ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 237 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попов И.В., Вихров Е.В.

Метод построения неструктурированных сеток

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов И.В., Вихров Е.В. Метод построения неструктурированных сеток // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 237. 15 с. doi:**10.20948/prepr-2018-237**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-237**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

И.В. Попов, Е.В. Вихров

Метод построения неструктурированных сеток

Москва — 2018

И.В. Попов, Е.В. Вихров

Метод построения неструктурированных сеток

В данной работе рассматривается один из методов построения двумерных нерегулярных треугольных сеток, ячейки которых удовлетворяют условию Делоне.

Ключевые слова: треугольная сетка, триангуляция Делоне, математическое моделирование.

I.V. Popov, E.V. Vikhrov

Unstructured mesh generation method

This paper describes the method of non-regular Delaunay triangle mesh generation.

Keywords: triangle mesh, Delaunay triangulation, mathematical modeling.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-07-00519-а, 18-07-00841-а, 18-07-01292-а.

Введение

Во многих задачах математического моделирования важным этапом является построение расчетной сетки. Согласно работе [1], существуют такие основные подходы к построению сеток, как метод продвигаемого фронта и триангуляция Делоне. Кроме того, имеют место комбинированные методы.

В случае метода продвигаемого фронта ячейки достраиваются внутрь границы области. Такое построение производится до тех пор, пока исходная область не будет представлять собою пустое множество.

Триангуляция Делоне производится в два этапа. Построение грубой сетки из имеющихся исходных точек. После чего следует измельчение полученных грубых ячеек каким-либо способом.

В данной работе предлагается один из способов построения двумерных нерегулярных треугольных сеток, ячейки которых соответствуют условию Делоне.

На основе исходных точек, приближающих собою границу области, производится построение грубой треугольной сетки. Исходная область стягивается до треугольника при помощи последовательного отрезания от нее грубых треугольных элементов. Оставшийся треугольник представляет собою последний элемент грубой сетки.

Предложен следующий подход к измельчению грубой треугольной сетки. Ячейки разбиваются при помощи множества вбрасываемых точек. Кроме того, на каждом шаге измельчения производится перестроение области так, чтобы она удовлетворяла условию Делоне.

Постановка задачи

Зададим на плоскости невыпуклую n-связную область, ограниченную извне контуром Γ_0, а изнутри – контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_{n-1}$. Контуры не имеют самопересечений. Помимо этого, каждый из них приближен некоторой замкнутой ломаной, содержащей конечное число вершин. Требуется построить треугольную сетку на такой области, и её ячейки должны удовлетворять условию Делоне.

Основные определения

Отметим, что, используя выражение «граничный контур», мы будем иметь в виду замкнутую ломаную, которой этот контур приближен, и не будем различать эти понятия. Какое либо звено ломаной будем обозначать как Γ_i^k, где i – номер контура, k – номер звена. Внешний контур всегда имеет индекс 0, внутренние, если они имеются нумеруются, – от 1 до $n-1$, где n определяет связность области.

Положительным направлением обхода контура называется такое направление, при котором внутренняя область, ограниченная данным замкнутым контуром, остается *слева* от направления движения [2].

Триангуляцией называется планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками [3].

Выпуклой триангуляцией называется такая триангуляция, для которой минимальный многоугольник, охватывающий все треугольники, будет выпуклым. Триангуляция, не являющаяся выпуклой, называется *невыпуклой* [3].

Говорят, что триангуляция удовлетворяет *условию Делоне*, если внутрь окружности, описанной вокруг любого построенного треугольника, не попадает ни одна из заданных точек триангуляции [3].

Два треугольника называются *смежными*, если они имеют ровно одну общую сторону (две общие вершины).

В общем случае исходная область не является выпуклой, поэтому о выполнении условия Делоне для всей области говорить не приходится. В связи с этим будем требовать выполнения условия для каждой пары смежных треугольников, среди всех возможных таких пар.

Об организации данных ввода-вывода

Предлагается организовать входные данные в виде трех текстовых файлов. Скажем несколько слов об их содержимом.

Первый файл содержит координаты точек всех граничных контуров. Для внешнего контура вершины ломаной расположены в *положительном* направлении обхода, а для внутренних контуров – в *отрицательном*. Внешний контур расположен первым. Помимо этого, каждая группа точек, определяющая какой-либо контур, отделена от следующей. Разделителем может быть какой-либо специальный символ. Это необходимо для того, чтобы можно было пометить точки, принадлежащие данному контуру, определенным образом на этапе ввода данных.

Второй файл содержит лишь координаты *вбрасываемых* в область точек. Эти точки не имеют какой-либо организации в смысле обхода и расположены последовательно друг за другом. Что такое вбрасываемые точки, будет пояснено ниже.

