



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 22 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Прончева О.Г.

О некоторых особенностях  
численного исследования  
нелинейных моделей  
социальных процессов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Прончева О.Г. О некоторых особенностях численного исследования нелинейных моделей социальных процессов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 22. 14 с. doi:[10.20948/prepr-2018-22](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-22)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-22>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**О.Г. Прончева**

**О некоторых особенностях  
численного исследования  
нелинейных моделей  
социальных процессов**

**Москва — 2018**

*Прончева О.Г.*

**О некоторых особенностях численного исследования нелинейных моделей социальных процессов**

В работе описывается методика для определения момента остановки расчёта при решении численными методами некоторых задач. Подход основан на теоретических представлениях о решении, а также на сравнении полученных результатов с результатами асимптотического анализа. Предложенный подход прилагается к двум конкретным моделям: моделирование медленно поляризующегося социума и системы "Власть–Информация–Общество". Все расчёты проведены в специально разработанном GUI.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, GUI, численные методы, разномасштабность, модель выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме, система "Власть–Информация–Общество".

*Olga Gennadievna Proncheva*

**On some features of the numerical study of nonlinear models of social processes**

The paper deals with the technique for determining the moment of stopping a calculation when solving certain problems by numerical methods. The approach is based on theoretical insights about the solution, and also on the comparison of the results with the results obtained with asymptotic analysis. The proposed approach is attached to two specific models: the modeling of a slowly polarizing society and the "Power–Information–Society" system. All calculations are carried out in a specially designed GUI.

**Key words:** mathematical modeling, GUI, numerical methods, multi scalable models, the model of making choices by individuals during information warfare in a society, "Power–Information–Society" system.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16–01–00306.

## 1. Введение

Социально-политические процессы зачастую имеют динамику, нехарактерную для физических или иных естественных процессов. Например, показатели объема власти, реализуемого государственной иерархией, могут оставаться почти неизменными на протяжении десятилетий. Затем может произойти скоротечное и катастрофическое падение этой величины – вплоть до полного или почти полного разрушения государственности, после него – более медленный восстановительный процесс, иногда называемый построением властной вертикали. Восстановленная стабильность может продолжаться десятилетиями. В данном примере присутствуют три масштаба времени, или три масштаба скорости процессов. Подобные явления существуют и в природе, однако в социальных науках такое сочетание разномасштабности (на которую неоднократно указывали исследователи [1, 2]) нередко является самой сутью проблемы.

В этих случаях основной вопрос состоит как раз в том, приведет ли накопление очень медленных долгосрочных изменений параметров к скоротечным революционным изменениям. Например, приведет ли медленное, многолетнее разочарование граждан в своей власти к социальному взрыву. При этом при ежегодном социологическом мониторинге можно не заметить медленного накопления в части разочарования властью, претензий и недовольства. Долгосрочные эмпирические исследования (например, мониторинг на протяжении нескольких десятилетий) в таких случаях, как правило, тоже бессильны помочь, так как на практике с течением времени их методики претерпевают изменения. Эти изменения могут касаться как содержания задаваемых вопросов (например, если мы интересуемся разочарованием широкой публики в правящей элите, то сегодняшние критерии этого разочарования будут отличаться от критериев 20-летней давности); так и методов получения информации (например, очный опрос мог уступить место телефонному).

Поэтому построение математической модели является важным инструментом анализа ситуации, направленного на решение вопроса о том, могут ли медленные долгосрочные изменения параметров привести к резкому, взрывообразному изменению решения. Подчеркнем: в таких случаях бесплодным было бы построение нескольких отдельных моделей: одна для малого масштаба времени, другая – для большего. Имея в виду указанную цель анализа, необходимо иметь одну модель, описывающую логику взаимодействия разномасштабных процессов.

С математической точки зрения, разномасштабность обычно выражается наличием одного или нескольких малых параметров. Это свойство как раз и влечет за собой тот специфический характер динамики, о котором сказано выше. Именно решение системы уравнений модели практически не изменяется в течение долгого интервала времени, по прошествии которого происходит его

скоротечное быстрое изменение. Соответственно, при численном расчете решения возникает иллюзия выхода на стационарное решение. Поскольку модели обычно имеют вид систем дифференциальных уравнений при  $t > 0$ , то мнимый выход на стационарное решение воспринимается (алгоритмом или самим исследователем) как сигнал к окончанию расчета. В этом случае окончательный вывод анализа модели оказывается ошибочным. Поэтому резко возрастает роль качественного исследования модели перед планированием численного эксперимента.

