

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 222 за 2018 г.</u>



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

#### <u>Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В.,</u> <u>Корянов В.В., Тучин А.Г.,</u> <u>Тучин Д.А.</u>

Гравитационные манёвры КА около Венеры для выхода на внеэклиптические положения. Резонансная асимптотическая скорость

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Гравитационные манёвры КА около Венеры для выхода на внеэклиптические положения. Резонансная асимптотическая скорость / Ю.Ф.Голубев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 222. 20 с. doi:<u>10.20948/prepr-2018-222</u>

URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-222

Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша Российской академии наук

# Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский, В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин

# Гравитационные манёвры КА около Венеры для выхода на внеэклиптические положения. Резонансная асимптотическая скорость

Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский, В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин

### Гравитационные манёвры КА около Венеры для выхода на внеэклиптические положения. Резонансная асимптотическая скорость

Планета Венера, ближайший сосед Земли в Солнечной системе, в первую очередь подходит для совершения гравитационных манёвров космическим аппаратом с целью малозатратного изменения наклонения его орбиты эклиптики. В работе вычислены относительно «резонансные» значения асимптотической скорости КА относительно планеты, позволяющие производить увеличение наклонения орбиты КА с помощью гравитационных манёвров без перескоков на соседние синхронизмы по инвариантной линии основного резонанса на V<sub>∞</sub>-сфере вплоть до полюса максимума наклонения. Вычислен венерианский кометный инвариант, не меняющийся при совершении Венерой. Представлена гравитационных манёвров адаптивная С полуаналитическая и геометрически внятная методика синтеза цепочек гравитационных манёвров около Венеры для малозатратного изменения наклонения орбиты КА.

*Ключевые слова:* гравитационный манёвр, Венера, обобщённый кометный инвариант, полюс наклонения, резонансная асимптотическая скорость, инвариантные линии резонансов

# Gravity assists near Venus for reaching positions over ecliptic. Resonant asymptotic velocity

Venus, the closest neighbor of the Earth in the Solar system, is primarily suitable for the spacecraft gravity assists maneuvers in order to low-cost orbit inclination changing relative to the Ecliptic. The "resonance" values of the spacecraft asymptotic velocity relative to the planet are calculated. Their implementation allows the increasing of the inclination of the spacecraft orbit by means of gravity assists without jumping between neighboring synchronisms along the invariant lines of the main resonances on the  $V_{\infty}$ -sphere up until to the pole of the maximum inclination. The Venusian cometary invariant is calculated, which not changes with the gravity assists near Venus. An adaptive semi-analytical and geometrically distinct technique for the synthesis of chains of gravity assists near Venus for low-cost changes of the spacecraft's orbit inclination is presented.

*Keywords:* gravity assist maneuver, Venus, Venusian cometary invariant, inclination pole, resonant asymptotic velocity, invariant lines of resonances

#### Введение

Для осуществления ряда перспективных космических проектов (миссия «Solar Orbiter» ЕКА, отечественный проект «Интергелиозонд» и др.), предполагающих изучение внутренней гелиосферы из внеэклиптических положений, требуются орбиты с большим наклонением к плоскости эклиптики. Например, для проекта «Интергелиозонд» требуются наклонения не менее 30°. Маневры, связанные с активным изменением наклонения орбиты в ходе полета, являются в астродинамике особенно энергозатратными. Эффективность гравитационного маневра около небесного тела была впервые теоретически обоснована [1] и практически продемонстрирована проектом «Луна-3» в октябре 1959 г.

Планета Венера, являясь ближайшим соседом Земли в Солнечной системе, в первую очередь подходит для совершения гравитационных манёвров космическим аппаратом (КА) с целью малозатратного изменения своих орбитальных характеристик. Внешний сосед Земли, Марс, уже не столь эффективен для этих целей в силу отдалённости от Солнца и более слабого гравитационного поля. Применение гравитационных маневров (GAM) около Венеры с целью формирования орбит с большим наклонением позволяет существенно сэкономить необходимые для полета запасы топлива.

Технология построения полуаналитических высокоточных алгоритмов, синтезирующих сценарии проведения последовательности GAM, которые обеспечивают значительное изменение наклонения орбиты исследовательского КА [2-4], осложняется необходимостью их 3D-проектирования с учетом точных эфемеридных моделей (ТЭМ). Вместе с тем требует дополнительного описания ряд ключевых моментов, которое целесообразно провести, учитывая вышесказанное, для каждого отдельного случая синтеза последовательности GAM около Венеры.

