ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 223 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 223. 15 с. doi:10.20948/prepr-2018-223
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-223

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. Д. Брюно

Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы

Москва — 2018

УДК 517.93+531.314

Александр Дмитриевич Брюно

Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2018.

Сначала рассматриваются линейные периодические системы Гамильтона. Для них находятся нормальные формы функций Гамильтона в комплексном и вещественном случаях. Обнаружена специфика вещественного случая. Затем находятся нормальные формы функций Гамильтона нелинейных периодических систем также в комплексном и вещественном случаях. Посредством дополнительного канонического преобразования координат такая нормальная форма всегда сводится к автономной системе Гамильтона, которая сохраняет все малые параметры и симметрии исходной системы. Её локальным семейством неподвижных точек соответствуют семейства периодических решений исходной системы. Всё это завершает исследование титульной проблемы, частично изложенное в гл. II книги А.Д.Брюно «Ограниченная задача трёх тел», М.: Наука, 1990. Рассматривается нетривиальный пример с двумя степенями свободы.

Ключевые слова: система Гамильтона, комплексная нормальная форма, вещественная нормальная форма, приведённая нормальная форма.

Alexander Dmitrievich Bruno

Normal form of the periodic Hamiltonian system with n degrees of freedom.

First we consider the linear periodic Hamiltonian systems. For them we find normal forms of Hamiltonian functions in both complex and real cases. The real case has a specificy. Then we find normal forms of the Hamiltonian functions for nonlinear periodic systems also in complex and real cases. By means of additional canonical transformation of coordinates, such system always is reduced to an autonomous Hamiltonian system, which preserves all small parameters and symmetries of the initial system. Its local families of stationary points correspond to families of periodic solutions of the initial system. All that concludes the study of the problem mentioned in the title and partially given in Ch. II of the book A.D.Bruno ''The Restricted 3-Body Problem''. Berlin. Walter de Grouter, 1994. We consider a nontrivial example with two degrees of freedom.

Key words: Hamiltonian system, complex normal form, real normal form, reduced normal form.

e-mail: `abruno@keldysh.ru`, site: `http://brunoa.name`

Введение

В окрестности стационарного решения

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0$$

рассматривается система Гамильтона с n степенями свободы

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n\ , \tag{0.1}$$

где γ — степенной ряд по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ с 2π-периодическими по ψ коэффициентами.

Пусть линейная по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ часть этой системы является постоянной, её матрица имеет только простые элементарные делители с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$. Положим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Сделаем линейное каноническое преобразование $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \to \mathbf{x},\mathbf{y}$, которое приводит линейную часть системы (0.1) к линейной нормальной форме

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, G\mathbf{z} \rangle\ ,$$

где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — скалярное произведение, $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ и G — диагональная матрица $G = \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$. При этом функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\psi)$ принимает вид $g(\mathbf{x},\mathbf{y},\psi)$.

Существует нелинейное каноническое периодическое преобразование

$$\mathbf{x},\mathbf{y},\psi \to \mathbf{u},\mathbf{v},\varphi, \tag{0.2}$$

которое переводит функцию Гамильтона $g(\mathbf{x},\mathbf{y},\psi)$ в ряд Пуассона (нормальную форму)

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v},\varphi) = \sum h_{\mathbf{pq}m} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} \exp(im\varphi), \tag{0.3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{u}^{\mathbf{p}} = u_1^{p_1} \cdots u_n^{p_n}$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$, и в разложении (0.3) имеются только резонансные члены с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + im = 0.$$

Здесь $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Затем замена

$$u_j = \tilde{u}_j \exp\left(-i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi\right), \quad v_j = \tilde{v}_j \exp\left(i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

приводит периодическую нормальную форму (0.3) к постоянной функции Гамильтона

$$\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \sum \tilde{h}_{\mathbf{pq}m} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{q}}, \tag{0.4}$$

где
$$\langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \operatorname{Re} \boldsymbol{\Lambda}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \operatorname{Im} \boldsymbol{\Lambda}\rangle = -m.$$

Квадратичная часть у функции (0.4) вещественна. Малые параметры и линейные симметрии системы (0.1) сохраняются при нормализующем преобразовании (0.2). Если исходная система Гамильтона (0.1) была вещественной, то в приведённой нормальной форме (0.4) коэффициенты $\tilde{h}_{\mathbf{pq}m}$ связаны соотношениями вещественности и комплексные координаты $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ переводятся в вещественные $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ стандартной линейной заменой

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$$

с постоянной блочной матрицей Q.