Вопрос об определении окончания расчета на основании качественных представлений о характере решения и является предметом настоящей работы. Этот вопрос рассматривается на материале двух конкретных моделей: а именно, модели выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме [3–5] и модели «Власть–Информация–Общество» [6].

## 2. Описание проблемы

Модель выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме построена в работе [3] на основе нейрологической схемы Рашевского [7, 8]. Модель описывает динамику информационного противоборства, акцентируясь на принятии индивидами решений о том, какую из двух противоборствующих партий поддержать. Одним из важнейших факторов этого решения является так называемая установка индивида  $\varphi$ , т.е. его предрасположенность к поддержке той иной партии. Распределение членов общества по установке описывается функцией  $N(\varphi)$ . В частности, двугорбая функция  $N(\varphi)$  описывает поляризованное общество, состоящее из двух радикализированных друг относительно друга частей, со слабым или отсутствующим «центром» между ними.

Модель имеет вид интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{d\psi}{dt} = A\alpha \left[ C \left( 2 \int_{-\psi(t)}^{\infty} N(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + b_1 - b_2 \right] - a\psi \quad (1)$$

с начальным условием, задаваемым в виде

$$X(0) = \int_{-\psi(0)}^{\infty} N(\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Полное описание модели и содержательный смысл всех параметров модели см. в [3, 8].

На основе этой модели в работах [4,5] изучался вопрос о влиянии поляризации на исход информационного противоборства. Для этого рассматривалось распределение  $N(\varphi)$ , имеющее следующий вид:

$$N(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi < -d - h; \\ \frac{N_0}{4h}, & -d - h \leq \varphi \leq -d + h; \\ 0, & -d + h < \varphi < d - h; \\ \frac{N_0}{4h}, & d - h \leq \varphi \leq d + h; \\ 0, & \varphi > d + h. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $d > h > 0$ . Параметр  $d$  является мерой поляризованности общества: чем больше его значение, тем больше расстояние (по шкале установок) между двумя частями общества.

В указанных работах исследовался, в частности, случай, когда параметр  $d$  является не постоянным и представляется функцией

$$d(t) = d_0 + \varepsilon t, \quad (4)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ . Содержательно это имеет смысл медленного, но продолжительного (в течение периода времени, имеющего порядок  $\varepsilon^{-1}$ ) нарастания поляризации.

Решение системы (1)–(4) представлено на рис. 1. При  $t > 3$  функция  $\psi(t)$  практически не меняется, из чего можно сделать вывод, что система пришла к стационарному состоянию.

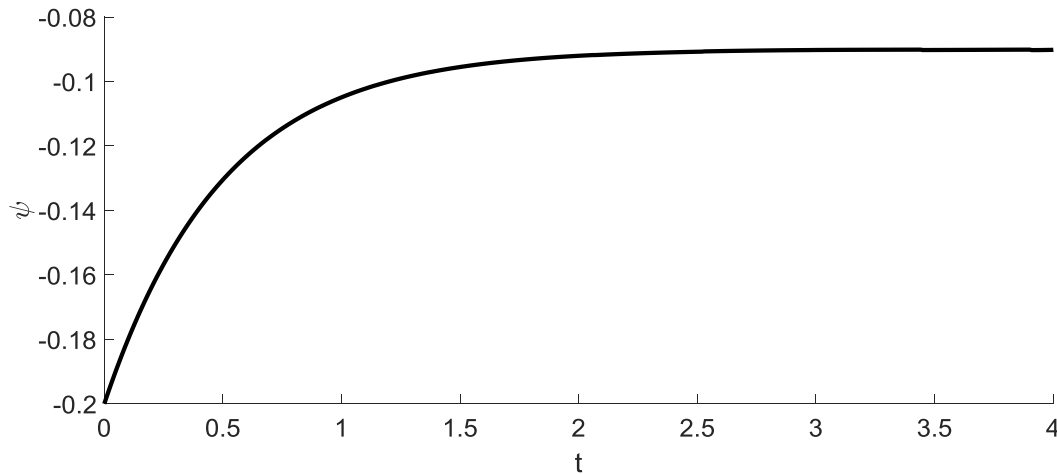


Рис. 1. График функции  $\psi(t)$ , расчёт проводился до момента  $t = 4$

Однако при увеличении времени расчёта выясняется, что решение имеет следующий вид (рис. 2).