Третий файл содержит параметры работы программы, такие как требуемая длина стороны приграничных треугольников.

Результатом работы программы является файл, содержащий в себе информацию о числе точек, количестве и типе ячеек, непосредственно координаты точек и номера вершин ячеек.

Основные этапы построения сетки

Предлагается процедура построения сетки, состоящая из следующих основных этапов:

1. построение грубой треугольной сетки на заданной области;
2. вбрасывание точек в область и их отсеивание;
3. измельчение грубой сетки при помощи вброшенных точек.
4. измельчение приграничных треугольников.

Теперь рассмотрим каждый из этапов более подробным образом.

1. Построение грубой треугольной сетки

В этом пункте рассматривается процедура построения грубой треугольной сетки на исходной области.

1.1 Подготовка области

Все полученные в результате ввода из первого файла точки необходимо пронумеровать, этот номер неизменен на протяжении всего времени работы программы (непосредственное расположение точки в массиве может изменяться, поэтому требуется нумерация). Также следует пометить каким-либо образом точки различных контуров для того, чтобы их можно было отличать друг от друга.

В общем случае исходная область не является односвязной, поэтому необходимо привести ее к таковой. Это необходимо для построения грубой треугольной сетки. Если же область является односвязной, то можно сразу переходить к следующему этапу. Для того чтобы определить количество внутренних контуров, достаточно подсчитать число специальных символов-разделителей, о которых было сказано выше.

Итак, известно, что область является многосвязной. Для того чтобы сделать ее односвязной, необходимо соединить внутренние контуры с внешним отрезками. Так как внешний контур имеет положительное направление обхода, а внутренние – отрицательное, то при проведении отрезков к внутренним контурам общий обход области станет положительным.

Прежде всего нам понадобится составить массив, содержащий все звенья (отрезки) граничных контуров. Рассмотрим внешний контур Γ_0 и внутренний Γ_i. Возьмем пару точек. Одна из точек пары принадлежит Γ_0 (точка A), другая

– Γ_i (точка B). Получили отрезок, концами которого являются данные точки, назовем его AB. Отрезок AB следует проверить на предмет пересечения со всеми элементами массива звеньев. Из этой процедуры следует исключить те звенья, которые примыкают непосредственно к AB. Это звенья, имеющие одной из своих вершин точку рассматриваемой пары. Таких звеньев будет четыре. Необходимо найти такой отрезок, который не пересекается ни с одним звеном массива с учетом исключенной из проверки четверки. Рис. 1 демонстрирует первый подходящий отрезок на примере двухсвязной области.

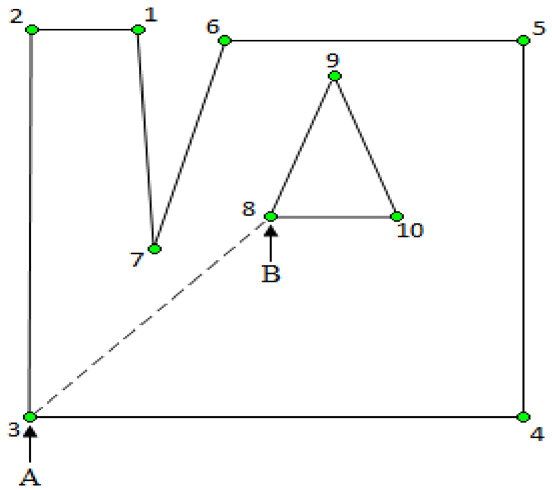

Рис. 1. Проводимый отрезок обозначен пунктирной линией. На рисунке показана общая нумерация точек и точки A, B.

После того как такой отрезок найден, он добавляется в массив звеньев. Затем данный внутренний контур добавляется во внешний. Это происходит следующим образом. Начиная с точки A внешнего контура Γ_0 в массиве точек следует расположить все точки подходящего внутреннего контура Γ_i. Последовательность точек Γ_i сохраняется, однако выполняется их циклическая перестановка, до тех пор, пока точка B не станет первой (если она таковой не является). Затем в массив точек еще раз добавляются точки B и A. Эти точки являются *фиктивными*, их необходимо пометить соответствующим образом. Далее следует расположить все идущие за A точки контура Γ_0, сохранив их исходную последовательность. Теперь получен *расширенный* внешний контур. Таблица 1 схематично демонстрирует содержимое памяти после описанной процедуры.

Таблица 1

Схема памяти до и после расширения контура

До расширения			После расширения		
	i	№		i	№
	0	1		0	1
	1	2		1	2
A	2	3	A	2	3
	3	4	B	3	8
	4	5		4	9
	5	6		5	10
	6	7	B	6	8
B	7	8	A	7	3
	8	9		8	4
	9	10		9	5
				10	6
				11	7

Описанным выше образом необходимо добавить все внутренние контуры во внешний, получив один расширенный внешний контур. Область, ограниченная таким контуром, будет являться односвязной. Отметим, что из точек, на основе которых уже был получен отрезок, соединяющий внешний и внутренний контуры, не следует проводить другие такие отрезки. Они исключаются из подобных построений.

