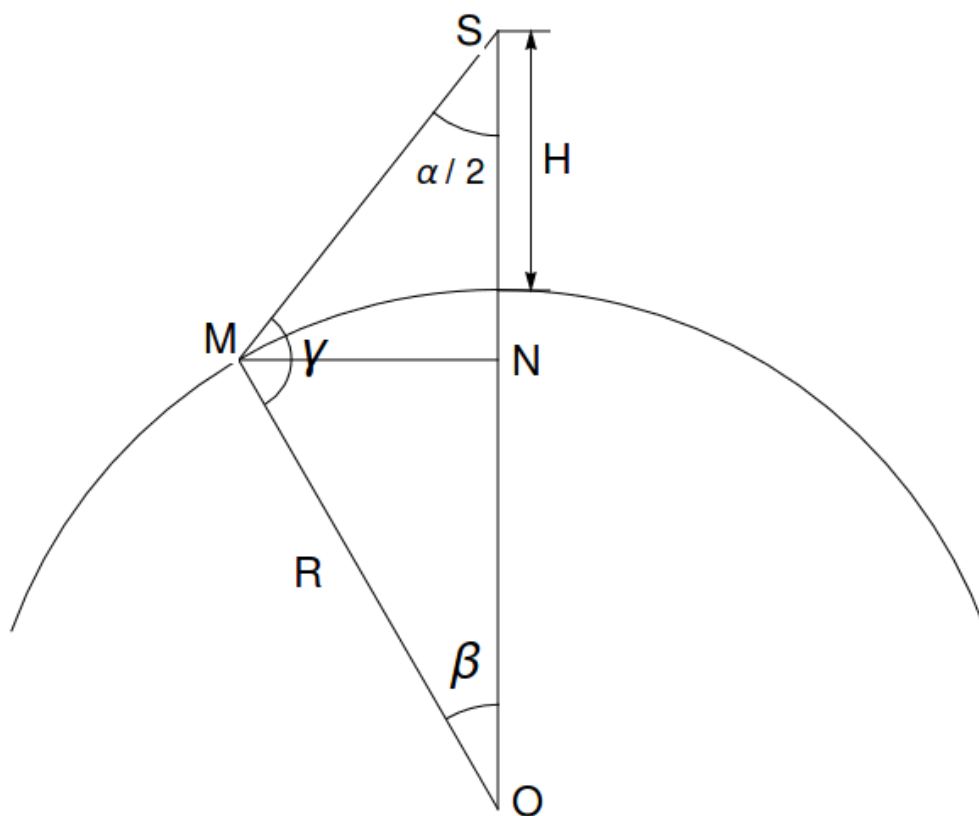


Рис. 5. Видимость точек сферы со спутника в случае ограничения углом при вершине конуса связи

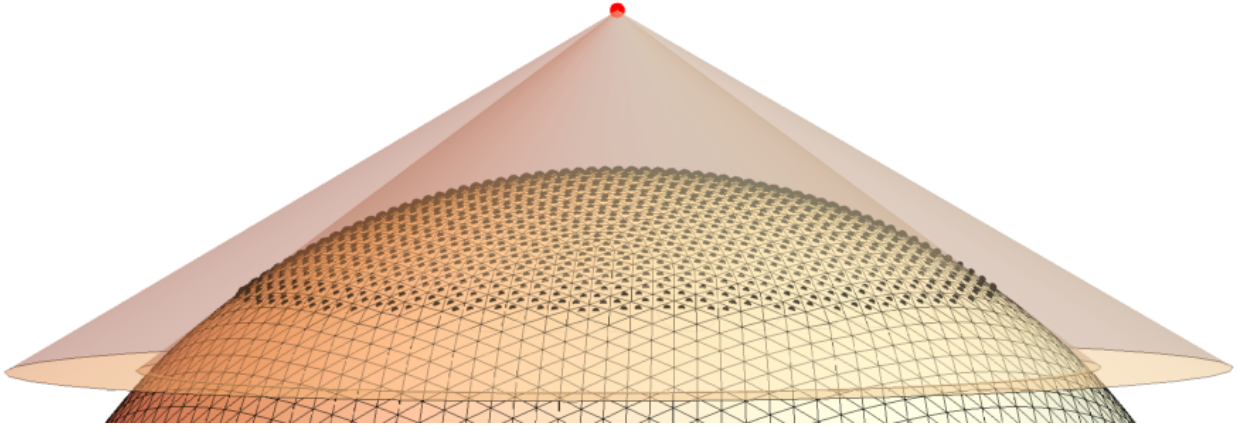


Рис. 6. Область покрытия Земли спутником системы „Гонец“, находящимся на высоте 1500 км и имеющим угол раствора конуса $\alpha = 120^\circ$ градусов. Внешний конус — это конус связи спутника, внутренний конус показывает фактическую область покрытия с учётом горизонта. Чёрные точки — центры масс треугольников сетки, которые вошли в область покрытия

3.5. Приведение уравнения конуса связи к каноническому виду

Пусть в некоторый момент времени положение спутника задаётся долготой восходящего узла ψ , наклонением θ и фазой φ . Начальной фазой спутника является угол φ_0 . Составим матрицы поворота для приведения уравнения конуса в вид (4). Матрица A_ψ поворачивает базис вокруг оси Oz на угол ψ против часовой стрелки:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее необходимо повернуть базис $Ox'y'z$ вокруг Ox' для устранения наклона. Но вместо поворота на угол θ следует сделать поворот на угол