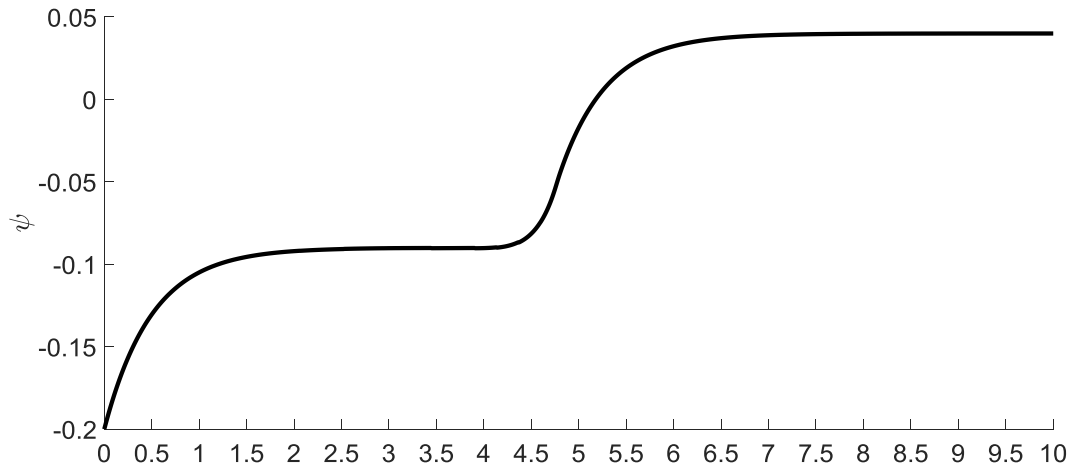


Рис. 2. График функции  $\psi(t)$ , расчёт проводился до момента  $t = 10$

Проблема состоит в том, что без понимания качественной структуры решения расчет был бы остановлен еще до того, как решение претерпевает скачок, описываемый внутренним переходным слоем.

Подобная проблема возникла также в работе [6]. Работа посвящена построению и исследованию модели "Власть–Информация–Общество", построенной путем объединения модели «Власть–Общество» [7, 8] и модели информационного противоборства в социуме [9, 10].

Модель имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k_1(x)(p - \phi_1(x))(p - \phi_2(x))(p - \phi_3(x)) + s(X - Y), \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dX}{dt} = [\alpha_1(P) + \beta_1 X](N - X - Y), \quad (7)$$

$$\frac{dY}{dt} = [\alpha_2(P) + \beta_2 Y](N - X - Y). \quad (8)$$

Описание всех переменных и параметров см. в [6]. Задача решалась при помощи численных методов, стандартная разностная схема [11] была адаптирована к системе уравнений (5)–(8).

Функция  $p(x, t)$  имеет смысл количества власти инстанции  $x$  в момент времени  $t$ . Если рассматривать эту функцию как функцию одного переменного  $x$  в разные моменты времени, то она имеет следующий вид (рис. 3).