При баллистическом проектировании орбит с высоким наклонением *i*, как показано в [3,4], помимо стандартных ограничений на расход ресурса и

длительность космической миссии необходимо учитывать следующие базовые ограничения:

- геометрические ограничения на максимально возможное наклонение KA, которое орбиты достижимо зависимости ОТ величины В его асимптотической скорости относительно Венеры любой при последовательности GAM с ней;

– динамические ограничения на максимальный угол  $\varphi$  поворота вектора асимптотической скорости КА относительно Венеры при совершении GAM, зависящие от величины  $V_{\infty}$  асимптотической скорости.

Совместный анализ указанных ограничений позволяет сформировать основной динамический облик планируемой космической миссии [2-4].

### 1. Обобщённый «кометный» инвариант планеты

Как известно, в ограниченной задаче трёх тел (O3TT) ("первое тело – второе тело – бесконечно малое тело") остается инвариантным интеграл Якоби с постоянной Якоби *J* [5], не меняющийся, в частности, при совершении GAM бесконечно малым телом около малого (второго) тела. Следствием этой инвариантности является сохранение также и параметра Тиссерана Г [6] («кометного инварианта»), впервые введённого французским астрономом Феликсом Тиссераном в 1889 году для определения тождественности комет. Параметр Г используется при идентификации разнесённых по времени астрономических наблюдений, поскольку сами элементы орбиты кометы могут неоднократно меняться при прохождении ею сферы действия планеты Юпитер. Для ОЗТТ системы Солнце–Юпитер–комета (O3TT "S-J-comet") *условие инвариантности юпитерианского параметра Тиссерана* Г<sup>аи</sup><sub>*S-J*</sub> может быть записано в виде [5]:

$$\Gamma_{S-J}^{au} \simeq \frac{1}{(a_{sc} / r_{oE})} + 0.16860 \sqrt{(a_{sc} / r_{oE})(1 - e^2)} \cos i = const, \qquad (1)$$

где  $a_{sc}$ , e, i – большая полуось, эксцентриситет орбиты и наклонение орбиты бесконечно малого тела («кометы») к плоскости первого тела ("Юпитера"),  $r_{oE}$ – средний радиус орбиты Земли ( $r_{oE} = 1$  au = 149 597 870.7 км). Таким образом, Г не меняется при любом количестве прохождений кометы через сферу действия второго (малого) тела – Юпитера. В формуле (1) выполнена нормировка по астрономическим единицам au, а параметр 0.16860 есть не что иное, как безразмерная величина  $\lambda_J = 2\sqrt{(a_J/r_{oE})^{-3}} = 0.16860$ , где  $a_J$  – большая полуось орбиты Юпитера.

Таким образом, можно выписать обобщённый *безразмерный инвариант кометы*  $\Gamma_{S-p}^{u}$  для произвольной O3TT "S - p - sc" (Solar-planet-spacecraft) [7] в произвольных **u**-единицах измерения расстояния:

$$\Gamma_{S-p}^{u} \simeq (a_{\rm sc} / \mathbf{u})^{-1} + 2(a_{p} / \mathbf{u})^{-3/2} \sqrt{(a_{\rm sc} / \mathbf{u})(1-e^{2})} \cos i ,$$

где  $a_p$  – большая полуось орбиты второго тела («планеты»).

С целью нахождения инварианта прохождения бесконечно малого тела (КА) через сферу действия Венеры (иными словами – для совершения GAM около неё) получим аналогично *венерианский инвариант кометы*  $\Gamma_{S-Ven}^{au}$ :

$$\Gamma_{S-Ven}^{au} = \frac{1}{(a_{sc} / r_{oE})} + 3.25105 \sqrt{(a_{sc} / r_{oE})(1 - e^2)} \cos i.$$
(2)

Для случая прохождения сферы действия Земли, как нетрудно видеть из (1),

$$\Gamma_{S-E}^{au} \simeq \frac{1}{(a_{sc} / r_{oE})} + 2\sqrt{(a_{sc} / r_{oE})(1 - e^2)} \cos i.$$

При совершении гравитационных манёвров КА с Венерой остаётся неизменным именно «венерианский кометный инвариант» Г<sup>аи</sup><sub>S-Ven</sub>.