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta - \frac{\pi}{2},$$

чтобы в новом базисе $Ox'y''z''$ орбита стала полярной:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}.$$

После этого нам необходимо сделать поворот на угол

$$\varphi^* = \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$$

вокруг оси Oy'' , чтобы поместить спутник в новом базисе в точку с координатами $\{0, 0, H^*\}$. Матрица поворота A_φ имеет вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi^* & 0 & \sin \varphi^* \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi^* & 1 & \cos \varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi + \varphi_0) & 0 & -\cos(\varphi + \varphi_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\varphi + \varphi_0) & 1 & \sin(\varphi + \varphi_0) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты произвольной точки сетки, радиус-вектор которой равен \vec{r} в исходной системе координат, преобразуются по правилу:

$$\vec{\rho} = A_\varphi A_\theta A_\psi \vec{r},$$

где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор с координатами точки сетки в новом базисе.

3.6. Учёт вращения Земли

Построенные матрицы поворота не учитывают вращение Земли. За счёт него область покрытия спутника будет выглядеть иначе. Найдём угол, на который повернётся Земля за то время, когда текущая фаза φ спутника увеличится на $\Delta\varphi$. Из свойств круговых орбит нам известно, что

$$v = \sqrt{\frac{GM}{L}},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса массивного тела (в нашем случае это Земля), L — расстояние от спутника до центра масс массивного тела, v — скорость спутника. Тогда период обращения спутника по орбите равен

$$T = \frac{2\pi L}{\sqrt{\frac{GM}{L}}} = \frac{2\pi L^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}.$$

Фаза спутника увеличится на $\Delta\varphi$ за время

$$T_{\Delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi L^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}.$$

За это время Земля повернётся на угол

$$\delta_E = T_{\Delta\varphi} \omega_E = \frac{L^{\frac{3}{2}} \omega_E}{\sqrt{GM}} \Delta\varphi, \quad (6)$$

где ω_E — угловая скорость вращения Земли. Для учёта вращения планеты необходимо изменить только матрицу A_ψ . Обозначим коэффициент пропорциональности в формуле (6):

$$K = \frac{L^{\frac{3}{2}} \omega_E}{\sqrt{GM}}.$$

Тогда матрица поворота A_ψ примет окончательный вид:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos(\psi - K\Delta\varphi) & \sin(\psi - K\Delta\varphi) & 0 \\ -\sin(\psi - K\Delta\varphi) & \cos(\psi - K\Delta\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$.

3.7. Оптимизация площади покрытия и максимального времени ожидания

Оптимизацию можно проводить не по всем параметрам орбит. К примеру, можно считать фиксированными наклонения i всех орбит спутников связи.

Опишем метод роя частиц [10] для поиска минимума целевой функции. Пусть m — размерность пространства параметров орбит, по которым проводится оптимизация. На вход подаётся множество D ,

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m],$$

в котором будет осуществляться поиск. Во множестве D случайным образом задаются точки $\{\mathbf{X}^{0,i}\}_{i=1}^S$, причём координаты каждой из точек распределены по равномерному закону, т.е. $\mathbf{X}_j^{0,i} \sim U[a_j, b_j]$, где $\mathbf{X}_j^{0,i}$ — j -ая координата i -ой точки, $j = 1, \dots, m$. Множество точек $\{\mathbf{X}^{0,i}\}_{i=1}^S$ принято называть роем частиц. Далее определяются скорости $\mathbf{V}^{0,i}$ всех частиц по похожему правилу: $\mathbf{V}_j^{0,i} \sim U[-|a_j - b_j|, |a_j - b_j|]$, $j = 1, \dots, m$. После этого в рое идет поиск частицы \mathbf{g} с наименьшим значением целевой функции, и значения скоростей и положений всех частиц обновляются:

$$\mathbf{V}_j^{k+1,i} = p_1 \mathbf{V}_j^{k,i} + p_2 u_j (\mathbf{g}_j - \mathbf{X}_j^{k,i}), \quad u_j \sim U[0, 1],$$

$$\mathbf{X}^{k+1,i} = \mathbf{X}^{k,i} + \mathbf{V}^{k+1,i},$$

где p_1 и p_2 — некоторые константы. Затем в рое заново начинается поиск частицы с наилучшим положением и так далее. Алгоритм останавливается, когда достигнуто ограничение по количеству итераций или рой достаточно „сгустился“ вокруг найденной точки минимума.

Оптимизация максимального времени ожидания является сложной задачей по нескольким причинам. Во-первых, подавляющая часть конфигураций спутников является непригодной, так как на них не достигается полное покрытие Земли, в топографии целевой функции возникают „плато“, на которых её значение равно времени просмотра T . В результате этого типичные алгоритмы (к примеру, симплексный поиск или метод циклического покоординатного спуска) могут „застрять“ в начальной точке. Во-вторых, каждое вычисление целевой функции требует большого количества операций.

