



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колмычков В.В., Мажорова О.С.

Исследование конвективных
структур в
небуссинесковской жидкости
вблизи порога устойчивости.
Часть вторая —
вычислительный
эксперимент

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть вторая — вычислительный эксперимент // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 210. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2018-210](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-210)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-210>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.В. Колмычков, О.С. Мажорова

**Исследование конвективных структур
в небуссинесковской жидкости вблизи порога
устойчивости. Часть вторая — вычислительный
эксперимент**

Москва — 2018

Колмычков В.В., Мажорова О.С.

Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть вторая — вычислительный эксперимент

Работа посвящена численному исследованию процесса возникновения и развития конвективной неустойчивости в жидкости с внутренним подогревом или с зависимостью коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры и вертикальной координаты. В первой части работы изучено влияние числа Прандтля на форму устойчивых конвективных структур аналитическими методами. Полученные результаты используются в данной части работы для анализа результатов численного моделирования.

Ключевые слова: Конвекция Рэлея–Бенара, небуссинесковская жидкость, конвективная неустойчивость, численное моделирование, устойчивые планформы, валы, шестиугольные ячейки, число Прандтля.

Viatcheslav Victorovich Kolmychkov, Olga Semenovna Mazhorova

Investigation of convective structures near the stability threshold in non-Boussinesq fluid. Part two — numerical simulation

The paper numerically investigates stable convective structures in a fluid with internal heat generation, variable thermal diffusion and variable kinematic viscosity (temperature and vertical coordinate dependence is considered). The first part of the paper provides theoretical analysis of Prandtl number effect on the planform selection. The second part of the paper deals with 3D numerical simulation of convective instability in finite layer of non-Boussinesq fluid. Numerical results are compared to the theoretical data provided in the part one.

Key words: Rayleigh–Bénard convection, convective stability, non-Boussinesq fluid, numerical simulation, stable planforms, rolls, hexagons, Prandtl number

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00436).

1. Введение

Основными методами теоретического исследования вторичных конвективных движений, возникающих при потере устойчивости состояния покоя, являются разложения в ряд по малому параметру и анализ амплитудных уравнений [1]. Выводы, сделанные на основе этих подходов, зачастую являются эвристическими и требуют более тщательного математического обоснования. Такие выводы нуждаются в подтверждении данными численного или натурального эксперимента. Это особенно важно при изучении конвективной неустойчивости в небуссинесковской жидкости, когда термодинамические параметры среды неоднородны по пространству и изменяются в широком диапазоне. Прямое численное моделирование также дает результаты, к которым следует относиться с настороженностью, поскольку структура течения и его устойчивость могут зависеть от особенностей вычислительной процедуры. В таких условиях для получения достоверных сведений о поведении жидкости вблизи порога устойчивости следует, там, где это возможно, принимать во внимание и сравнивать результаты слабонелинейной теории и численного эксперимента.

В работе изучается процесс развития конвективной неустойчивости в жидкости с зависимостью коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры и вертикальной координаты, а также в жидкости с внутренним подогревом. Структура конвективного движения в такой неоднородной среде изучена теоретически только для больших значений числа Прандтля. В области малых значений числа Прандтля сведения о структуре течения либо отсутствуют, либо разрозненны.

В первой части работы [2] на основе амплитудных уравнений и методом разложения по малому параметру было проанализировано влияние числа Прандтля на форму устойчивых конвективных структур. Данная часть посвящена прямому численному моделированию конвективной неустойчивости в небуссинесковской жидкости. Основное внимание уделяется форме установившегося конвективного движения вблизи порога устойчивости при больших, средних и малых значениях числа Прандтля.

2. Постановка задачи

Расширим приближение Обербека–Буссинеска [3] на случай зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры и вертикальной координаты. Уравнения термогравитационной конвекции ньютоновской жидкости

в безразмерной форме запишем следующим образом:

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \text{div}[\tau] + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} T \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\tau = \nu(\text{grad } \mathbf{V} + \text{grad}^T \mathbf{V}),$$

$$\tau_{nm} = \nu(\partial V_r / \partial s + \partial V_s / \partial r), \quad r, s = x, y, z,$$

$$\text{div} \mathbf{V} = (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0,$$

$$\text{Pr} [\partial_t T + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T] = \text{div}(\chi \text{grad } T) + q. \quad (2)$$

Здесь $\partial_\xi \equiv \partial / \partial \xi$, t – время, x, y, z – декартовы координаты, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, $p(t, x, y, z)$ – давление, τ_{ij} – тензор вязких напряжений, $T(t, x, y, z)$ – температура, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$. Безразмерная температура вводится по формуле $T = (T^d - T_{top}^d) / \delta T^d$, T^d – размерная температура, $\delta T^d = T_{bot}^d - T_{top}^d$ – разность температур на верхней и нижней границах в отсутствие движения. Коэффициенты кинематической вязкости ν^d и температуропроводности χ^d нормируем на их значения на верхней границе: $\nu_0^d = \nu^d(1, T_{top}^d)$ и $\chi_0^d = \chi^d(1, T_{top}^d)$; безразмерные значения коэффициентов $\nu(z, T) = \nu^d(z, T^d) / \nu_0^d$ и $\chi = \chi^d(z, T^d) / \chi_0^d$. В качестве масштаба измерения длины выбран вертикальный размер области H , масштаб времени – $t_\nu = H^2 / \nu_0^d$, давления – $\rho_0 \nu_0^d \chi_0^d / H^2$.

В уравнения (1)-(2) входят следующие безразмерные параметры: число Рэлея $\text{Ra} = \alpha g \delta T^d H^3 / (\nu_0^d \chi_0^d)$, где α – коэффициент теплового расширения, g – модуль ускорения свободного падения; число Прандтля $\text{Pr} = \nu_0^d / \chi_0^d$ и мощность внутренних источников тепла $q = Q t_\nu / \delta T^d$, Q – размерная мощность источников тепла.