Даже если нормализующее преобразование (0.2) расходится, то оно сходится на локальных семействах периодоических решений (проходящих через $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$), которым в системе с приведённой нормальной формой функции Гамильтона (0.4) соответствуют локальные семейства неподвижных точек.

Всё это справедливо и без двух сделанных здесь предположений:

1. что линейная часть системы не зависит от времени;
2. что просты все элементарные делители матрицы монодромии линейной части системы.

1. Нормальная форма линейной системы Гамильтона с периодическими коэффициентами

1.1. Линейная система. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{d\psi} = A(\psi)\boldsymbol{\zeta}, \tag{1.1}$$

где вектор $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, $A(\psi)$ — матрица, аналитически зависящая от ψ. После замены координат

$$\boldsymbol{\zeta} = B(\psi)\mathbf{z} \tag{1.2}$$

система (1.1) перейдёт в систему

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi} = B^{-1}\left(AB - \frac{dB}{d\psi}\right)\mathbf{z}. \tag{1.3}$$

Пусть теперь система (1.1) гамильтонова:

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

т. е. $m = 2n$, $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = (\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n)$, $A(\psi) = J\Gamma(\psi)$, где $\Gamma(\psi)$ — симметрическая матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ и функция Гамильтона $\gamma = \dfrac{1}{2}\langle\boldsymbol{\zeta},\Gamma(\psi)\boldsymbol{\zeta}\rangle$. Здесь E_n — единичная $n \times n$-матрица и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Если преобразование (1.2) каноническое, т. е.

$$B^*(\psi)JB(\psi) = \delta J, \quad \delta = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

(звёздочка — символ транспонирования матрицы), то система (1.3) также гамильтонова с функцией Гамильтона

$$g = \frac{1}{2\delta}\langle\mathbf{z},B^*\Gamma B\mathbf{z}\rangle + \frac{1}{2\delta}\left\langle\mathbf{z},B^*J\frac{dB}{d\psi}\mathbf{z}\right\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\langle\mathbf{z},G\mathbf{z}\rangle, \tag{1.6}$$

т. е. $G = \delta^{-1}B^*\Gamma B + \delta^{-1}B^*JdB/d\psi$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Рассмотрим теперь систему Гамильтона (1.4), в которой матрица $A(\psi) = J\Gamma(\psi)$ имеет по ψ период 2π, т. е. $A(\psi+2\pi) = A(\psi)$. Посредством линейной канонической замены координат (1.2), (1.5) с 2π-периодической матрицей $B(\psi)$ постараемся получить гамильтониан (1.6) наиболее простого вида. Пусть $\underset{\sim}{Z}(\psi)$ — фундаментальная матрица решений системы (1.1). Тогда

$$\underset{\sim}{Z}(\psi+2\pi) = \underset{\sim}{Z}(\psi)N,$$

где N — постоянная матрица, $\det N \neq 0$. Для системы Гамильтона она каноническая.

Если для матрицы N существует представление

$$N = \exp(2\pi JL), \tag{1.7}$$

где L — постоянная симметрическая матрица, то, согласно § 1. гл. I, книги [1] $L = B_1^*GB_1$, где B_1 — постоянная каноническая матрица и G — нормальная форма матрицы L. Таким образом, преобразование (1.2) с $B(\psi) = \underset{\sim}{Z}(\psi)\exp(-\psi JG)$ приводит систему Гамильтона (1.4) к нормальной форме

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi} = JG\mathbf{z}, \quad G = \mathrm{const}, \tag{1.8}$$

с функцией Гамильтона $g = \dfrac{1}{2}\langle\mathbf{z},G\mathbf{z}\rangle$. Однако представление (1.7) имеется не для всякой канонической матрицы N (см. Вильямсон [3]).

