



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Ольховская О.Г.

Проекционно-сеточные  
схемы для аппроксимации  
уравнений в частных  
производных второго  
порядка на нерегулярных  
сетках

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ольховская О.Г. Проекционно-сеточные схемы для аппроксимации уравнений в частных производных второго порядка на нерегулярных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 226. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2018-226](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-226)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-226>

**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Российской академии наук**

**О. Г. Ольховская**

**Проекционно-сеточные схемы  
для аппроксимации уравнений  
в частных производных  
второго порядка  
на нерегулярных сетках**

**Москва — 2018**

*Ольховская О. Г.*

**Проекционно-сеточные схемы для аппроксимации уравнений в частных производных второго порядка на нерегулярных сетках**

Построено семейство проекционно-сеточных схем для аппроксимации уравнений в частных производных второго порядка с переменным коэффициентом в тензорной форме. Разработанные схемы обладают свойством консервативности и сохраняют свойство самосопряженности, присущее исходному дифференциальному оператору. Предложенные схемы предназначены для выполнения расчетов на трехмерных нерегулярных разностных сетках, в том числе тетраэдральных, смешанных (сетках произвольных многогранников) и локально-адаптивных (типа восьмеричное дерево).

**Ключевые слова:** проекционно-сеточная схема, нерегулярная сетка, локально-адаптивная сетка, консервативность, самосопряженность

*Olga Gourgenovna Olkhovskaya*

**Grid-projection schemes for approximation of the second order partial differential equations on irregular computational meshes**

A family of grid-projection schemes was constructed for approximation of the second order partial differential equations with a variable coefficient in tensor form. The developed schemes have the property of conservativeness and retain the property of self-adjointness inherent to the original differential operator. The proposed schemes are designed to perform calculations on three-dimensional irregular computational meshes, including tetrahedral meshes, mixed meshes (meshes of arbitrary polyhedra) and AMR (oc-tree type).

**Key words:** grid-projection scheme, irregular computational mesh, AMR, conservativeness, self-adjointness

## 1. Введение

Проекционно-сеточные методы, основанные на сочетании вариационных методов (метод Ритца, метод Галеркина) и методов конечных элементов (специальный выбор базисных функций) [1], позволяют обосновать формализованную процедуру построения численной схемы с заданными свойствами при использовании расчетных сеток общего вида. Благодаря такой формализации эти методы удобны для программирования и используются во многих научных и коммерческих прикладных программах. Этим обусловлен интерес к указанным методам и большое количество посвященных им работ, обзор которых не входит в задачи данной публикации.

В настоящей работе предложено семейство проекционно-сеточных схем для аппроксимации уравнений в частных производных второго порядка. Рассматриваются линейные дифференциальные операторы в декартовых координатах  $(x, y, z)$  с переменным коэффициентом диффузии, зависящим от пространственных координат и от времени. В общем случае коэффициент представлен в форме тензора ранга 2, отражающей анизотропный характер моделируемых процессов. Такие постановки возникают, например, при расчете тепло- и электропроводности в замагниченной плазме [2], при решении самосопряженного уравнения для интенсивности излучения [3], при моделировании напряженно-деформированных состояний в композиционных материалах и в ряде других практически важных задач. В подобных задачах часто имеет место существенная пространственная разномасштабность, что может быть связано как с неоднородностью свойств среды и геометрии расчетной области, так и с возникающими особенностями решения. В этих случаях использование регулярной разностной сетки может быть нецелесообразным, а иногда и невозможным. Предложенные в данной работе схемы предназначены для выполнения расчетов на трехмерных пространственных сетках общего вида. В том числе специально обсуждается выбор базисных функций для сеток нерегулярной структуры из правильно примыкающих произвольных многогранников и локально-адаптивных сеток типа восьмеричное дерево.

Для организации мультифизических расчетов в областях сложной геометрической формы в ряде случаев бывает целесообразно работать с

сеточными величинами, отнесенными к ячейкам расчетной сетки (значения в центре тяжести или средние по трехмерной ячейке). При этом возникают определенные сложности с аппроксимацией вторых производных. Предложенный подход позволяет построить аппроксимации повышенного порядка точности для вторых производных, в том числе и смешанных, на компактном шаблоне, удобном для распределенных вычислений с использованием межпроцессорных обменов.

Сходимость численных методов существенным образом зависит от самосопряженности сеточных операторов и консервативности разностных схем. Разработанные схемы обладают свойством консервативности и сохраняют свойство самосопряженности, присущее исходному дифференциальному оператору.

## 2. Вариант метода Галеркина-Петрова с разрывными базисными функциями

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим построение схемы методом Галеркина с разрывными базисными функциями на примере начально-краевой задачи для модельного квазилинейного параболического уравнения

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} u + fu. \quad (1)$$

Здесь  $u = u(\vec{r}, t)$  – неизвестная функция,  $f = f(\vec{r}, t)$ ,  $c = c(\vec{r})$  – заданные функции,  $\kappa = \kappa(\vec{r}, t)$  – скалярный или тензорный коэффициент диффузии.

Решение уравнения (1) будем искать в области  $\Omega \times (t \in [0; T])$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma(\Omega)$  при начальных условиях  $u(\vec{r}, t = 0) = u_0(\vec{r})$  и граничных условиях  $u(\Gamma) = G(u)$ .

### 2.2. Дискретизация расчетной области

На расчетной области  $\Omega$  задана дискретизация  $\Omega_h = \{\omega_i\}$ . Ячейки  $\omega_i$  – правильно примыкающие многогранники с границами  $\gamma(\omega_i)$ . Для каждой ячейки  $\omega_i$  определен ее объем  $V_i$ . Будем обозначать  $\{\gamma_l\}$  множество граней расчетных ячеек. Каждая грань  $\gamma_l$  либо является общей для двух ячеек  $\omega_{i1}$  и  $\omega_{i2}$ , либо

принадлежит дискретизации границы  $\Gamma_h(\Omega_h)$  и в этом случае инцидентна только одной ячейке  $\omega_{il}$ . Грань представляет собой многоугольник (в общем случае ограниченную кусочно-гладкой замкнутой линией часть поверхности, не обязательно плоской). Однако для любой грани должна быть определена ее площадь и направление нормали (в каждой точке или среднее для грани). Будем называть "ориентированной площадью грани  $\gamma_l$ " и обозначать  $\vec{S}_l$  вектор, модуль которого равен площади данной грани, а направление совпадает со средним направлением нормали к ней  $\vec{S}_l = \int_{\gamma_l} d\vec{s}$ .

Будем также рассматривать множества ребер  $\{e_n\}$  и узлов  $\{p_m\}$  сетки  $\Omega_h$  и обозначать  $In\langle a \rangle \langle b \rangle (i)$  множества сеточных элементов размерности  $\langle b \rangle$ , инцидентных элементу размерности  $\langle a \rangle$  с номером  $i$ , и  $N(In\langle a \rangle \langle b \rangle (i))$  – мощность соответствующего множества, т.е. количество элементов размерности  $\langle b \rangle$ , инцидентных элементу размерности  $\langle a \rangle$  с номером  $i$ .

Для характеристики подробности сетки для каждой ячейки  $\omega_i$  определим ее линейный размер  $h_i$  (это может быть  $\sqrt[3]{V_i}$ , диаметр ячейки, диаметр грани, длина ребра или наибольшее из этих чисел). Назовем шагом сетки  $h = \max_{\omega_i \in \Omega_h} (h_i)$ .

Сетка называется локально квазиравномерной, если существует не зависящая от  $h$  постоянная  $q > 0$ , такая, что  $\forall i \quad q \cdot h_i \leq \min_{k \in \delta(i)} (h_k)$ . Здесь  $\delta(i)$  – множество ячеек, соседних с  $\omega_i$  (имеющих с ней хотя бы один общий узел).