В результате анализа пространственной геометрии проведения GAM [4] выводится следующее *утверждение* [3,4]. Пусть величина  $V_{\infty}$  асимптотической скорости КА (инвариантная до и после манёвра) не превосходит модуля вектора средней орбитальной скорости  $V_{Ven} \approx 35$  км/с Венеры. Тогда для максимального наклонения  $i_{max}$  орбиты КА при проведении любой последовательности GAM около Венеры верна оценка [3,4,8,9]:

$$i_{\max} \le \arcsin \frac{V_{\infty}}{V_{Ven}}$$
 (3)

Левая часть (3) не превосходит величины 90° и является точной верхней гранью множества возможных наклонений КА. Из полученной оценки следует, что для повышения наклонения орбиты КА относительно эклиптики более чем на 30° необходимо до совершения GAM увеличить асимптотическую скорость КА относительно Венеры до величины не менее 17.5 км/с. Такой разгон КА осуществить и (или) можно С помощью двигателя малой ТЯГИ GAM В дальнейшем последовательностью планет. около других  $V_{\infty} \ge 17/5$  км/с. предполагается, Несмотря что на ЭТО, однократного гравитационного маневра около Венеры для увеличения наклонения орбиты до требуемой величины может оказаться недостаточно из-за наличия ограничений. В таком случае необходимо синтезировать возрастающую по наклонению последовательность «резонансных» GAM (то есть таких, чтобы орбитальный период КА после каждого был соизмерим с периодом обращения Венеры и обеспечивал новую встречу с нею). Выполнение резонансных GAM есть основное необходимое условие для построения подобных миссий.

Как уже указывалось выше, при совершении КА GAM с Венерой справедлив именно «венерианский кометный инвариант»  $\Gamma_{S-Ven}^{au}$ . Поскольку величина  $V_{\infty}$  асимптотической скорости КА относительно малого тела

(планеты) связана с параметром Тиссерана как  $\Gamma = 3 - (V_{\infty} / V_{pl})^2$  [11], постольку факт инвариантности величины асимптотической скорости КА относительно планеты  $V_{\infty}$  при совершении GAM можно рассматривать как следствие существования критерия Тиссерана [5-8]. Иными словами, конец всевозможных положений вектора  $V_{\infty}$  до и после совершения GAM лежит на поверхности сферы, построенной с центром на конце вектора  $V_{pl}$  в точке совершения GAM.

Проанализируем *достаточные условия* для построения рассматриваемого класса миссий. Это условия, позволяющие обеспечить динамическую реализуемость указанных «резонансных» GAM («резонансных перескоков»). Рассмотрим сферу, радиус которой равен модулю  $V_{\infty}$ , а центр находится на конце вектора скорости  $V_{pl}$  планеты ( $V_{\infty}$ -*сфера*) [8-10]. При совершении КА гравитационного манёвра конец вектора асимптотической скорости всегда будет оставаться на этой сфере.

Возможности GAM будем исследовать, исходя из предположения о том, что имеется трубка допустимых траекторий с одним и тем же вектором  $V_{\infty}$ . Для каждой траектории из этой трубки отклонение вектора скорости из-за гравитационного маневра будет происходить в зависимости от места траектории в трубке (которое определяет соответствующую точку на картинной плоскости при входе в сферу действия планеты). Рассмотрим область, образованную концами возможных векторов асимптотической скорости после совершения гравитационного манёвра при заданном векторе входной асимптотической скорости. Эта область представляет собой пересечение  $V_{\infty}$ -сферы и телесного угла с раствором равным  $\varphi_{max}$  (сферической шапочкой).

Ограничимся рассмотрением случая тангенциальных GAM, когда GAM совершается на линии апсид орбиты КА. Заметим, что  $\mathbf{V}_{sc} = \mathbf{V}_{\infty} + \mathbf{V}_{pl}$  есть скорость КА относительно Солнца. Изменение угла между векторами  $\mathbf{V}_{\infty}$  и  $\mathbf{V}_{pl}$  влечет изменение скорости  $\mathbf{V}_{sc}$ . При этом можно получить скорость,

соответствующую той или иной резонансной траектории. Нанесём на  $V_{\infty}$ -сферу указанные сферические шапочки и концы векторов асимптотической скорости, которые отвечают основным резонансам между периодами обращения КА и Венеры вокруг Солнца: 3:4, 1:1, 4:3. Возможность новой встречи с Венерой обеспечивается одним из двух вариантов проведения GAM (рис. 1).