Пусть $\nu_1,\dots,\nu_{2n}$ — собственные числа канонической матрицы N. Вместе с числом $\nu_j = b$ среди них есть и число b^{-1}. Более того, элементарные делители матрицы $\nu E - N$ обладают следующими свойствами:

- если $b \neq \pm 1$ и имеется ровно k элементарных делителей $(\nu - b)^l$, то имеется ровно k элементарных делителей $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$;
- если $b = \pm 1$ и l нечётно, то элементарный делитель $(\nu - b)^l$ встречается чётное число раз.

1.2. Комплексная нормальная форма. Для комплексной системы (1.1) матрица N — комплексная. Неприводимые над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ элементарные делители матрицы $\nu E - N$ относятся к одному из следующих четырёх случаев:

C1) $(\nu - b)^l$ и $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$, $b \neq \pm 1$;
C2) $(\nu - b)^l$ и $(\nu - b)^l$, $b = \pm 1$, l — нечётное;
C3) $(\nu - 1)^{2l}$;
C4) $(\nu + 1)^{2l}$.

Посредством 2π-периодической канонической замены координат матрицу $\Gamma(\psi)$ можно привести к такому блочному виду, что каждому из перечисленных случаев отвечает своя четвёрка блоков порядка l, а вне блоков стоят нули. Поэтому достаточно рассмотреть каждый из этих случаев в предположении $l = n$.

В случаях C1) – C3) существует представление (1.7); при этом элементарные делители $(\lambda - a)^l$ матрицы $\lambda E - JL$ относятся к случаям C1) – C3) п. 1.Б гл. I книги [1], где

$$a = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Ln} b = \frac{1}{2\pi} \ln |b| + \frac{i}{2\pi} \arg b + im$$

и m — любое целое число; а именно;

- в случае C1)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ C & 0 \end{pmatrix}\;, \tag{1.9}$$

где C — жорданова клетка порядка l

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon & a \end{pmatrix},$$

т. е.

$$g_2 = a\sum_{j=1}^{l} x_j y_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1}\ ;$$

- случай C2) с $b = 1$ относится к случаю C1) с $a = im$;
- случай C2) с $b = -1$ относится к случаю C1) с $a = im + \dfrac{i}{2}$;
- в случае C3)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ C & \sigma\Delta \end{pmatrix},$$

где C — жорданова клетка порядка l с $a = 0$, $\sigma = \pm 1$ и диагональная матрица $\Delta = \{1{,}0, \dots ,0\}$, т. е.

$$g_2 = \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} + \frac{1}{2}\sigma y_1^2\ ;$$

- в случае C4) представления (1.7) нет и комплексная нормальная форма $\dfrac{d\mathbf{z}}{d\psi} = JG(\psi)\mathbf{z}$ имеет

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ C & \sigma\Delta\exp(i\psi) \end{pmatrix},$$

где C — жорданова клетка порядка l с $a = im + \dfrac{i}{2}$, $\sigma = \pm 1$.

Рассмотрим теперь удвоенные случаи C3) и C4).

C3*) Двум элементарным делителям $(\nu-1)^{2l'}$ и $(\nu-1)^{2l'}$ можно поставить в соответствие нормальную форму (1.8) случая C2) с $a=im$ и произвольным целым m (только теперь $l=2l'$ — чётно).

C4*) Двум элементарным делителям $(\nu+1)^{2l'}$ и $(\nu+1)^{2l'}$ можно поставить в соответствие нормальную форму случая C1) с $a=(2\pi)^{-1}\operatorname{Ln}(-1)=im+\dfrac{i}{2}$.

Итак, посредством комплексной замены (1.2), где $B(\psi)$ — каноническая 2π-периодическая матрица, система (1.4) приводится к системе с постоянными коэффициентами, если каждый элементарный делитель вида $(\nu+1)^{2l}$ встречается чётное число раз среди элементарных делителей матрицы $\nu E-N$. Вильямсон [3, теорема 1] доказал, что это условие не только достаточно, но и необходимо для комплексной приводимости.

1.3. Вещественные системы. Для вещественной системы (1.4) матрица N является вещественной. Поэтому элементарные делители матрицы $\nu E-N$ обладают следующими свойствами. Пусть элементарный делитель $(\nu-b)^l$ имеется точно k раз.