Первую проблему можно частично решить с помощью метода штрафных функций. Рассмотрим оптимизацию вспомогательного функционала, равного сумме времени ожидания и штрафа за отсутствие полного покрытия Земли:

$$T_{\max}^*(A) = T_{\max}(A) + P_S \max \{0, 1 - S(A)\}^2,$$

где $T_{\max}(A)$ — максимальное время ожидания на группировке $A = \{A_i\}_{i=1}^n$ при $0 \leq t \leq T$, $S(A)$ — доля поверхности, покрытой связью, $0 \leq S(A) \leq 1$, P_S — некоторая достаточно большая константа. Так как частицы в методе роя могут выйти за пределы множества D , то следует добавить штраф за выход из области, в которой осуществляется поиск:

$$T_{\max}^*(A) = T_{\max}(A) + P_S \max \{0, 1 - S(A)\}^2 + P \left(\sum_{k \in m_\Omega} p(\Omega_k, 0, 2\pi) + \sum_{k \in m_i} p(i_k, 0, \pi) + \sum_{k \in m_{\varphi_0}} p(\varphi_{0,k}, 0, 2\pi) \right),$$

где $p(\gamma, a, b) = \max \{0, a - \gamma\}^2 + \max \{0, \gamma - b\}^2$ — штраф за выход параметра γ из отрезка $[a, b]$, m_Ω , m_i , m_{φ_0} — множества номеров восходящих узлов, наклонов и начальных фаз соответственно, по которым проводится оптимизация, P — достаточно большая константа. Если среди этих параметров присутствуют долготы восходящих узлов Ω , можно перенумеровать спутники и повернуть систему координат так, чтобы

$$0 = \Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_k,$$

и добавить дополнительный штраф за нарушение этого неравенства.

4. Результаты расчетов

Рассмотрим примеры расчётов, показывающие работоспособность алгоритмов.

4.1. Метод роя частиц

Пусть имеется четыре плоскости орбит с параметрами

$$\begin{aligned} (\Omega_1, i_1) &= (\Omega_1, 82,5^\circ), \\ (\Omega_2, i_2) &= (\Omega_2, 82,5^\circ), \\ (\Omega_3, i_3) &= (45^\circ, 82,5^\circ), \\ (\Omega_4, i_4) &= (90^\circ, 82,5^\circ), \end{aligned}$$

на каждой из которых располагается по три равноудалённых спутника с фазовыми углами 0, 120 и 240 градусов. На рис. 7 показаны последовательные итерации метода роя частиц при поиске оптимальных углов Ω_1 и Ω_2 . Размер роя составляет 50 частиц, $p_1 = -0.32$, $p_2 = 2.0$:

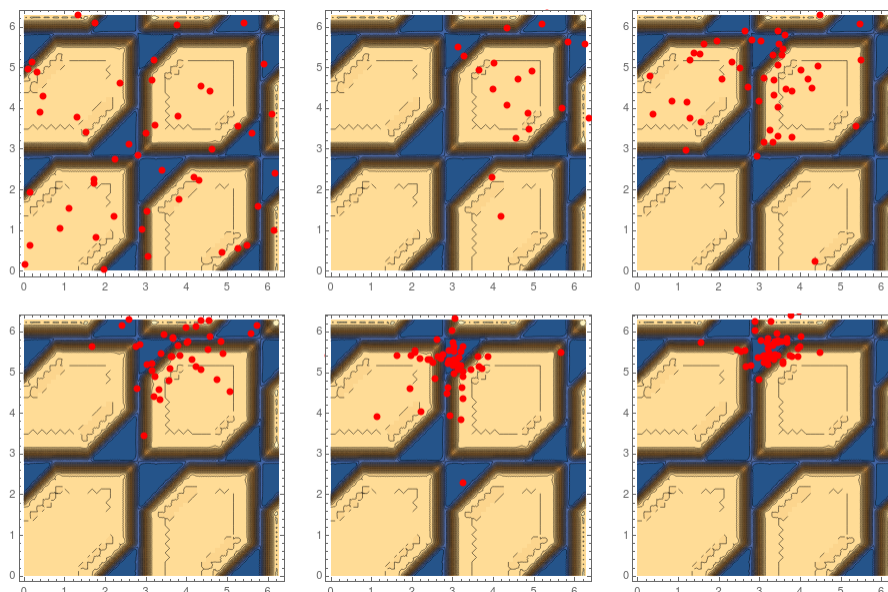


Рис. 7. Итерации метода роя частиц в задаче двумерной минимизации

4.2. Вычисление области покрытия

На рис. 8 показан результат расчёта области покрытия на сетке из 20480 треугольников. Чёрными точками отмечены центры масс треугольников сетки, попавшие в область покрытия. Красная линия показывает трассу орбиты.

