ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 249 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Шильков А.В.

Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шильков А.В. Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 249. 28 с. doi:10.20948/prepr-2018-249
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-249

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Шильков

Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам

Москва — 2018

Шильков А.В.

Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам

Предложен класс разложений оператора рассеяния частиц (нейтронов, фотонов) в ряд по симметричным сферическим тензорам для аналитических преобразований и численного решения уравнения переноса частиц. Установлена связь между симметричными сферическими тензорами и классом многочленов. Показано, что в задачах переноса излучений в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад целесообразно пользоваться разложениями по системе тензоров Чебышева. Система отличается высокой скоростью равномерной сходимости, что уменьшает сложность решения многомерных задач переноса частиц.

Ключевые слова: уравнение переноса фотонов или нейтронов, симметричные сферические тензоры, разложения оператора рассеяния, преобразования разложения

Alexandr Victorovich Shilkov

Decomposition of the scattering operator of the particle transport equation in a series of spherical tensors

A class of decompositions of the particle (i.g., neutrons, photons) scattering operator in a series of symmetric spherical tensors for analytical transformations and the numerical solution of the particle transport equation is proposed. The connection between symmetric spherical tensors and the class of polynomials is established. It is shown that in problems of radiation transport in a substance with predominant scattering forward or backward, it is advisable to use expansions in the Chebyshev tensor system. The system has a high speed of uniform convergence, which reduces the complexity of solving multidimensional particle transport problems.

Key words: photon or neutron transport equation, symmetric spherical tensors, decomposition of the scattering operator, decomposition transformations

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 14-11-00699.

Введение

В работе исследуются разложения оператора рассеяния частиц по системам симметричных сферических тензоров и системе сферических функций в целях аналитических преобразований и решения кинетического уравнения переноса фотонов или нейтронов. Приведены примеры разложений по системам многочленов и тензоров Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева. Обычно разложение оператора в многомерных задачах выполняется по системе многочленов Лежандра и системе сферических функций. Система многочленов Лежандра не обладает наилучшей скоростью равномерной сходимости разложения при увеличении порядка разложения N. По этому показателю система уступает, например, системе многочленов Чебышева. Быстрота сходимости разложения важна при решении задач переноса частиц в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад, где разложения по системам многочленов сходятся медленно. Даже небольшое уменьшение порядка разложения N сильно снижает сложность решения уравнения переноса излучений. В многомерных задачах каждый лишний член разложения добавляет в уравнение переноса $2N+1$ слагаемых, содержащих моменты высокого порядка.

Уравнение переноса излучений. Процессы лучистого теплообмена в газах и плазме, дистанционной диагностики природных, технических и биологических объектов, физики ядерных реакторов и защиты от излучений описываются линейным интегро-дифференциальным уравнением переноса излучений:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Omega^i\frac{\partial\varphi}{\partial r^i}+[\sigma_a+\sigma_s]\varphi=\frac{Q}{4\pi}+\nu\sigma_s F\,. \tag{1}$$

Здесь $\varphi(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)$ есть функция распределения частиц – фотонов или нейтронов, зависящая от времени t, координат $\mathbf{r}$, единичного вектора – направления полета частиц $\mathbf{\Omega}$, ($|\mathbf{\Omega}|=1$) и энергии частиц E (или индекса интервала энергий, если используется многогрупповое приближение). Скорость частиц v равна скорости света или выражается через энергию (для нейтронов). Уравнение решается итерациями. Рассмотрим задачу нахождения функции распределения в одной энергии. Слагаемые, содержащие значения функции в других энергиях $E'\neq E$ (интервалах энергий), считаем известными и включаем их в фиксированный источник частиц $Q(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)$. Такие слагаемые возникают при выполнении условий для замедления и термализации нейтронов или комптонизации излучения [1], [2]. Аргументы E, t в обозначениях величин для краткости будем опускать. Величины $\sigma_a(\mathbf{r})$ и $\sigma_s(\mathbf{r})$ суть соответственно сечение поглощения и сечение рассеяния частиц из пучка, $\nu\sigma_s F$ есть переменный источник, описывающий приход частиц в пучок из других пучков в результате процессов консервативного рассеяния или размножения частиц. В нем $\nu(\mathbf{r})$, $0 \le \nu \le \nu_f$ – числовой множитель, F – интегральный оператор следующего вида:

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{4\pi} w(\mathbf{\Omega\Omega}',\mathbf{r})\varphi(\mathbf{\Omega}',\mathbf{r})d\mathbf{\Omega}', \tag{2}$$

$$\mathbf{\Omega} = (\mu, \sqrt{1-\mu^2}\cos\alpha, \sqrt{1-\mu^2}\sin\alpha),$$

$$\eta = \mathbf{\Omega\Omega}' = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\alpha-\alpha'), \qquad |\mu|,|\mu'|,|\mathbf{\Omega\Omega}'| \le 1.$$

Ядро оператора (индикатрису рассеяния) $w(\eta,\mathbf{r})$ обычно раскладывают в ряд по многочленам Лежандра:

$$w(\eta) \approx \sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{2}\omega_n P_n(\eta), \tag{3}$$

$$\omega_n = \int\limits_{-1}^{1} w(\eta)P_n(\eta)d\eta, \qquad \int\limits_{-1}^{1} P_m(\eta)P_n(\eta)d\eta = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1},$$

где N – порядок разложения. Далее, пользуясь теоремой сложения сферических функций [3], с.386; [4], с.169; [5], с.184:

$$P_n(\mathbf{\Omega\Omega}') = \sum_{l=0}^{n}\frac{(n-l)!}{(n+l)!}\frac{2P_n^l(\mu)P_n^l(\mu')}{1+\delta_{0l}}\cos(l[\alpha-\alpha']) = \sum_{l=-n}^{n}\frac{2Y_n^l(\mathbf{\Omega})Y_n^l(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}, \tag{4}$$

$$Y_n^l(\mathbf{\Omega}) = \sqrt{\frac{(n-|l|)!}{(n+|l|)!}}\,P_n^{|l|}(\mu)\begin{Bmatrix}\cos l\alpha, & 0 \le l \le n \\ \sin|l|\alpha, & -n \le l \le -1\end{Bmatrix},$$

$$\int\limits_{4\pi} Y_m^p(\mathbf{\Omega})Y_n^l(\mathbf{\Omega})d\mathbf{\Omega} = 2\pi\frac{1+\delta_{0l}}{2n+1}\delta_{mn}\delta_{pl},$$

преобразуем ядро в двойной ряд по сферическим функциям $Y_n^l(\mathbf{\Omega})$:

$$w(\mathbf{\Omega\Omega}') = \sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{2}\omega_n\sum_{l=-n}^{n}\frac{2Y_n^l(\mathbf{\Omega})Y_n^l(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}.$$

В результате оператор рассеяния (2) принимает вид разложения:

$$F(\mathbf{\Omega}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \omega_n \sum_{l=-n}^{n} \frac{2Y_n^l(\mathbf{\Omega}) Z_n^l}{1+\delta_{0l}}, \qquad Z_n^l = \int_{4\pi} Y_n^l(\mathbf{\Omega}) \varphi(\mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}, \tag{5}$$

Решение кинетического уравнения (1) ищется итерациями по значениям моментов функции распределения Z_n^l.

Цель работы состоит в построении более широкого семейства разложений оператора рассеяния (2) по системам симметричных сферических тензоров и системе сферических функций. При этом мы не будем ограничивать себя разложением ядра оператора только по многочленам Лежандра (3).

Симметричные сферические тензоры

Объект $M_{(n)}^{ij...pq}(m,\mathbf{r}) = a_{(n)}^{(n)} r^i r^j \cdots r^q + ... + a_{(n)}^{(0)} \delta^{ij} \cdots \delta^{pq}$, представляющий собой линейную комбинацию произведений координат $r^i, r^j, r^k, ...$ и тензора Кронекера δ^{ij}, называется координатным тензором относительно группы линейных преобразований координат в евклидовом пространстве. Индекс n (в скобках) обозначает максимальную степень произведения координат среди всех слагаемых, индекс m в списке аргументов – число координатных индексов $i, j, k, ...$ или ранг тензора. Объект не является тензором при общих нелинейных преобразованиях координат.

