



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Шильков А.В., Сиваков Н.А.

Моделирование переноса
тепла излучением в
движущейся плазме с
учетом доплеровского
сдвига линий

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шильков А.В., Сиваков Н.А. Моделирование переноса тепла излучением в движущейся плазме с учетом доплеровского сдвига линий // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 250. 30 с. doi:[10.20948/prepr-2018-250](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-250)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-250>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Шильков, Н.А. Сиваков

**Моделирование переноса тепла излучением
в движущейся плазме
с учетом доплеровского сдвига линий**

Москва — 2018

Шильков А.В., Сиваков Н.А.

Моделирование переноса тепла излучением в движущейся плазме с учетом доплеровского сдвига линий

Изложен метод осреднения уравнения переноса излучения по энергии фотонов, учитывающий резонансную структуру сечений и спектров излучения, а также направленный доплеровский сдвиг линий вследствие движения плазмы. Метод использует подобие спектров в точках, характеризующихся равновеликим поглощением. Объединение точек в одну расчетную точку сильно сокращает число арифметических операций при численном решении уравнения переноса излучения. Выполнена оценка влияния доплеровского сдвига линий на процессы лучистого теплообмена при решении модельных задач.

Ключевые слова: излучающая плазма, доплеровский сдвиг линий, лучистый теплообмен, экономичные расчеты спектров, метод лебеговского осреднения

Alexander Victorovich Shilkov, Nikita Alexandrovich Sivakov

Simulation of radiative heat transfer in moving plasmas, taking into account the Doppler shift of lines

The method of averaging the radiation transfer equation over the photon energy, which takes into account the resonant structure of the cross sections and emission spectra, as well as the directional Doppler shift of the lines due to the plasma motion, is presented. The method uses the similarity of spectra at points characterized by equal absorption. Combining points into one calculated point greatly reduces the number of arithmetic operations when performing numerical calculations of radiation transfer. The influence of the Doppler shift of lines on the processes of radiative heat transfer in solving model problems was estimated.

Key words: collisional-radiative plasmas, Doppler shift of lines, radiative heat transfer, time-saving calculations of spectra, Lebesgue averaging method

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект 14-11-00699 и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-01-00857а

Введение

Методы осреднения кинетических уравнений по энергии частиц, использующие в этих целях величину макросечения взаимодействия частиц с веществом, развивались в работах [1]–[13]. Более полная библиография и краткий обзор методов даны в [14]. В данной работе выполнено распространение метода лебеговского осреднения спектров [8]–[10] на процессы переноса излучения в неоднородной плазме, движущейся со сверхзвуковой скоростью. Показано, что учет направленного доплеровского сдвига центров линий можно выполнять без привлечения трудоемких поточечных расчетов полного спектра излучения. Метод лебеговского осреднения спектров – это экономичный приближенный метод расчета лучистого теплообмена в резонансно излучающих газах и плазме. Метод использует объединение точек спектра, характеризуемых равновеликим поглощением, в одну расчетную точку. За счет этого достигается сильное (на порядки) сокращение числа арифметических операций. Точность метода лебеговского осреднения спектров при решении широкого круга задач намного выше точности многогруппового приближения и методов, применяющих факторы ускользания излучения (escape-factors – англ.).

С помощью методики проведены оценочные расчеты модельных задач с учетом и без учета влияния эффекта Доплера на лучистый теплообмен. Использовалась модель Эльзассера для сечения поглощения/испускания излучения в линиях [15], [16]. При некоторых параметрах течений отличия достигали значимых величин.