### 2.3. Построение проекционной схемы

Введем вспомогательную функцию  $\vec{v} = \text{grad}u$  и перепишем уравнение (1) в виде системы

$$\vec{v} = \text{grad}u \quad (2a) \quad (2)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \kappa \vec{v} + fu \quad (2b)$$

Для аппроксимации системы (2a-2b) построим два конечномерных пространства функций из  $L_2$ , определенных на  $\Omega_h$ :  $\Phi(\Omega_h)$  и  $\Psi(\Omega_h)$ , которые будем использовать для интерполяции функций  $\vec{v}$  и  $u$  соответственно:

$\vec{v}_\Phi = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \varphi_i$ ,  $u_\Psi = \sum_{i=1}^M u_i \psi_i$ . Для этого каждое из множеств функций

$\{\varphi_i, 0 < i \leq N\} \subset \Phi(\Omega_h)$  и  $\{\psi_i, 0 < i \leq M\} \subset \Psi(\Omega_h)$  должно образовывать базис и удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1; \quad \sum_{i=1}^M \psi_i = 1. \quad (3)$$

Эти же функции можно использовать в качестве проверочных при построении проекции уравнений (2а-2б) на область  $\Omega_h$ . Система (2а-2б) в слабой форме:

$$\forall \varphi \in \{\varphi_i\}, \quad \forall \psi \in \{\psi_i\}:$$

$$\int_{\Omega} \varphi \vec{v} dV = \int_{\Omega} \varphi \text{grad} u dV \quad (4а)$$

$$\int_{\Omega} \psi c \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_{\Omega} \psi \text{div} \kappa \vec{v} dV + \int_{\Omega} \psi f u dV \quad (4б)$$

В качестве базиса  $\{\psi_i\}$  для искомой функции  $u$  зафиксируем систему кусочно-постоянных на  $\omega_i$  функций

$$\psi_i(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in \omega_i \\ 0, & \vec{r} \notin \omega_i \end{cases} \quad (5)$$

и будем искать  $u$  в виде

$$u_h = \sum_{i=1}^M u_i \psi_i \quad (6)$$

Тогда  $\int_{\omega_i} u_h dV = u_i V_i$  и  $u_i$  является средним значением  $u_h$  в ячейке  $\omega_i$ .

Выбор базисных функций  $\{\varphi_i\}$  будет определять окончательный вид и свойства схемы: сеточный шаблон, порядок аппроксимации, свойства матрицы сеточного оператора и др.

## 2.4. Схема 1

Выберем в качестве базисных функций  $\{\varphi_k\}$  узловые функции формы для соответствующих многогранников (см., например, [4]), обладающие следующими свойствами:

$$\varphi_k(p_m) = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (7)$$

$\varphi_k$  отлична от 0 только в ячейках, содержащих узел  $p_k$ ,  $\varphi_k = 0$  во всех узлах, кроме узла  $p_k$ , где  $\varphi_k = 1$ .  $\int_{\omega_i} \sum_{k=1}^N \varphi_k dV = V_i$ , что следует из (3),

$$\int_{\omega_i} \varphi_k dV = \frac{1}{n_i} V_i, \quad n_i = N(\text{In}30(i)) - \text{число узлов ячейки } i. \quad (8)$$

Будем искать  $\vec{v}$  в виде

$$\vec{v}_h = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \varphi_k. \quad (9)$$

В соответствии с (7)  $\vec{v}_h(p_k) = \vec{v}_k$ , следовательно,  $\vec{v}_k$  можно интерпретировать как  $\text{grad}u$  в узле  $p_k$ . Функции  $\{\varphi_k\}$  непрерывны на  $\Omega_h$ , тем самым обеспечивается непрерывность функции  $\vec{v}_h$ .

Подставив (9) в (4а) и интегрируя правую часть по частям, получим для любого узла  $m$ ,  $0 < m \leq N$  ( $N$  – количество узлов сетки):

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \varphi_k \right) \varphi_m dV = \quad (10A)$$

$$- \int_{\Omega} u \cdot \text{grad}(\varphi_m) dV \quad (10B) \quad (10)$$

$$+ \int_{\Gamma(\Omega)} u \cdot \varphi_m d\vec{s} \quad (10C)$$

Рассмотрим каждый из членов (10A), (10B) и (10C).

$$(10A): \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \varphi_k \right) \varphi_m dV = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_m dV = \sum_k m_{mk} \vec{v}_k.$$

В последнем выражении суммирование выполняется по всем узлам  $k$ , принадлежащим ячейкам, содержащим узел  $p_m$ .

Из условий (3) и (8) следует  $\sum_k m_{mk} = \sum_{i \in \text{In}03(l)} \frac{1}{n_i} V_i = V(p_m)$ . Назовем  $V(p_m)$

"объемом узла  $p_m$ ".  $\sum_{m=1}^N V(p_m) = V(\Omega_h)$ , т.е. "объемы узлов" покрывают всю расчетную область.

Принимая во внимание, что на локально квазиравномерной сетке  $\vec{v}_k = \vec{v}_m + O(h)$  для соседних (входящих в шаблон  $m_{mk}$  из (10A)) узлов, к выражению (10A) можно применить процедуру диагонализации:



$$\sum_k m_{mk} \vec{v}_k = [\vec{v}_m + O(h)] \sum_k m_{mk} = [\vec{v}_m + O(h)] V(p_m).$$

$$(10B): -\int_{\Omega} u \cdot \text{grad}(\varphi_m) dV = -\sum_i u_i \int_{\Omega} \psi_i \cdot \text{grad}(\varphi_m) dV = -\sum_i u_i \int_{\omega_i} \text{grad}(\varphi_m) dV =$$

$$-\sum_i u_i \int_{\gamma(\omega_i)} \varphi_m d\vec{s} = -\sum_{i \in \text{In}03(m)} u_i \vec{S}_i(p_m).$$

Здесь суммирование выполняется по всем ячейкам  $i$ , содержащим узел  $p_m$ .

$\vec{S}_i(p_m)$  можно трактовать как "приузловую площадь узла  $p_m$  в ячейке  $i$ ":

$$\vec{S}_i(p_m) = \sum_{l \in \text{In}02(m) \cap \text{In}32(i)} \int_{\gamma_l} \varphi_m d\vec{s} = \sum_{l \in \text{In}02(m) \cap \text{In}32(i)} \frac{\vec{S}_l}{n_l}, \quad (11)$$

суммирование выполняется по всем граням  $l$  ячейки  $\omega_i$ , содержащим узел  $p_m$ ,  $n_l = N(\text{In}20(l))$  – число узлов грани  $l$ ,  $\vec{S}_l$  имеет направление внешней нормали для ячейки  $\omega_i$ .

Граничные условия учитываются в (10C).

$$(10C): \int_{\Gamma(\Omega)} u \cdot \varphi_m d\vec{s} \text{ отлично от } 0, \text{ только когда } p_m \in \gamma_l \subset \Gamma_h(\Omega_h).$$

Если на грани  $\gamma_l$  задано условие Дирихле:  $u(\gamma_l) = (u_{\Gamma})_l$ , (10C) приобретает вид

$$\sum_{l \in \text{In}02(m) \cap \Gamma_h(\Omega_h)} u_l \vec{S}_l(p_m), \text{ где } \vec{S}_l(p_m) = \int_{\gamma_l} \varphi_m d\vec{s} \text{ (например, } \vec{S}_l(p_m) = \frac{\vec{S}_l}{n_l}), u_l = \frac{\int_{\gamma_l} u_{\Gamma} \cdot \varphi_m ds}{|\vec{S}_l(p_m)|}$$

– среднее значение  $u_{\Gamma}$  на грани  $l$ . Если  $(u_{\Gamma})_l$  на грани  $l$  не зависит от координат,  $u_l = (u_{\Gamma})_l$ . Здесь суммирование выполняется только по граничным граням,  $\vec{S}_l$  имеет направление внешней нормали для приграничной ячейки.