Симметричные сферические тензоры. Если выполнить подстановку: $\mathbf{r} = r\mathbf{\Omega}$, $r = |\mathbf{r}|$, $|\mathbf{\Omega}| = 1$ и ограничиться группой преобразований вращения системы координат $r = const$, то компоненты объекта по-прежнему будут меняться по тензорному закону. Сферическим тензором $M_{(n)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega})$ будем называть тензор, составленный из произведений координат единичного вектора $\mathbf{\Omega}$ и тензора Кронекера δ^{ij}. Ограничимся рассмотрением симметричных тензоров, которые не меняются при перестановке любых двух индексов. Например, $A_{(2)}^{ij}(2,\mathbf{\Omega}) = 2\Omega^i \Omega^j + 3\delta^{ij}$ есть симметричный сферический тензор второй степени, второго ранга; $B_{(1)}^{ijk}(3,\mathbf{\Omega}) = \delta^{jk}\Omega^i + \delta^{ik}\Omega^j + \delta^{ij}\Omega^k$ – симметричный тензор (1,3). При четном ранге степень симметричного сферического тензора может принимать только четные неотрицательные значения $n = 0, 2, ..., m$, при нечетном ранге – нечетные положительные значения $n = 1, 3, ..., m$. Симметричные сферические тензоры в зависимости от степени (ранга) суть четно-нечетные функции единичного вектора: $M_{(n)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega}) = [\pm 1]^n M_{(n)}^{ijk...}(m,\pm\mathbf{\Omega})$.

Тензор ранга m имеет 3^m компонентов (число слов длины m, составленных из букв трехбуквенного алфавита). Симметричный тензор имеет не более чем $C_{m+2}^2 = [m+2][m+1]/2$ отличных друг от друга компонентов, где C_{m+2}^2 – число неупорядоченных наборов координатных индексов. Симметричный сферический тензор может иметь компоненты, всегда равные нулю. Если степень тензора равна n, $n \le m$, то отслеживать требуется не более чем $C_{n+2}^2 = [n+2][n+1]/2$ компонентов. Но и среди них могут быть зависимые компоненты, т.к. модуль аргумента $\mathbf{\Omega}$ равен единице. Этот последний шаг – явное разрешение связей, накладываемых условием $|\mathbf{\Omega}| = 1$, – мы делать не будем. В работе рассматривается класс симметричных сферических тензоров с действительными коэффициентами. Слово «симметричный» иногда для краткости будем опускать. Отметим, что в результате явного разрешения связи $|\mathbf{\Omega}| = 1$ совокупность симметричных сферических тензоров станет эквивалентной совокупности обобщенных сферических функций (сферических функций Вигнера) [6]; [7]; [8], с.82.

Нормированные тензоры. В классе симметричных сферических тензоров можно ввести базис. Однородным сферическим тензором называется тензор, удовлетворяющий соотношению подобия при изменении масштаба координат:

$$M_{(n)}^{ijk\dots}(m, r\mathbf{\Omega}) = r^n\, M_{(n)}^{ijk\dots}(m, \mathbf{\Omega}). \tag{6}$$

Например, тензор $A_{(2)}^{ij}(2,\mathbf{\Omega})$ неоднороден, тензор $B_{(1)}^{ijk}(3,\mathbf{\Omega})$ однороден. Нормированным тензором $\Omega_{(n)}^{ijk\dots}(m)$ будем называть однородный симметричный тензор, компоненты которого по модулю не превышают единицы. При этом существует вектор $\mathbf{\Omega}$, при котором хотя бы один из компонентов равен единице:

$$\left|\Omega_{(n)}^{ijk\dots}(m)\right| \le 1, \qquad \max_{\mathbf{\Omega}\in 4\pi}\left|\Omega_{(n)}^{ijk\dots}(m)\right| = 1, \qquad |\mathbf{\Omega}| = 1,\ \ \mathbf{\Omega}\in 4\pi. \tag{7}$$

Простейшими нормированными тензорами являются единица и единичный вектор $\mathbf{\Omega}$:

$$\Omega_{(0)} = 1, \qquad \Omega_{(1)}^{i}(1) = \Omega^i.$$

Другие нормированные тензоры вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\Omega_{(0)}^{ijkl\dots q}(2u+2) = \delta^{ij}\,\frac{\Omega_{(0)}^{kl\dots q}(2u)}{2u+1} + \delta^{ik}\,\frac{\Omega_{(0)}^{jl\dots q}(2u)}{2u+1} + \dots + \delta^{iq}\,\frac{\Omega_{(0)}^{jkl\dots}(2u)}{2u+1}, \tag{8}$$

$$\Omega_{(n+1)}^{ijkl\dots q}(m+1) = \Omega^i\,\frac{\Omega_{(n)}^{jkl\dots q}(m)}{m+1} + \Omega^j\,\frac{\Omega_{(n)}^{ikl\dots q}(m)}{m+1} + \dots + \Omega^q\,\frac{\Omega_{(n)}^{ijkl\dots}(m)}{m+1},$$

$$m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Приведем ряд нормированных тензоров низкого ранга:

$$\Omega^{ij}_{(2)}(2) = \Omega^i \Omega^j, \quad \Omega^{ijk}_{(3)}(3) = \Omega^i \Omega^j \Omega^k, \quad \ldots \quad \Omega^{ijk\ldots}_{(n)}(n) = \underbrace{\Omega^i \Omega^j \Omega^k \ldots}_{n}, \tag{9}$$

$$\Omega^{ij}_{(0)}(2) = \delta^{ij},$$

$$\Omega^{ijkl}_{(0)}(4) = \frac{1}{3}\left[\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right] = \frac{1}{3}\left[\delta^{ij}\Omega^{kl}_{(0)}(2) + \delta^{ik}\Omega^{jl}_{(0)}(2) + \delta^{il}\Omega^{jk}_{(0)}(2)\right],$$

$$\Omega^{ijkl\ldots pq}_{(0)}(2u) = \frac{1}{2u-1}\left[\delta^{ij}\Omega^{kl\ldots pq}_{(0)}(2u-2) + \ldots + \delta^{iq}\Omega^{jkl\ldots p}_{(0)}(2u-2)\right],$$

$$\Omega^{ijk}_{(1)}(3) = \frac{1}{3}\left[\Omega^i\delta^{jk} + \Omega^j\delta^{ik} + \Omega^k\delta^{ij}\right] = \frac{1}{3}\left[\Omega^i\Omega^{jk}_{(0)}(2) + \Omega^j\Omega^{ik}_{(0)}(2) + \Omega^k\Omega^{ij}_{(0)}(2)\right],$$

$$\Omega^{ijk\ldots q}_{(1)}(2u+1) = \frac{1}{2u+1}\left[\Omega^i\Omega^{jk\ldots q}_{(0)}(2u) + \ldots + \Omega^q\Omega^{ijk\ldots}_{(0)}(2u)\right],$$

$$\Omega^{ijkl}_{(2)}(4) = \frac{1}{6}\left[\delta^{ij}\Omega^{kl}_{(2)}(2) + \delta^{ik}\Omega^{jl}_{(2)}(2) + \delta^{il}\Omega^{jk}_{(2)}(2)\right] +$$

$$+\frac{1}{6}\left[\delta^{jk}\Omega^{il}_{(2)}(2) + \delta^{jl}\Omega^{ik}_{(2)}(2) + \delta^{kl}\Omega^{ij}_{(2)}(2)\right],$$

$$\Omega^{ijklp}_{(3)}(5) = \frac{1}{10}\left[\delta^{ij}\Omega^{klp}_{(3)}(3) + \delta^{ik}\Omega^{jlp}_{(3)}(5) + \delta^{il}\Omega^{jkp}_{(3)}(3) + \delta^{ip}\Omega^{jkl}_{(3)}(3) + \delta^{jk}\Omega^{ilp}_{(3)}(3)\right] +$$

$$+\frac{1}{10}\left[\delta^{jl}\Omega^{ikp}_{(3)}(5) + \delta^{jp}\Omega^{ikl}_{(3)}(3) + \delta^{kl}\Omega^{ijp}_{(3)}(3) + \delta^{kp}\Omega^{ijl}_{(3)}(3) + \delta^{lp}\Omega^{ijk}_{(3)}(3)\right].$$

Соответствие с классом многочленов. Можно доказать, что существует только один нормированный тензор $\Omega^{ijk\ldots}_{n}(m)$ степени n и ранга m. Отсюда следует утверждение. Любой симметричный сферический тензор степени n и ранга m можно представить в виде единственной линейной комбинации из $\backslash[n+1]/2\backslash$ нормированных тензоров степени не выше n и ранга m:

$$C^{ijk\ldots}_{(n)}(m, \mathbf{\Omega}) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)}\Omega^{ijk\ldots}_{(n-2s)}(m), \qquad a_n^{(n)} \neq 0, \tag{10}$$

где $a_n^{(n-2s)}$ – числовые коэффициенты, $\backslash b \backslash$ обозначает целую часть числа.