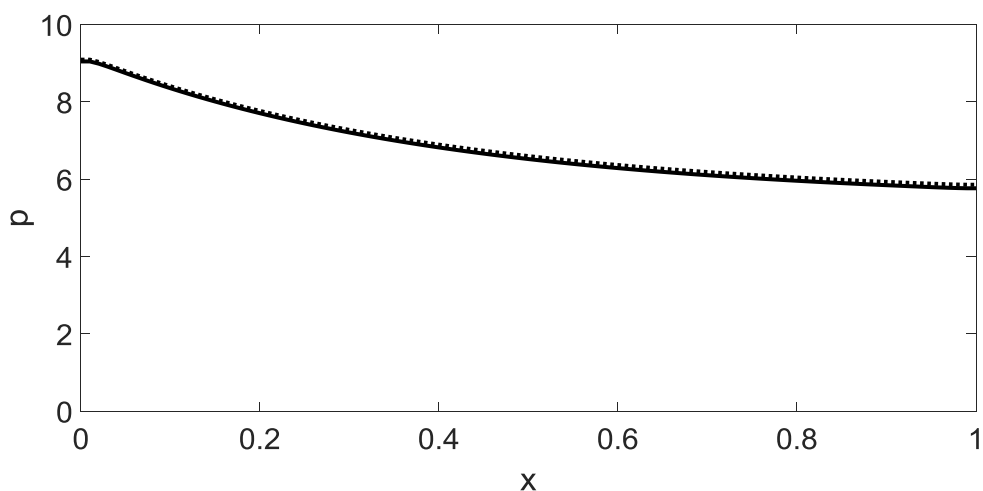


Рис. 3. Пунктирная линия: график функции  $p(x, 0.9)$ ,  
сплошная линия: график функции  $p(x, 1.3)$

Как видно из рис. 3, в течение достаточно большого числа шагов по времени (при расчёте использовался временной шаг, равный 0,005) решение почти не меняется, что наводит на мысль о том, что система пришла к равновесному состоянию. На рис. 4 приведён график зависимости  $\max_x |p(x, i) - p(x, i-1)|$ , где  $i$  – номер шага, от номера шага. В данном случае был сделан 2701 шаг, что соответствует времени расчёта  $t = 1,3$ . Видно, что решение практически не изменяется, из чего можно сделать ошибочный вывод, что расчёт можно прекратить.

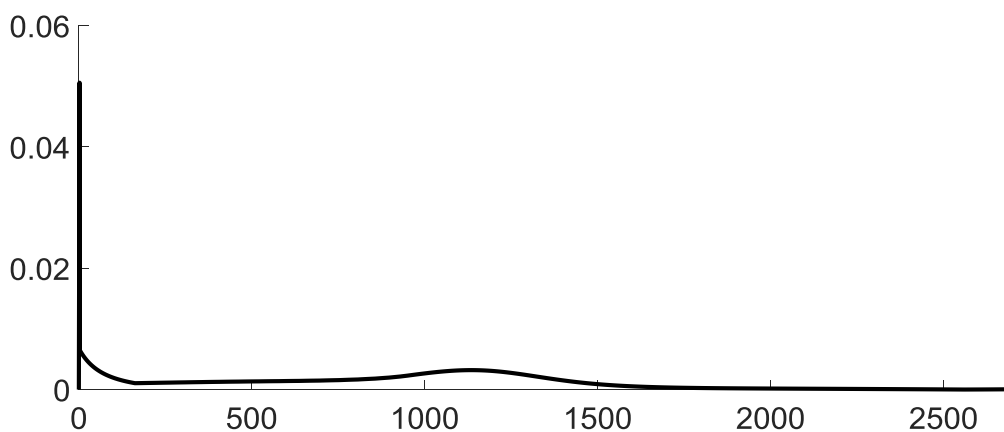


Рис. 4. График зависимости  $\max_x |p(x, i) - p(x, i-1)|$  от номера шага

Однако при дальнейшем увеличении времени расчёта получаются решения, качественно отличающиеся от изображённых на рис. 4.