1.2 Построение грубой треугольной сетки

После того как область приведена к односвязной, можно приступать к построению грубой треугольной сетки. Эта процедура происходит в три шага, рассмотрим их.

Шаг первый подразумевает построение грубых треугольников непосредственно внутри полученного граничного контура.

Вначале все точки являются *доступными* и имеют соответствующую метку. Будем собирать идущие непосредственно друг за другом доступные точки в тройки. Пусть A, B, C – очередная такая тройка. Она представляет собой не что иное, как возможный треугольник. Для того чтобы треугольник был добавлен в триангуляцию, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: 1.а) треугольник должен находиться внутри области; 1.б) внутри треугольника и на его границе не должны лежать какие-либо вершины исходных ломаных (кроме выбранных трех, которые образуют сам треугольник). Вначале следует проверить условие 1.а). Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Определив координаты, следует вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ba_x & ba_y \\ bc_x & bc_y \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

элементы которого представляют собой координаты соответствующих векторов. Условие 1.а) считается выполненным, если $\Delta < 0$. После проверки 1.а) переходим к проверке 1.б). Необходимо рассматривать все точки области, кроме уже имеющийся тройки. Пусть D − очередная рассматриваемая точка. Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$. Затем вычислим три определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} da_x & da_y \\ db_x & db_y \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} db_x & db_y \\ dc_x & dc_y \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} dc_x & dc_y \\ da_x & da_y \end{vmatrix} \qquad (2)$$

элементы которых представляют собой координаты соответствующих векторов. Условие 1.б) считается выполненным, если $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$ и, кроме этого, все три значения не имеют одинаковый знак.

Если выполняются условия 1.а) и 1.б), то треугольник добавляется в триангуляцию и точка B помечается как *недоступная.* Далее следует начать составление новой тройки доступных точек, начиная с точки C. В том случае, если хотя бы одно из условий не выполнено, все точки остаются доступными, а новая тройка составляется начиная с точки B. Вышеописанная процедура продолжается до тех пор, пока не останется всего две доступных точки.

Заметим, что все треугольники, полученные на этом шаге, следует отметить каким-либо образом. Для ясности назовем их, например, *истинными*. Кроме того, они имеют положительное направление обхода.

После того как получена грубая треугольная сетка, ее необходимо перестроить, применяя условие Делоне. О том, как это сделать, см. пункт *4. Перестроение сетки по условию Делоне*.

Шаг второй состоит в достраивании триангуляции до *выпуклой* и выполняется в том случае, если исходная область *невыпуклая*. Это необходимо для корректной работы процедуры вбрасывания. Вначале все точки следует вновь объявить доступными. После чего можно перейти непосредственно к достраиванию. Процедура в точности повторяет первый шаг, однако имеются два небольших отличия.

Суть первого отличия заключается в том, что теперь в триангуляцию добавляются лишь те треугольники, которые образованы очередной тройкой граничного контура и находятся снаружи области. Это выражается в том, что определитель $\Delta > 0$.

Второе отличие состоит в условии завершения процедуры построения. Данное условие выражается в том, что при полном проходе по всем доступным точкам контура не добавлено ни одного треугольника.

Полученные в этом шаге треугольники также добавляются в триангуляцию, однако они имеют метку, отличную от треугольников первого шага. Будем называть их *фиктивными*. Эти треугольники понадобятся нам далее лишь для процедуры вбрасывания точек.

Шаг третий выполняется в случае многосвязной области. Суть заключается в том, что необходимо построить триангуляцию на областях, ограниченных *внутренними* граничными контурами. Эта процедура в точности повторяет первый шаг и выполняется для каждого внутреннего контура. Заметим, что для ее применения следует изменить обход внутренних контуров на *положительный*. Кроме того, все полученные в результате этого шага треугольники также являются фиктивными. Их назначение такое же, как и у треугольников, полученных в результате второго шага.

Вышеописанные шаги наглядно демонстрирует серия рисунков 2.