Заметим соответствие в построении класса симметричных сферических тензоров (10) и класса четно-нечетных многочленов:

$$C_n(\mu) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \mu^{n-2s}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \qquad C_n(\mu) = [-1]^n C_n(-\mu). \tag{11}$$

Нормированные тензоры $\Omega_{(u)}^{ijk\dots}(m)$, $u = n - 2s$ играют роль степеней μ^u. Тензоры и многочлен имеют одинаковые коэффициенты при слагаемых одинаковой степени. Симметричный сферический тензор $C_{(n)}^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Omega})$, ранг которого равен степени:

$$C_{(n)}^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Omega}) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \Omega_{(n-2s)}^{ijk\dots}(n), \qquad a_{(n)}^{(n)} \neq 0, \tag{12}$$

будем называть *тензором-родителем* для последовательности тензоров (10) степени n и более высокого ранга $m = n+2, n+4,\dots$ (далее – *тензоров-потомков*). Развернутый вид тензоров-родителей приведен в Таблица 1. Тензоры-потомки вычисляются из тензора-родителя симметричными умножениями на тензор Кронекера (9).

Таблица 1. Система четно-нечетных ортогональных многочленов и система симметричных сферических тензоров-родителей

Четно-нечетный многочлен	Симметричный сферический тензор
$C_0(\mu) = a_0^{(0)}$	$C_{(0)}(0,\mathbf{\Omega}) = a_0^{(0)} = a_0^{(0)}\Omega_{(0)}(0)$
$C_1(\mu) = a_1^{(1)}\mu$	$C_{(1)}^{i}(1,\mathbf{\Omega}) = a_1^{(1)}\Omega^i = a_1^{(1)}\Omega_{(1)}^{i}(1)$
$C_2(\mu) = a_2^{(2)}\mu^2 + a_2^{(0)}$	$C_{(2)}^{ij}(2,\mathbf{\Omega}) = a_2^{(2)}\Omega^i\Omega^j + a_2^{(0)}\delta^{ij} =$ $= a_2^{(2)}\Omega_{(2)}^{ij}(2) + a_2^{(0)}\Omega_{(0)}^{ij}(2)$
$C_3(\mu) = a_3^{(3)}\mu^3 + a_3^{(1)}\mu$	$C_{(3)}^{ijk}(3,\mathbf{\Omega}) = a_3^{(3)}\Omega_{(3)}^{ijk}(3) + a_3^{(1)}\Omega_{(1)}^{ijk}(3)$
$C_4(\mu) = a_4^{(4)}\mu^4 + a_4^{(2)}\mu^2 + a_4^{(0)}$	$C_{(4)}^{ijkl}(4,\mathbf{\Omega}) = a_4^{(4)}\Omega_{(4)}^{ijkl}(4) + a_4^{(2)}\Omega_{(2)}^{ijkl}(4) + a_4^{(0)}\Omega_{(0)}^{ijkl}(4)$

Правила свертки. Мы будем придерживаться принятых соглашений записи свертки ковариантных и контравариантных тензоров, подразумевающей суммирование по повторяющимся верхним и нижним координатным индексам, хотя это и необязательно при рассмотрении операций в евклидовом пространстве. С помощью (8)–(9) можно доказать правила свертки нормированных тензоров:

$$\Omega_k\Omega_{(n)}^{ijkl\ldots}(m)=\frac{m-n}{m}\Omega_{(n+1)}^{ijl\ldots}(m-1)+\frac{n}{m}\Omega_{(n-1)}^{ijl\ldots}(m-1), \tag{13}$$

$$\delta_{ij}\Omega_{(n)}^{ijkl\ldots q}(m)=\frac{[m-n][m+n+1]}{m[m-1]}\Omega_{(n)}^{kl\ldots}(m-2)+\frac{n[n-1]}{m[m-1]}\Omega_{(n-2)}^{kl\ldots}(m-2)$$

и правила бинарной свертки двух нормированных тензоров разных аргументов:

$$[\mathbf{\Omega\Theta}]^n=\underbrace{\Omega^i\Omega^j\ldots}_{n}\overbrace{\Theta_i\Theta_j\ldots}^{n}=\Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n)\Theta_{ijk\ldots}^{(n)}(n)= \tag{14}$$

$$=\Omega_{(n+2u)}^{ijk\ldots}(n+2u+2v)\Theta_{ijk\ldots}^{(n+2v)}(n+2u+2v)\,.$$

$$\mathbf{\Omega},\mathbf{\Theta}\in 4\pi;\qquad n,u,v=0,1,2,\ldots.$$

Приведем несколько правил (14) в развернутом виде:

$$1=\Omega^i\Omega^j\delta_{ij}=\delta^{ij}\Theta_i\Theta_j=\frac{\delta^{ij}\delta^{kl}+\delta^{ik}\delta^{jl}+\delta^{il}\delta^{jk}}{3}\Theta_i\Theta_j\Theta_k\Theta_l=\ldots, \tag{15}$$

$$\mathbf{\Omega\Theta}=\Omega^i\Theta_i=\frac{\Omega^i\delta^{jk}+\Omega^j\delta^{ik}+\Omega^k\delta^{ij}}{3}\Theta_i\Theta_j\Theta_k=$$

$$=\Omega^i\Omega^j\Omega^k\,\frac{\Theta_i\delta_{jk}+\Theta_j\delta_{ik}+\Theta_k\delta_{ij}}{3}=\ldots,$$

$$[\mathbf{\Omega\Theta}]^2=\Omega^i\Omega^j\Theta_i\Theta_j=\Omega_{(2)}^{ijkl}(4)\,\Theta_{ijkl}^{(4)}(4)=\Omega_{(4)}^{ijkl}(4)\,\Theta_{ijkl}^{(2)}(4)=\ldots=$$

$$=\Omega_{(2)}^{ij\ldots}(2+2s)\,\Theta_{ij\ldots}^{(2+2s)}(2+2s)=\ldots.$$

Теорема сложения (аналог теоремы сложения для сферических функций (4)). Из правил свертки (14)–(15) следует теорема сложения. Пусть $C_n(\mu)$ есть произвольный четно-нечетный многочлен (11). Выполнив подстановку $\mu=\mathbf{\Omega\Theta}$, получим равенства:

$$C_{(n)}(\mathbf{\Omega\Theta})=\sum_{s=0}^{[n/2]}a_n^{(n-2s)}[\mathbf{\Omega\Theta}]^{n-2s}= \tag{16}$$

$$=\sum_{s=0}^{[n/2]}a_n^{(n-2s)}\Omega_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(n-2s)\Theta_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(n-2s)=$$

$$= \left[\sum_{s=0}^{[n/2]} a_n^{(n-2s)} \Omega_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(n) \right] \Theta_{ijk\ldots}^{(n)}(n) = C_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})\,\Theta_{ijk\ldots}^{(n)}(n) =$$

$$= \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n) \left[\sum_{s=0}^{[n/2]} a_n^{(n-2s)} \Theta_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(n) \right] = \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n)\, C_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{\Theta}).$$

Коэффициенты симметричных сферических тензоров $C_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})$, $C_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{\Theta})$ (12) равны коэффициентам исходного многочлена (11).

Моментами функции распределения называются симметричные тензоры:

$$\Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r}) = \int\limits_{4\pi} \Theta_{ijk\ldots}^{(n)}(m)\,\varphi(\mathbf{\Theta},\mathbf{r})\,d\mathbf{\Theta}, \qquad n = 0,1,2,\ldots;\ m = n, n+2, n+4,\ldots. \quad (17)$$

Момент, ранг которого равен степени: $\Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r})$ является *моментом-родителем* для *моментов-потомков* $m > n$. Моменты-потомки вычисляются из момента-родителя симметричными умножениями на тензор Кронекера. Моменты-потомки не содержат никакой новой информации о функции распределения, которую нельзя было бы извлечь из момента-родителя. Из правил свертки (13), (14) следуют *правила свертки моментов*:

$$\delta^{ij}\Phi_{ijkl\ldots q}^{(n)}(m) = \frac{[m-n][m+n+1]}{m[m-1]}\Phi_{kl\ldots q}^{(n)}(m-2) + \frac{n[n-1]}{m[m-1]}\Phi_{kl\ldots q}^{(n-2)}(m-2), \quad (18)$$

$$\Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n)\Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(n) = \Omega_{(n+2u)}^{ijk\ldots}(n+2u+2v)\Phi_{ijk\ldots}^{(n+2v)}(n+2u+2v), \quad (19)$$

$$n,u,v = 0,1,2,\ldots$$

S-моментами функции распределения $\Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r})$ будем называть симметричные тензоры, получаемые интегрированием функции распределения с весом сферического тензора $C_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{\Theta})$ (10):

$$\Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r}) = \int\limits_{4\pi} C_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{\Theta})\,\varphi(\mathbf{\Theta},\mathbf{r})\,d\mathbf{\Theta}, \qquad n = 0,1,2,\ldots;\ m = n, n+2,\ldots \quad (20)$$