Таким образом, имеем для  $\forall m, 0 < m \leq N$ :

$$\vec{v}_m = \frac{1}{V(p_m)} \left( \sum_{l \in \text{In}02(m) \cap \Gamma_h(\Omega_h)} u_l \vec{S}_l(p_m) - \sum_{j \in \text{In}03(m)} u_j \vec{S}_j(p_m) \right), \quad (12)$$

для внутренних узлов и для граничных узлов, в которых задано условие Дирихле.

Если в узле  $p_m$  задано условие Неймана, вместо уравнения (12) имеем

$$\vec{v}_m = (\vec{v}_{\Gamma})_m.$$

Подставим в (4б)  $u$  и  $\vec{v}$  в форме (6) и (9) соответственно.

$$\int_{\Omega} C \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^N u_k \psi_k \right) \psi_i dV = \quad (13A)$$

$$= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\kappa \sum_k \vec{v}_k \varphi_k) \psi_i dV + \quad (13B) \quad (13)$$

$$+ \int_{\Omega} f \left( \sum_{k=1}^N u_k \psi_k \right) \psi_i dV. \quad (13C)$$

Рассмотрим каждый из членов (13A), (13B) и (13C).

$$(13A): \int_{\Omega} C \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^N u_k \psi_k \right) \psi_i dV = \frac{\partial u_i}{\partial t} \int_{\omega_i} C dV = C_i V_i \frac{\partial u_i}{\partial t},$$

$$\int_{\omega_i} C dV$$

где  $C_i = \frac{\omega_i}{V_i}$  – среднее значение  $C$  в ячейке  $\omega_i$ .

$$(13B): \int_{\Omega} \operatorname{div}(\kappa \sum_k \vec{v}_k \varphi_k) \psi_i dV = \sum_{k \in \ln 30(i)} \int_{\omega_i} \operatorname{div}(\kappa \vec{v}_k \varphi_k) dV =$$

$$= \sum_{k \in \ln 30(i)} \vec{v}_k \int_{\gamma(\omega_i)} \kappa \varphi_k d\vec{s} = \sum_{k \in \ln 30(i)} \vec{v}_k \kappa_k \vec{S}_i(p_k).$$

Здесь  $\kappa_k$  – среднее значение коэффициента  $\kappa$  в узле  $p_k$ . При определении  $\kappa_k$  должно быть учтено условие непрерывности функции  $u$ , если такое условие следует из физической постановки задачи. Например, в случае решения уравнения теплопроводности, это может быть значение  $\kappa$ , соответствующее среднему значению температуры в ячейках, инцидентных узлу  $p_k$ . Чтобы сеточный аналог оператора  $\langle \operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} u \rangle$  сохранял свойство самосопряженности,  $\kappa_k$  должно быть одинаковым для всех ячеек, инцидентных узлу  $p_k$ . Подставляя выражение (12) для  $\vec{v}_k$ , получим с учетом сделанных выше замечаний о граничных условиях

$$(13B): \sum_{k \in \ln 30(i)} \vec{v}_k \kappa_k \vec{S}_i(p_k) = - \sum_{k \in \ln 30(i)} \sum_{j \in \ln 03(k)} u_j \frac{\vec{S}_j(p_k) \kappa_k \vec{S}_i(p_k)}{V(p_k)}.$$

Здесь суммирование выполняется по всем ячейкам, имеющим общий узел с ячейкой  $i$ .

$$(13C): \int_{\Omega} f \left( \sum_{k=1}^N u_k \psi_k \right) \psi_i dV = u_i \int_{\omega_i} f dV = f_i u_i V_i, \quad \text{где } f_i = \frac{\int_{\omega_i} f dV}{V_i} \quad - \text{ среднее}$$

значение  $f$  в ячейке  $\omega_i$ .

Окончательно для каждой ячейки  $\{\omega_i\}$ ,  $0 < i \leq M$  ( $M$  – количество ячеек сетки) получим:

$$C_i V_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \sum_{k \in \text{In}30(i)} \sum_{j \in \text{In}03(k)} u_j \frac{\vec{S}_j(p_k) \kappa_k \vec{S}_i(p_k)}{V(p_k)} + f_i u_i V_i. \quad (14)$$

На регулярных сетках однородных элементов схема (14) аппроксимирует уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$  с погрешностью порядка  $O(h^2)$ .

В схеме (14) сеточный шаблон оператора  $\mathbf{A}$  для ячейки  $\omega_i$  включает все ячейки, имеющие с нею общий узел, и может состоять из нескольких десятков ячеек (например, на тетраэдральной сетке). Вариант схемы, приводящий к более компактному шаблону, можно построить, выбрав другую систему базисных функций  $\{\varphi_k\}$ .

## 2.5. Схема 2

Определим базисные функции  $\{\varphi_k\}$  следующим образом:

$$\varphi_k(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in \gamma_k \\ 0, & \vec{r} \in \gamma_l, \quad l \neq k \\ 0, & \vec{r} \in \omega_i, \quad \gamma_k \notin \omega_i \end{cases} \quad (15)$$

Т.е.  $\varphi_k$  отлична от 0 только в ячейках, содержащих грань  $\gamma_k$ ,  $\varphi_k = 0$  на всех гранях, кроме грани  $\gamma_k$ , где  $\varphi_k = 1$ .

Из условия (3) следует  $\int_{\omega_i} \sum_{k=1}^N \varphi_k dV = V_i$ , из определения (15) –

$$\int_{\omega_i} \sum_{k=1}^N \varphi_k dV = \sum_{k \in \text{In}32(i)} \int_{\omega_i} \varphi_k dV \quad (\text{в сумму входят только те ячейки, где } \varphi_k \neq 0).$$

Представим последний интеграл в форме

$$\int_{\omega_i} \varphi_k dV = \alpha(i) V_i. \quad (16)$$

Если  $\alpha(i)$  не зависит от номера грани  $k$ , а только от номера ячейки  $i$ , получим  $\alpha(i) = \frac{1}{n_i}$ ,  $n_i = N(\text{In}32(i))$  – число граней ячейки  $i$ .

Например, в кубической ячейке кусочно-постоянную функцию с такими свойствами можно построить следующим образом:  $\varphi_k = 1$  внутри и на гранях пирамиды рис. 1, имеющей основанием грань  $k$ , а вершиной – центр тяжести куба, и  $\varphi_k = 0$  вне этой пирамиды.

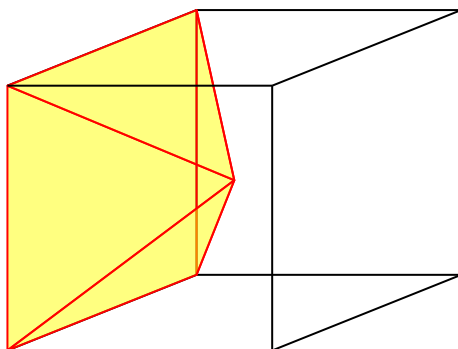


Рис. 1. К определению кусочно-постоянной базисной функции.

$$\text{Будем искать } \vec{v} \text{ в виде } \vec{v}_h = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \varphi_k. \quad (17)$$

В соответствии с (15)  $\vec{v}_h(\gamma_k) = \vec{v}_k$ , следовательно,  $\vec{v}_k$  можно интерпретировать как  $\text{grad}u$  на грани  $\gamma_k$ .