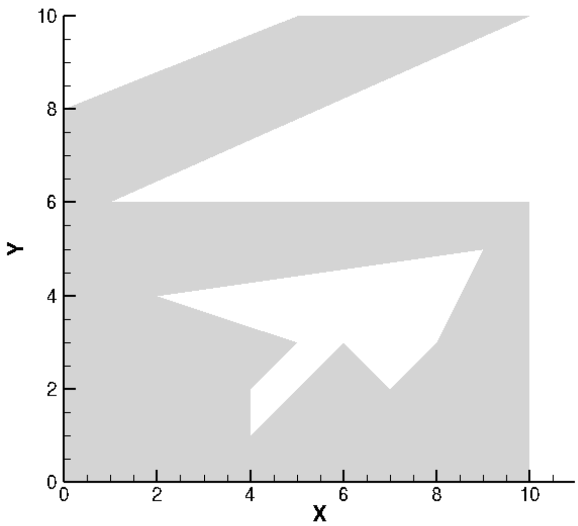

Рисунок 2а. Исходная область

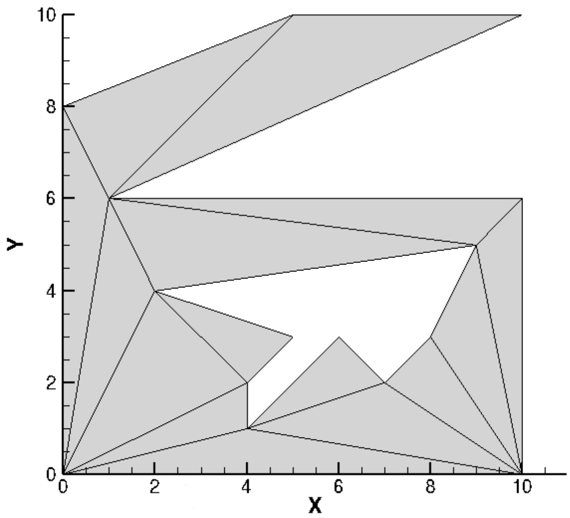

Рисунок 2б. Область после грубой триангуляции (шаг 1)

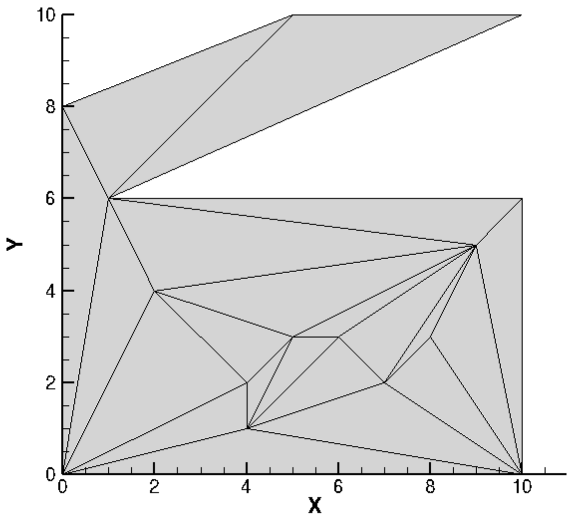

Рисунок 2в. Добавлена триангуляция области, ограниченной внутренним контуром (шаг 2)

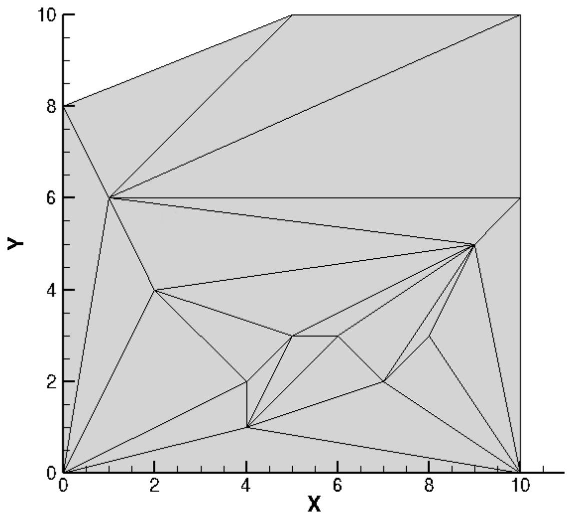

Рисунок 2г. Триангуляция достроена до выпуклой (шаг 3)

На этом первый этап построения сетки оканчивается, и можно переходить ко второму.

2. Вбрасывание точек в область и их отсеивание

В этом пункте рассматривается процедура вбрасывания точек в исходную область, а также последующая их обработка.

2.1 Вбрасывание точек

Вбрасываемая точка − точка, не являющаяся вершиной какой-либо граничной ломаной, для которой необходимо установить факт наличия или отсутствия принадлежности к какому-либо треугольнику области.

Прежде всего сделаем следующие важные замечания. Для работы нижеописанного алгоритма необходимо наличие информации о смежности треугольников. В связи с этим, необходимо позаботится о том, чтобы для любой ячейки (треугольника) были известны номера смежных с ней. Проделанные ранее процедуры достраивания триангуляции до выпуклой и триангуляции внутренних контуров также нужны для корректной работы алгоритма. Кроме того, все точки, прочитанные из второго файла, будут помечаться по признаку принадлежности к той или иной ячейке. Непосредственно после считывания точки еще не являются распределенными по ячейкам, их следует пометить соответствующим образом. После того как определилась принадлежность точки к какой либо ячейке, следует различать два её *положения*: а) точка находится непосредственно внутри ячейки; б) точка лежит на границе ячейки.