- Если число b комплексное, т. е. $\operatorname{Re} b\cdot\operatorname{Im} b\neq 0$, и $|b|\neq 1$, то элементарные делители $\left(\nu-\bar b\right)^l$, $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$ и $\left(\nu-\bar b^{-1}\right)^l$ также имеются точно k раз.
- Если число b вещественное или единичного модуля, $b\neq\pm1$, то $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$ имеется точно k раз.
- Если $b=\pm1$ и l нечётно, то k должно быть чётным.

Поэтому элементарные делители матрицы $\nu E-N$ относятся к одному из следующих восьми случаев:

R1) $(\nu-b)^l\left(\nu-\bar b\right)^l$ и $\left(\nu-b^{-1}\right)^l\left(v-\bar b^{-1}\right)^l$, $b\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} b\cdot\operatorname{Im} b\neq 0$, $|b|\neq 1$;

R2) $(\nu-b)^l$ и $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$, $b\in\mathbb{R}$, $b>0$, $b\neq 1$;

R3) $(\nu-b)^l\left(\nu-\bar b\right)^l$, $|b|=1$, $b\neq\pm1$;

R4) $(\nu-1)^l$ и $(\nu-1)^l$, l — нечётно;

R5) $(\nu-1)^{2l}$;

R6) $(\nu+1)^l$ и $(\nu+1)^l$, l — нечётно;

R7) $(\nu-b)^l$ и $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$, $b\in\mathbb{R}$, $b<0$, $b\neq -1$;

R8) $(\nu+1)^{2l}$.

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение.

Посредством вещественной 2π-периодической канонической замены координат матрицу $\Gamma(\psi)$ можно привести к такому блочному виду, что каждому из перечисленных случаев отвечает своя группа блоков, а вне этих блоков стоят нули. Поэтому достаточно рассмотреть каждый из этих случаев в предположении, что он исчерпывает матрицу N. В случаях R1) – R5) существует представление (1.7) с вещественной матрицей L; при этом элементарные делители $(\lambda - a)^l$ матрицы $\lambda E - JL$ относятся к случаям R1) – R5) п. 1.В гл. I книги [1] соответственно, где $a = \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{Ln} b = \dfrac{1}{2\pi}\ln b + im$. В случаях R1), R3), R4) число m — любое целое и $m = 0$ в случаях R2) и R5). При этом в случаях R3) и R5) имеется дополнительный вещественных инвариант $\sigma = \pm 1$.

В случаях R6) и R7) имеется представление (1.7) с постоянной комплексной матрицей G вида (1.9), где

$$a = \frac{1}{2\pi}\ln|b| + \frac{i}{2} + im$$

в случае R7) и $a = \dfrac{i}{2} + im$ в случае R6). Итак, в случаях R1) – R7) имеется постоянная комплексная нормальная форма

$$g_2 = \frac{1}{2}\langle \mathbf{z}, G\mathbf{z}\rangle, \tag{1.10}$$

которая переводится в вещественную нормальную форму

$$f_2 = \frac{1}{2}\langle \mathbf{Z}, F\mathbf{Z}\rangle \tag{1.11}$$

с помощью стандартного канонического преобразования

$$\mathbf{Z} = Q\mathbf{z}, \quad \det Q = 1. \tag{1.12}$$

Гипотеза 1. *Для вещественной гамильтоновой системы* (1.4) *случай* R8) *невозможен.*

Итак, для вещественной линейной периодической системы Гамильтона нормальная форма всегда является линейной системой с постоянными коэффициентами.

Её комплексная запись (1.10) связана с вещественной записью (1.11) стандартным преобразованием (1.12). При этом подстановка

$$\overline{\mathbf{z}} = P\mathbf{z}, \tag{1.13}$$

где $2n$-матрица $P = \overline{Q}^{-1}Q$, сохраняет гамильтониан. Конкретный вид матриц Q и P для каждого из случаев R1) – R7) описан в главе I книги [1].