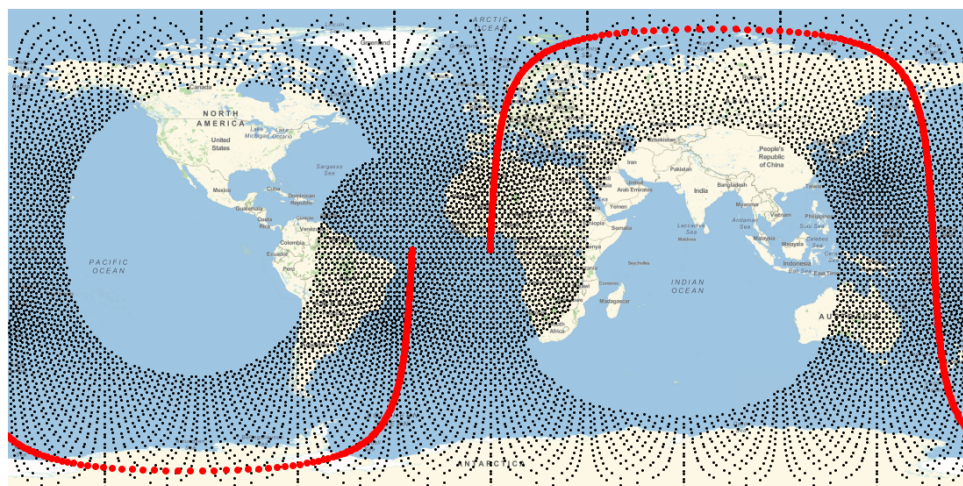


Рис. 8. Область покрытия Земли спутником системы „Гонец“, находящимся на высоте 1500 км и имеющим угол раствора конуса $\alpha = 120^\circ$, за время $T \approx 116$ минут (один оборот). Параметры орбиты: $\psi = 0$, $\theta = 82,5^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Используется равнопромежуточная проекция

4.3. Оптимизация максимального времени ожидания

Рассмотрим пример решения задачи оптимизации максимального времени ожидания связи для круговых орбит.

Пусть наклонения всех спутников равны 82.5° , начальные фазы равны нулю. Проведём оптимизацию независимо по всем восходящим узлам. Результаты оптимизации собраны в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальные восходящие узлы при нулевых начальных фазах

| Спутников | Оптимальные восходящие узлы | Время ожидания, с |
|-----------|--|-------------------|
| 3 | $\{0^\circ, 62^\circ, 124^\circ\}$ | 6090 |
| 4 | $\{0^\circ, 46.5^\circ, 92^\circ, 138^\circ\}$ | 5730 |
| 5 | $\{0^\circ, 70^\circ, 143^\circ, 216^\circ, 288^\circ\}$ | 5700 |

Заметим, что в данном случае при увеличении количества спутников не наблюдается заметное уменьшение времени ожидания. Рассмотрим несколько более общий случай, когда оптимизация ведётся не только по всем восходящим узлам, но и по начальным фазам. В табл. 2 собраны некоторые полученные конфигурации.

Таблица 2. Оптимальные восходящие узлы и фазы. В наборах параметров сначала идут восходящие узлы, а потом начальные фазы

| Спутников | Оптимальные восходящие узлы и фазы | Время ожидания, с |
|-----------|---|-------------------|
| 3 | $\{0^\circ, 54^\circ, 113^\circ, 91^\circ, 104^\circ, 260^\circ\}$ $\{0^\circ, 63^\circ, 123^\circ, 76^\circ, 84^\circ, 90^\circ\}$ $\{0^\circ, 58^\circ, 123^\circ, 250^\circ, 258^\circ, 266^\circ\}$ | 5730 |
| 4 | $\{0^\circ, 54^\circ, 85^\circ, 144^\circ, 286^\circ, 311^\circ, 11^\circ, 65^\circ\}$ $\{0^\circ, 55^\circ, 88^\circ, 147^\circ, 100^\circ, 141^\circ, 195^\circ, 238^\circ\}$ | 5280 5190 |
| 5 | $\{0^\circ, 34.5^\circ, 76^\circ, 108.5^\circ, 322^\circ, 123^\circ, 208^\circ, 294^\circ, 21^\circ, 14^\circ\}$ | 4140 |
| 6 | $\{0^\circ, 6^\circ, 56^\circ, 20^\circ, 120^\circ, 125^\circ, 52^\circ, 241^\circ, 151^\circ, 312^\circ, 172^\circ, 0^\circ\}$ | 2880 |

Таким образом, можно обойтись меньшим количеством спутников, получив при этом лучший результат. Распределение точек сетки по максимальному времени ожидания для трёх (первая конфигурация), четырёх (вторая конфигурация), пяти и шести спутников приведено на рис. 9. Квантили для этих конфигураций собраны в табл. 3.

Таблица 3. Квантили времени ожидания

| Спутников | Квантили | | | | | | | | | | |
|-----------|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0. | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1. |
| 3 | 1800 | 2400 | 2670 | 3015 | 3825 | 4140 | 4425 | 4695 | 4965 | 5235 | 5715 |
| 4 | 1320 | 2550 | 2955 | 3255 | 3600 | 3900 | 4155 | 4410 | 4545 | 4755 | 5190 |
| 5 | 360 | 750 | 1305 | 2070 | 2340 | 2535 | 2760 | 3135 | 3480 | 3900 | 4125 |