Итак, в результате вышеописанного имеется выпуклая триангуляция, а также массив вбрасываемых точек. Последовательно рассматривая все точки, будем определять их принадлежность к какой-либо ячейке и состояние. Пусть D − некоторая такая точка. Так как о ее принадлежности к какому-либо треугольнику ничего не известно, возьмем в качестве базового треугольника нулевой. *Замечание: так как нижеописанная процедура будет использоваться и при измельчении сетки, то в качестве базового треугольника следует выбрать тот, к которому данная точка принадлежала.* Пусть A, B, C − его вершины. Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$. Далее вычислим определители (2). После того как определители вычислены, возможны три ситуации: 2.а) определители имеют одинаковый знак; 2.б) $\Delta_1 = 0$ или $\Delta_2 = 0$ или $\Delta_3 = 0$; 2.в) два каких-либо определителя имеют одинаковый знак, а третий − им противоположный.

Рассмотрим случай 2.а). Эта ситуация есть не что иное, как принадлежность точки D внутренности базового треугольника. В случае, когда базовый треугольник является истинным, точка помечается как принадлежащая истинному треугольнику, имеющему соответствующий номер. Если же базовый треугольник является фиктивным, то точка помечается как фиктивная.

Рассмотрим случай 2.б). Эта ситуация соответствует принадлежности рассматриваемой точки к границе треугольника. Точка помечается как находящаяся на границе. Как и в случае 2.а), фиктивность или истинность базового треугольника определяет фиктивность или истинность точки. Отдельно заметим, что точки, совпадающие с вершинами, следует помечать как фиктивные.

Рассмотрим случай 2.в). Эта ситуация говорит о том, что точка D не принадлежит данному треугольнику. Тогда следует поступить следующим образом. Если Δ_1 имеет отличный от Δ_2 и Δ_3 знак, то в качестве нового базового треугольника выбирается смежный по стороне AB от текущего. В случаях, когда Δ_2 и Δ_3 имеют отличные от двух других определителей знаки, выбираются треугольники, смежные по сторонам BC и CA соответственно. Если смежного треугольника, соответствующего данному определителю, нет, то точка помечается как не принадлежащая области. В противном случае заново вычисляются координаты векторов, проведенных из данной точки в вершины нового базового треугольника и вычисляются определители (2). Затем проверяются условия 2.а), 2.б), 2.в). Это происходит до тех пор, пока не будет установлена принадлежность точки.

Вышеописанная процедура позволяет достаточно быстро распределить точки, так как нет необходимости для каждой точки перебирать все треугольники. Если реализуется ситуация 2.в), то при помощи определителей (2) определяется направление движения по области, которое продолжается до тех пор, пока не будет найден нужный треугольник или не будет достигнута граница области. Серия рисунков 3 иллюстрирует направление движения по треугольникам.

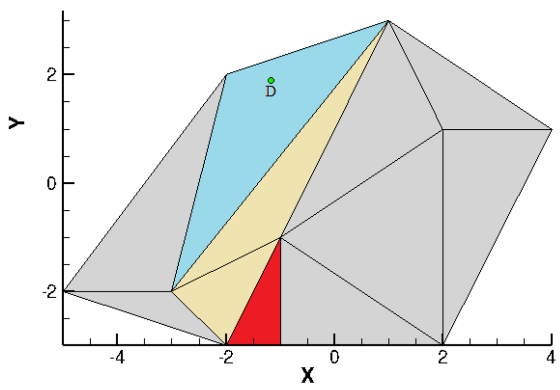

Рисунок 3а. Исходный базовый треугольник обозначен красным, новый – голубым. Путь по треугольникам до точки – желтым. Точка D внутри нового базового треугольника.

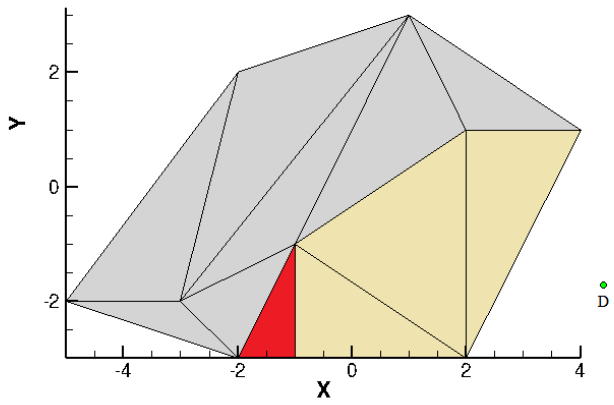

Рисунок 3б. Исходный базовый треугольник обозначен красным. Путь до точки D по треугольникам – желтым. Точка за пределами области.