Уравнение переноса излучения в неоднородно движущемся веществе впервые было сформулировано МакКри и Митрой [17], см. также, [18], с.289; [19], с.218:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \Omega_i \frac{\partial I}{\partial r_i} - \frac{\Omega_i \Omega_j}{c} \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \frac{\partial [EI]}{\partial E} + [\kappa + \chi] I = \kappa^{em} B + \quad (1)$$

$$+ \frac{\chi}{2\pi} \int_{4\pi} w(\Omega\Omega') I(\Omega') d\Omega',$$

$$B(E, T) = \frac{15\sigma_B}{\pi^5} \frac{E^3}{e^{E/T} - 1}, \quad \sigma_B = 1.028301 \cdot 10^{12} \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1} \text{ см}^{-2} \text{ эВ}^{-4}. \quad (2)$$

Здесь $I(E, \Omega, \mathbf{r}, t)$ – интенсивность излучения в неинерциальной системе отсчета, движущейся вместе с веществом; $E = h\nu$ – энергия фотонов в этой системе отсчета; Ω , $|\Omega|=1$ – направление полета фотонов; $B(E, T)$ – планковская интенсивность излучения, σ_B – постоянная Стефана-Больцмана;

$\kappa(E, \mathbf{r}, t)$ – макроскопическое сечение поглощения, $\kappa^{em}(E, \mathbf{r}, t)$ – макроскопическое сечение испускания излучения, $\chi(E, \mathbf{r}, t)$ – макросечение рассеяния излучения на свободных электронах и дисперсных частицах вещества в конденсированном состоянии, $w(\Omega\Omega')$ – индикатриса рассеяния. Макросечения имеют размерность обратной длины, энергия фотонов E и температура $T(\mathbf{r}, t)$ измеряются в электронвольтах. Уравнение (1) справедливо при нерелятивистских скоростях движения вещества $u/c \ll 1$. Плотность энергии теплового излучения $4\pi \int B(E, T) dE / c = 4\sigma_B T^4 / c$ не превышает плотности энергии вещества.

Подчеркнутое слагаемое в (1) описывает скорость прихода/ухода фотонов из пучка вследствие изменения скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ неинерциальной системы отсчета и доплеровского сдвига энергии фотонов относительно неподвижного наблюдателя. Влияние эффекта Доплера на формирование линий излучения движущейся плазмы исследуется в астрофизике в целях диагностики космических объектов [17], [18], с.289. В численном моделировании лучистого теплообмена в земной плазме обычно принимается во внимание только тепловая часть эффекта – доплеровское уширение линий вследствие хаотического движения атомов, ионов, молекул. Учет выполняется заменой лоренцевского профиля линии на фойгтовский профиль при подготовке оптических данных для расчетов. Направленная часть эффекта – систематический сдвиг центров линий вследствие газодинамического движения плазмы как целого – обычно не учитывается. Вместе с тем, в сверхзвуковых течениях плазмы систематический сдвиг может превосходить доплеровскую ширину линий. Здесь можно назвать задачи моделирования плазмы для источников ультрафиолетового излучения и инерциального термоядерного синтеза, плазмы сверхзвукового горения, плазмы за фронтом ударной волны, возникающей вблизи поверхности спускаемого космического аппарата или метеорита. Неучет доплеровского сдвига имеет две причины. А) Величина и направление сдвига зависят от направления полета фотона и вектора газодинамической скорости. В отличие от влияния эффекта на форму спектра выходящего излучения (асимметрия линий наблюдается непосредственно), влияние эффекта на скорость обмена энергией между веществом и излучением, если оно есть, происходит опосредованным образом в результате осреднения излучения по энергии фотонов и по угловым переменным. Б) Учет направленного сдвига требуется выполнять в процессе решения уравнения (1) сгущением сетки по энергии фотонов E вблизи ядра каждой линии. Если линия одна или их несколько, то расчет полного спектра затруднений не вызывает. Если же число линий достигает десятков тысяч, как, например, при моделировании лучистого теплообмена в плазме средних и тяжелых элементов, то расчет полного спектра вызывает большие трудности.