Задача решается в прямоугольной области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, 1]$. Боковые стенки теплоизолированы. В большинстве рассматриваемых вариантов температура нижней границы $T|_{z=0} = 1$, верхней – $T|_{z=1} = 0$. Для скорости на всей границе выполняются условия прилипания: $V = 0$. Отклонения от указанных граничных условий приводятся в соответствующих разделах ниже.

В начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в состоянии покоя и имеет соответствующее равновесное распределение температуры. Затем в равновесное распределение температуры в каждой точке плоскости $z = 0.5$ (кроме границ) вносится случайное возмущение. Все расчеты выполнены для значений числа Рэлея, близких к критическому.

3. Численный метод

Моделирование движения жидкости осуществлялось на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных с использованием метода конечных разностей [4], [5]. Метод полунявный, используется схема типа "предиктор-корректор" [4]. По времени исходные уравнения аппроксимируются с первым порядком точности, по пространству, на равномерной сетке, — со вторым. Аппроксимация конвективных членов не вносит вклад в баланс кинетической энергии и тепла [5]. Метод успешно использовался для исследования конвекции Рэлея-Бенара [6–9].

Расчеты проводились в области размера $15 \times 15 \times 1$ на сетке $128 \times 128 \times 16$, что обеспечивает разумный компромисс между достаточно точным воспроизведением критических параметров процесса и затратами машинного времени на расчет одного варианта. Шаг по времени (τ) варьировался в зависимости от значения числа Прандтля: $\tau = 0.5$ — для больших значений Pr и $\tau = 0.01$ при малых.

4. Результаты расчетов

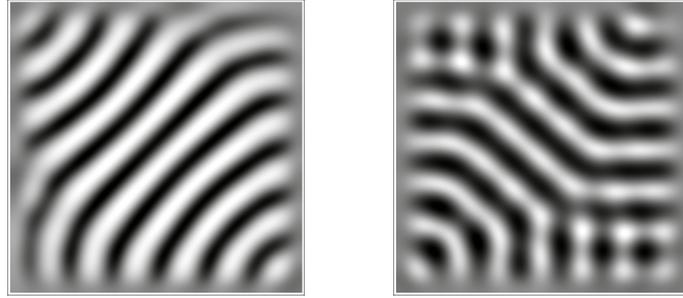
4.1. Зависимость вязкости от вертикальной координаты

В работах [10], [2] показано, что в случае вязкости, зависящей от вертикальной координаты, устойчивой стационарной формой течения при любых значениях числа Прандтля являются двумерные валы. Это подтверждается приведенными ниже результатами расчетов.

Рассмотрим $\nu = (1 + 99z^5)^{-1}$. Критическое значение числа Рэлея — $Ra_{cr} \approx 310$. Расчеты проводились для значений числа Прандтля в диапазоне $[10^{-3}, 10^3]$.

На рис. 1 приведены картины течений для максимального и минимального значений числа Прандтля из указанного диапазона. Из рисунков видно, что в процессе установления течение стремится принять форму двумерных валов. Такая же динамика процесса наблюдается и для промежуточных значений числа Прандтля.

Таким образом, в расчетах для любых значений числа Прандтля устойчивой структурой течения являются двумерные валы.



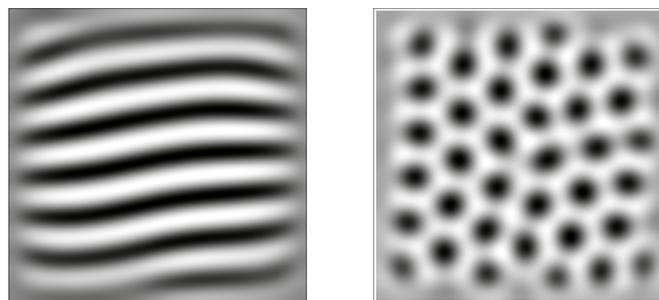
$$\text{Pr} = 0.001, t = 240t_\nu \quad \text{Pr} = 1000, t = 82500t_\nu$$

Рис. 1. Поле температуры в плоскости $z=0.5$, $\text{Ra}=310$, $\nu=(1+99z^5)^{-1}$. Темные участки соответствуют холодной опускающейся жидкости, светлые — горячей поднимающейся.

4.2. Зависимость вязкости от температуры

Устойчивой формой течения в жидкости, вязкость которой зависит от температуры, при больших значениях числа Прандтля являются шестиугольные ячейки [11]. Направление циркуляции в ячейках определяется знаком производной $\partial\nu/\partial T$: если $\partial\nu/\partial T > 0$, скорость в центре ячейки направлена вниз (down-ячейки), и в обратном направлении (up-ячейки), если $\partial\nu/\partial T < 0$. Для малых значений числа Прандтля устойчивой стационарной формой течения являются двумерные валы [2].

Сначала рассмотрим $\nu = 1+4T$, $\partial\nu/\partial T > 0$, $\text{Ra}_{cr} \approx 4800$. На рис. 2 представлены полученные в расчетах структуры течения. При $\text{Pr}=0.01$ это двумерные валы, а при $\text{Pr}=1$ — шестиугольные down-ячейки.

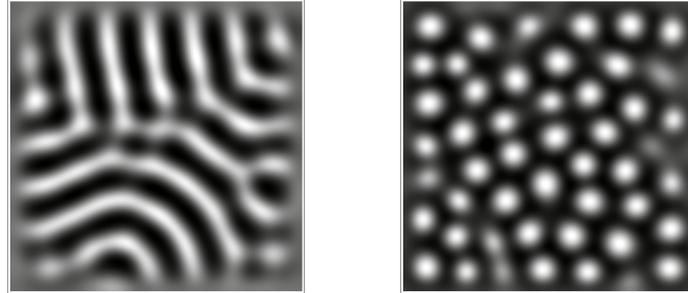


$$(a) \text{Pr} = 0.01, t = 18t_\nu \quad (b) \text{Pr} = 1, t = 73t_\nu$$

Рис. 2. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $\text{Ra}=4800$, $\nu = 1 + 4T$.