2.2 Отсеивание точек

Теперь, когда процедура вбрасывания точек завершена, необходимо забыть все фиктивные треугольники и все фиктивные точки. Эти элементы не принадлежат исходной области и более не являются нужными. После того как выполнено это действие, необходимо обновить информацию о смежности треугольников.

Некоторые из оставшихся, после отбрасывания фиктивных, точек могут находиться на границе контура Γ_0. Необходимо забыть все такие точки. Нам известны номера треугольников, стороны которых образуют внешний граничный контур, а так же принадлежность точек к этим треугольникам.

Следует рассмотреть эти точки и отбросить среди них те, которые принадлежат Γ_0 (за исключением вершин треугольников). Эта процедура сводится к обыкновенному сравнению.

На этом второй этап построения сетки завершен, и можно переходить к третьему.

3. Измельчение грубой сетки при помощи вброшенных точек

В этом пункте рассматриваются вопросы, связанные с измельчением полученной ранее грубой треугольной сетки при помощи вброшенных точек.

В начале этого шага имеются следующие данные: множество истинных треугольников, представляющее собой триангуляцию исходной области, и множество вброшенных в них точек, для каждой из которых известна принадлежность к какой-либо ячейке.

Последовательно рассматривая каждую точку, принадлежащую множеству вброшенных точек, будем измельчать имеющуюся триангуляцию. Пусть D − очередная рассматриваемая точка. Эта точка принадлежит какому-либо треугольнику, назовем его ABC. Возможны две ситуации: 3.а) точка принадлежит внутренности треугольника; 3.б) точка принадлежит границе треугольника. В обоих случаях точка D помечается как вершина и выбывает из множества вброшенных точек.

Рассмотрим ситуацию 3.а). Вначале следует запомнить все точки среди вброшенных, которые принадлежат этому треугольнику. После разбиения ячейки их необходимо вбросить повторно. Само разбиение представляет собой разделение исходного треугольника на три (см. рис. 4а). Вследствие этого ABC переходит в ABD. В триангуляцию добавляются два новых треугольника: ADC и DBC. Отметим, что следует соблюдать положительное направление обхода треугольников. После этого для измененного и добавленных треугольников следует определить смежные. Затем область перестраивается по условию Делоне. И, наконец, повторно вбрасываются точки, изначально принадлежавшие ABC.

Рассмотрим ситуацию 3.б). Например, точка принадлежит стороне BC треугольника ABC. Пусть треугольник ECB смежный с ABC и сторона BC общая. Среди вброшенных точек следует запомнить точки, принадлежащие обоим треугольникам. Каждый из треугольников ABC и ECB разбивается на два, в результате чего получается четыре треугольника (см. рис. 4б). ABC переходит в ABD, ECB переходит в ECD. В триангуляцию добавляются два новых треугольника: DCA и DBE. Следует соблюдать положительное направление обхода всех четырех треугольников. Далее для всех четырех треугольников определяются смежные. После чего область перестраивается по условию Делоне. Затем повторно вбрасываются точки, изначально принадлежавшие ABC и ECB.

Напомним, что в обеих ситуациях при повторном вбрасывании точек следует использовать в качестве базового треугольника ABC. В этом случае процедура вбрасывания произойдет быстрее, т.к. путь по треугольникам будет минимален (по сравнению с выбором нулевого треугольника в качестве базового).

Вышеописанная процедура повторяется до тех пор, пока не будут исчерпаны все вброшенные точки. В результате на исходной области получается нерегулярная треугольная сетка, соответствующая условию Делоне.

Серия рисунков 4 иллюстрирует процесс разбиения ячеек.

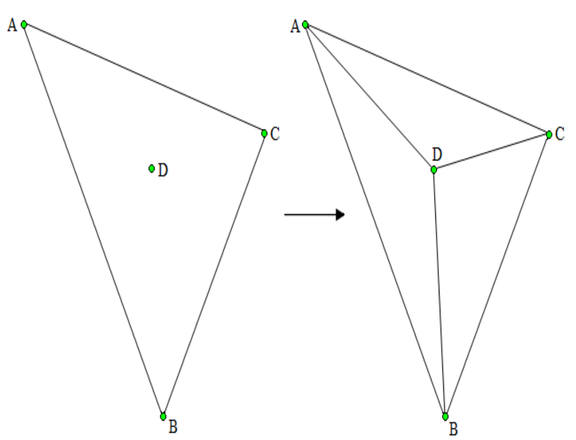

Рисунок 4а. Разбиение треугольника на три (случай 3.а)