Подставив (17) в (4а) и интегрируя правую часть по частям, получим для любой грани  $l$ ,  $0 < l \leq N$  ( $N$  – количество граней сетки):

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \varphi_k \right) \varphi_l dV = \quad (18A)$$

$$= - \int_{\Omega} u \cdot \text{grad}(\varphi_l) dV + \quad (18B) \quad (18)$$

$$+ \int_{\Gamma(\Omega)} u \cdot \varphi_l d\vec{s}. \quad (18C)$$

Рассмотрим каждый из членов (18А), (18В) и (18С).

$$(18A): \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \varphi_k \right) \varphi_l dV = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_l dV = \sum_k m_{lk} \vec{v}_k.$$

В последнем выражении  $m_{lk} = \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_l dV$ ,  $k$  – все грани, соседние с гранью  $l$

по ячейкам, т.е. все грани, принадлежащие двум ячейкам, смежным по грани  $\gamma_l$ , или одной ячейке, если  $\gamma_l \subset \Gamma_h(\Omega_h)$ . Из условий (3) и (16) следует

$$\sum_k m_{lk} = m_{lk} = \int_{\Omega} \varphi_l \sum_k \varphi_k dV = \sum_{i \in \ln 23(l)} \alpha(i) V_i = V(\gamma_l).$$

Назовем  $V(\gamma_l)$  "объемом грани  $\gamma_l$ ". Если  $\alpha(i) = \frac{1}{n_i}$ , то  $\sum_{l=1}^N V(\gamma_l) = V(\Omega_h)$ , т.е.

"объемы граней" покрывают всю расчетную область.

Принимая во внимание, что на квазиравномерной сетке  $\vec{v}_k = \vec{v}_k + O(h)$  для соседних (входящих в шаблон  $m$  из (18А)) граней, к выражению (18А) можно применить процедуру диагонализации:

$$\sum_k m_{lk} \vec{v}_k = [\vec{v}_l + O(h)] \sum_k m_{lk} = [\vec{v}_l + O(h)] V(\gamma_l).$$

$$(18B): -\int_{\Omega} u \cdot \text{grad}(\varphi_l) dV = -\sum_i u_i \int_{\Omega} \psi_i \cdot \text{grad}(\varphi_l) dV = -\sum_i u_i \int_{\omega_i} \text{grad}(\varphi_l) dV =$$

$$-\sum_i u_i \int_{\gamma(\omega_i)} \varphi_l d\vec{s} = -\sum_{i \in \ln 23(l)} u_i \vec{S}_l = \vec{S}_l (u_{i2} - u_{i1}).$$

Здесь  $\omega_{i1}$  – та ячейка, для которой  $\vec{S}_l$  имеет направление внешней нормали, для  $\omega_{i2}$  – внутренней. Если  $\gamma_l \subset \Gamma_h(\Omega_h)$ ,  $\vec{S}_l$  имеет направление внешней нормали для приграничной ячейки  $\omega_{i1}$  и (18B) приобретает вид  $-u_{i1} \vec{S}_l$ .

Граничное условие учитывается в (18С).

$$(18C): \int_{\Gamma(\Omega)} u \cdot \varphi_l d\vec{s} \text{ отлично от } 0, \text{ только когда } \gamma_l \subset \Gamma_h(\Omega_h). \text{ Если на грани } \gamma_l$$

задано условие Дирихле:  $u(\gamma_l) = (u_{\Gamma})_l$ , (18С) приобретает вид  $(u_{\Gamma})_l \vec{S}_l$ , а

(18В)+(18С):  $\vec{S}_l (u_l - u_{i1})$ , где  $\vec{S}_l$  имеет направление внешней нормали для

приграничной ячейки  $\omega_{i1}$ , а  $u_l = \frac{1}{S_l} \int_{\gamma_l} u_{\Gamma} ds$  – среднее значение  $u$  на грани  $\gamma_l$ .

Таким образом, имеем для  $\forall l, 0 < l \leq N$  :

$$\vec{v}_l = \frac{\vec{S}_l}{V(\gamma_l)} (u_{i2} - u_{i1}), \quad (19)$$

где  $u_{i1}$  – значение в ячейке  $\omega_{i1}$ , для которой  $\vec{S}_l$  имеет направление внешней нормали,  $u_{i2}$  – значение в ячейке  $\omega_{i2}$ , для которой  $\vec{S}_l$  имеет направление внутренней нормали, (для внутренних граней  $\gamma_l$ ) либо  $u_{i2}=u_l$  (для граничных граней  $\gamma_l$ , на которых задано условие Дирихле). Если на  $\gamma_l$  задано условие Неймана, вместо уравнения (19) имеем  $\vec{v}_l = (\vec{v}_\Gamma)_l$ .

Подставим в (4б)  $u$  и  $\vec{v}$  в форме (6) и (17) соответственно.

$$\int_{\Omega} C \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^N u_k \psi_k \right) \psi_i dV = \quad (20A)$$

$$= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\kappa \sum_k \vec{v}_k \varphi_k) \psi_i dV + \quad (20B) \quad (20)$$

$$+ \int_{\Omega} f \left( \sum_{k=1}^N u_k \psi_k \right) \psi_i dV. \quad (20C)$$

Члены (20A) и (20C) совпадают с рассмотренными выше выражениями (12A) и (12C) соответственно, поэтому рассмотрим слагаемое (20B):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\kappa \sum_k \vec{v}_k \varphi_k) \psi_i dV = \sum_{k \in \ln 32(i)} \int_{\omega_i} \operatorname{div}(\kappa \vec{v}_k \varphi_k) dV = \sum_{k \in \ln 32(i)} \int_{\gamma(\omega_i)} \kappa \vec{v}_k \varphi_k d\vec{s} = \sum_{k \in \ln 32(i)} \kappa_k \vec{v}_k \vec{S}_k.$$

Здесь  $\kappa_k = \frac{\int_{\gamma_k} \kappa ds}{S(\gamma_k)}$  – среднее значение коэффициента  $\kappa$  на грани  $\gamma_k$ . Для него

справедливы ограничения, которые оговаривались в первом случае: для обеспечения самосопряженности сеточного оператора  $\kappa_k$  должно быть одинаковым для обеих ячеек, инцидентных грани  $\gamma_k$ , и при необходимости учитывать непрерывность функции  $u$ . Подставляя выражение (19) для  $\vec{v}_k$ , получим (с учетом сделанных выше замечаний о граничных условиях)

$$(20B): \quad \sum_{k \in \ln 32(i)} \frac{\vec{S}_k \kappa_k \vec{S}_k}{V(\gamma_k)} (u_{jk} - u_i).$$

Здесь  $jk$  – номер ячейки, смежной с ячейкой  $\omega_i$  по грани  $\gamma_k$ , либо номер грани, на которой задано условие Дирихле.

Окончательно для каждой ячейки сетки  $\{\omega_i\}$ ,  $0 < i \leq M$  ( $M$  – количество ячеек сетки), получим

$$C_i V_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k \in \ln 32(i)} \frac{\vec{S}_k \kappa_k \vec{S}_k}{V(\gamma_k)} (u_{jk} - u_i) + f_i u_i V_i. \quad (21)$$

До сих пор при построении и анализе проекционной схемы (21) не использовались данные о геометрии ячеек сетки. Все проведенные построения справедливы для произвольных многогранников. Однако эти сведения необходимы для исследования аппроксимации построенной схемы.