Зависимость направления циркуляции от знака $\partial\nu/\partial T$ иллюстрирует рис. 3, на котором изображена структура течения для $\nu = (1+99T^5)^{-1}$. Здесь, в отличие от предыдущего случая, $\partial\nu/\partial T < 0$, и вязкость нелинейно зависит от температуры.

При больших значениях числа Прандтля направление циркуляции изменилось: наблюдаются *up*-ячейки. В области малых значений числа Прандтля, несмотря на значительную нелинейность, течение по-прежнему имеет форму валов.



(a) $Pr = 0.01, t = 33t_\nu$ (b) $Pr = 100, t = 140t_\nu$

Рис. 3. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $Ra = 315 \approx Ra_{cr}$, $\nu = (1 + 99T^5)^{-1}$.

Следовательно, результаты расчетов подтверждают теоретические выводы работ [2], [11]: предпочтительной формой движения при больших значениях числа Прандтля являются ячейки, направление циркуляции в которых зависит от знака производной $\partial\nu/\partial T$. При малых значениях числа Прандтля течение принимает форму валов.

4.3. Температуропроводность, зависящая от вертикальной координаты

В [10] утверждается, что устойчивой стационарной формой течения при высоких значениях числа Прандтля являются ячейки. При малых возможны шестиугольные ячейки и двумерные валы [2]. Направление циркуляции жидкости в ячейках определяется знаком $\partial\chi/\partial z$.

Численное исследование начнем с $\chi = (1 + 99z^5)^{-1}$, $\partial\chi/\partial z < 0$, $Ra_{cr} \approx 320$. В отсутствие движения такая зависимость приводит к формированию сильно нелинейного, выпуклого вверх стационарного профиля температуры (рис. 4). Результаты расчетов показывают, что при больших значениях числа Прандтля наблюдаются шестиугольные *down*-ячейки, при средних — валы, при малых — *up*-ячейки (рис. 5).

Рассмотрим теперь $\chi = (1 + 99(1-z)^5)^{-1}$, $\partial\chi/\partial z > 0$. Эта зависимость аналогична $\chi = (1 + 99z^5)^{-1}$, имеет близкое критическое значение числа Рэлея $Ra_{cr} \approx 315$, но приводит к другому направлению выпуклости профиля температуры (рис. 4). Здесь по мере роста значения числа Прандтля происходит обмен устойчивостью

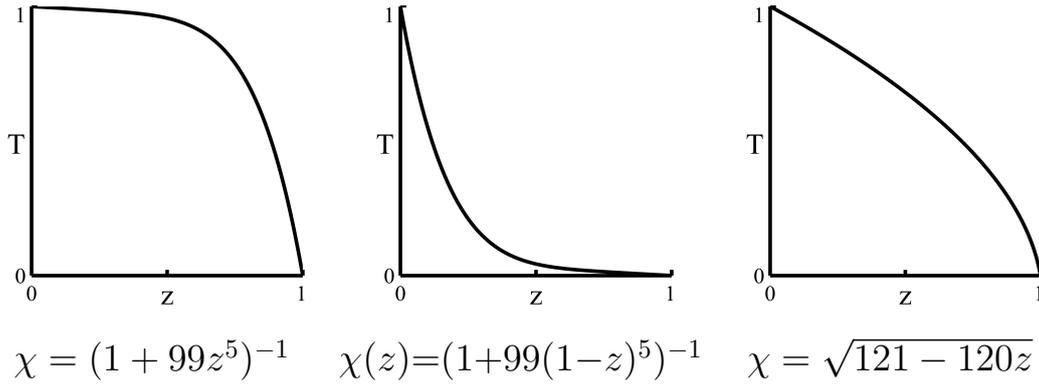
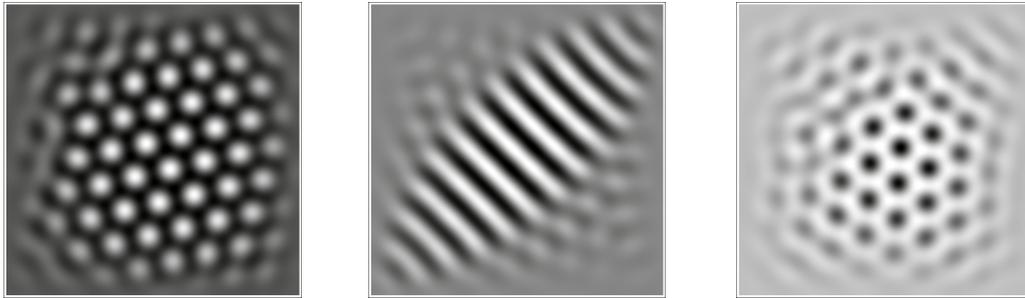


Рис. 4. Стационарный профиль температуры для разных зависимостей теплопроводности от вертикальной координаты.



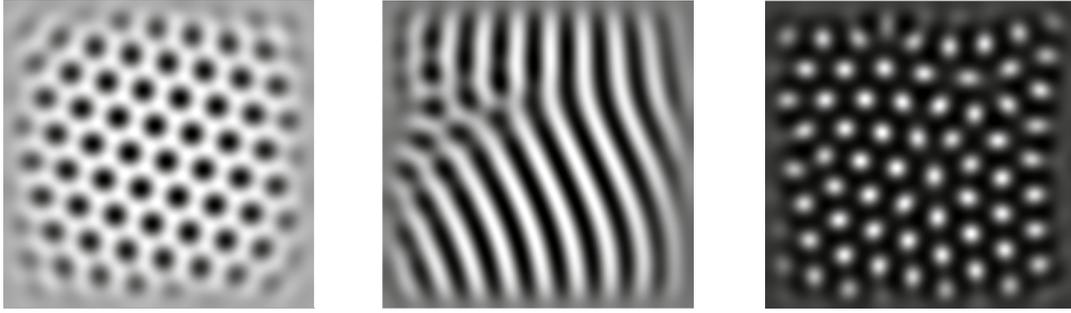
(a) $\text{Pr} = 0.01, t = 17t_\nu$ (b) $\text{Pr} = 1, t = 80t_\nu$ (c) $\text{Pr} = 100, t = 650t_\nu$

Рис. 5. Поле температуры в плоскости $z = 0.5, \text{Ra} = 325, \chi = (1 + 99z^5)^{-1}$.