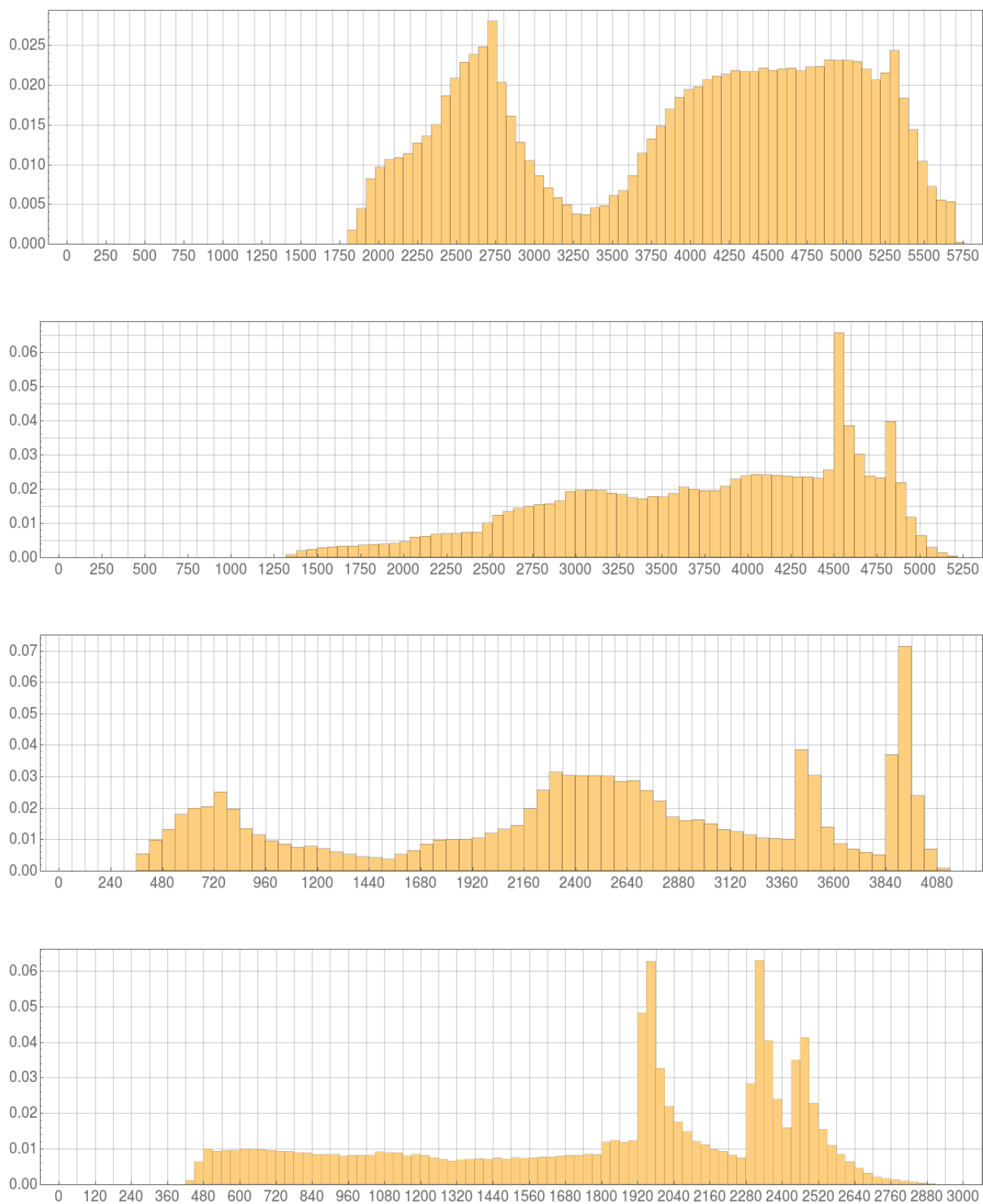


Рис. 9. Распределение точек сетки по максимальному времени ожидания связи для конфигураций группировки спутников, указанных в табл. 2. Сверху вниз три (первая конфигурация), четыре (последняя конфигурация), пять и шесть спутников