Разложение s-момента на степенные моменты (17) следует из (10):

$$\Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r}) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_{(n)}^{(n-2s)} \Phi_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(m,\mathbf{r}). \quad (21)$$

Разложение оператора рассеяния по симметричным сферическим тензорам

Степенное разложение. Пусть ядро оператора (индикатриса рассеяния) $w(\mu)$ приближено на отрезке $-1<\mu<1$ многочленом, построенным разложением функции в ряд Тейлора или разложением в интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$w(\mu) \approx \sum_{n=0}^{N} f^{(n)} \mu^n , \qquad f_n \neq 0. \tag{22}$$

N – порядок разложения. Подставив (22) в (2), получим соответствующее разложение оператора рассеяния по нормированным тензорам:

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} f^{(n)} \int_{4\pi} [\mathbf{\Omega\Theta}]^n \varphi(\mathbf{\Theta},\mathbf{r}) d\mathbf{\Theta} = \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} f^{(n)} \underbrace{\Omega^i \Omega^j \dots}_{n} \int_{4\pi} \underbrace{\Theta_i \Theta_j \dots}_{n} \varphi(\mathbf{\Theta},\mathbf{r}) d\mathbf{\Theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} f^{(n)} \Omega^{ijk\dots}_{(n)}(n) \Phi^{(n)}_{ijk\dots}(n,\mathbf{r}).$$

Степенному разложению (23) можно придать компактный вид, если преобразовать многочлен (22) в сумму четного и нечетного многочленов класса (11):

$$w(\mu) \approx \sum_{k=0}^{N} f^{(N-k)} \mu^{N-k} = A_{(N)}(\mu) + B_{(N-1)}(\mu), \tag{24}$$

$$A_{(N)}(\mu) = \sum_{s=0}^{\backslash N/2\backslash} f^{(N-2s)} \mu^{N-2s} , \qquad B_{(N-1)}(\mu) = \sum_{s=0}^{\backslash [N-1]/2\backslash} f^{(N-1-2s)} \mu^{N-1-2s} .$$

Применим теорему сложения (16):

$$w(\mathbf{\Omega\Theta}) \approx A^{ijk\dots}_{(N)}(N,\mathbf{\Omega}) \Theta^{(N)}_{ijk\dots}(N) + B^{ijk\dots}_{(N-1)}(N-1,\mathbf{\Omega}) \Theta^{(N-1)}_{ijk\dots}(N-1) = \tag{25}$$

$$= \Omega^{ijk\dots}_{(N)}(N) A^{(N)}_{ijk\dots}(N,\mathbf{\Theta}) + \Omega^{ijk\dots}_{(N-1)}(N-1) B^{(N-1)}_{ijk\dots}(N-1,\mathbf{\Theta}).$$

Подставив (25) в (2), получим два степенных разложения оператора рассеяния, которые эквивалентны разложению (23):

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} A^{ijk\dots}_{(N)}(N,\mathbf{\Omega}) \Phi^{(N)}_{ijk\dots}(N,\mathbf{r}) + \tag{26}$$

$$+\frac{1}{2\pi}B^{ijk\ldots}_{(N-1)}(N-1,\mathbf{\Omega})\,\Phi^{(N-1)}_{ijk\ldots}(N-1,\mathbf{r})=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Omega^{ijk\ldots}_{(N)}(N)\Lambda^{(N)}_{ijk\ldots}(N,\mathbf{r})+\frac{1}{2\pi}\Omega^{ijk\ldots}_{(N-1)}(N-1)\Lambda^{(N-1)}_{ijk\ldots}(N-1,\mathbf{r}).$$

Симметричные сферические тензоры $A^{ijk\ldots}_{(N)}(N,\mathbf{\Omega})$ и $B^{ijk\ldots}_{(N-1)}(N-1,\mathbf{\Omega})$ имеют одинаковые коэффициенты с многочленами (24) при слагаемых одинаковой степени:

$$A^{ijk\ldots}_{(N)}(N,\mathbf{\Omega})=\sum_{s=0}^{\backslash N/2\backslash} f^{(N-2k)}\Omega^{ijk\ldots}_{(N-2s)}(N),$$

$$B^{ijk\ldots}_{(N-1)}(N-1,\mathbf{\Omega})=\sum_{s=0}^{\backslash [N-1]/2\backslash} f^{(N-1-2s)}\Omega^{ijk\ldots}_{(N-1-2s)}(N-1).$$

Разложения равномерной сходимости. Разложение (22) в общем случае неравномерно приближает функцию на отрезке $-1<\mu<1$. Оно может сходиться медленно в норме равномерной сходимости при увеличении порядка N. Также разложение часто нарушает дополнительные свойства функции, например ее знакоположительность. Поэтому на практике используются конечные отрезки разложения функции в ряд по некоторой системе ортогональных многочленов. Такие приближения обладают значительно более хорошими свойствами равномерной сходимости [9], с.252; [10], с. 95, 143, 257; [11], с.104.

Разложим ядро оператора (индикатрису рассеяния) в ряд по системе ортогональных многочленов $C_n(\mu)$, $n=0,1,\ldots$, порождаемых весовой функцией $h(\mu)$ [5], [8]–[11]:

$$w(\mu)\approx\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n}{h_n}C_n(\mu),\qquad \omega_n=\int_{-1}^{1}h(\mu)C_n(\mu)w(\mu)d\mu, \tag{27}$$

$$\int_{-1}^{1}h(\mu)C_m(\mu)C_n(\mu)d\mu=h_n\delta_{mn}.$$

Здесь N – порядок разложения, ω_n – моменты функции $w(\mu)$, h_n – нормировочные коэффициенты. Разложению по многочленам Лежандра (3) соответствует случай $h(\mu)=1$. Если весовая функция является четной: $h(\mu)=h(-\mu)$, то ортогональные многочлены $C_n(\mu)$ относятся к классу четно-нечетных многочленов (11). Применим теорему сложения (16):

$$w(\mathbf{\Omega\Theta}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} [\mathbf{\Omega\Theta}]^{n-2s} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \Omega_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(n-2s) \Theta_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(n-2s) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n) \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \Theta_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} \Theta_{ijk\ldots}^{(n)}(n) \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \Omega_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n) C_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{\Theta}) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} C_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) \Theta_{ijk\ldots}^{(n)}(n).$$

Тензоры $C_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{\Theta})$, $C_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})$ имеют одинаковые коэффициенты с многочленом $C_n(\mu)$. Подставим ядро в (2). В результате мы получим два разложения оператора рассеяния по системе симметричных сферических тензоров-родителей:

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} C_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) \Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{2\pi h_n} \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n) \Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r}), \qquad (28)$$

$$C_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \Omega_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(n), \qquad \Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r}) = \int_{4\pi} C_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{\Theta})\, \varphi(\mathbf{\Theta},\mathbf{r}) d\mathbf{\Theta}.$$

Итак, четная весовая функция $h(\mu)$ порождает систему четно-нечетных ортогональных многочленов $C_n(\mu)$, $n = 0,1,\ldots$ (11), связанную с ней систему симметричных сферических тензоров $C_{(n)}^{ijk\ldots}(m,\mathbf{\Omega})$ (10) и систему s-моментов $\Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r})$ (20). Многочлены, тензоры и s-моменты одинакового нижнего индекса имеют одинаковые коэффициенты при слагаемых одинаковой степени. Разложение ядра оператора рассеяния в ряд по системе многочленов (27) приводит к разложению оператора по системе сферических тензоров-родителей и системе s-моментов (28). Если весовая функция и многочлены не обладают свойствами четности, то соответствие между разложениями тоже имеет место, но оно будет носить несколько более сложный характер.

Стандартные разложения оператора

Многие свойства систем симметричных тензоров $C_{(n)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega})$, $\Lambda_{ijk...}^{(n)}(m,\mathbf{r})$, $m,n=0,1,...$ и разложений оператора рассеяния по этим системам (28) можно вывести из свойств стандартных систем четно-нечетных ортогональных многочленов $C_n(\mu)$ [5], [8]–[11].