между down-ячейками и валами, а затем – валами и up-ячейками (рис. 6). Направление циркуляции в ячейках для $\chi = (1 + 99(1-z)^5)^{-1}$ противоположно наблюдавшейся при $\chi = (1 + 99z^5)^{-1}$.

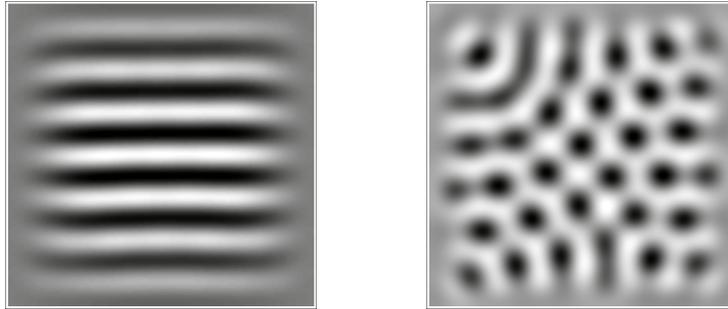
Выберем менее резкую зависимость теплопроводности от вертикальной координаты: $\chi = \sqrt{121 - 120z}, \partial\chi/\partial z < 0$. В этом случае стационарный профиль температуры ближе к линейному, чем рассмотренные ранее (рис. 4). Для больших значений числа Прандтля в расчетах зарегистрированы down-ячейки, как и для $\chi = (1 + 99z^5)^{-1}$ (рис. 7). Для малых значений Прандтля, в отличие от $\chi = (1 + 99z^5)^{-1}$, наблюдаются валы. Получить движение в форме ячеек (как на рисунке 5(a)), уменьшая значение числа Прандтля до 10^{-4} или используя приближение бесконечно малого Прандтля [2] не удастся.

Результаты расчетов согласуются с выводами [10], [2]: для жидкости, теплопроводность которой зависит от вертикальной координаты, при больших значениях числа Прандтля предпочтительной формой течения являются шестиугольные ячейки, направление циркуляции жидкости в которых определяется знаком производной $\partial\chi/\partial z$, при средних значениях — двумерные валы. Для малых зна-



(a) $Pr = 0.05, t = 40t_\nu$ (b) $Pr = 0.1, t = 15t_\nu$ (c) $Pr = 100, t = 220t_\nu$

Рис. 6. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $Ra=320$, $\chi = (1 + 99(1-z)^5)^{-1}$.



(a) $Pr = 0.0001, t = 76t_\nu$ (b) $Pr = 100, t = 2761t_\nu$

Рис. 7. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $Ra=315$, $\chi = \sqrt{121 - 120z}$.

чений числа Прандтля могут наблюдаться как валы, так и ячейки, тип которых противоположен наблюдаемому при больших значениях числа Прандтля. В расчетах валы формируются в случае стационарного профиля температуры близкого к линейному. Вопрос о том, какие именно факторы определяют преобладание валов над ячейками при малых значениях числа Прандтля, требует более глубокого анализа.

4.4. Зависимость температуропроводности от температуры

Структура конвективного движения в жидкости, температуропроводность которой зависит от температуры, теоретически изучается в работе [11], где продемонстрировано, что, как и в случае вязкости, зависящей от температуры, устойчивой стационарной формой течения при больших значениях числа Прандтля являются ячейки, направление циркуляции жидкости в которых зависит от знака производной $\partial\chi/\partial T$. В [2] показано, что в области малых значений числа Прандтля течение имеет форму валов. Такое же поведение течения наблюдается и при вязкости, зависящей от температуры.

Пусть $\chi=1+40T^{15}$, $\partial\chi/\partial T>0$, $Ra_{cr}\approx 12250$. В отсутствие движения такая теплопроводность формирует профиль температуры (рис. 8), близкий к профилю температуры для $\chi=(1+99z^5)^{-1}$ (рис. 4). В ходе численного моделирования (рис. 9) для больших значений числа Прандтля устанавливается течение в виде шестиугольных down-ячеек, как и при $\chi=(1+99z^5)^{-1}$. Для малых значений числа Прандтля движение имеет форму валов, в отличие от $\chi=(1+99z^5)^{-1}$, где наблюдались ячейки.

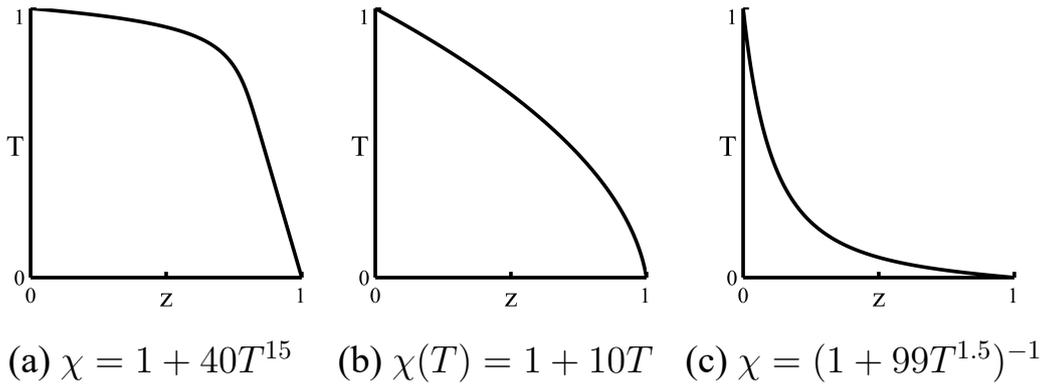
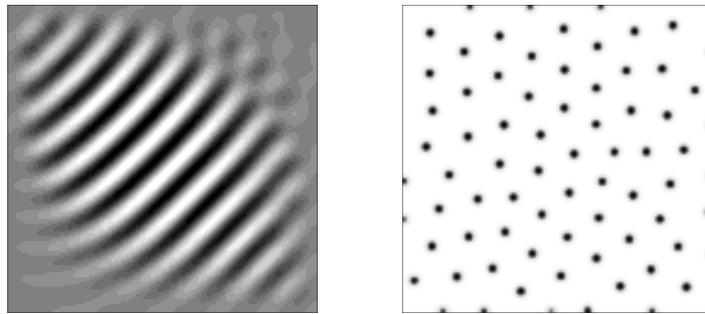