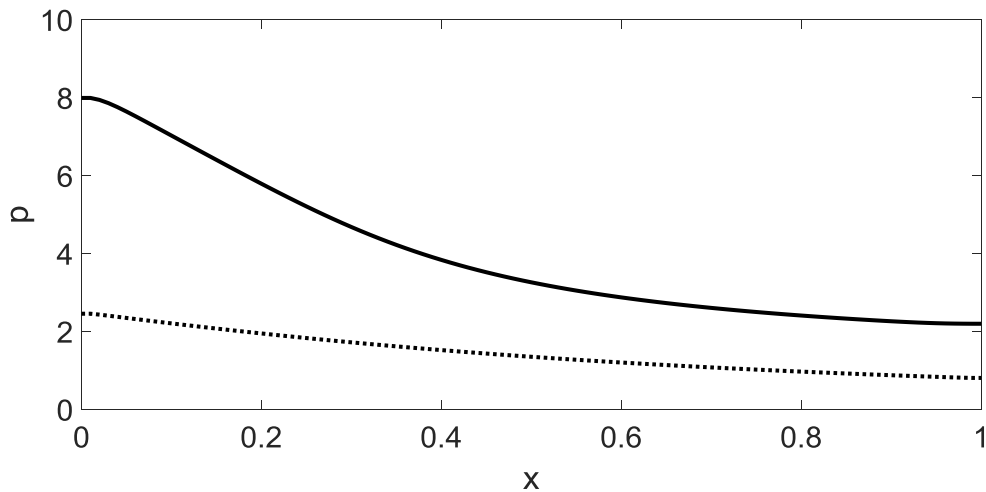


Рис. 5. Пунктирная линия: график функции  $p(x, 2.3)$ ,  
сплошная линия: график функции  $p(x, 4)$

График максимального (по  $x$ ) изменения за один шаг разностной схемы, аналогичный графику на рис. 4, принимает следующий вид (рис. 6):

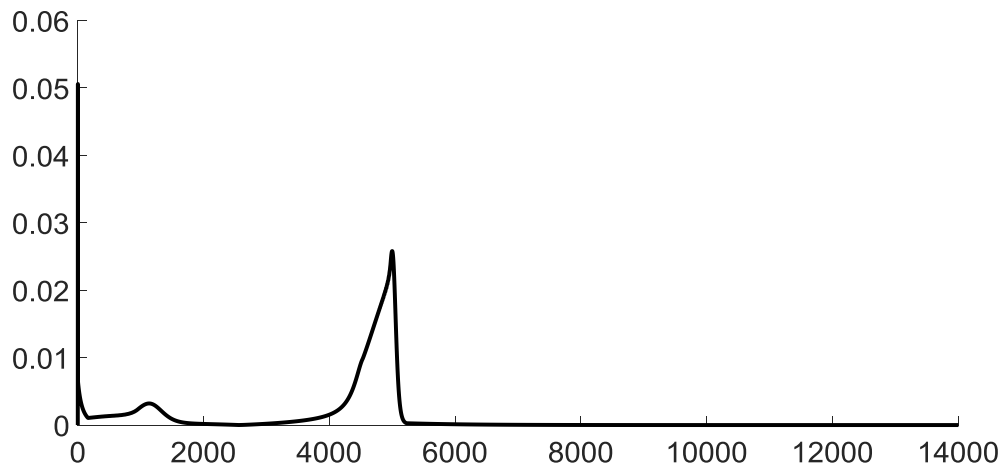


Рис. 6. График зависимости  $\max_x |p(x, i) - p(x, i-1)|$  от номера шага

## 2. Основная идея предлагаемого подхода

Было принято решение останавливать расчет в соответствии с теоретическими представлениями о том, как должно выглядеть решение.

Часть этих теоретических представления сформирована на основе теоремы А.Н. Тихонова о решении сингулярно возмущенной системы [12]. При этом изучаемая модель не относится к классу тихоновских систем, в связи с чем теорема не может быть к ней применена в строгом смысле слова, а лишь позволяет получить ориентир для качественного понимания свойств решения.

Строго говоря, эти свойства имеют место лишь при достаточно малых значениях  $\varepsilon$ . Методы, позволяющие определить, является ли конкретное

значение малого параметра "достаточно малым", для задач рассматриваемых типов отсутствуют. Поэтому в ходе вычислительных экспериментов контролируется близость численного и асимптотического решения (если они недостаточно близки, то необходимо провести расчет с "еще более маленьким" значением параметра). В качестве удобного инструмента осуществления такого контроля нами разработан графический интерфейс пользователя (англ. graphical user interface (GUI)), визуально отображающий, в частности, графики асимптотического и численного решения.

Другие теоретические представления основаны на сопоставлении полученных результатов с результатами, полученными при анализе других, но похожих моделей. Кроме того, анализируется динамика других исследуемых функций в системе (в случае их наличия).