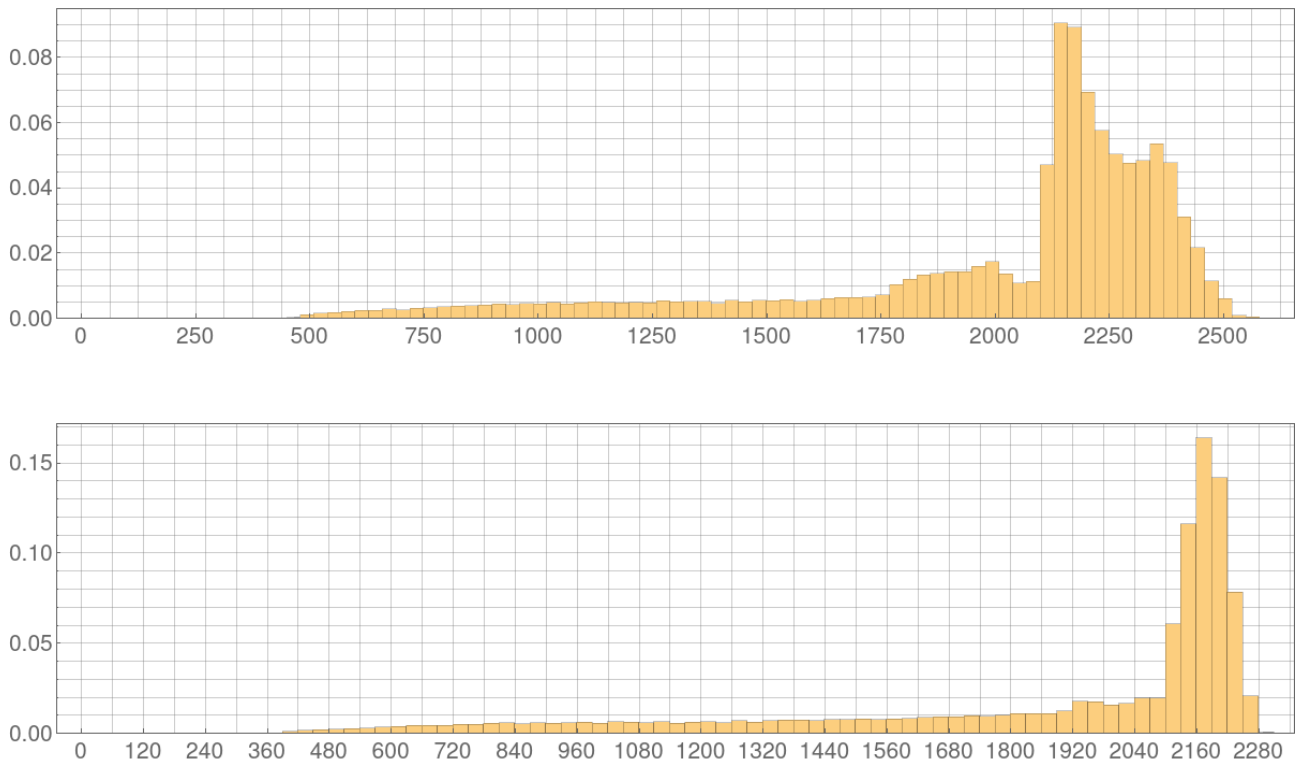


Рис. 10. Распределение точек сетки по максимальному времени ожидания связи: сверху вниз случае трёх и четырёх плоскостей, на каждой из которых находится по два равноудаленных спутника

Рассмотрим теперь случай, когда в одной плоскости находятся несколько спутников. В табл. 4 собраны результаты оптимизации восходящих узлов при различном числе плоскостей, на каждой из которых находится по два спутника с начальными фазами 0° и 180° . На рис. 10 показано распределение точек сетки по времени ожидания.

Отметим, что изменение высоты орбит группировки спутников не улучшает максимальное время ожидания связи. На рис. 11 показаны совмещенные распределения точек сетки по временам ожидания для группировок с высотой 1500 км (желтые столбцы) и 2000 км (синие столбцы). Как видно из гистограмм, в случае трех спутников на плоскости максимальное время ожидания при увеличении высоты увеличивается на 60 с, в случае четырех спутников — на 15 с, в случае пяти — не изменяется. Это объясняется тем, что хотя видимость каждого конкретного спутника с поверхности Земли улучшается, в то же время скорость движения зоны покрытия $S_{A_i}(t)$ относительно Земли с увеличением высоты орбиты падает.

Таблица 4. Оптимальные восходящие узлы для плоскостей

| Плоскостей | Оптимальные восходящие узлы | Время ожидания, с |
|------------|---|-------------------|
| 3 | $\{0^\circ, 63^\circ, 295^\circ\}$ | 2580 |
| 4 | $\{0^\circ, 48^\circ, 96^\circ, 147^\circ\}$ | 2295 |
| 5 | $\{0^\circ, 203^\circ, 239^\circ, 283^\circ, 326^\circ\}$ | 2220 |