Многочлены и тензоры Гегенбауэра порождаются весовой функцией:

$$h(\mu,\lambda)=h(-\mu,\lambda)=\frac{1}{[1-\mu^2]^{1/2-\lambda}}, \qquad \lambda>-\frac{1}{2}, \tag{29}$$

$$\int_{-1}^{1} h(\mu,\lambda)C_k(\mu,\lambda)C_n(\mu,\lambda)d\mu=h_n(\lambda)\delta_{kn}, \qquad h_n(\lambda)=\frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(n+2\lambda)}{[n+\lambda]\Gamma(n+1)\Gamma^2(\lambda)}.$$

Система замечательна тем, что для коэффициентов $a_u^{(n)}$ многочленов $C_n(\mu,\lambda)$, тензоров $C_{(n)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega},\lambda)$ и s-моментов $\Lambda_{ijk...}^{(n)}(m,\mathbf{r},\lambda)$ имеются явные формулы [5], с.177; [9], с.96; [10], с.263; [12], с.494; [13], с.645:

$$C_0(\lambda,\mu)=1, \quad C_1(\lambda,\mu)=2\lambda\mu, \quad C_2(\lambda,\mu)=2\lambda[1+\lambda]\mu^2-\lambda, \ \dots \tag{30}$$

$$C_n(\mu,\lambda)=\sum_{s=0}^{\lfloor n/2\rfloor} a_n^{(n-2s)}\mu^{n-2s}, \qquad a_n^{(n-2s)}(\lambda)=\frac{[-1]^s 2^{n-2s}\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s+1)},$$

$$C_{(n)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega},\lambda)=\sum_{s=0}^{\lfloor n/2\rfloor} a_n^{(n-2s)}\Omega_{(n-2s)}^{ijk...}(m),$$

$$\Lambda_{ijk...}^{(n)}(m,\mathbf{r},\lambda)=\sum_{s=0}^{\lfloor n/2\rfloor} a_n^{(n-2s)}\Phi_{ijk...}^{(n)}(m,\mathbf{r}).$$

Разложения ядра оператора рассеяния и самого оператора даются формулами (27), (28), где под многочленами и тензорами понимается (30).

Многочлены (тензоры) Лежандра $P_n(\mu)$ суть многочлены Гегенбауэра при $\lambda=1/2$:

$$h(\mu,1/2)=1, \qquad \int_{-1}^{1} P_k(\mu)P_n(\mu)d\mu=h_n(1/2)\delta_{kn}, \qquad h_n(1/2)=\frac{2}{2n+1}. \tag{31}$$

Коэффициенты многочленов даются формулой [5], с.181; [10], с.123; [12], с.494; [13], с.644 (также их можно получить из (30)):

$$P_0(\mu)=1,\ P_1(\mu)=\mu,\ P_2(\mu)=\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{2},\ P_3(\mu)=\frac{5}{2}\mu^2-\frac{3}{2}\mu,\ldots, \tag{32}$$

$$P_n(\mu)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} a_{n-2s}^{(n)}\mu^{n-2s}, \qquad a_n^{(n-2s)}=\frac{[-1]^s 2^{n-2s}\Gamma(n-s+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s+1)},$$

$$P_{(n)}^{ijk\ldots}(m,\mathbf{\Omega})=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} a_n^{(n-2s)}\Omega_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(m), \qquad \Psi_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r})=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} a_n^{(n-2s)}\Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r}).$$

Здесь тензоры Лежандра обозначены символами: $P_{(n)}^{ijk\ldots}(m,\mathbf{\Omega})\equiv C_{(n)}^{ijk\ldots}(m,\mathbf{\Omega},1/2)$, $\Psi_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r})\equiv\Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r},1/2)$. Свойства тензоров Лежандра следуют из (13), (32). Свертка тензора-родителя (n,n) с единичным вектором дает тензор-родитель рангом ниже:

$$\Omega_k P_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})=P_{(n-1)}^{ij\ldots}(n-1,\mathbf{\Omega}), \qquad n\geq 1.$$

Свертка тензора-потомка по любой паре индексов пропорциональна тензору-потомку на два ранга ниже. Свертка тензора-родителя по любой паре индексов равна нулю, т.е. тензоры-родители суть тензоры-девиаторы с равным нулю следом:

$$\delta_{jk}P_{(n)}^{ijkl\ldots}(m,\mathbf{\Omega})=\frac{[m-n][m+n+1]}{m[m-1]}P_{(n)}^{il\ldots}(m-2,\mathbf{\Omega}), \quad \delta_{jk}P_{(n)}^{ijkl\ldots}(n,\mathbf{\Omega})=0, \tag{33}$$

$$\delta^{jk}\Psi_{ijkl\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r})=\frac{[m-n][m+n+1]}{m[m-1]}\Psi_{il\ldots}^{(n)}(m-2,\mathbf{r}), \quad \delta^{jk}\Psi_{ijkl\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r})=0.$$

Разложения оператора рассеяния по многочленам и тензорам Лежандра получаются подстановкой (32) в (27), (28):

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r})\approx\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{4\pi}\omega_n P_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})\Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r})= \tag{34}$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{4\pi}\omega_n\Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n)\Psi_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r})=\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{4\pi}\omega_n\frac{P_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})}{a_n^{(n)}}\Psi_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r}).$$

$$\omega_n=\int_{-1}^{1}P_n(\mu)w(\mu)d\mu.$$

Третье разложение в (34) следует из равенства нулю следа моментов-девиаторов (33). $a_n^{(n)}$ – коэффициент при старшей степени многочлена Лежандра. Разложения (34) эквивалентны разложению оператора по системе сферических функций (3)–(5).

Если в (2), (34) положить $w(\eta) = \delta(\eta - 1)$, то мы получим разложения функции распределения частиц по системе тензоров Лежандра:

$$\varphi(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_{(n)}^{ijk\ldots}(n, \mathbf{\Omega}) \Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(n, \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n) \Psi_{ijk\ldots}^{(n)}(n, \mathbf{r}) = \quad (35)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{P_n^{ijk\ldots}(n, \mathbf{\Omega})}{a_n^{(n)}} \Psi_{ijk\ldots}^{(n)}(n, \mathbf{r}).$$

Система многочленов и тензоров Лежандра отличается простотой. Ее удобно использовать при выполнении аналитических вычислений и, в некоторых случаях, для упрощения формального вида систем моментных уравнений.

Многочлены (тензоры) Чебышева $T_n(\mu)$ суть многочлены Гегенбауэра, $\lambda = 0$:

$$h(\mu, 0) = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{T_k(\mu) T_n(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu = h_n \delta_{kn} \qquad h_n = \frac{\pi}{2}[1 + \delta_{0n}]. \qquad (36)$$

Формулы коэффициентов [5], с.186; [11], с.19; [13], с.644 (также они следуют из (30)):

$$T_0(\mu) = 1,\ T_1(\mu) = \mu,\ T_2(\mu) = 2\mu^2 - 1, \ldots,\ T_n(\mu) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Gamma(\lambda)[n+\lambda]}{2} C_n(\mu, \lambda), \qquad (37)$$

$$T_n(\mu) = \cos(n \arccos \mu) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \mu^{n-2s}, \qquad a_n^{(n-2s)} = \frac{[-1]^s 2^{n-2s-1} n \Gamma(n-s)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s+1)},$$

$$T_{(n)}^{ijk\ldots}(m, \mathbf{\Omega}) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \Omega_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(m),$$

$$\tau_{ijk\ldots}^{(n)}(m, \mathbf{r}) = \Lambda_{ijk\ldots}^{(n)}(m, \mathbf{r}, 0) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_n^{(n-2s)} \Phi_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(m, \mathbf{r}).$$

Свойства тензоров Чебышева следуют из (13), (37). Свертка сферического тензора-родителя с единичным вектором дает тензор рангом ниже; свертка тензора по двум индексам есть тензор Чебышева второго рода $U_{(n-2)}^{ij\ldots}$ (сферический тензор Гегенбауэра, $\lambda = 1$):

$$\Omega_k T_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) = T_{(n-1)}^{ij\ldots}(n-1,\mathbf{\Omega}), \qquad n \ge 1, \tag{38}$$

$$\delta_{kl} T_{(n)}^{ijkl\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) = -U_{(n-2)}^{ij\ldots}(n-2,\mathbf{\Omega}) \Big/ [n-1],$$

$$\delta^{kl} \tau_{ijkl\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r}) = -\Lambda_{ij\ldots}^{(n)}(n-2,\mathbf{r},1) \Big/ [n-1].$$

Разложения оператора рассеяния по многочленам и тензорам Чебышева получаются подстановкой в (27), (28) формул (37):

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(0)}{\pi^2} \frac{T_{(n)}^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})}{1+\delta_{0n}} \Phi_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(0)}{\pi^2} \frac{\Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n)}{1+\delta_{0n}} \tau_{ijk\ldots}^{(n)}(n,\mathbf{r}), \tag{39}$$

$$\omega_n(0) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(\mu) w(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu .$$

Если рассматривать функции $w(\mu,\mathbf{r})$ широкого класса, меняющиеся в пространстве, во времени или от задачи к задаче, то скорость сходимости разложения ядра оператора (27) и разложения оператора (28) будет меняться в зависимости от изменений функции и выбора системы многочленов. Среди систем (29) выделяется система многочленов Чебышева, имеющая универсальную, устойчиво высокую скоростью сходимости разложений при увеличении порядка N. Скорость равномерной сходимости разложения ограниченной, непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции не более чем в $\ln N$ раз уступает максимально возможной скорости сходимости в классе многочленов [10], с.95, 448; [11], с.111.