### 3. Методика определения момента окончания расчёта

Для модели (1)–(4) в работах [4, 5] было получено асимптотическое решение с помощью метода малого параметра. Решение имело вид контрастной структуры (см., напр., [13, 14]). Асимптотика решения имела следующий вид:

$$\psi(\theta, \varepsilon) = \psi_0(\theta) + \Pi_0\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \Omega_0\left(\frac{\theta - \theta_0}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \left[ \psi_1(\theta) + \Pi_1\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) + \Omega_1\left(\frac{\theta - \theta_0}{\varepsilon}\right) \right] + \dots \quad (9)$$

Здесь  $\theta_0$  – точка локализации контрастной структуры,  $\Pi_i(\theta/\varepsilon)$  и  $\Omega_i((\theta - \theta_0)/\varepsilon)$  – функции, описывающие, соответственно, пограничный слой в окрестности точки  $\theta = 0$  и переходный слой в окрестности точки  $\theta = \theta_0$ ,  $\psi_i(\theta)$  – регулярные члены асимптотики ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ).

Было найдено нулевое приближение, решение имело следующий вид:

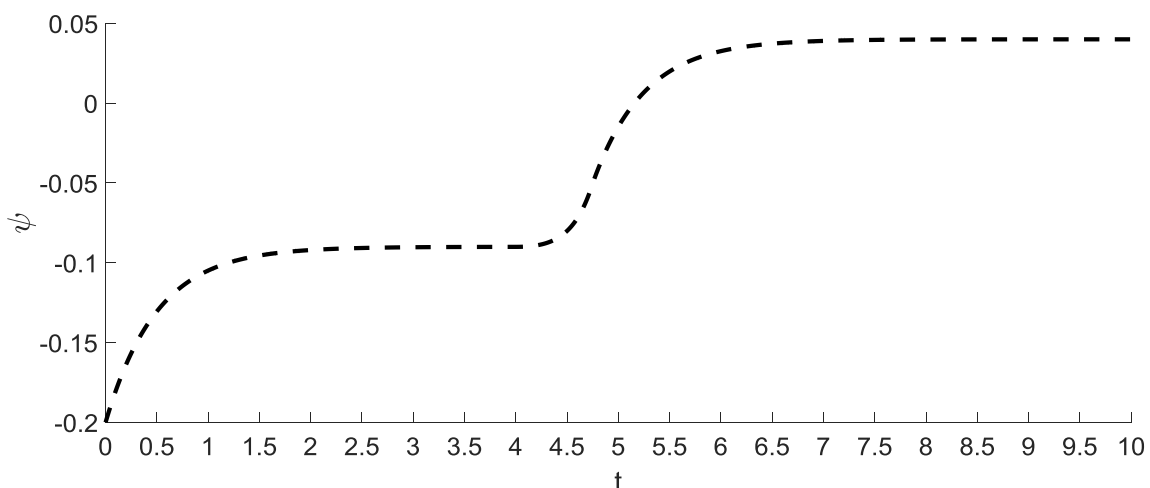


Рис. 7. Нулевое приближение функции  $\psi(t)$

Так как, по крайней мере, для  $\varepsilon \ll 1$  нулевое приближение должно быть близким к точному решению, нами был сделан вывод о том, что необходимо увеличить время расчёта.

Другим сигналом к тому, что при  $t=4$  система ещё не пришла к равновесному состоянию, может служить серия экспериментов с постоянной поляризацией. На рис. 8 приведена иллюстрация зависимости исхода информационной борьбы от начального условия и степени поляризации. В рассмотренном примере начальные условия функции  $\psi(t)$  и поляризации соответствуют изначальному лидерству второй партии. Видно, что если поляризация была бы больше, то исходом информационного противоборства была бы ничья.

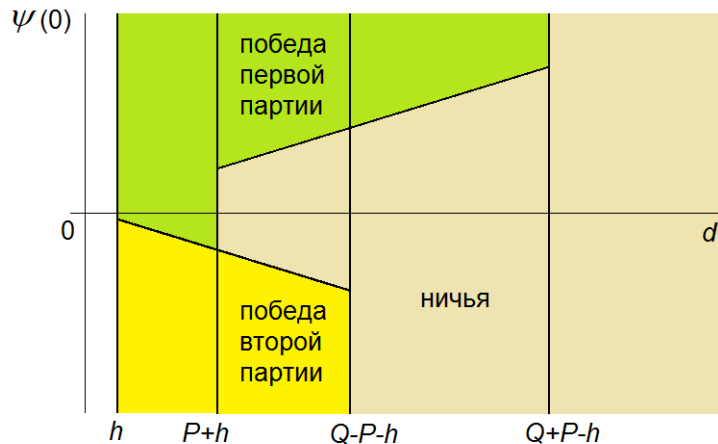


Рис. 8. Зависимость исхода информационного противоборства от начальных условий и уровня поляризации