Рис. 8. Стационарный профиль температуры для разных зависимостей теплопроводности от вертикальной координаты.

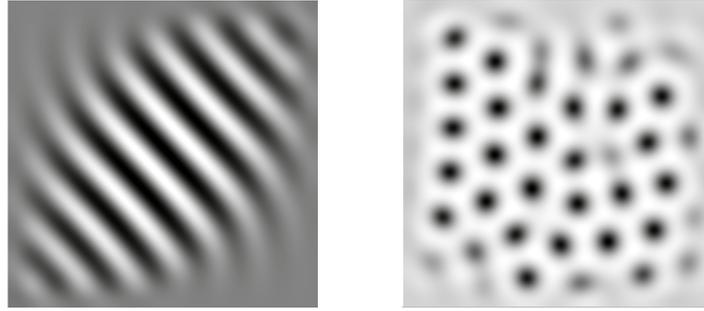


(a) $Pr = 10^{-4}$, $t = 86t_\nu$ (b) $Pr = 100$, $t = 340t_\nu$

Рис. 9. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $Ra=12250$, $\chi = 1 + 40T^{15}$.

Еще одна серия расчетов была проведена для $\chi=1+10T$, $Ra_{cr}\approx 30400$. В этом случае, в отсутствие движения, профиль температуры совпадает с профилем для $\chi=\sqrt{121-120z}$ (рис. 4 и 8). Результаты расчетов, представленные на рисунке 10, подтверждают полученную выше закономерность: при больших значениях числа Прандтля наблюдаются ячейки такого же типа, что и для $\chi=\sqrt{121-120z}$. При малых значениях числа Прандтля течение имеет форму валов.

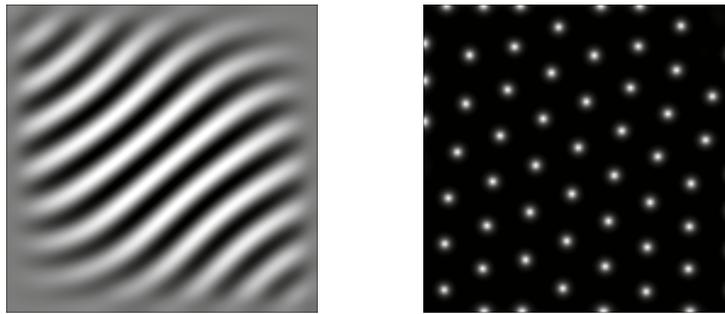
Рассмотрим теплопроводность с отрицательной производной $\partial\chi/\partial T$: $\chi=(1+99T^{1.5})^{-1}$. Как и следовало ожидать, изменение знака производной $\partial\chi/\partial T$



(a) $Pr = 10^{-3}, t = 200t_\nu$ (b) $Pr = 100, t = 50t_\nu$

Рис. 10. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $Ra=32000$, $\chi(T)=1+10T$.

привело к изменению направления циркуляции в ячейках при больших значениях числа Прандтля (рис. 11). При малых значениях числа Прандтля, как и в предыдущих случаях, наблюдаются двумерные валы.



(a) $Pr = 0.0001, t = 76t_\nu$ (b) $Pr = 0.1, t = 1970t_\nu$

Рис. 11. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $Ra=12250$, $\chi = (1 + 99T^{1.5})^{-1}$.

Таким образом, в случае жидкости, коэффициент температуропроводности которой зависит от температуры, при больших значениях числа Прандтля течение имеет форму шестиугольных ячеек, направление циркуляции в которых определяется направлением выпуклости профиля температуры в отсутствие движения. При малых значениях числа Прандтля для всех рассмотренных вариантов зависимости температуропроводности от температуры наблюдаются течения в форме валов. Такое поведение подтверждает теоретические результаты [2], [11].

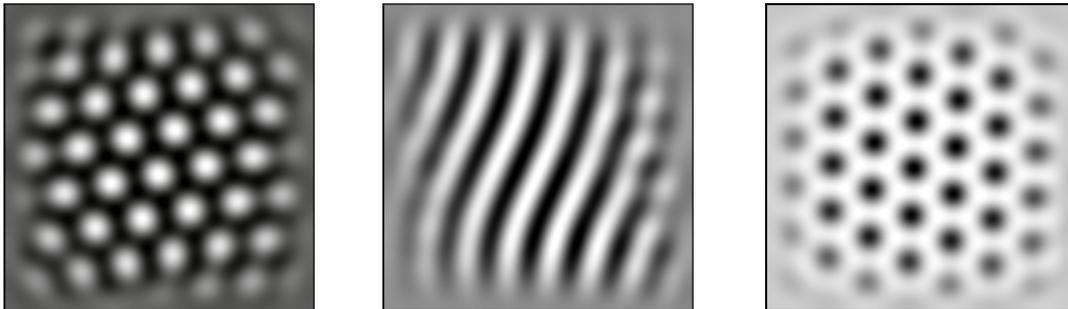
5. Внутренние источники тепла

Рассмотрим одну из наиболее простых постановок задачи: жидкость удовлетворяет приближению Буссинеска, но в ней присутствуют равномерно распределенные внутренние источники тепла. За счет внутренних источников тепла кон-

векция возможна при более широком классе краевых условий для температуры по сравнению с выше разобранными задачами. Из работ [12] и [2], [8] известно, что при малых значениях числа Прандтля должны наблюдаться ячейки, при средних — валы, при больших — ячейки противоположного типа. Рассмотрим влияние краевых условий на типы наблюдаемых конвективных структур и обмен устойчивостью между ними.