Выберем в качестве проверочных функций в уравнении (4а) вместо базисных функций  $\{\varphi_i\}$  систему функций  $\{\varphi_i^*\}$ , отличающихся от  $\{\varphi_i\}$  только нормировкой. Т.е. для функций  $\{\varphi_i^*\}$  выполняется условие (15), а в условии (16)

$\alpha(i,k) \neq \frac{1}{n_i}$ , при этом  $\alpha(i,k)$  может зависеть также от номера грани  $k$ . Очевидно,

что при этом сохраняются установленные выше свойства схемы (21). Нормировочный множитель  $\alpha(i,k)$ , зависящий от типа сеточных элементов, можно найти методом неопределенных коэффициентов из условия аппроксимации на регулярной сетке оператора Лапласа  $\Delta$  сеточным оператором (20В). При нахождении нормировочного множителя использовались приемы, развиваемые в теории дифференциального приближения разностных схем [5]. Для гексаэдральных ячеек, треугольных призм и тетраэдров получена формула для нормировочного множителя

$\alpha(i,k) = \frac{N(\text{In}20(k))}{N(\text{In}30(i))}$ , т.е. отношение количества узлов грани  $k$  к количеству

узлов ячейки  $i$ . На регулярных сетках прямоугольных параллелепипедов построенная схема представляет собой аналог разностной схемы "крест" и аппроксимирует уравнение Лапласа с погрешностью  $O(h^2)$ . На сетках треугольных призм и тетраэдров не удастся достичь второго порядка аппроксимации, в схеме присутствует схемная дисперсия порядка  $O(h)$ .

## 2.6. Общая формулировка

Аналогичным образом строятся проекционно-сеточные схемы для уравнений, содержащих операторы ( $\text{grad } \kappa \text{ div } \mathbf{u}$ ) и ( $\text{rot } \kappa \text{ rot } \mathbf{u}$ ).

Запишем уравнение (1) в обобщенной форме

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \bullet (\kappa \nabla \circ u) + fu, \quad (22)$$

где  $\bullet$  и  $\circ$  – бинарные операторы умножения вектора на число, скалярного или векторного произведения векторов,  $u$  – скалярная или векторная функция.

Комбинируя значения операторов  $\bullet$  и  $\circ$ , можно получить  $(\text{div } \kappa \text{ grad } u)$ ,  $(\text{grad } \kappa \text{ div } \mathbf{u})$  и  $(\text{rot } \kappa \text{ rot } \mathbf{u})$  в правой части (22). Вспомогательная функция  $v$  и система (2) запишутся в форме

$$\begin{cases} v = \nabla \circ u \\ c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \bullet \kappa v + fu \end{cases}$$

Используя описанные выше базисные функции (7) и (15) и соответствующие процедуры интегрирования, получим обобщенные формы записи итоговых схем.

### Схема 1

$$C_i V_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \sum_{k \in \text{In}30(i)} \sum_{j \in \text{In}03(k)} \vec{S}_j(p_k) \bullet \frac{\kappa_k \vec{S}_i(p_k)}{V(p_k)} \circ u_j + f_i u_i V_i. \quad (23)$$

### Схема 2

$$C_i V_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k \in \text{In}32(i)} \vec{S}_k \bullet \frac{\kappa_k \vec{S}_k}{V(\gamma_k)} \circ (u_{jk} - u_i) + f_i u_i V_i. \quad (24)$$

Данная форма записи была предложена Г. А. Багдасаровым [8].

## 2.7. Свойства схем

Рассмотрим свойства схем (23) и (24), положив для простоты  $f \equiv 0$  и представив их в матричной форме:

$$\mathbf{V} u_t = \mathbf{A} u.$$

Матрица  $\mathbf{V}$  – диагональная,  $V_{ii} > 0$ .

Матрица  $\mathbf{A}$  обладает следующими свойствами:

- 1) Матрица  $\mathbf{A}$  симметричная  $a_{ij} = a_{ji}$  при выборе коэффициента  $\kappa_k$  в соответствии с правилами, сформулированными в пп. 2.4 и 2.5 (в схеме (23)  $\kappa_k$  в узле одинаковый для всех ячеек, включающих данный узел, в схеме (24)  $\kappa_k$  на грани одинаковый для обеих ячеек, смежных по данной грани), сеточный оператор  $\mathbf{A}$  самосопряженный  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ , так же как исходный дифференциальный оператор  $\nabla \bullet (\kappa \nabla \circ u)$ .



- 2) Для строк, соответствующих внутренним ячейкам,  $\sum_{j \neq i} a_{ij} = |a_{ii}|$ ,  
 для строк, соответствующих приграничным ячейкам,  $\sum_{j \neq i} a_{ij} \leq |a_{ii}|$   
 в зависимости от граничного условия.  $\mathbf{A} \leq 0$ .  
 3) Для схемы (24) выполняется свойство  $a_{ii} < 0$ ,  $a_{ij} > 0$ .

Просуммируем схему (23) для уравнения теплопроводности по всем ячейкам сетки. Полагая  $C_i = (C_V \rho)_i$  не зависящим от времени, в левой части получим изменение внутренней энергии в расчетной области  $\frac{\partial E}{\partial t}$ . Второе слагаемое в правой части даст сумму источников тепла в объеме  $Q = \sum_i f_i V_i$ .

Поскольку для всех внутренних узлов  $p_k$  из определения (11) следует, что  $\vec{S}_i(p_k) = -\sum_{j \neq i} \vec{S}_j(p_k)$ , в первом слагаемом правой части останется только суммирование по границе области:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \sum_{k \in \Gamma(\Omega)} \sum_{j \in \text{In}03(k)} \frac{\vec{S}_j(p_k) \kappa_k \sum_i \vec{S}_i(p_k)}{V(p_k)} u_j + Q. \quad (25)$$

Напомним, что в случае неоднородного граничного условия в эту сумму входит также интеграл по границе (10С)  $\int_{\Gamma(\Omega)} u \cdot \varphi_m d\vec{s} = \sum_{l \in \Gamma_h(\Omega_h)} u_l \vec{S}_l(p_m)$ .

Выделяя в правой части (25)  $\vec{v} = \text{grad}u$  в форме (12)

$$\vec{v}_m = \frac{1}{V(p_m)} \left( \sum_{l \in \text{In}02(m) \cap \Gamma_h(\Omega_h)} u_l \vec{S}_l(p_m) - \sum_{j \in \text{In}03(m)} u_j \vec{S}_j(p_m) \right)$$

и имея в виду, что для граничных узлов  $\sum_i \vec{S}_i(p_k) = \sum_{l \in \text{In}02(k) \cap \Gamma_h(\Omega_h)} \vec{S}_l(p_k) = \vec{S}_\Gamma(p_k)$  – приузловая площадь

$$\text{границы, получим } \sum_{k \in \Gamma(\Omega)} \sum_{j \in \text{In}03(k)} \frac{\vec{S}_j(p_k) \kappa_k \sum_i \vec{S}_i(p_k)}{V(p_k)} u_j = \sum_{k \in \Gamma(\Omega)} \kappa_k \vec{v}_k \vec{S}_\Gamma(p_k).$$

Окончательно имеем закон сохранения энергии в форме

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \sum_{k \in \Gamma(\Omega)} \kappa_k (\text{grad}u)_k \cdot \vec{S}_\Gamma(p_k) + Q,$$

где первое слагаемое правой части аппроксимирует поток тепла через границу расчетной области согласно закону Фурье, второе – объемные источники тепла.

Таким же образом можно показать, что консервативность имеет место и для схемы (24).

### 3. Специальный выбор базисных функций для OСТREE-сеток

#### 3.1. Локально-адаптивные иерархические сетки

Рассматривается индексно-координатная сетка прямоугольных параллелепипедов, отдельные ячейки которой могут быть разделены координатными плоскостями симметрии на 8 ячеек следующего уровня. В этом случае имеет место также дробление граней (на 4 меньших грани по координатным осям симметрии) и ребер (пополам), а также появление новых узлов. Элементам исходной сетки приписывается уровень дробления 0, в результате дробления элемента уровня  $n$  получаются элементы уровня  $(n+1)$ . Не допускается соседство элементов, уровень дробления которых различается более чем на 1. Значения искомой функции (решение уравнения (1)) необходимо искать в нераздробленных ячейках сетки (им соответствуют листья восьмеричного дерева).