С содержательной точки зрения процесс на большом масштабе времени состоит в том, что в течение длительного периода в обществе увеличивается поляризация (по формуле (4)), но она остается недостаточной для того, чтобы это отразилось на ходе информационного противоборства. Возникает иллюзия стационарного решения. Когда же, наконец, поляризация достигает критического значения, то происходит довольно резкое изменение в ходе противоборства.

В случае с задачей (5)–(8) внимание было обращено на динамику функций  $X(t)$  и  $Y(t)$ , имеющих смысл численностей адептов правящей партии и оппозиции соответственно. Графики представлены на рис. 9.

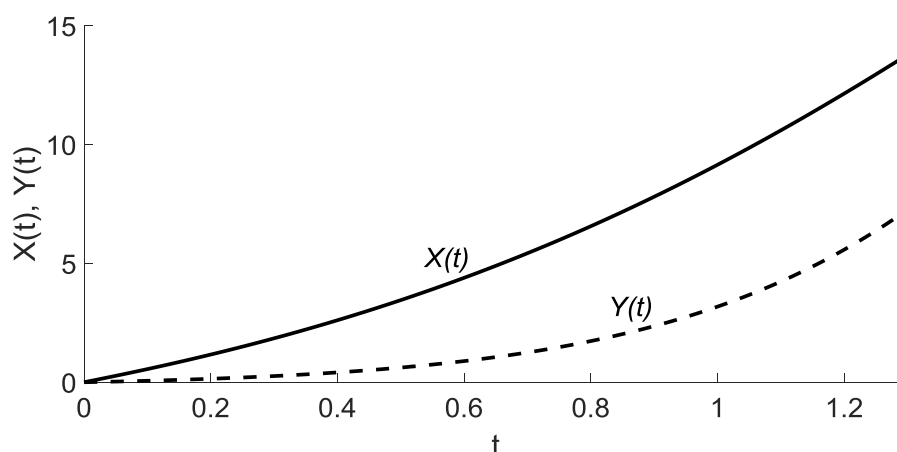


Рис. 9. Графики функций  $X(t)$  и  $Y(t)$

Очевидно, эти функции не пришли к равновесному состоянию, а значит, функция  $p(x,t)$  также может изменяться. При увеличении времени расчёта получаются следующие графики (рис. 10).

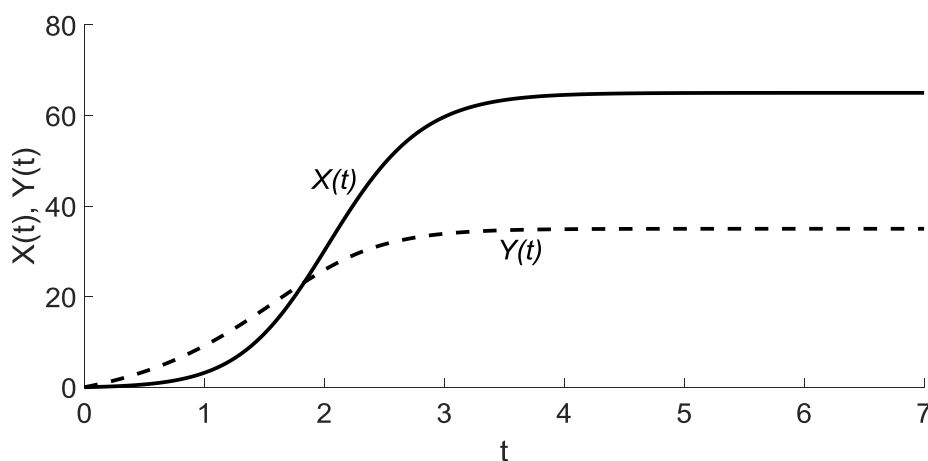


Рис. 10. Графики функций  $X(t)$  и  $Y(t)$

Так как функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  — монотонно возрастающие, при этом  $X(t) + Y(t) \leq N$ , но из того, что значение  $X(7) + Y(7)$  близко к  $N$  можно сделать вывод, что эти функции больше меняться не будут, а потому не будут оказывать влияние на изменение функции  $p(x,t)$ , поэтому установившееся значение при  $t > 3$  можно считать равновесным (строго говоря: близким к равновесному).