2. Нелинейная нормальная форма

2.1. Нелинейная нормализация. Рассмотрим систему Гамильтона с n степенями свободы

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1,\dots,n\ , \tag{2.1}$$

где γ — степенной ряд по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ с 2π-периодическими по ψ коэффициентами, который разлагается в сходящийся ряд Пуассона

$$\gamma = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},m} \gamma_{\mathbf{pq}m}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} \exp(im\psi), \tag{2.2}$$

начинающийся с квадратичных членов g_2 по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$. Здесь $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1,\dots,q_n)$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} = \xi_1^{p_1}\cdots\xi_n^{p_n}$, $\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} = \eta_1^{q_1}\cdots\eta_n^{q_n}$, $\mathbf{p} \geqslant 0$, $\mathbf{q} \geqslant 0$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $m \in \mathbb{Z}$.

Сделаем комплексное линейное каноническое преобразование $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \longrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}$, которое 2π-периодично по ψ и приводит линейную часть системы (2.1) к комплексной нормальной форме (1.10). Тогда на главной диагонали матрицы JG стоят её собственные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n, -\lambda_1,\dots,-\lambda_n$. Обозначим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Гамильтониан (2.2) примет вид

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y},\psi) = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},m} g_{\mathbf{pq}m}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}} \exp(im\psi)\,. \tag{2.3}$$

Назовём его *комплексной нормальной формой,* если

1) его форма g_2 является нормальной формой (1.10),
2) в разложении (2.3) имеются только резонансные члены, для которых

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q},\boldsymbol{\lambda}\rangle + im = 0. \tag{2.4}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Теорема 2.1. *Для гамильтониана* (2.3) *существует формальная комплексная каноническая замена координат* $\mathbf{x},\mathbf{y},\psi \longrightarrow \mathbf{u},\mathbf{v},\varphi$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{w} + \mathbf{b}(\mathbf{w},\varphi),\ \psi = \varphi + b_{2n+1}(\mathbf{w},\varphi),\ \mathbf{w} = (\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

2π*-периодическая по* φ*, которая переводит гамильтониан* (2.3) *в нормальную форму*

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v},\varphi) = \sum h_{\mathbf{pq}m}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{q}} \exp(im\varphi) \tag{2.5}$$

со свойством (2.4).

Теорема 2.2. *Каноническое преобразование*

$$u_j = \tilde{u}_j \exp\left(-i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi\right), \quad v_j = \tilde{v}_j \exp\left(i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

приводит нормальную форму гамильтониана (2.5) *к постоянному степенному ряду*

$$\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{h}_0(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\tilde{h}_m(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{h}_{-m}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}})\right], \tag{2.6}$$

где

$$\tilde{h}_m = \sum \tilde{h}_{\mathbf{pq}m} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{q}}, \tag{2.7}$$

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \operatorname{Re} \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \operatorname{Im} \boldsymbol{\lambda} \rangle = -m, \tag{2.8}$$

$\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, m *целочисленны,* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geqslant 0$. *При этом* $\tilde{h}_{\mathbf{pq}m} = h_{\mathbf{pq}m}$, *если* $\|p\| + \|q\| \geqslant 3$, *квадратичные члены имеют вид*

$$\tilde{h}_2(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{w}, \widetilde{G} \mathbf{w} \right\rangle,$$

где матрица $J\widetilde{G} = JG - i \operatorname{Im} \boldsymbol{\Lambda}$ *с диагональной матрицей* $\boldsymbol{\Lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$ *и отсутствуют линейные члены по* $\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}$.

Для исходного вещественного гамильтониана (2.2) комплексные координаты $\mathbf{z}$ связаны с вещественными координатами $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ стандартным преобразованием (1.13), а координаты $\mathbf{w}$ и $\widetilde{\mathbf{w}}$ связаны этим же преобразованием с соответствующими вещественными координатами.

Таким образом, приходим к автономной системе Гамильтона с n степенями свободы.

2.2. Малые параметры. Пусть исходный гамильтониан разлагается в степенной ряд по малым параметрам $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$. По теореме 5.1 гл. I книги [1] при нормализующем преобразовании малые параметры не меняются. Поэтому получаем автономный гамильтониан (2.6), (2.7), (2.8), где коэффициенты $\tilde{h}_{\mathbf{p},\mathbf{q},m}$ суть степенные ряды по малым параметрам $\boldsymbol{\mu}$. При $\boldsymbol{\mu} = 0$ эти коэффициенты с $\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\| = 1$ равны нулю, а с $\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\| = 2$ соответствуют (2.8). Здесь $\|\mathbf{p}\| = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Но при $\boldsymbol{\mu} \neq 0$ это не обязательно.