Очевидно, что такие сетки можно интерпретировать как частный случай описанной в п. 2.2 сетки общего вида  $\Omega_h$  и к ним применимы все построения пп. 2.3–2.5. Специфика построения схем рассмотренного семейства на иерархических сетках связана с выбором базисных функций  $\{\varphi_i\}$  и вычислением соответствующих коэффициентов  $V_k$  и  $\vec{S}_k$ . В дальнейших выкладках будем трактовать раздробленную грань (ребро) как совокупность граней (ребер) следующего уровня дробления и рассматривать отношения инцидентности и соседства применительно к этим порожденным элементам (т.е. отношения инцидентности и соседства, связывающие листья соответствующих деревьев).

### 3.2. Схема 1

В теории конечных элементов рассматриваются так называемые сирендиповы (в некоторых текстах "серендиповы") элементы, имеющие дополнительные узлы на ребрах и иногда на гранях. "Своим названием это семейство обязано принцам Сирендипским, прославившимся своими неожиданными открытиями" (Гораций Уолпол, 1754), [4]. В этой же книге отмечается, что "получить функции формы для элементов этого семейства достаточно трудно, и требуется некоторая изобретательность". В работах [4, 6] и многих других предложены способы построения базисных функций  $C^0$  гладкости для таких элементов с использованием произведения иерархических полиномиальных функций. В случае шестигранных элементов обычно применяется изопараметрическое преобразование, переводящее произвольный шестигранник в единичный координатный куб, и все построения выполняются для этого куба. В нашем случае, когда ячейка сетки представляет собой координатный параллелепипед, задача существенно упрощается.

Общий подход, развиваемый в [4, 6], состоит в том, что строится разбиение куба координатными плоскостями с образованием новых узлов, в том числе и внутренних, выписываются базисные функции соответствующей степени для всех вновь полученных узлов, а затем вводятся некоторые дополнительные соотношения, позволяющие исключить из интерполяции (9) "лишние" узлы (например, центр тяжести элемента и др.). Построенные таким образом функции по-прежнему удовлетворяют условиям (3) и (7), но могут не удовлетворять соотношению (8), т.е.  $\int_{\omega_i} \varphi_k dV$  может зависеть от локального номера узла  $p_k$  в ячейке  $\omega_i$ .

Имеется определенное сходство между заданным таким образом сирендиповым элементом и ячейкой, соседствующей с ячейками следующего уровня дробления, т.е. имеющей раздробленные грани и/или ребра. На таких гранях появляются дополнительные узлы в центре тяжести грани и на серединах ребер. Так, например, в [6] приведены базисные функции для шестигранного элемента, имеющего дополнительные узлы на серединах всех ребер, но не имеющего узлов в центрах граней (всего 20 узлов). Очевидно, что такой элемент соответствует ячейке, ни одна из граней которой не раздроблена,

а все ребра граничат с раздробленными ячейками так, как это показано на рис. 2 для ребра AA'.

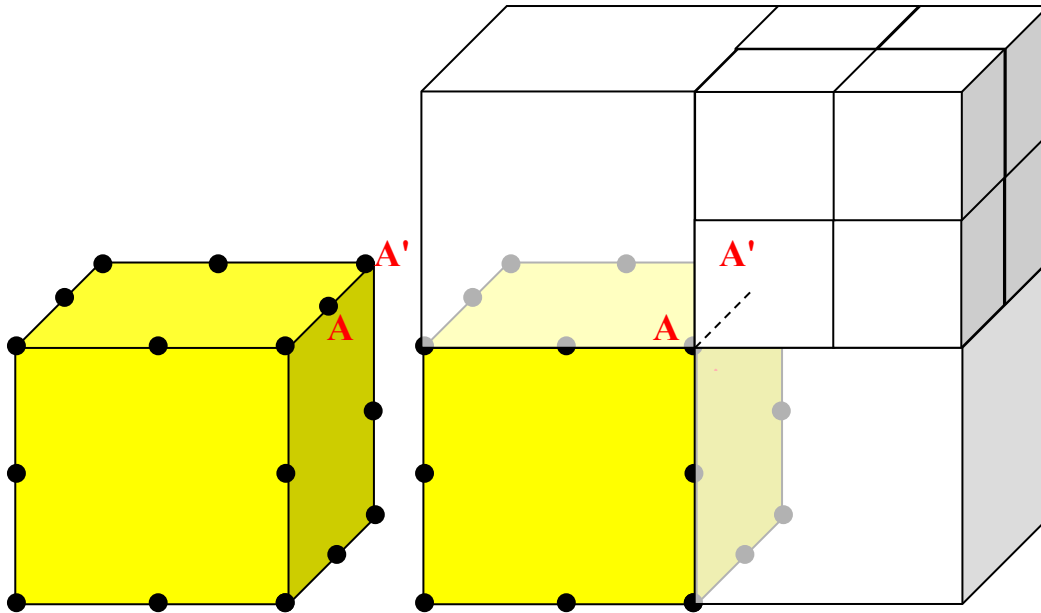


Рис. 2. Сирендипов элемент и ячейка octree сетки.

В общем случае отличие состоит в том, что узлы классических сирендиповых элементов, как правило, расположены симметрично, тогда как в результате локального дробления сетки могут возникать различные варианты расположения узлов на гранях и ребрах исходной ячейки. Все эти варианты были рассмотрены, построены соответствующие базисные функции и вычислены интегралы  $V_i(p_k) = \int_{\omega_i} \varphi_k dV$  ("приузловой объем") и  $\vec{S}_i(p_k) = \int_{\gamma(\omega_i)} \varphi_k d\vec{s}$  ("приузловая площадь"), которые используются в схеме (23).

*Замечание.* В данном разделе не допускаются конфигурации, когда ячейка уровня  $n$  смежна по ребру с ячейками уровня  $(n+2)$ , как это показано на рис. 3. При этом на ребре AA' могут появиться 2 или 3 новых узла. В принципе, такие базисные функции построить можно, но в настоящей работе они не рассматриваются. Ячейка уровня  $(n+2)$ , имеющая с ячейкой уровня  $n$  только один общий узел, допустима.

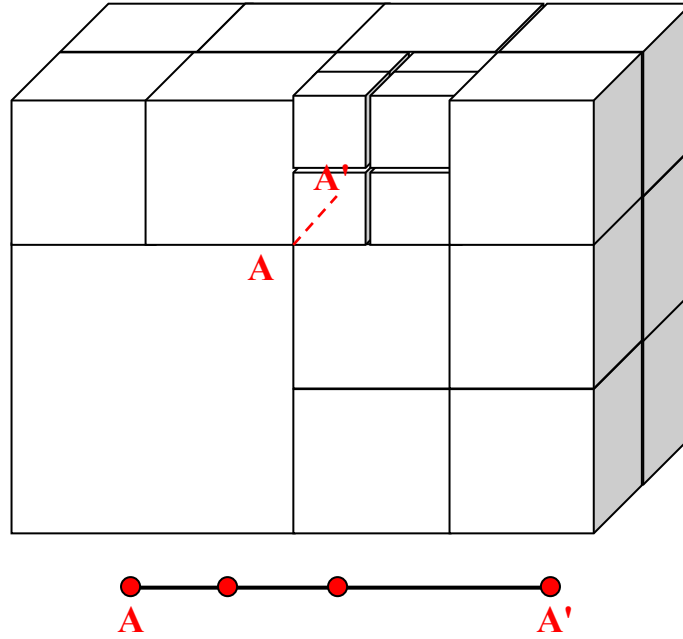


Рис. 3. Недопустимое соседство ячеек.

#### Вычисление приузлового объема

Вычисление  $V(p_k)$  из формулы (23) выполняется суммированием по всем ячейкам  $\omega_i$ , инцидентным узлу  $k$ :  $V(p_k) = \sum_{i \in In03(k)} V_i(p_k)$ . Ниже приведен

алгоритм вычисления  $V_i(p_k)$  в одной ячейке.