5.1. Идеально проводящие горизонтальные границы; $T_{bot} > T_{top}$

В области больших значений числа Прандтля задача изучалась теоретически и экспериментально Р. Кришнамурти [13], [14]. Исследования Кришнамурти демонстрируют, что при значениях числа Рэлея ниже критического возможно движение в форме шестиугольных ячеек, тип которых зависит от знака q . В области малых значений числа Прандтля ситуация неопределенная, и приходится проводить параллели с задачами с другими граничными условиями [15] или использовать численный эксперимент [8], [9].



(a) $Pr = 0.1, t = 80t_\nu$ (b) $Pr = 0.25, t = 42t_\nu$ (c) $Pr = 10, t = 500t_\nu$

Рис. 12. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, $Ra=1640$, $q = 6$.

Рассмотрим мощность источников тепла $q=6$, $Ra_{cr}=1632$, близкую к параметрам эксперимента Р. Кришнамурти [14]. Результаты расчетов [8], [9], представленные на рис. 12 и 13, показывают, что существует целый диапазон значений числа Прандтля, в котором наблюдается только надкритическая конвекция, имеющая форму валов. Вне этого диапазона, вблизи порога устойчивости, течение имеет форму шестиугольных ячеек. Тип ячеек определяется значением числа Прандтля: при больших значениях наблюдаются down-ячейки, при малых — up-ячейки. С повышением надкритичности происходит обмен устойчивостью между шестиугольными ячейками и валами.

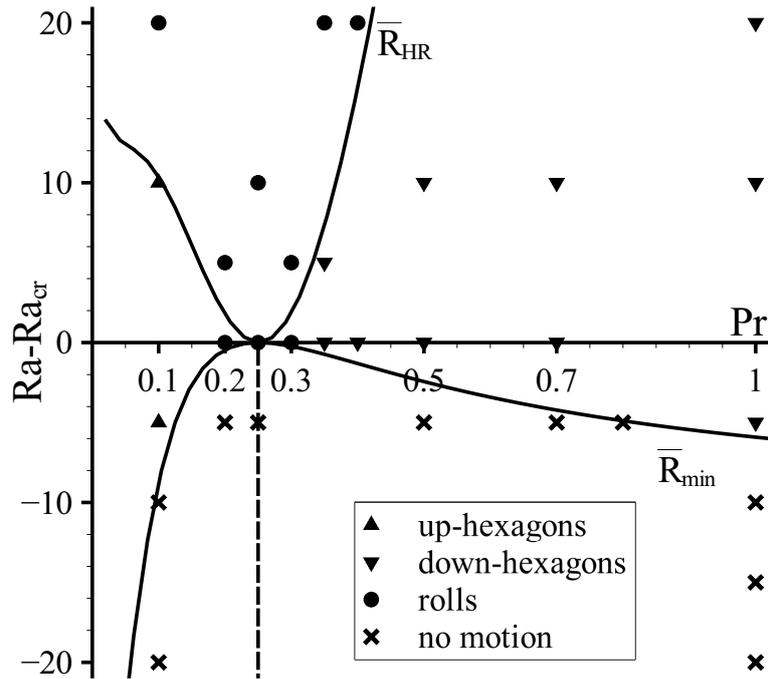
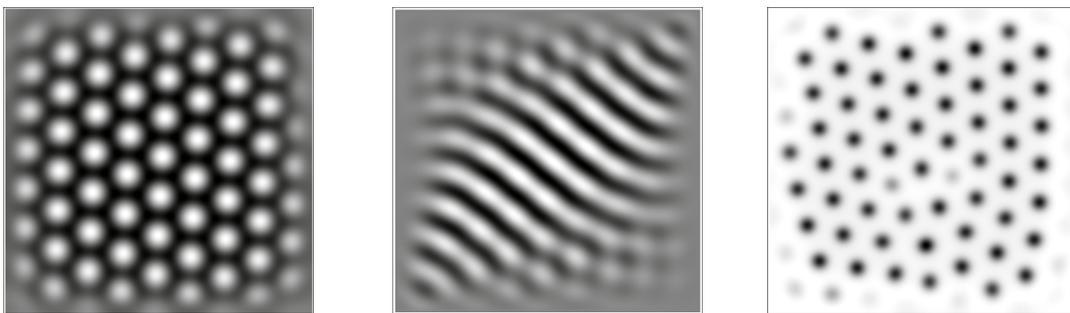


Рис. 13. Диаграмма устойчивости валов и шестиугольников, $q = 6$.

5.2. Идеально проводящие горизонтальные границы; $T_{bot} = T_{top}$

В такой постановке обе границы имеют равную температуру. Обезразмеривание осуществляется по перепаду температуры, создаваемому внутри области внутренними источниками тепла. В результате, мощность источников тепла можно выбрать любой удобной константой. Пусть $q=4$, тогда $Ra_{cr} \approx 9550$.