Для системы, соответствующей гамильтониану (2.6), (2.7), (2.8), можно вычислить семейства неподвижных точек вблизи точки $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{v}} = 0$, $\boldsymbol{\mu} = 0$. Это делается с помощью степенной геометрии (книга [2]). Им соответствуют семейства периодических решений исходной периодической системы Гамильтона. Вообще укорочения функции Гамильтона и системы Гамильтона изучены в гл. IV книги [2]. Они не всегда совпадают.

2.3. Линейные канонические автоморфизмы. Пусть исходная система обладает линейным каноническим автоморфизмом

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^* \\ \boldsymbol{\eta}^* \end{pmatrix} ,$$

где D — матрица $2n \times 2n$, т. е.

$$\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\psi) = \gamma(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\eta}^*,\psi)\,.$$

Согласно теореме 2.3 гл. I книги [1] приведённая нормальная форма (2.6), (2.7), (2.8) также обладает соответствующим линейным каноническим автоморфизмом. Впрочем, она может иметь дополнительные автоморфизмы, которые не имеют соответствия в исходной системе.

3. Пример

Пусть число степеней свободы $n = 2$, система (2.1) аналитически зависит от s малых параметров $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots ,\mu_s)$, имеет автоморфизм $\boldsymbol{\zeta} \to -\boldsymbol{\zeta}$ и при $\boldsymbol{\mu} = 0$ собственные числа линейной части системы суть $\pm i, \pm \dfrac{i}{2}$. Тогда в приведённой нормальной форме (2.6), (2.7), (2.8), опуская тильды, получаем

$$h(u_1,u_2,v_1,v_2) = \sum h_{p_1p_2q_1q_2m} u_1^{p_1} u_2^{p_2} v_1^{q_1} v_2^{q_2}\,, \tag{3.1}$$

где

$$(p_1 - q_1) + \sigma(p_2 - q_2)/2 = -m, \quad \sigma = \pm 1,$$

ибо $\operatorname{Im} \boldsymbol{\lambda} = \left(1,\dfrac{\sigma}{2}\right)$. Следовательно,

$$\tilde{h} = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{k1} u_1^k + g_{k1} v_1^k + f_{k2} u_2^{2k} + g_{k2} v_2^{2k} \right)\,, \tag{3.2}$$

где h_0,f_{kr} и g_{kr} суть ряды по $\boldsymbol{\mu}$ и при $\boldsymbol{\mu} = 0$ квадратичная часть ряда h по u_1,u_2,v_1,v_2, отсутствует. При этом в разложении (3.1) имеются только члены с чётными степенями $p_1 + p_2 + q_1 + q_2$, ибо нормальная форма сохраняет автоморфизм $\mathbf{u},\mathbf{v} \to -\mathbf{u}, -\mathbf{v}$.

Первое приближение $\hat{h}$ гамильтониана (3.1), (3.2) состоит из членов четвёртой степени невозмущённого гамильтониана

$$h_{40} = \alpha(u_1v_1)^2 + \beta u_1v_1u_2v_2 + \gamma(u_2v_2)^2, \quad \alpha,\beta,\gamma = \mathrm{const},$$

и квадратичных членов при малых параметрах $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$.

$$h_{21} = \sum_{j=1}^{s} \mu_j \left(A_j u_1^2 + B_j u_1 v_1 + C_j v_1^2 + a_j u_2^2 + b_j u_2 v_2 + c_j v_2^2 \right),$$

где все $A_j, B_j, C_j, a_j, b_j, c_j = \mathrm{const}$.

Неподвижные точки u_1, v_1, u_2, v_2 системы с укороченным гамильтонианом $\hat{h} = h_{04} + h_{12}$ удовлетворяют системе $\hat{h}_{u_1} = \hat{h}_{v_1} = \hat{h}_{u_2} = \hat{h}_{v_2} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \hat{h}_{u_1} &= 2\alpha u_1 v_1^2 + \beta v_1 u_2 v_2 + \sum \mu_j (2A_j u_1 + B_j v_1) = 0, \\ \hat{h}_{v_1} &= 2\alpha u_1^2 v_1 + \beta u_1 u_2 v_2 + \sum \mu_j (B_j u_1 + 2C_j v_1) = 0, \\ \hat{h}_{u_2} &= \beta u_1 v_1 v_2 + 2\gamma u_2 v_2^2 + \sum \mu_j (2a_j u_2 + b_j v_2) = 0, \\ \hat{h}_{v_2} &= \beta u_1 v_1 v_2 + 2\gamma u_2^2 v_2 + \sum \mu_j (b_j u_2 + 2c_j v_2) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Умножая эти уравнения на u_1 (первое), v_1 (второе), u_2 (третье), v_2 (четвёртое) и сравнивая полученные уравнения первое со вторым и третье с четвёртым, получаем равенства