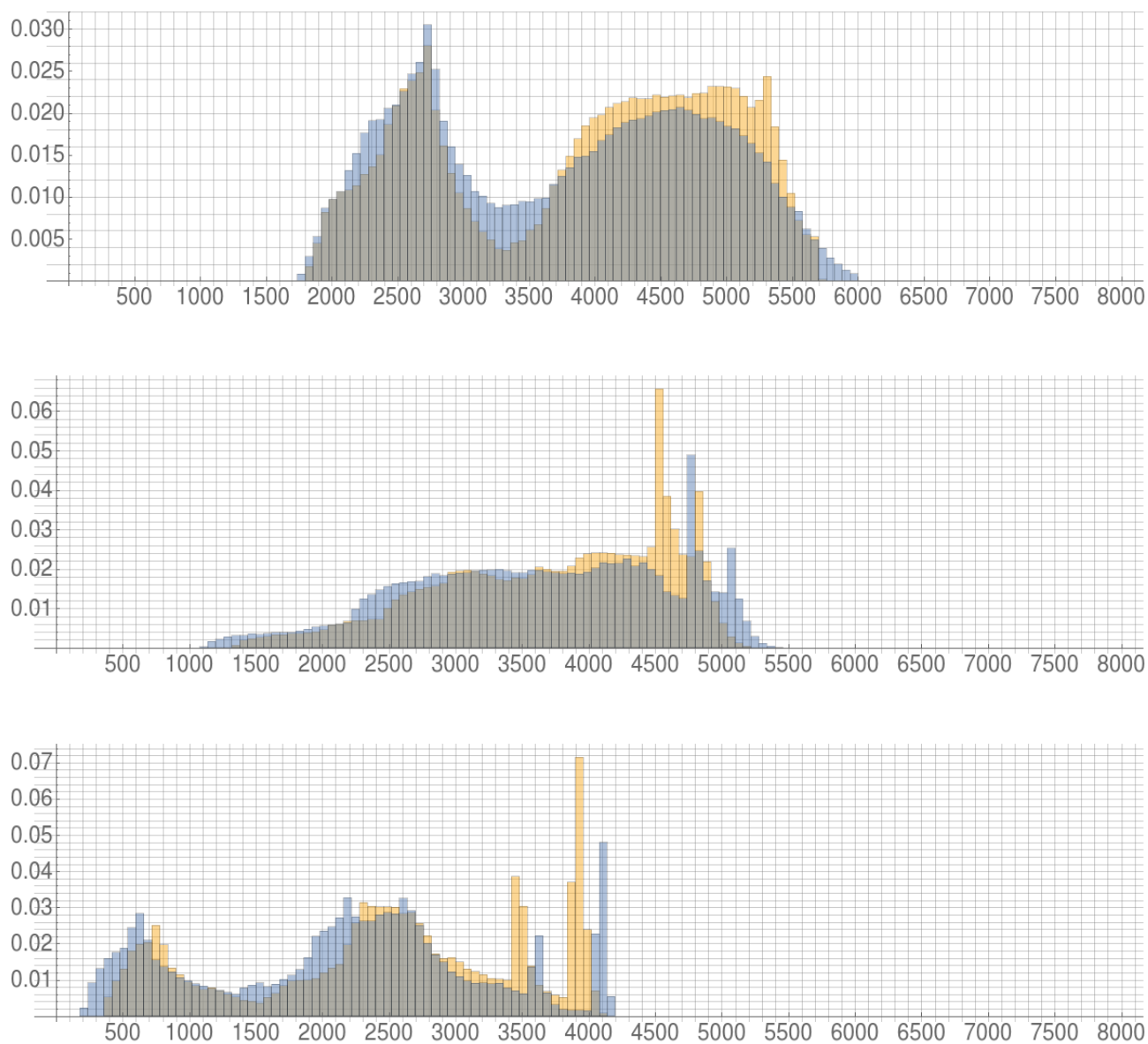


Рис. 11. Распределение точек сетки по максимальному времени ожидания связи в случае (сверху вниз) трех, четырёх и пяти плоскостей, на каждой из которых находится по два равноудаленных спутника. Желтые столбцы соответствуют высоте 1500 км, синие — 2000 км

4.4. Обеспечение полного покрытия

В статье [6] показаны оценки для полного покрытия Земли. Для этого достаточно расположить спутники в четырёх равноотстоящих плоскостях, на каждой плоскости при этом будет по шесть спутников, начальные фазы которых смещены с одинаковым шагом. Сравним эти оценки с результатами численной оптимизации, выполняемой по нашей методике.

Будем проводить оптимизацию по восходящим узлам плоскостей (один из восходящих узлов положим равным нулю), начальным фазам первого спутника на плоскости и по четырём шагам начальных фаз для каждой плоскости (итого $3 + 4 + 4 = 11$ параметров). Результат оптимизации представлен в таблице 5. Действительно, полное покрытие достигается тогда, когда плоскости отстоят друг от друга приблизительно на 50 градусов, спутники на плоскости удалены друг от друга примерно на $360/6 = 60$ градусов. На рис. 12 показан процесс сходимости метода роя для данной задачи.

Таблица 5. Результаты оптимизации для 24 спутников

| Восходящие узлы | Начальные фазы | Шаг фазы |
|------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| {0, 53.2, 99.8, 142.9} | {314.5, 48.3, 89.4, 5.61} | {59.5, 60.3, 58.6, 62.7} |
| {0, 54.0, 99.8, 309.9} | {176.8, 194.5, 353.9, 36.9} | {60.3, 59.8, 61.8, 60.7} |
| {0, 51.7, 99.7, 147.1} | {161.5, 15.6, 282.0, 330.3} | {60.3, 63.0, 65.4, 61.6} |

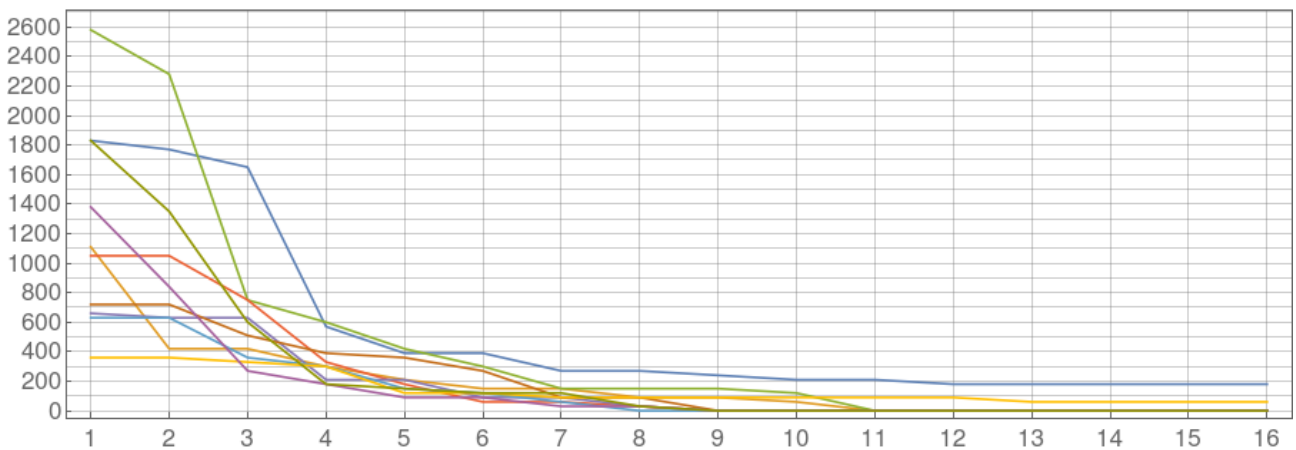


Рис. 12. Значение целевой функции в зависимости от номера итерации в методе роя частиц. 10 запусков алгоритма, 500 частиц

Теперь рассмотрим случай, когда на одной или нескольких плоскостях вышел из строя один спутник, и вычислим оптимальные конфигурации группировки, а также максимальное время ожидания. Результаты приведены в таблице 6.