(a) $Pr = 0.1, t = 70t_\nu$ (b) $Pr = 0.25, t = 220t_\nu$ (c) $Pr = 7, t = 55t_\nu$

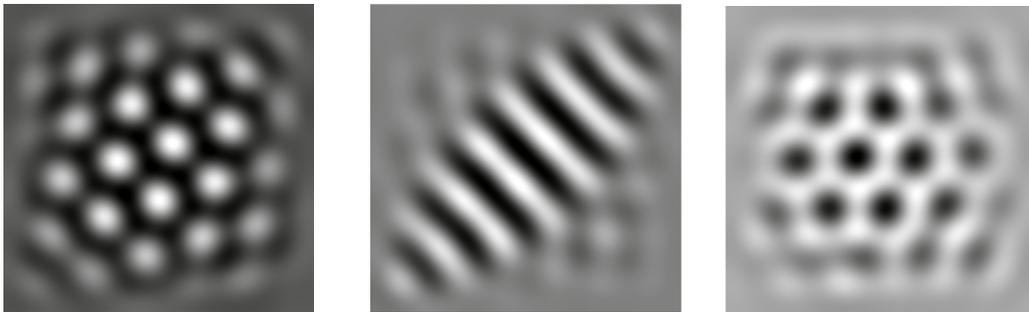
Рис. 14. Вертикальная скорость в плоскости $z = 0.5$, $Ra = 9550, T_{bot} = T_{top} = 0$.

Результаты математического моделирования показывают, что здесь, как и в задаче из п. 5.1, по мере роста значения числа Прандтля происходит обмен устойчивостью между up-ячейками и валами, а затем – валами и down-ячейками (рис. 6).

Тип ячеек при больших значениях числа Прандтля согласуется с результатами [16]. Область значений числа Прандтля, в которой наблюдаются течения в форме валов, близка к изображенной на рис. 13. Следовательно, смена краевого условия для температуры не повлияла на характер зависимости структуры устойчивого течения от значения числа Прандтля.

5.3. Нижняя граница теплоизолирована; верхняя идеально теплопроводящая

В такой постановке перепад температур между границами создается внутренними источниками тепла и в результате обезразмеривания $q=2$. $Ra_{cr} \approx 1390$. Для больших значений числа Прандтля задача изучена теоретически и экспериментально в работах [17], [18]. В работе [15] аналитически разобран весь диапазон значений числа Прандтля и приведена диаграмма устойчивости, послужившая прототипом для рис. 13. Ниже (рис. 15) приведены результаты наших расчетов, подтверждающие результаты работы [15]: при малых значениях наблюдаются ир-ячейки, при средних — валы, при больших — down-ячейки.



(a) $Pr=0.01$, $t = 56t_\nu$ (b) $Pr=0.1$, $t = 240t_\nu$ (c) $Pr=1$, $t = 250t_\nu$

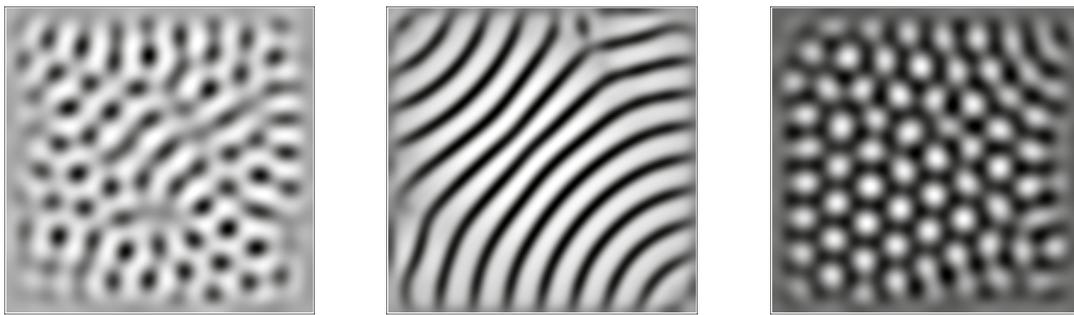
Рис. 15. Поле температуры в плоскость $z=0.5$, $Ra=1390$, $q = 2$, нижняя граница теплоизолирована

Смена краевых условий на нижней границе повлияла на характерный размер конвективных структур. Процесс развития и структура течения остаются прежними. При $Pr=0.01$ течение имеет форму шестиугольных ир-ячеек. С увеличением Pr происходит обмен устойчивостью между шестиугольниками и валами (при $Pr=0.1$ наблюдаются валы, хотя в задачах из п. 5.1 и 5.2 наблюдались ячейки). Дальнейшее увеличение значения числа Прандтля приводит к смене устойчивой структуры течения на шестиугольные ир-ячейки ($Pr=1$).

Таким образом, при этих граничных условиях заметно изменился размер конвективных структур, что ранее отмечалось в работе [17]. Изменилась и область значений числа Прандтля, в которой наблюдаются валы. Сохранился характер зависимости формы движения от Pr : при малых значениях наблюдаются up-ячейки, при средних — валы, при больших — down-ячейки.

5.4. Верхняя поверхность свободная, теплоизолированная; нижняя идеально теплопроводящая

Изучим теперь, как влияют краевые условия для скорости на зависимость структуры течения от значения числа Прандтля. Пусть верхняя граница области является свободной и теплоизолированной. В результате обезразмеривания $q = -2$. $Ra_{cr} \approx 975$. Как и следовало ожидать, критическое число Рэлея уменьшилось по сравнению с п. 5.3, благодаря наличию свободной поверхности.



(a) $Pr=10^{-3}$, $t = 60t_\nu$ (b) $Pr=10^{-2}$, $t = 100t_\nu$ (c) $Pr=10$, $t = 1900t_\nu$

Рис. 16. Поле температуры в плоскости $z=0.5$, $Ra \approx 980$, $q = -2$, верхняя граница свободна и теплоизолирована, нижняя жесткая идеально теплопроводящая

Поскольку верхняя граница теплоизолирована, и, как показано в пункте п. 5.3, это заметно увеличивает размер конвективных структур, расчеты проводились в области большего размера $30 \times 30 \times 1$ на сетке $128 \times 128 \times 16$. Для $Pr=10^{-3}$ течение стремится принять форму шестиугольных down-ячеек (рис. 16). В отличие от п. 5.3, тип ячеек изменился, что обусловлено другим направлением выпуклости профиля температуры (отрицательным знаком q). Движение в форме валов было зарегистрировано при $Pr=10^{-2}$, что в 10 раз меньше, чем в задаче из п. 5.3, которая демонстрирует для $Pr=10^{-2}$ шестиугольные ячейки. Увеличение числа Прандтля до $Pr=10$ приводит к смене структуры течения на шестиугольные up-ячейки.