## Заключение

Работа посвящена разработке методики определения момента окончания расчёта при решении различных задач математического моделирования численными методами в случае, когда система уравнений модели формально

задана при всех  $t > 0$ . В частности, в качестве примеров задач рассматриваются случаи математического моделирования медленно поляризующегося социума и распределения власти при информационном противоборстве правящей партии и оппозиции. Критерии основаны на теоретических представлениях о стационарном положении системы, а также на сравнении полученного результата с асимптотическими разложениями решений и их свойствами, изученными с помощью методов малого параметра. Разработан GUI, позволяющий произвести сравнение решений, полученных аналитическими и численными методами.

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н., проф. А.П. Михайлову и д.ф.-м.н. А.П. Петрову за ценные консультации и замечания.

## Библиографический список

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, 1997.
2. Михайлов А.П., Петров А.П. Поведенческие гипотезы и математическое моделирование в гуманитарных науках // Математическое моделирование. 2011. Т.23. №6. С. 18–32.
3. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование, 2015, т. 27, №12, С.137–148.  
*англ перевод:* Petrov A.P., Maslov A.I., Tsaplin N.A. Modeling Position Selection by Individuals during Information Warfare in Society // Mathematical Models and Computer Simulations. 2016. Vol. 8. No. 4. P. 401–408, doi:10.1134/S2070048216040141.  
<http://link.springer.com/article/10.1134/S2070048216040141>
4. Прончева О.Г. О влиянии степени поляризации общества на исход информационного противоборства // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 75. С. 1–29.
5. Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G. Modeling the effect of political polarization on the outcome of propaganda battle // Computational mathematics and information technologies. 2017. No. 1. P. 65–81.
6. Прончева О.Г. Модель системы Власть–Информация–Общество // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 11. С. 1–15.
7. Rashevsky N. Outline of a Physico-mathematical Theory of Excitation and Inhibition // Protoplasma, 1933.
8. Рашевский Н. Две модели: подражательное поведение и распределение статуса. // Математические методы в современной буржуазной социологии. Сборник статей. Под ред. Г.В. Осипова. М.: Прогресс. 1966. С. 175–197.

7. Михайлов А.П. Математическое моделирование власти в иерархических структурах // Математическое моделирование. 1994. Т.6. №6. С. 108–138.

8. Михайлов А.П. Моделирование системы «Власть–Общество». 2006. 144 с.

9. Маревцева Н.А. Простейшие математические модели информационного противоборства. // Серия «Математическое моделирование и современные информационные технологии», вып.8. Сборник трудов Всероссийских научных молодежных школ. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2009. С.354–363.

10. Михайлов А.П., Маревцева Н.А. Модели информационной борьбы // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 10. С. 19–32.

англ. перевод: Mikhailov A.P., Marevtseva N.A. Models of information warfare. // Math. Models Comput. Simul. 2012. Vol. 4:3. P 251–259.

11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. 1989.

12. Тихонов А. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. 1948. Т. 22. №64:2. С. 193–204.

13. Васильева А.Б., Петров А.П., Плотников А.А. К теории контрастных структур переменного типа. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т.38. №9. С.1534–1543.

англ. пер.: Vasil'eva A.B., Petrov A.P., Plotnikov A.A. On the theory of alternating contrast structures. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. Vol. 38 (9). P.1471–1480.

14. Vasil'eva A., Nikitin A., Petrov A. Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies. // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 1994. Vol.78. P.261–279.

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Описание проблемы.....	4
2. Основная идея предлагаемого подхода.....	8
3. Методика определения момента окончания расчёта.....	9
Заключение.....	11
Благодарности.....	12
Библиографический список.....	12