1. GAM проводится вдоль фиксированной резонансной линии на  $V_{\infty}$ -*сфере* («монорезонанс» == «резонансный перескок» переход по резонансу).

2. Сферическая шапочка на  $V_{\infty}$ -*сфере*, соответствующая GAM, должна покрывать соседние резонансные линии («перескок»).

Для проектирования обоих вариантов необходимо иметь оценки допустимых вариаций наклонения орбиты КА при совершении одного GAM. При этом они должны быть максимально точными.



*Рис.1.* Резонансные изолинии на поверхности  $V_{\infty}$ -*сферы* для основных резонансов 3:4, 1:1 и 4:3

# 3. Уточняющие оценки изменения наклонения при совершении одного GAM

Для оценки изменения наклонения  $\Delta i$  на одном GAM часто используется неравенство Лабунского (НЛ) [8, с.4]:

$$\sin \Delta i \le \sin \Delta i_{\max} = \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \sin \varphi_{\max}, \ \varphi_{\max} \le \frac{\pi}{2},$$
$$\sin \Delta i \le \sin \Delta i_{\max} = V_{\infty} / V_{pl} \equiv v_{\infty}, \ \varphi_{\max} > \frac{\pi}{2},$$

где  $\varphi_{\max}$  – максимальное значение угла  $\varphi$  поворота вектора асимптотической скорости КА на одинарном GAM. Угол  $\varphi$  определён равенством

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\mu}{\mu + r_{\pi}V_{\infty}^2},\tag{4}$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр планеты,  $r_{\pi}$  – расстояние перицентра пролётной гиперболы КА, которое не может быть меньше радиуса планеты  $R_{Ven}$ .

В [2-4] показано, что, будучи приблизительной, оценка НЛ и соответствующие графики допустимых вариаций наклонения на однократном GAM [8] несколько отличаются от более точных расчётов (рис. 2). В [2,3] получено аналитическое выражение для максимальной допустимой вариации наклонения при однократном GAM, уточняющее НЛ. Вводится безразмерный параметр  $\Theta_{pl}$ , равный отношению орбитальной скорости планеты и её первой космической скорости  $V_{Fpl}$ :  $\Theta_{pl} = V_{pl} / \sqrt{\mu/R_{\pi}} \simeq V_{pl} / V_{Fpl}$ . В [4] доказано, что в

случае, когда выполнено условие 
$$\Theta_{pl} \ge \Theta_{pl}^* \equiv \frac{\sqrt{102}\sqrt{17} - 214}{16} \approx 0.898255,$$

максимальная добавка по наклонению достигается при значениях [4, Утв. 1]  $v_{\infty} = v_{\infty}^* \equiv \Theta_{pl}^{-1} \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$  и составляет величину  $\Delta i = \arcsin\left(\frac{\Theta_{pl}^{-1}}{16} \sqrt{102\sqrt{17}-214}\right).$ 

Проведя вычисления, можно убедиться, что *для Венеры*,  $\Theta_{Ven} = V_{Ven} / V_{FVen} = 35.02/7.23 = 4.841 > \Theta_{pl}^* \equiv 0.898$ , и условия Утв. 1 [4] выполняются. При этом максимальное приращение наклонения достигается при

$$\frac{V_{\infty}}{V_{ven}} = \frac{V_{\infty}^{*}}{V_{ven}} \equiv \Theta_{ven}^{-1} \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} = 0.258 \quad (\text{так что } V_{\infty}^{*} \equiv 9.04 \, (\kappa M/c)) \quad \text{и составляет}$$

величину  $\Delta i_{Ven} = 10.87^{\circ}$  (рис. 2), не совпадающую с оценкой Лабунского:  $\Delta i_{Ven}^{\Lambda} \approx 16^{\circ}$ .