Таким образом, смена граничного условия для скорости повлияла на диапазоны значений числа Прандтля, в которых наблюдаются течения различных типов.

Характер зависимости структуры течения от значения числа Прандтля и их размер остаются прежними.

6. Заключение

Данная работа является второй частью исследования устойчивости стационарных форм движения небуссиновской жидкости вблизи порога устойчивости. Выводы об устойчивости различных структур течения, сделанные в первой части [2] на основе анализа упрощенных моделей, были подтверждены методом прямого численного моделирования процесса конвективной неустойчивости небуссиновской жидкости в ограниченной области для больших, средних и малых значений числа Прандтля. В области больших значений числа Прандтля результаты согласуются с известными результатами слабонелинейной теории устойчивости [3], [10], [11], [13], [12]. Полученные данные о структуре течения приведены в сводной таблице:

Задача	Выпуклость T_0	Малый Pr	Большой Pr
		теория и расчет	теория и расчет
$\nu(z)$	линейный	валы	валы
$\partial_T \nu(T) > 0$	линейный	валы	down-ячейки
$\partial_T \nu(T) < 0$	линейный	валы	up-ячейки
$q > 0$	вверх	up-ячейки	down-ячейки
$q < 0$	вниз	down-ячейки	up-ячейки
$\partial_z \chi(z) > 0$	вниз	валы или down-ячейки	up-ячейки
$\partial_z \chi(z) < 0$	вверх	валы или down-ячейки	down-ячейки
$\partial_T \chi(T) > 0$	вверх	валы	down-ячейки
$\partial_T \chi(T) < 0$	вниз	валы	up-ячейки

Результаты сравнения показывают, что теоретические выводы верны для всех значений числа Прандтля. В случае зависимости температуропроводности от вертикальной координаты, где в областях с малым значением Прандтля возможны и шестиугольные ячейки и валы, для точного предсказания, какой именно тип течения реализуется, требуется более тонкий теоретический анализ.

Изучение влияния различных краевых условий на горизонтальных границах области на наблюдаемые структуры течения показало, что теплоизолированная граница увеличивает масштаб конвективных структур и меняет их область устойчивости. Наличие свободной поверхности не изменяет размера конвективных струк-

тур, но влияет на диапазон значений числа Прандтля, в котором они наблюдаются, значительно увеличивая область устойчивости двумерных валов.

Список литературы

1. Dauby P.C., Lebon G., Colinet P., Legros J.C. Convection due to internal heat sources // *Q. J. Mechanics Appl. Math.* 1993. Vol. 46, no. 4. Pp. 683–707.
2. Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть первая — анализ упрощенных моделей // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2018. no. 64. P. 30. doi: 10.20948/prepr-2018-64.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 стр.
4. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: ФизМатЛит, 1994.
5. Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Анализ алгоритмов решения трехмерных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных. 2006. Vol. 42, no. 7. Pp. 932–942.
6. Kolmychkov Viatcheslav V., Mazhorova Olga S., Popov Yurii P. et al. Identification of the convective instability in a multi-component solution by 3D simulations // *Comptes Rendus Mécanique.* 2005. Vol. 333. Pp. 739–745.
7. Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Математическое моделирование конвективного массопереноса в пространственно трехмерном случае. Часть 1. Подкритическая конвекция // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2003. no. 92. P. 28.
8. Kolmychkov V. V., Mazhorova O. S., Shcheritsa O. V. Numerical study of convection near the stability threshold in a square box with internal heat generation // *Physics Letters A.* 2013. Vol. 377. Pp. 2111–2117.
9. Kolmychkov V. V., Shcheritsa O. V., Mazhorova O. S. Thermal convection in a cylinder and the problem of planform selection in an internally heated fluid layer // *Physical Review E.* 2016. Vol. 94.
10. Palm E. Nonlinear Thermal Convection // *Annual Review of Fluid Mechanics.* 1975. Vol. 7. Pp. 39–61.
11. Busse F.H. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30, no. 4. Pp. 625–649.

12. Palm E. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection // *J. Fluid Mech.* 1960. Vol. 8, no. 2. Pp. 183–192.
13. Krishnamurti R. Finite amplitude convection with changing mean temperature. Part 1. Theory // *J. Fluid Mech.* 1968. Vol. 33, no. 3. Pp. 445–455.
14. Krishnamurti R. Finite amplitude convection with changing mean temperature. Part 2. An experimental test of the theory // *J. Fluid Mech.* 1968. Vol. 33, no. 3. Pp. 457–463.
15. Tveitereid M., Palm E. Convection due to internal heat sources // *J. Fluid Mech.* 1976. Vol. 76, no. 3. Pp. 481–499.
16. Generalis S.C., Busse F.H. Transition in Inclined Internally Heated Fluid Layers // *Proceedings of the 5th European Thermal Sciences Conference.* 2008. no. FCV 10.
17. Roberts P.H. Convection in horizontal layers with internal heat generation. Theory // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30, no. 1. Pp. 33–50.
18. Tritton D.J., Zarraga M.N. Convection in horizontal layers with internal heat generation. Experiments // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30, no. 1. Pp. 14–32.

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	3
3. Численный метод	5
4. Результаты расчетов	5
4.1. Зависимость вязкости от вертикальной координаты	5
4.2. Зависимость вязкости от температуры	6
4.3. Температуропроводность, зависящая от вертикальной координаты	7
4.4. Зависимость температуропроводности от температуры	9
5. Внутренние источники тепла	11
5.1. Идеально проводящие горизонтальные границы; $T_{bot} > T_{top}$	12
5.2. Идеально проводящие горизонтальные границы; $T_{bot} = T_{top}$	13
5.3. Нижняя граница теплоизолирована; верхняя идеально теплопроводящая	14
5.4. Верхняя поверхность свободная, теплоизолированная; нижняя идеально теплопроводящая	15
6. Заключение	16
Список литературы	18