- 1)  $V^* = \frac{1}{26} V_i$ , где  $V_i$  – объем ячейки  $\omega_i$ .
- 2) Обход по всем узлам  $k$  ячейки  $\omega_i$ :  $k \in In30(i)$ .  
 $V_i(p_k) = V^*$  для всех узлов.
- 3) Обход по всем граням  $l$  ячейки  $\omega_i$ :  $l \in In32(i)$ .

Если уровень дробления грани  $l$  равен уровню дробления ячейки  $i$  (т.е. грань не раздроблена), для всех узлов  $In20(l)$  грани  $l$ :  $V_i(p_k) = V_i(p_k) + \frac{1}{8} V^*$ .

Если узел  $p_k$  принадлежит нескольким граням, удовлетворяющим этому условию,  $+\frac{1}{8} V^*$  прибавляется к  $V_i(p_k)$  на каждой такой грани.

- 4) Обход по всем ребрам  $g$  ячейки  $\omega_i$ :  $In31(i)$ .  
 Если уровень дробления ребра  $g$  равен уровню дробления ячейки  $i$  (т.е. ребро не раздроблено), для обоих узлов  $In10(g)$  ребра  $g$ :

$V_i(p_k) = V_i(p_k) + \frac{5}{8}V^*$ . Если узел  $p_k$  принадлежит нескольким ребрам, удовлетворяющим этому условию,  $+\frac{5}{8}V^*$  прибавляется к  $V_i(p_k)$  на каждом таком ребре.

Отметим, что, применив данный алгоритм к ячейке внутри однородного участка сетки, не имеющей раздробленных граней и ребер, получим для всех узлов такой ячейки  $V_i(p_k) = \frac{1}{8}V_i$  в соответствии с формулой (8).

#### *Вычисление приузловой площади*

Вычисление  $\vec{S}_i(p_k)$  из формулы (23) выполняется суммированием по всем граням ячейки  $\omega_i$ , инцидентным узлу  $k$ :  $\vec{S}_i(p_k) = \sum_{l \in \text{In}02(k) \cap \text{In}32(i)} \vec{S}_{lk}$ . Ниже описан способ вычисления  $\vec{S}_{lk}$  на одной грани.

Пусть вектор  $S^* = \frac{1}{16}\vec{S}_l$ , где  $\vec{S}_l$  – ориентированная площадь грани  $\gamma_l$ , ее направление соответствует внешней нормали для ячейки  $\omega_i$ . На рис. 4 показаны возможные варианты расположения узлов на грани  $\gamma_l$  и соответствующие им значения  $\vec{S}_{lk}$ .

*Замечание.* Напомним, что, если на грани присутствует центральный узел, это означает, что грань раздроблена и вместо нее в расчетах должны использоваться 4 грани следующего уровня дробления.

Общая формула выглядит следующим образом.

Пусть  $r_1$  и  $r_2$  – уровни дробления ребер грани  $\gamma_l$ , инцидентных узлу  $k$ ,  $r_{\min}$  – уровень дробления грани  $\gamma_l$ . В соответствии с оговоренными выше ограничениями  $r_1$  и  $r_2$  равны  $r_{\min}$  или  $(r_{\min}+1)$ . Определим  $r_1' = r_1 - r_{\min}$ ,  $r_2' = r_2 - r_{\min}$ . Тогда  $r_1', r_2' \in \{0, 1\}$  и  $\vec{S}_{lk} = \frac{(4 - r_1' - r_2')}{16}\vec{S}_l$ .

Отметим, что, применив данный алгоритм к грани, не имеющей раздробленных ребер (т.е. грани ячейки внутри однородного участка сетки, этому случаю соответствует левая верхняя схема на рис. 4), получим  $\vec{S}_{lk} = \frac{1}{4}\vec{S}_l$  в соответствии с формулой (11).

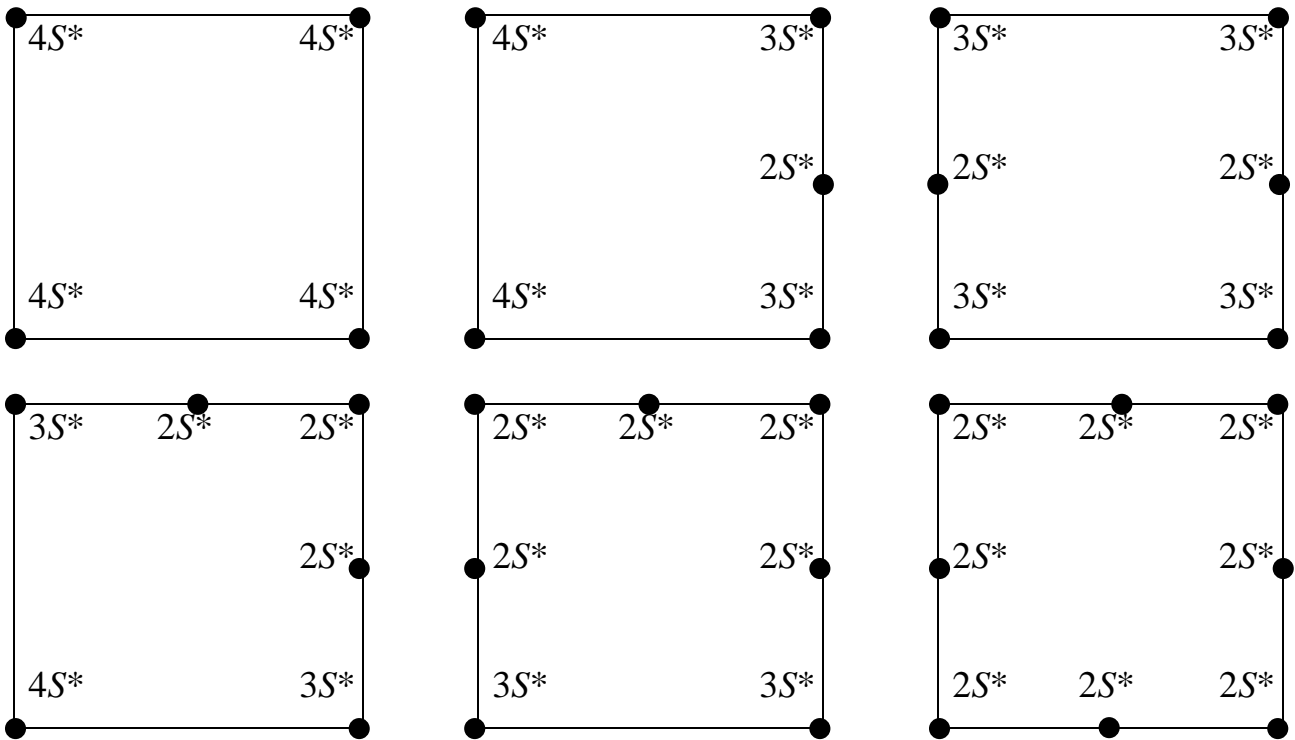


Рис. 4. Расположение узлов на грани.

### 3.3. Схема 2

В схеме (24) для локально-адаптивных сеток был использован тот же прием, что и в п. 2.5: вводился нормировочный множитель для проверочных функций  $\{\varphi_i^*\}$ , такой, что  $\int_{\omega_i} \varphi_k dV = \alpha(i,k)V_i$ . Из условия аппроксимации оператора Лапласа с погрешностью  $O(h^2)$  были найдены следующие значения нормировочного множителя:

$\alpha(i,k) = \frac{1}{2}$ , если грань  $k$  является общей для двух ячеек одного уровня дробления;

$\alpha(i,k) = \frac{1}{6}$ , если грань  $k$  является общей для ячеек разных уровней дробления.