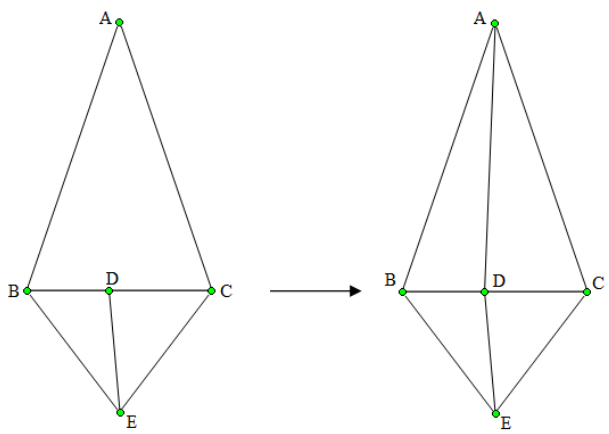

Рисунок 4б. Разбиение двух треугольников на четыре (случай 3.б)

4. Измельчение приграничных треугольников

В этом пункте рассматриваются вопросы, связанные с процедурой измельчения треугольников приграничного слоя.

В связи с особенностями описанной выше методики после проделывания первых трех этапов получается сетка, приграничные треугольники которой сильно прижаты к границе области. Кроме того, эти треугольники имеют стороны очень большой длины, что является недопустимым. Рисунок 5а наглядно демонстрирует данное явление.

Предлагается следующее решение вышеописанной проблемы. Будем последовательно рассматривать все граничные треугольники, вычисляя длину той стороны, которая принадлежит границе области. После сравнения полученного результата со значением, задаваемым в файле параметров, принимается решение о необходимости измельчения текущего треугольника. Если текущая длина граничной стороны больше заданной, то производится его измельчение, в противном случае измельчения не производится. Важной особенностью является то, что после каждого разбиения очередного треугольника необходимо приводить область в соответствие с условием Делоне. Это приводит к тому, что граничные треугольники всегда развернуты наибольшим углом в сторону границы области.

Процедура измельчения треугольника заключается в его разбиении на два других. Для этого необходимо ортогонально спроектировать вершину, лежащую напротив граничной стороны, на нее. После того как получена новая точка, необходимо провести в нее из проектируемой вершины новую сторону. В результате исходный треугольник разбивается на два прямоугольных. После этого, как было замечено выше, область перестраивается.

Граничные треугольники измельчаются до тех пор, пока не будет достигнута целевая длина их граничной стороны, либо каждый из них будет примыкать прямым углом к границе области. В последнем случае, несмотря на то, что целевая длина может и не быть достигнута, дальнейшее измельчение данным методом не представляется возможным. Рисунок 5б демонстрирует конечный результат.

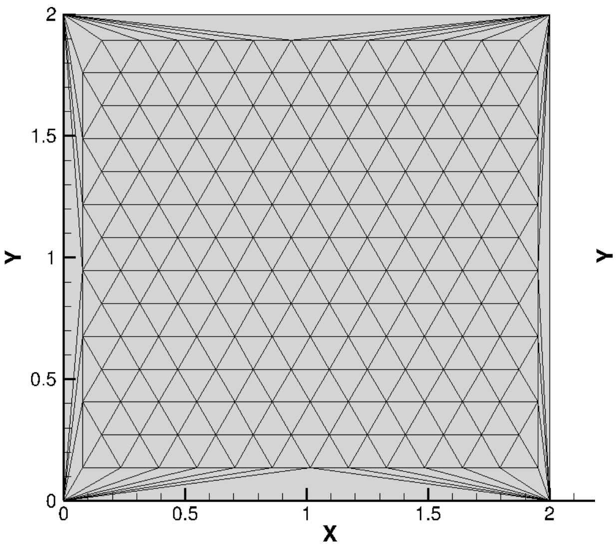

Рисунок 5а. Область до измельчения приграничных треугольников

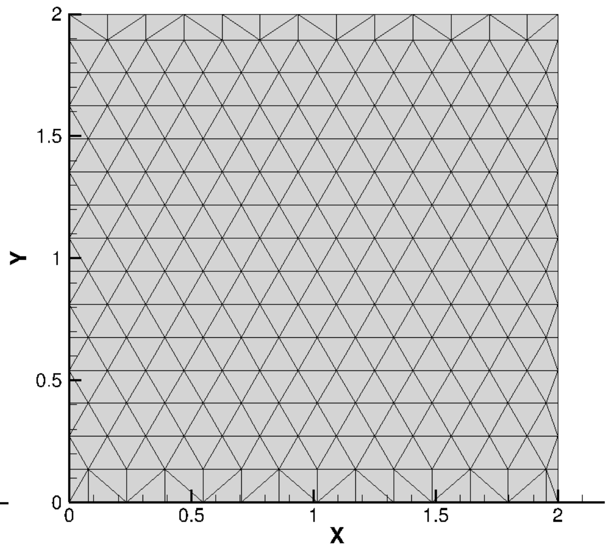

*Рисунок 5б***.** Область после измельчения приграничных треугольников

5. Перестроение сетки по условию Делоне

Как уже отмечалось выше, в случае невыпуклой триангуляции необходимо проверять условие Делоне локально. Это означает, что для каждого треугольника проверяются все смежные с ним. Последнее сводится к тому, что для данного треугольника проверяется вершина смежного с ним треугольника, противоположная их общей стороне.