Быстрота сходимости ряда (28) чрезвычайно важна при решении задач переноса частиц в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад. Здесь функция $w(\mu)$ имеет высокие пики в точках $\mu = \pm 1$. Даже небольшое уменьшение порядка N сильно снижает сложность уравнения переноса излучений. В многомерных задачах каждый лишний член ряда (28) (и ряда (5)) добавляет в разложение примерно $2N+1$ скалярных слагаемых. Сравнение скорости сходимости разложений по системе Лежандра и по системе Чебышева на примере индикатрисы Хеньи-Гринстейна приведено ниже в Таблица 2 и Таблица 3.

Формулы разложения степени. Далее нам потребуются формулы, с помощью которых можно выполнять преобразование разложений из одной системы стандартных многочленов в другую. Формулы разложения степени есть обращение формул (30), (32), (37).

1) Разложение степени в конечную сумму многочленов Гегенбауэра:

$$\mu^n = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} b_n^{(n-2s)} C_{n-2s}(\mu,\lambda), \qquad b_n^{(n-2s)} = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+1)[n-2s+\lambda]}{2^n\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+1+\lambda)}. \qquad (40)$$

[13], с.570 (после преобразования); [14], с. 265, 266 (после преобразования). Разложение степени в конечную сумму многочленов Лежандра следует из (40) при $\lambda = 1/2$.

2) Разложение степени в конечную сумму многочленов Чебышева, $\lambda = 0$:

$$\mu^n = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} b_n^{(n-2s)} T_{n-2s}(\mu) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} c_n^{|n-2s|} T_{|n-2s|}(\mu), \qquad n = 0,1,2,... \qquad (41)$$

$$b_n^{(n-2s)} = \frac{c_n^{(n-2s)}}{1+\delta_{2s,n}}, \qquad c_n^{(n-2s)} = \frac{2^{1-n}\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+1)}.$$

[11], с. 28. Также (41) можно получить из (37), (40).

3) Из (40), (41) и (10), (11) следуют разложения нормированного тензора (n, m) и степенного момента (n, m):

$$\Omega_{(n)}^{ijk...}(m) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} b_n^{(n-2s)} C_{(n-2s)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega},\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} c_n^{|n-2s|} T_{|n-2s|}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega}), \qquad (42)$$

$$\Phi_{ijk...}^{(n)}(m,\mathbf{r}) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} b_n^{(n-2s)} \Lambda_{ijk...}^{(n-2s)}(m,\mathbf{r},\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} c_n^{|n-2s|} \tau_{ijk...}^{|n-2s|}(m,\mathbf{r}),$$

$$n = 0,1,2,..., \quad m = n, n+2,...$$

Здесь $C_{(u)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega},\lambda)$, $T_{(u)}^{ijk...}(m,\mathbf{\Omega})$, $\Lambda_{(n-2s)}^{ijk...}(m,\mathbf{r},\lambda)$, $\tau_{(n-2s)}^{ijk...}(m,\mathbf{r})$ суть тензоры-потомки (10), получаемые из тензоров-родителей симметричным умножением на тензор Кронекера.

4) Подстановка (4) в (40) в случае $\lambda = 1/2$ дает разложение степени скалярного произведения векторов по сферическим функциям:

$$[\mathbf{\Omega\Omega'}]^n = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} b_n^{(n-2s)} \sum_{|l|\le n-2s} \frac{2Y_{n-2s}^l(\mathbf{\Omega})Y_{n-2s}^l(\mathbf{\Omega'})}{1+\delta_{0l}}, \qquad (43)$$

$$b_n^{(n-2s)} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)[n-2s+1/2]}{2^n\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+3/2)}.$$

Формулы разложения многочленов и тензоров в конечную сумму многочленов и тензоров другой системы.

5) Разложение многочлена (тензора) Гегенбауэра системы λ в конечную сумму многочленов (тензоров) системы η:

$$C_n(\mu,\lambda)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda\to\eta)C_{n-2s}(\mu,\eta), \tag{44}$$

$$d_n^{(n-2s)}(\lambda\to\eta)=\frac{\Gamma(\eta)[n-2s+\eta]\Gamma(s+\lambda-\eta)\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda-\eta)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+\eta+1)}.$$

[13], с.566, 570 (после преобразования); [14], с. 266, 299 (после преобразования).

$$C_{(n)}^{ijk\dots}(m,\mathbf{\Omega},\lambda)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda\to\eta)C_{(n-2s)}^{ijk\dots}(m,\mathbf{\Omega},\eta), \tag{45}$$

$$\Lambda_{ijk\dots}^{(n)}(m,\mathbf{r},\lambda)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda\to\eta)\Lambda_{ijk\dots}^{(n-2s)}(m,\mathbf{r},\eta).$$

Разложения многочлена (тензора) Лежандра следуют из (44), (45), если положить $\lambda,\eta=1/2$.

6) Разложение многочлена (тензора) Гегенбауэра системы λ в конечную сумму многочленов (тензоров) Чебышева:

$$C_n(\mu,\lambda)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda\to 0)T_{n-2s}(\mu)=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} e_n^{|n-2s|}T_{|n-2s|}(\mu), \tag{46}$$

$$d_n^{(n-2s)}(\lambda\to 0)=\frac{e_n^{(n-2s)}}{1+\delta_{2s,n}}, \qquad e_n^{(n-2s)}=\frac{2\Gamma(s+\lambda)\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+1)}.$$

[5], с. 177, 181; [9], с.103, 105; [10], с.121, 263; [12], с.517.

$$C_{(n)}^{ijk\dots}(m,\mathbf{\Omega},\lambda)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda\to 0)T_{(n-2s)}^{ijk\dots}(m,\mathbf{\Omega})=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} e_n^{|n-2s|}T_{|n-2s|}^{ijk\dots}(m,\mathbf{\Omega}), \tag{47}$$

$$\Lambda_{ijk\dots}^{(n)}(m,\mathbf{r},\lambda)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda\to 0)\tau_{ijk\dots}^{(n-2s)}(m,\mathbf{r})=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} e_n^{|n-2s|}\tau_{ijk\dots}^{|n-2s|}(m,\mathbf{r}),$$

$$n=0,1,2,\dots,\quad m=n,n+2,\dots$$

Разложения многочлена (тензора) Лежандра следуют из (46), (47), если положить $\lambda = 1/2$.

7) Подстановка (4) в (44) дает разложение многочлена по сферическим функциям:

$$C_n(\mathbf{\Omega\Omega}',\lambda) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_{n-2s}^{(n)}(\lambda \to 1/2) \sum_{|l|\le n-2s} \frac{2Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega})Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}, \tag{48}$$

$$d_{n-2s}^{(n)}(\lambda \to 1/2) = \frac{\Gamma(1/2)[n-2s+1/2]\Gamma(s+\lambda-1/2)\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda-1/2)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+3/2)}.$$

8) Разложение многочлена и тензора Чебышева ($\lambda = 0$) в конечную сумму многочленов, тензоров Гегенбауэра системы η следует из (37), (44):

$$\frac{T_n(\mu)}{1+\delta_{0n}} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(0 \to \eta)C_{n-2s}(\mu,\eta), \tag{49}$$

$$\frac{T_{(n)}^{ijk\ldots}(m,\mathbf{\Omega})}{1+\delta_{0n}} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(0 \to \eta)C_{(n-2s)}^{ijk\ldots}(m,\eta),$$

$$\frac{\tau_{ijk\ldots}^{(n)}(m,\mathbf{r})}{1+\delta_{0n}} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(0 \to \eta)\Lambda_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(m,\eta),$$

$$d_n^{(n-2s)}(0 \to \eta) = \frac{n[n-2s+\eta]\Gamma(\eta)\Gamma(s-\eta)\Gamma(n-s)}{2\Gamma(-\eta)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+\eta+1)}.$$

9) Подстановка (4) в (49) дает разложение многочлена Чебышева по сферическим функциям:

$$\frac{T_n(\mathbf{\Omega\Omega}')}{1+\delta_{0n}} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(0 \to 1/2) \sum_{|l|\le n-2s} \frac{2Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega})Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}. \tag{50}$$