Рис. 2. Максимальные изменения наклонений при совершении GAM с планетами Земной группы в зависимости от V<sub>∞</sub>, (а) уточнённые авторами в [4] по приближению Лабунского [8] и (б) непосредственно из книги [8]: 1 – Меркурий, 2 – Венера, 3 – Земля, 4 – Марс

# 4. Полюс наклонения на $V_{\infty}$ -сфере

В [3,4] представлена более понятная геометрически, чем в [3], формула для итогового наклонения орбиты КА при совершении GAM около планеты в сферических координатах  $\rho, \psi$  (рис. 3) в виде:

$$i = \operatorname{arctg} \frac{V_{\infty} \sin \rho}{V_{pl} + V_{\infty} \cos \rho \cos \psi}.$$
(5)

Там же найдены координаты «полюса наклонения» – экстремума наклонения на  $V_{\infty}$ -*сфере* после выполнения любой последовательности GAM:

$$T_{\text{Pole}} \{ \psi_{\text{Pole}} = \pi; \ \rho_{\text{Pole}} \equiv \varphi_{\text{Pole}} = \pi - \arccos v_{\infty} \}.$$
(6)



*Рис. 3.* Сферические координаты ( $\psi, \rho$ ) на V<sub>∞</sub>-*сфере* и положение «полюса наклонения» T<sub>Pole</sub> - точки экстремума наклонения  $i = i_{max}$  на V<sub>∞</sub>-*сфере* в случае sin $\psi = 0$ 

Графики изменения наклонения при совершении одного GAM для планет Венера и Земля в зависимости от  $V_{\infty}$ , посчитанные согласно (5), представлены на рис. 4.



*Рис. 4.* Максимальные возможные вариации наклонения при однократном GAM для ( $\psi = 0^{\circ} - 1, \psi = 90^{\circ} - 2, \psi = 180^{\circ} - 3$ ) около Венеры и Земли

Квазиоптимальный гомановский перелёт приводит КА от Земли на GAM с Венерой так, что вектор асимптотической скорости КА относительно Венеры почти коллинеарен вектору орбитальной скорости Венеры: ( $\psi = 0, \pi$ ).

Рассмотрим последовательность  $N_{\gamma}$  гравитационных манёвров, таких что перемещение конца вектора  $V_{\infty}$  к «полюсу наклонения» на  $V_{\infty}$ -*сфере* происходит в результате GAM строго по меридиану ( $\psi = 0, \pi$ ). В этом случае угол  $\rho$  «накапливает» углы  $\varphi_{j, j=1,...,N}$ :

$$\rho_k = \rho_0 + \sum_{j=1}^{N_{\gamma}} \varphi_j$$
, а итоговое наклонение определяется по формуле

$$\operatorname{tg} i = \frac{V_{\infty} \sin \rho}{V_{\mathrm{pl}} + V_{\infty} \cos \rho} = \frac{V_{\infty} \sin \left(\rho_{0} + \sum_{j=1}^{N_{\gamma}} \varphi_{j}\right)}{V_{\mathrm{pl}} + V_{\infty} \cos \left(\rho_{0} + \sum_{j=1}^{N_{\gamma}} \varphi_{j}\right)}.$$
(7)

# 5. Совместный анализ динамических и геометрических ограничений

Сопоставим с выражением (3) зависимость (4) от величины  $V_{\infty}$  угла  $\varphi$  поворота вектора асимптотической скорости  $V_{\infty}$  КА относительно Венеры. Графики зависимости  $\varphi_{\max}$  от величины  $V_{\infty}$  для Венеры представлены на рис. 5. Они показывают, что максимальные углы разворота достигаются при близких к нулю значениях  $V_{\infty}$ . Однако и величина  $i_{\max}$  при этом, согласно (3), близка к нулю. На графике видно, что «эффективность» GAM появляется только при увеличении  $V_{\infty}$  до значений, обеспечивающих требуемую для космической миссии величину  $i_{\max}$ . При этом уменьшается значение  $\varphi_{\max}$ . Жирной линией обозначено модельное значение  $i_{\max} = 30^{\circ}$  проектного угла наклонения. Вертикаль, опущенная из точки пересечения жирной линии с графиком

функции максимального наклонения планеты, показывает соответствующее значение угла  $\varphi_{max}$  поворота вектора асимптотической скорости на одном GAM. Одновременно, в случае осуществления резонансов-перескоков, должно обеспечиваться условие поставки такой величины  $\varphi_{max}$ , сферическая шапочка которой перекрывает на  $V_{\infty}$ -*сфере* смежные резонансные линии на перескоке. Таким способом можно получить характерный размер «рабочего» телесного угла области элементарного GAM на поверхности  $V_{\infty}$ -*сферы*.