Таблица 6. Результаты оптимизации для группировки спутников, находящихся в четырех плоскостях. Конфигурации отличаются от случая полного покрытия отсутствием одного спутника в одной или нескольких плоскостях

| Количество спутников | Восходящие узлы | Начальные фазы | Шаг фазы | Время ожидания, с |
|----------------------|--------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 23 | {0, 45.75, 95.57, 145} | {230.2, 129.4, 169.1, 190.9} | {72.14, 69.06, 66.11, 63.72} | 60 |
| 22 | {0, 42.45, 81.23, 138.2} | {157.8, 49.58, 154.9, 134.8} | {72.05, 74.21, 63.6, 63.33} | 90 |
| 21 | {0, 50.6, 100.4, 140.4} | {225.7, 51.4, 231, 137.8, } | {71.9, 71.8, 71.7, 65.2} | 120 |
| 20 | {0, 50.3, 99.7, 149.8} | {207.4, 175.9, 214.8, 25.0} | {72.2, 72.9, 72.5, 73.0} | 120 |

5. Заключение

Предложены и реализованы алгоритмы вычисления площади поверхности и максимального времени ожидания за произвольный промежуток времени в случае круговых и, в общем случае, эллиптических орбит и Земли в виде сферы. Рассмотрена задача многомерной нелинейной оптимизации максимального времени ожидания связи с помощью метода роя частиц. Получены оптимальные конфигурации для трёх, четырех, пяти и шести спутников, а также для случая трёх, четырёх и пяти плоскостей, на каждой из которых по два равноудаленных спутника. Показаны типичные распределения точек сетки по времени ожидания для данных конфигураций. Также найдена конфигурация группировки спутников, обеспечивающая непрерывное покрытие на всей поверхности Земли, и сделаны оценки для увеличения максимального времени ожидания связи в случае выхода одного спутника на одной или нескольких орбитальных плоскостях.

Показано, что повышение орбиты группировки спутников не приводит к уменьшению максимального времени ожидания связи, а в случае малого количества спутников может приводить к увеличению этого времени за счет уменьшения угловой скорости вращения спутников. Кроме того, продемонстрирована динамика нарастания времени ожидания связи в случае выхода спутников из строя.

Разработанная методика и программный комплекс могут быть в дальнейшем использованы для поиска оптимальных конфигураций группировок спутников с выделенными областями на поверхности Земли, для которых связь должна быть обеспечена в непрерывном режиме. Такие требования соответствуют техническим требованиям к разрабатываемым в настоящее время отечественным системам спутниковой связи.

Список литературы

- [1] Баранов А.А., Гришко Д.А. Особенности формирования и восполнения спутниковых систем на околокруговых орбитах при движении вокруг Земли, Луны и Марса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. №93. 28 с.
- [2] Можаяев Г.В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем. Теоретико-групповой подход. М.: Машиностроение. 1989. 304с.
- [3] Walker J.G. Some circular orbit patterns providing continuous whole earth coverage // Journal of the British Interplanetary Society. 1971. Vol. 24. P. 369-384.
- [4] Lueders R.D. Satellite Networks for Continuous Zonal Coverage // ARS Journal. 1961. Vol. 31, №2. Pp. 179–184.
- [5] Emara H.E. Minimum Number of Satellites for Three-Dimensional Continuous Worldwide Coverage // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1977. Vol. AES-13, № 2. Pp. 466–473.
- [6] Beste D.C. Design of Satellite Constellations for Optimal Continuous Coverage // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1978. Vol. AES-14, №3. Pp. 466–473.
- [7] Savitri T., Kim Y., Jo S., Bang H. Satellite Constellation Orbit Design Optimization with Combined Genetic Algorithm and Semianalytical Approach // International Journal of Aerospace Engineering. 2017. Vol. 2017, Article ID 1235692.
- [8] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. 1968. 800 с.
- [9] Randall D.A., Ringler T.D., Heikes R.P., Jones P., Baumgardner J. Climate Modeling with Spherical Geodesic Grids // Computing in Science & Engineering. 2002 Vol. 4(5). Pp. 32–41.
- [10] Kennedy J., Eberhart R. Particle Swarm Optimization // Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. 1995. Vol. IV. Pp. 1942–1948.

Содержание

| | |
|--|-----------|
| 1. Введение | 3 |
| 2. Постановка задачи | 3 |
| 2.1. Параметры орбит спутников | 5 |
| 3. Методика численного решения задач оптимизации | 5 |
| 3.1. Приближённое вычисление площади покрытия | 5 |
| 3.2. Приближённое вычисление максимального времени ожидания . | 7 |
| 3.3. Построение равномерной треугольной сетки на сфере | 7 |
| 3.4. Видимость точек сферы со спутника | 8 |
| 3.5. Приведение уравнения конуса связи к каноническому виду . . . | 11 |
| 3.6. Учёт вращения Земли | 12 |
| 3.7. Оптимизация площади покрытия и максимального времени ожидания | 13 |
| 4. Результаты расчетов | 14 |
| 4.1. Метод роя частиц | 14 |
| 4.2. Вычисление области покрытия | 15 |
| 4.3. Оптимизация максимального времени ожидания | 16 |
| 4.4. Обеспечение полного покрытия | 20 |
| 5. Заключение | 21 |