Разложения оператора по моментам-девиаторам. Формулы (44)–(50) позволяют дополнить коллекцию разложений оператора рассеяния еще несколькими разложениями. Напомним, что моментами-девиаторами $\Psi_n^{ijk\ldots}(m,\mathbf{r})$ называются s-моменты системы Лежандра (32), (33). Пусть оператор рассеяния разложен по системе симметричных тензоров Гегенбауэра (28) или Чебышева (39). Подстановка (45), (49) придает разложениям форму разложений по моментам-девиаторам системы Лежандра:

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(\lambda)}{2\pi h_n(\lambda)} \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n) \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda \to 1/2) \Psi_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(n,\mathbf{r}), \tag{51}$$

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(0)}{\pi^2} \Omega_{(n)}^{ijk\ldots}(n) \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(0 \to 1/2) \Psi_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(n,\mathbf{r}),$$

$$\omega_n(\lambda) = \int_{-1}^{1} h(\mu) C_n(\mu,\lambda) w(\mu) d\mu, \qquad \omega_n(0) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(\mu) w(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu .$$

Разложения оператора по сферическим функциям. Пусть оператор рассеяния разложен по системе симметричных тензоров Гегенбауэра (28) или Чебышева (39). Подстановка в (2), (27) формул (48), (50) дает разложения оператора по системе сферических функций:

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(\lambda)}{2\pi h_n(\lambda)} \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda \to 1/2) \sum_{|l| \le n-2s} \frac{2 Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega}) Z_{n-2s}^{l}(\mathbf{r})}{1+\delta_{0l}}, \tag{52}$$

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(0)}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(0 \to 1/2) \sum_{|l| \le n-2s} \frac{2 Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega}) Z_{n-2s}^{l}(\mathbf{r})}{1+\delta_{0l}},$$

$$Z_n^l(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} Y_n^l(\mathbf{\Omega}) \varphi(\mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} .$$

Разложения (52) обобщают разложение (5) в случае разложения ядра оператора по многочленам Гегенбауэра или многочленам Чебышева.

Разложения оператора в одномерных задачах. Интегрируя (52) по азимутальному углу α, получаем разложение оператора рассеяния в одномерных задачах с симметрией плоского слоя и сферы:

$$F(\mu,r) = \int_{0}^{2\pi} F(\mathbf{\Omega},r) d\varphi \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(\lambda)}{h_n(\lambda)} \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(\lambda \to 1/2) P_{n-2s}(\mu) Z_{n-2s}^{0}(r) = \tag{53}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{2\omega_n(0)}{\pi} \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_n^{(n-2s)}(0 \to 1/2) P_{n-2s}(\mu) Z_{n-2s}^{0}(r),$$

$$Z_n^0(r) = \int_{-1}^{1} P_n(\mu) \int_{0}^{2\pi} \varphi(\mu,r) d\alpha d\mu .$$

Преобразование разложений

Стандартизация степенных разложений. Экономизацией степенного ряда (22) называют его преобразование в разложение по системе многочленов Чебышева. После выполнения преобразования можно уменьшить его порядок N вследствие быстрой сходимости разложения (см., например, [15], с.31). Мы будем понимать экономизацию как преобразование степенного разложения в моментное разложение по четно-нечетной системе стандартных многочленов (29)–(37) в целях исправления и придания стандартной формы, удобной для дальнейшего использования и распространения среди других исследователей.

Пусть в результате обработки экспериментальных данных получено табличное представление функции, например – индикатрисы рассеяния на интервале $-1 \le \mu \le 1$. Таблица содержит $N+1$ точек. Если интервал изменения аргумента функции другой, то выполнятся линейное преобразование в указанный интервал. Первый шаг состоит в построении интерполяционного многочлена Лагранжа, который проходит через экспериментальные точки. В результате получаем многочлен (22).

На втором шаге применяются формулы преобразования степени в ортогональные многочлены выбранной системы. Подставим (40), (41) в (22) и поменяем местами порядок суммирования. Разложение (22) преобразуется в разложение по системе стандартных многочленов:

$$w(\mu) = \sum_{n=0}^{N} f_n \mu^n = \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{n=0}^{N} f_n \sum\limits_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} b_n^{(n-2s)} C_{n-2s}(\mu,\lambda) \\ \sum\limits_{n=0}^{N} f_n \dfrac{1}{2} \sum\limits_{s=0}^{n} c_n^{|n-2s|} T_{|n-2s|}(\mu) \end{matrix} \right\} = \tag{54}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{v_n}{h_n} C_n(\mu,\lambda), & \lambda \ne 0 \\ \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{v_n}{1+\delta_{0n}} T_n(\mu), & \lambda = 0 \end{matrix} \right\},$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{\backslash [N-n]/2 \backslash} B_{nk} f_{n+2k} \approx \int_{-1}^{1} \frac{w(\mu) C_{n-2s}(\mu,\lambda)}{[1-\mu^2]^{1/2-\lambda}} d\mu,$$

$$B_{nk} = \left\{ \begin{matrix} h_n b_n^{(n+2k)} \\ \pi c_n^{(n+2k)}/2 \end{matrix} \right\} = \frac{\pi \Gamma(n+2k+1)}{2^{n+2k} \Gamma(k+1)} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{2^{1-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1+\lambda)}, & \lambda \ne 0 \\ 1/\Gamma(n+k+1), & \lambda = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Здесь v_n – моменты функции $w(\mu)$ (27). Элементы матрицы перехода B_{nk} для расчета моментов легко вычисляются в программах Excel, MatLab, Mathematica.

Третьим шагом выполняется исправление разложения (54) на основе известных свойств функции. Если функция обладает четностью, то из разложения удаляются четные или нечетные моменты. Если известно, что интеграл функции с весом системы многочленов должен быть равен I_0, то выполняется нормирование моментов:

$$V_n = \frac{I_0}{v_0} v_n, \quad n = 0,1,...N, \qquad I_0 = \int_{-1}^{1} \frac{w(\mu)d\mu}{[1-\mu^2]^{1/2-\lambda}}. \tag{55}$$

Для разложений знакоположительных функций оценивается достоверность моментов. Если при некотором достаточно большом K, $1 \ll K < N$ включение в разложение следующего момента $n > K$ нарушает знакоположительность разложения, то разложение обрывается на номере K. То же делается при обработке серии экспериментальных данных, если значения моментов с высокими номерами $n > K$ не попадают в интервал статистической достоверности. Для разложений монотонных функций моменты проверяются с позиций сужения коридора осцилляций – включение в разложение нового слагаемого должно повышать степень монотонности разложения.

Преобразования моментных разложений равномерной сходимости. Пусть известны моменты $\omega_n(\lambda)$, $0 \le n \le N$ разложения индикатрисы рассеяния в ряд (27) по многочленам Гегенбауэра $C_n(\mu,\lambda)$. С помощью конечных сумм (44)–(49) можно вычислить моменты разложения $v_n(\eta)$ по многочленам другой системы $C_n(\mu,\eta)$. Подставим (44), (46) в (27) и поменяем местами порядок суммирования:

$$w(\mu) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{h_n(\lambda)} C_n(\mu,\lambda) = \begin{Bmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{h_n(\lambda)} \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} d_n^{(n-2s)} C_{n-2s}(\mu,\eta) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n}{h_n(\lambda)} \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{n} e_n^{|n-2s|} T_{|n-2s|}(\mu) \end{Bmatrix} = \tag{56}$$

$$= \begin{Bmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{v_n}{h_n(\eta)} C_n(\mu,\eta) \\ \displaystyle\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{v_n}{1+\delta_{0n}} T_n(\mu) \end{Bmatrix}, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{\backslash [N-n]/2 \backslash} D_{nk} \omega_{n+2k},$$

$$D_{nk} = \frac{h_n(\eta) d_n^{(n+2k)}}{h_{n+2k}(\lambda)} =$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+2\eta)[n+2k+\lambda]\Gamma(k+\lambda-\eta)\Gamma(n+k+\lambda)\Gamma(n+2k+1)}{2^{2\eta-2\lambda}\Gamma(\eta)\Gamma(\lambda-\eta)\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+\eta+1)\Gamma(n+2k+2\lambda)},$$

$$D_{nk}=\frac{\pi e_n^{(n+2k)}}{2h_{n+2k}(\lambda)}=\frac{[n+2k+\lambda]\Gamma(k+\lambda)\Gamma(n+k+\lambda)\Gamma(n+2k+1)}{2^{1-2\lambda}\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)\Gamma(n+2k+2\lambda)},\qquad \eta=0.$$

Элементы матрицы перехода D_{nk} легко вычислить с помощью программ Excel, MatLab, Mathematica. После расчета моментов v_n желательно выполнить их нормировку (55). Матрица перехода для преобразования разложений по многочленам Чебышева определяется аналогично с помощью (49).