$$\left(\sum \mu_j 2A_j\right) u_1^2 = \left(\sum \mu_j 2C_j\right) v_1^2,$$

$$\left(\sum \mu_j 2a_j\right) u_2^2 = \left(\sum \mu_j 2c_j\right) v_2^2.$$

Из них следует, что

$$\sqrt{\sum \mu_j A_j}\, u_1 = \pm \sqrt{\sum \mu_j C_j}\, v_1,$$

$$\sqrt{\sum \mu_j a_j}\, u_2 = \pm \sqrt{\sum \mu_j c_j}\, v_2.$$

Обозначим

$$A^* = \sum \mu_j A_j, \quad B^* = \sum \mu_j B_j, \quad C^* = \sum \mu_j C_j,$$

$$a^* = \sum \mu_j a_j, \quad b^* = \sum \mu_j b_j, \quad c^* = \sum \mu_j c_j.$$

Тогда решения системы (3.3) суть

$$1)\, u_1v_1 = u_2v_2 = 0,$$

$$2)\, u_1v_1 = 0,\, u_2v_2 = -\frac{1}{2\gamma}\left(b^* \pm 2\sqrt{a^*c^*}\right),$$

$$3)\, u_2v_2 = 0,\, u_1v_1 = -\frac{1}{2\alpha}\left(B^* \pm 2\sqrt{A^*C^*}\right),$$

$$4)\, u_1v_1 = \frac{1}{\Delta}\left[\beta\left(b^* + 2\varepsilon\sqrt{a^*c^*}\right) - 2\gamma\left(B^* + 2\delta\sqrt{A^*C^*}\right)\right],$$

$$u_2v_2 = \frac{1}{\Delta}\left[\beta\left(B^* + 2\delta\sqrt{A^*C^*}\right) - 2\alpha\left(b^* + 2\varepsilon\sqrt{a^*c^*}\right)\right],$$

где $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2$, $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$. Всего 9 решений.

Переход от комплексных координат $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ к вещественным $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ даётся преобразованием

$$\begin{pmatrix} u_l \\ v_l \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_l \\ Y_l \end{pmatrix}, \quad l = 1{,}2.$$

Для исходного вещественного гамильтониана константы таковы:

$$\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\, \mu_j \in \mathbb{R},\, \operatorname{Re} B_j = \operatorname{Re} b_j = 0,\, C_j = -\overline{A}_j,\, c_j = -\bar{a}_j, \quad j = 1,\ldots,s,$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. При этом

$$u_lv_l = i\rho_l = \frac{1}{2i}\left(X_l^2 + Y_l^2\right),\, l = 1{,}2,\, \operatorname{Re} B^* = \operatorname{Re} b^* = 0,\, C^* = -A^*,\, c^* = -a^*,$$

и решения 1) — 4) имеют вид

$$1)\, \rho_1 = \rho_2 = 0\,,$$

$$2)\, \rho_1 = 0,\, \rho_2 = -\frac{1}{2\gamma i}\left(b^* \pm 2\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right),$$

$$3)\, \rho_2 = 0,\, \rho_1 = -\frac{1}{2\alpha i}\left(B^* \pm 2\sqrt{-A^*\overline{A}^*}\right),$$

4) ρ_1 и ρ_2 — вещественные функции от $\boldsymbol{\mu}$.

Список литературы

[1] Брюно А.Д. Ограниченная задача трёх тел. М.: Наука, 1990.

[2] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

[3] Williamson J. The exponential representation of canonical matrices // Amer. Math. J. 1939. Vol. 61, No 4. pp. 897–911.

Содержание