*Рис.5.* Базовые углы в зависимости от величины  $V_{\infty}$  для планеты Венера. По оси абсцисс отложена величина  $V_{\infty}$  относительно Венеры в км/с, по оси ординат –

углы  $\varphi_{\max}$ ,  $\rho_{Pole} = \varphi_{Pole}$ ,  $i_{\max}$  и  $\Delta i$  в град.

# 6. Условие формирования большого наклонения с помощью перескока вдоль монорезонанса

Согласно (5) и [3,4], для произвольных миссий с наклонением  $i_{\max} = i^*$ полюс наклонения  $T_{Pole}$  будет находиться на широте  $\rho = \pi/2 - i^* = \arccos \frac{V_{\infty}}{V_{Ven}}$ . В

табл. 1 приведены координаты  $T_{Pole}$  для различных значений  $i_{max}$ .

Таблица 1

Координаты  $\rho^*, \psi^*$  стационарной точки  $T_{Pole}$  в зависимости от величины максимального наклонения  $i_{max}$ 

і <sub>тах</sub> , град	$ ho^*$ ,град.	ψ*, град.	
10	80	180	
20	70	180	
30	60	180	
40	50	180	
45	45	180	
50	40	180	
60	30	180	
70	20	180	
80	10	180	

Координаты  $\rho^*, \psi^*$  точки  $T_{Res}$ , по определению отвечающей экстремуму угла наклонения *i* на линии фиксированного резонанса, приведены для конкретных основных резонансов в модельном случае  $v_{\infty} = 1/2$  в табл. 2.

Таблица 2

Координаты  $\rho^*, \sigma^*$  точки  $T_{Res}$  максимума наклонения на фиксированной линии резонанса в случае  $v_{\infty} = 1/2$ 

Резонанс	$ ho^*$ , град.	ψ*, град.
1:1	75.5	180
3:4	62.5	180
4:3	85.7	180

5:4	83.6	180
3:2	89.3	180
1:2	34.0	180
2:1	83.0	0
3:1	75.5	0

Для произвольных значений  $v_{\infty}$  широта  $\rho^*$  точки  $T_{Res}$  максимума наклонения главного резонанса 1:1 может быть вычислена аналитически [3]:

$$\cos \rho^* = \frac{V_\infty}{2V_{Ven}} = \frac{v_\infty}{2},\tag{8}$$

так что, например, для космических проектов с «рабочей» скоростью  $V_{\infty} = \frac{V_{Ven}}{2}$ 

верно:

$$\rho^* = \arccos\frac{1}{4} \approx 75.52^\circ. \tag{9}$$

В табл. 3 приведены значения широты  $\rho^*$  точки  $T_{Res}$ , по определению отвечающей экстремуму угла наклонения *i* на линиях главных резонансов

Таблица З

Широта  $\rho^*$  точки  $T_{Res}$ , отвечающей экстремуму угла наклонения *i* на линиях главных резонансов

Резонанс	$ ho^*$ для $i_{ m max}=20^\circ$ ,	$ ho^*$ для $i_{ m max}=30^\circ$ ,	$ ho^*$ для $i_{ m max}=45^\circ$ ,	
	град	град	град	
3:4	61.34	62.54	59.81	
1:1	80.15	75.52	69.30	
4:3	85.13 $(\psi^* = 0^\circ)$	85.69 ( $\psi^* = 180^\circ$ )	76.71 ( $\psi^* = 180^\circ$ )	

В табл. 4 представлены ресурсы углов поворота на одном GAM около планет земной группы, соответствующие требуемой величине наклонения орбиты КА.