Пусть $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ суть вершины рассматриваемого треугольника и $D(x, y)$ – проверяемая точка. Согласно работе [3], окружность, проходящая через точки A, B, C, описывается уравнением:

$$(x^2 + y^2) \cdot a - x \cdot b + y \cdot c - d = 0. \tag{3}$$

В уравнении (3) коэффициенты a, b, c, d суть:

$$a = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, d = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где x_i, y_i – координаты соответствующих точек.

Условие Делоне для данного треугольника будет выполняться тогда, когда точка $D(x, y)$ не попадает внутрь описанной вокруг него окружности. Это сводится к следующему условию [2]:

$$((x^2 + y^2) \cdot a - x \cdot b + y \cdot c - d) sign(a) \geq 0, \tag{5}$$

где a, b, c, d представляют собой коэффициенты (4). В случае положительного направления обхода $sign(a) = 1$, в противном случае $sign(a) = -1$.

Заметим, что условие (5) можно существенно упростить, если перенести начало координат в точку $D(x, y)$. Тогда координаты вершин треугольника ABC преобразуются как $A(x_1 - x, y_1 - y), B(x_2 - x, y_2 - y), C(x_3 - x, y_3 - y)$. Теперь условие (5) принимает более простой вид:

$$(-d) sign(a) \geq 0, \tag{6}$$

где d определен в (4), а $sign(a)$ определяется указанным выше образом.

Пусть треугольник DCB смежный с ABC и сторона BC общая. Если для указанных треугольников не выполняется условие (6), то следует перебросить их общее ребро. В результате этой процедуры ABC переходит в ABE, а ECB переходит в ECA. При переброске ребра следует следить за сохранением положительного направления обхода.

Процесс перестроения области можно ускорить, организовав его следующим образом. При разбиении какого-либо треугольника в процессе измельчения сетки следует предположить, что условие Делоне для полученных в результате такого разбиения треугольников не выполнено. Следует организовать отдельный массив, куда добавляются номера соответствующих треугольников. Далее для каждого из треугольников этого массива проверяется условие Делоне. В случае невыполнения условия в массив добавляются треугольники, смежные с текущим. После чего производится перестроение нужной пары. В противном случае треугольник исключается из массива. Проверка условия проводится до тех пор, пока массив проверяемых треугольников не будет содержать элементов вовсе.

При малом количестве элементов в массив будут попадать практически все или все треугольники. Однако с ростом их числа ситуация изменится, так как условие не будет локально выполняться лишь для близлежащих треугольников. В то время как для остальной области оно будет выполнено. Поэтому в массив будет попадать лишь малая часть треугольников области, та, для которой перестроение действительно нужно.

Заключение

В работе рассмотрен метод измельчения грубой треугольной сетки при помощи множества вбрасываемых точек. Такой подход к измельчению позволяет строить как регулярные, так и нерегулярные сетки, в зависимости от того, как распределены вбрасываемые точки. Однако возникает проблема измельчения и перестроения приграничных треугольников, что является недостатком метода.

Описанный метод возможно модифицировать для того, чтобы измельчать уже готовую сетку как целиком, так и отдельные ее зоны. В этом случае пропускается этап построения грубой триангуляции и точки вбрасываются в ячейки уже готовой сетки. При измельчении будет происходить лишь локальное перестроение ячеек. Преимуществом такого подхода является отсутствие необходимости генерировать всю сетку заново. Заметим также, что рассмотренная процедура приведения триангуляции в соответствии с условием Делоне позволяет существенно уменьшить затрачиваемое на перестроение сетки машинное время, так как не производится проверка условия для всех элементов сетки.

Библиографический список

1) Круглякова Л.В., Неледова А.В., Тишкин В.Ф., Филатов А.Ю. Обзор по методам построения и адаптации неструктурированных расчетных сеток для решения задач математической физики // Математическое моделирование, 1998, том 10, номер 3.

2) Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функции комплексной переменной. 3-е издание. М.: Наука, 1974, 319 с.

3) Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.

4) Попов И.В., Поляков С.В. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей // Математическое моделирование, 2002, том 14, номер 6.

5) Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во Московского университета, 1967, 697 с.

Оглавление