В случае однородной сетки без дробления ячеек нормировочный множитель равен  $1/2$  для всех граней, что совпадает с результатом, полученным в п. 2.5 для сетки шестигранников.

Схема (24) при указанном выборе нормировочных множителей  $\alpha(i,k)$  полностью совпадает с разностной схемой, описанной в [7]. Необходимо отметить, что в схеме (24) коэффициент  $\kappa$  в общем случае представлен в тензорном виде. Однако на координатной сетке вектор  $\vec{S}_k$  для каждой грани имеет только одну ненулевую компоненту, в результате построенная схема будет аппроксимировать уравнение теплопроводности в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

как это и указано в [7]. Если в уравнение (1) входят смешанные производные, необходимо использовать схему (23).

### 3.4. Некоторые замечания по реализации

#### 1) Об интерполяции сеточных величин

На итоговую точность схемы существенно влияет способ интерполяции коэффициента  $\kappa$  в узлы и на грани иерархической сетки.

В настоящее время при решении, например, уравнения теплопроводности интерполируются значения плотности и температуры, определенные как средние по ячейке, по этим интерполированным значениям вычисляется коэффициент. Для интерполяции используется формула с весами, равными объему ячейки:

$$F(p_k) = \frac{\sum_{i \in \ln \langle q \rangle 3(k)} F_i V_i}{\sum_{i \in \ln \langle q \rangle 3(k)} V_i}, \quad (26)$$

где  $\langle q \rangle$  – размерность элемента  $p_k$ ,  $F_i$  – значение функции в ячейке  $\omega_i$ ,  $V_i$  – объем этой ячейки. В случае иерархической сетки такая интерполяция имеет погрешность  $O(h_x + h_y + h_z)$ .

В работе [7] предлагается использовать для раздробленных граней следующую интерполяционную формулу (обозначения ячеек приведены на рис. 5):

$$DD = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} \right), \quad D_{ne} = \frac{1}{DD}, \quad D_f = \frac{D_{base} D_{ne} (L_{base} + L_{ne})}{D_{base} L_{ne} + D_{ne} L_{base}}.$$



Здесь  $L_{base}$ ,  $L_{ne}=L_1=L_2=L_3=L_4$  – размеры всех соседствующих ячеек в направлении, перпендикулярном грани  $f$ ,  $D$  – значения функции.

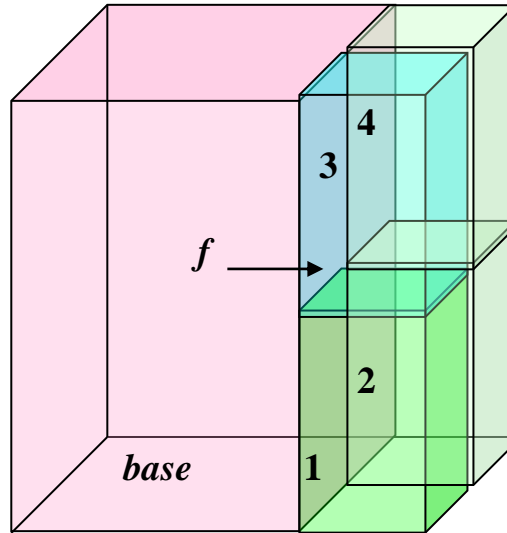


Рис. 5. К интерполяции на грани [7].

Таким образом может быть получено с погрешностью  $O(h_x^2)$  значение функции на грани  $f$ , т.е. на грани ячейки  $base$ , являющейся объединением соответствующих граней ячеек 1, 2, 3 и 4. Следовательно, применительно к схеме (24) необходимо выбирать один и тот же коэффициент  $\kappa_k$  на всех четырех гранях, порожденных гранью  $f$ . Вопрос об интерполяции в узлы в работе [7] не обсуждается.

Представляется целесообразным применять для вычисления значения функции в узле  $p_k$  формулу (26), однако вместо объема  $V_i$  использовать приузловой объем  $V_i(p_k)$ , вычисленный так, как предложено в п. 3.2.

## 2) Об использовании данных по структуре сетки

- В предложенных алгоритмах (пп 3.2 и 3.3) не используются сведения об иерархии сетки. Т.е. никак не используется информация о том, что, например, ячейка  $A$  уровня  $n$  разбита на 8 ячеек  $A1, A2, \dots, A8$  уровня  $(n+1)$ . Все операции выполняются только с листьями восьмеричного дерева.
- Существенно используются отношения инцидентности, при этом ячейке уровня  $n$ , соседствующей с ячейками уровня  $(n+1)$ , инцидентны грани и ребра уровня  $(n+1)$  и все узлы, возникшие в результате дробления ячеек.

- Алгоритмы пп. 3.2 и 3.3 записаны с использованием только отношений инцидентности. Если использовать также отношения смежности, необходимо рассматривать смежность только по граням и ребрам самого нижнего уровня дробления (листьям соответствующего восьмигранного дерева).
- В случае применения неявной схемы для интегрирования по времени (23) или (24) и решения соответствующей СЛАУ с составлением глобальной матрицы необходима сквозная нумерация листьев дерева ячеек.
- При организации вычислений с распределенной памятью для межпроцессорных обменов потребуется только один слой ячеек самого нижнего уровня дробления.
- Существенно используются сведения об уровне дробления элементов сетки всех размерностей: ячеек, граней, ребер.
- Сведения об ориентации граней, следующие из их индексации, могут существенно упростить *вычисление приузловой площади* в п. 3.2.

#### 4. Заключение

1) Предложен вариант метода Галеркина-Петрова с разрывными базисными функциями для аппроксимации уравнений в частных производных второго порядка с переменным коэффициентом в тензорной форме. Решение строится в пространстве сеточных функций, использующих средние значения по ячейке. Рассматриваются сетки нерегулярной структуры общего вида.

2) Построены базисные функции, обеспечивающие аппроксимацию вторых производных, в том числе смешанных, на сетках правильно примыкающих многогранников и на локально-адаптивных сетках типа восьмигранное дерево.

3) Показано, что построенные сеточные операторы сохраняют свойство самосопряженности исходных дифференциальных операторов при специальной аппроксимации коэффициента диффузии.

4) Показано, что построенные схемы обладают свойством консервативности и аппроксимируют баланс энергии в расчетной области в согласии с выбранной формой аппроксимации потоков.

## Библиографический список

1. Г. И. Марчук, В. И. Агошков. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. — 416 с.
2. П. В. Сасоров, Н. А. Боброва, О. Г. Ольховская. Уравнения двухтемпературной магнитной гидродинамики плазмы с учетом ее замагниченности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. №21. 18 с.  
URL: [http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015\\_21.pdf](http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_21.pdf)
3. Б. Н. Четверушкин, О. Г. Ольховская, В. А. Гасилов. Решение на параллельных вычислительных системах уравнения переноса энергии излучением // Доклады Академии Наук, 2015, том 464, № 1, с. 15–18
4. О. Зенкевич. Метод конечных элементов в технике. / М. Мир, 1975. – 540 с.
5. Ю. И. Шокин, З. И. Федотова. О достижениях в теории разностных схем // Вычислительные технологии, том 4, №5, 1999, стр. 56-69.
6. Э. Митчелл, Р. Уэйт. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. – 216 с.
7. В. Т. Жуков и др. Численное решение параболических уравнений на локально-адаптивных сетках чебышевским методом // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 87. 26 с.  
URL: [http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015\\_87.pdf](http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_87.pdf)
8. Г. А. Багдасаров. Трехмерное моделирование магнитоускоренной импульсной плазмы с учетом эффектов, обусловленных обобщенным законом Ома // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук. Москва, 2012. 115 с.

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Вариант метода Галеркина-Петрова с разрывными базисными функциями .	4
3. Специальный выбор базисных функций для OCTREE-сеток .....	17
4. Заключение .....	25
Библиографический список.....	26