Преобразование индикатрисы Хеньи-Гринстейна. В качестве примера выполним преобразование разложения модельной индикатрисы Хеньи-Гринстейна между системами многочленов Лежандра и Чебышева:

$$w(\mu)=\frac{[1-\gamma][1-g^2]}{2[1-2g\mu+g^2]^{3/2}}+\frac{\gamma[1-g^2]}{2[1+2g\mu+g^2]^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\omega_n P_n(\mu), \tag{57}$$

$$\omega_n=\int_{-1}^{1}w(\mu)P_n(\mu)d\mu=\Big[1-\gamma+[-1]^n\gamma\Big]g^n,\qquad \int_{-1}^{1}w(\mu)d\mu=1.$$

Здесь g, $0\le g<1$ – параметр анизотропии рассеяния. При $g=0$ рассеяние изотропно. Параметр γ, $0\le\gamma\le 1$, задает вес рассеяния назад. При $\gamma=0$ рассеяние происходит преимущественно вперед. Моменты v_n индикатрисы в системе многочленов Чебышева в соответствии с (56) равны:

$$v_n=\sum_{k=0}^{\infty}D_{nk}\omega_{n+2k}=\Big[1-\gamma+[-1]^n\gamma\Big]V_n(g),\qquad V_n(g)=\sum_{k=0}^{\infty}D_{nk}g^{n+2k}.$$

Оценим скорость сходимости разложений с помощью отношения n-го четного члена ряда к первому члену. Для разложений по многочленам Чебышева и многочленам Лежандра отношения соответственно равны:

$$K_{2n}(g)=\frac{2}{1+\delta_{0n}}\frac{v_{2n}}{v_0},\qquad K_{2n}(g)=[4n+1]\frac{\omega_{2n}}{\omega_0}=[4n+1]g^{2n}.$$

Значения $K_{2n}(g)$ приведены в Таблица 2 и Таблица 3. Параметр анизотропии меняется в пределах: $0\le g\le 0.85$; номер n меняется в пределах: $0\le n\le 20$ и $0\le n\le 40$ соответственно.

Как видим, при высокой анизотропии рассеяния разложение по многочленам Чебышева сходится в полтора–два раза быстрее разложения по многочленам Лежандра. Поэтому при решении задач переноса излучений в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад целесообразно пользоваться разложениями оператора рассеяния (28) по системе многочленов и тензоров Чебышева.

Таблица 2. Параметр сходимости $K_{2n}(g)$ разложения индикатрисы Хеньи-Гринстейна по системе многочленов Чебышева

$g \setminus n$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0.85	1.00	1.80	1.50	1.21	0.96	0.75	0.58	0.44	0.34	0.25	0.19
0.80	1.00	1.68	1.28	0.92	0.65	0.45	0.31	0.21	0.14	0.10	0.06
0.70	1.00	1.41	0.85	0.48	0.26	0.14	0.07	0.04	0.02	0.01	0.01
0.60	1.00	1.12	0.50	0.21	0.09	0.03	0.01	0.01			
0.50	1.00	0.82	0.26	0.08	0.02	0.01					
0.40	1.00	0.55	0.11	0.02							
0.30	1.00	0.32	0.04								
0.20	1.00	0.15	0.01								
0.10	1.00	0.04									
0.00	1.00										

Таблица 3. Параметр сходимости $K_{2n}(g)$ разложения индикатрисы рассеяния по системе многочленов Лежандра

$g \setminus n$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0.85	1.00	3.61	4.70	4.90	4.63	4.13	3.56	2.98	2.45	1.98	1.59
0.80	1.00	3.20	3.69	3.41	2.85	2.25	1.72	1.28	0.93	0.67	0.47
0.70	1.00	2.45	2.16	1.53	0.98	0.59	0.35	0.20	0.11	0.06	0.03
0.60	1.00	1.80	1.17	0.61	0.29	0.13	0.05	0.02	0.01		
0.50	1.00	1.25	0.56	0.20	0.07	0.02	0.01				
0.40	1.00	0.80	0.23	0.05	0.01						
0.30	1.00	0.45	0.07	0.01							
0.20	1.00	0.20	0.01								
0.10	1.00	0.05									
0.00	1.00										

$g \setminus n$	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
0.85	1.26	0.99	0.77	0.60	0.47	0.36	0.27	0.21	0.16	0.12
0.80	0.33	0.23	0.16	0.11	0.08	0.05	0.03	0.02	0.02	0.01
0.70	0.02	0.01								

Заключение

Установлена связь между классами четно-нечетных многочленов и симметричных сферических тензоров. Исследованы свойства разложений оператора рассеяния частиц по системам ортогональных многочленов и сферических тензоров. Приведены примеры разложений. Описана методика стандартизации степенных разложений индикатрисы рассеяния. Показано, что в задачах переноса излучений (нейтронов и фотонов) в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад целесообразно применять разложения оператора по системе многочленов и тензоров Чебышева. Эта система отличается высокой скоростью равномерной сходимости разложений, что уменьшает сложность решения кинетического уравнения переноса излучений в многомерных задачах.

Список литературы

[1] *Pomraning G.C.* The Equations of Radiation Hydrodynamics. NY.: Pergamon Press, 1973. 286 pp. URL: https://www.twirpx.com/file/546222/

[2] Handbook of Nuclear Engineering. Vol. I. Nuclear Engineering Fundamentals / Ed. Cacuci D.G. NY.: Springer, 2010. 749 pp. URL: https://www.twirpx.com/file/464888/

[3] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. 4-е изд. М.: Наука, 1981. 512 с. URL: https://www.twirpx.com/file/8492/
Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. NY.: Marcel Dekker, 1971. 418 pp. URL: https://www.twirpx.com/file/2552249/

[4] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции (специальные функции математической физики). Т. 1. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 294 с. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/special.htm
Bateman H. Higher Transcendental Functions. V. I. New York: McGraw-Hill, 1953. 302 pp.

[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции (специальные функции математической физики). Т. 2. 2-е изд. М.: Наука, 1975. 295 с. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/special.htm
Bateman H. Higher Transcendental Functions. V. II. New York: McGraw-Hill, 1953. 396 pp.

[6] *Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применение. М.: Наука, 1958. 368 с. URL: https://www.twirpx.com/file/507233/
Gel'fand I.M., Minlos R.A., Shapiro Z.Ya., Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications. NY.: Pergamon Press. 1963. 366 pp.

[7] *Годунов С.К., Михайлова Т.Ю.* Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Научная книга, 1998. 208 с. URL: https://www.twirpx.com/file/450378/
Godunov S.K., Mikhailova T.Iu., Representations of the Rotation Group and Spherical Functions. Novosibirsk: Nauchnaya kniga. 1998. 208 pp. (in Russian).

[8] *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. 2-е изд. М.: Наука, 1984. 344 с. URL: https://www.twirpx.com/file/32669/
Nikiforov A.F., Uvarov V.B., Special Functions of Mathematical Physics. A Unified Introduction with Applications. Basel: Birkhauser, 1988. 427 pp. URL: https://www.twirpx.com/file/565528/

[9] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/special.htm

Szego G., Orthogonal Polynomials. Colloquium publ. Vol. XXIII. Providence, Rhode Island: American Math. Society, 1939. 432 pp.

[10] *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 480 с. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/special.htm
Suetin P.K., Classical Orthogonal Polynomials. 2nd ed. Moscow: Nauka, 1979. 480 pp. (in Russian).

[11] *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с. URL: https://www.twirpx.com/file/2196944/
Paszkowski S., Zastosowania numeryczne wielomianow i szeregow Czebyszewa. Warszawa: Paristwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975.

[12] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. 2-е изд. М.: Наука, 2002. 800 с.
URL: https://www.twirpx.com/file/1901420/
Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Integrals and Series. V. 1. Elementary Functions. Gordon and Breach, 1986. 798 pp.

[13] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. 2-е изд. М.: Наука, 2003. 750 с.
URL: https://www.twirpx.com/file/1901423/
Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Integrals and Series. V. 2. Special Functions. Gordon and Breach, 1986. 750 pp.

[14] *Брычков Ю.А.* Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы. Справочник. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
URL: https://www.twirpx.com/file/1504958/
Brychkov Yu.A., Handbook of Special Functions. Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas. Boca Raton. CRC Press, 2008. 680 pp.
URL: http://eqworld.ipmnet.ru/en/info/books/ref-handbs.htm

[15] *Ланс Дж.Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Иностр. лит. 1962. 208 с.
URL: https://www.twirpx.com/file/2134653/
Lance G.N., Numerical Methods for High Speed Computers. London: Iliffe & Sons. 1960.

Оглавление