#### Таблица 4

Максимально возможные углы поворота вектора асимптотической скорости КА при однократном пролёте планет земной группы для миссий, различающихся требуемой величиной наклонения орбиты

Планета	Первая космическая скорость $V_{\rm Fpl}$ , км/с	V <sub>pl</sub> , км/с	$arphi_{ m max}$ для $i_{ m max}=20^\circ$ , град	$arphi_{ m max}$ для $i_{ m max}=30^\circ$ , град	$arphi_{ m max}$ для $i_{ m max}=45^\circ,$ град
Меркурий	3.10	47.36	4.05	1.93	1.17
Венера	7.23	35.02	31.01	16.75	9.02
Земля	7.92	29.78	44.12	25.37	14.17
Марс	3.55	24.13	17.97	9.14	5.71

Анализ таблиц показывает, что перескоки между основными резонансами при совершении GAM около Венеры (которые, согласно табл. 2, требуют изменения текущего  $\rho$  на 9.8-13.3 градусов) эффективны вплоть до значений  $i_{max} = 40^{\circ}$ . В противном случае необходимо проектировать последовательность GAM по монорезонансу. Как показывает табл. 4, любые GAM около планеты Меркурий неэффективны для осуществления перескоков между резонансами (ячейки отмечены темным). Таким же свойством обладают GAM около Венеры при  $i_{max} > 40^{\circ}$  и GAM около планеты Марс при  $i_{max} \ge 30^{\circ}$ .

Практически величина наклонения, обеспечивающая выполнение основной задачи полета, принадлежит некоторому диапазону значений. Используя это обстоятельство, можно с помощью представленных таблиц проводить «калибровку» проектной величины  $V_{\infty}$ , «пододвигая» по  $V_{\infty}$ -*сфере* его полюс наклонения  $T_{Pole}$  к точке максимума наклонения  $T_{Res}$  на линии выбранного резонанса.

### Заключение

Для проведения многократных гравитационных маневров необходимо использовать «резонансные» орбиты КА, период обращения которых вокруг Солнца кратен периоду обращения планеты-партнера. Использование в ходе одной миссии орбит, соответствующих различным резонансам, в некоторых случаях оказывается затруднительным. В данной работе вычислено «монорезонансное» значение асимптотической скорости КА относительно планеты, позволяющее производить увеличение наклонения орбиты КА по  $V_{\infty}$ -сфере без перескоков на соседние синхронизмы вплоть до полюса максимума наклонения.

Вычислен венерианский кометный инвариант, не меняющийся при совершении гравитационных манёвров. Представлена адаптивная полуаналитическая и геометрически прозрачная методика синтеза цепочек гравитационных манёвров около Венеры для малозатратного изменения наклонения орбиты КА.

## Библиографический список

- Келдыш М.В., Власова З.П., Лидов М.Л., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К. Исследование траекторий облета Луны и анализ условий фотографирования и передачи информации / В сб. «Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика». М.: Наука, 1988. С. 261-309.
- Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонений орбит космических аппаратов с использованием гравитационных маневров // Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 4. С. 403-406.
- 3. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Формирование орбит космического аппарата с большим наклонением к

эклиптике посредством многократных гравитационных маневров // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 108-132.

- Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. О вариации наклонения орбит небесных тел при совершении гравитационного манёвра в Солнечной системе // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 15. 36 с.
- 5. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.
- Tisserand F.F. Traité de Mecanique céléste. V. 4. Gauthier-Villars et fils. Paris, 1896. P. 203–205.
- Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Синтез сценариев космических миссий в системе Юпитера с использованием гравитационных маневров // Доклады Академии наук. 2014. Т. 456. № 1. С. 39-41.
- Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // ESI Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998. P. 9-266.
- Kawakatsu Y. V∞ Direction Diagram and its Application to Swingby Design // 21st ISSFD, Toulouse, France, 2009.
- Strange N.J., Russell R., Buffington B. Mapping the V-infinity Globe // AIAA/AAS Space Flight Mechanics Meeting, AAS Paper 07-277, 2007.
- Miller J. K., Weeks C. J. Application of Tisserand's Criterion to the Design of Gravity Assist Trajectories // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Monterey, 2002.

# Оглавление

Введ	дение	. 3
1.	Обобщённый «кометный» инвариант планеты	. 4
2.	Условия формирования больших наклонений с помощью гравитационных манёвров	. 6
3.	Уточняющие оценки изменения наклонения при совершении одного GAM	. 8
4.	Полюс наклонения на $V_{\infty}$ -сфере	11
5.	Совместный анализ динамических и геометрических ограничений	13
6.	Условие формирования большого наклонения с помощью перескока вдоль монорезонанса	15
Закл	ючение	18
Библ	пиографический список	18