Уравнение дополняется граничными условиями, которые ставятся на движущихся или неподвижных границах $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ объема плазмы $V(t)$:

$$I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma, t) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0} = \int_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega}' > 0} K(E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) I(E, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + I^{ext}(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma, t) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0}, \quad (3)$$

где \mathbf{n} есть вектор внешней нормали к границе в точке (\mathbf{r}_Γ, t) . Фотоны, вылетающие из объема, характеризуются условием $\mathbf{n}\mathbf{\Omega} > 0$, фотоны, движущиеся от границы вглубь объема – условием $\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0$. Величина $I^{ext}(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma, t)$ есть интенсивность внешних пучков фотонов, прошедших сквозь границу или испущенных границей вглубь объема; $K(E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma, t)$ есть дифференциальное сечение отражения – вероятность перехода фотонов, падающих на границу изнутри объема в направлении $\mathbf{\Omega}'$, в пучок отраженных обратно фотонов в направлении $\mathbf{\Omega}$. В дальнейшем зависимость величин от аргумента t и некоторых других аргументов будем опускать, если это допускает изложение.

Структура сечений. Сечения поглощения и испускания излучения сложным образом зависят энергии фотонов E . Они содержат множество линий и порогов фотоионизации, соответствующих переходам частиц вещества между квантовыми состояниями внутренней энергии. Вблизи линий сечения резко меняются по величине на несколько порядков относительно гладкого фонового сечения между линиями. Ограничимся рассмотрением относительно плотной плазмы, в которой скорости безызлучательных столкновительных процессов велики. Населенности уровней имеют бoльцмановское распределение:

$$N_n^\alpha(\mathbf{r}) = N^\alpha(\mathbf{r}) \frac{g_n^\alpha}{g^\alpha(T)} e^{-[E_n^\alpha - E_1^\alpha]/T}, \quad N^\alpha(\mathbf{r}) = \sum_n N_n^\alpha(\mathbf{r}), \quad (4)$$

$$g^\alpha(T) = \sum_n g_n^\alpha e^{-[E_n^\alpha - E_1^\alpha]/T}.$$

Здесь N^α – концентрация тяжелых частиц типа « α » (молекул, атомов, ионов заданной кратности), N_n^α – концентрация частиц α в состоянии с энергией E_n^α , g_n^α – статистический вес, g^α – статистическая сумма, T – температура свободных электронов (кинетическая температура — для слабоионизованных газов). Наличие химического и ионизационного равновесия между типами частиц не предполагается. Изложение метода лебеговского осреднения можно провести и в случае разреженной плазмы с неравновесными населенностями уровней. Но это добавит в изложение детали, рассмотрение которых не входит в цели работы и усложнит понимание метода. При выполнении (4) макросечение поглощения равно макросечению испускания излучения:

$$\kappa(E, \mathbf{r}) = \kappa^{em}(E, \mathbf{r}) = \sum_{\alpha, n} N_n^\alpha(\mathbf{r}) \sigma_n^\alpha(E, T, \rho), \quad (5)$$

$$\sigma_n^\alpha(E, T, \rho) = [1 - e^{-E/T}] [\sigma_n^e(E, T, \rho) + \sigma_n^p(E, T, \rho) + \sigma_n^l(E, T, \rho)],$$

$$\sigma_n^l(E, T, \rho) = \sum_{m>n} \sigma_{n \rightarrow m}(E) = \sum_{m>n} S_{nm} F_{nm}(E - E_{nm}), \quad \int F_{nm}(E - E_{nm}) dE = 1.$$

Здесь $\sigma_n^\alpha(E, T, \rho)$ есть сечение поглощения излучения частицей в состоянии E_n^α с поправкой на вынужденное испускание. Сечение включает сечение тормозных процессов σ_n^e , сечение фотоионизации σ_n^p (и фотодиссоциации – для молекул) и серию σ_n^l резонансных сечений $\sigma_{n \rightarrow m}$, соответствующих переходам частицы из состояния E_n^α в состояния с большей энергией $E_m^\alpha > E_n^\alpha$. $E_{nm} = E_m^\alpha - E_n^\alpha$ – энергия перехода, S_{nm} – сила линии, $F_{nm}(E - E_{nm})$ – фойгтовский профиль линии [20]–[23].

При смещении из одной точки неоднородной плазмы \mathbf{r}_1 в другую точку \mathbf{r}_2 меняются как концентрации частиц $N_n^\alpha(\mathbf{r})$ на уровне возбуждения E_n^α , так и сечение поглощения излучения этими частицами $\sigma_n^\alpha(E, T, \rho)$, $T = T(\mathbf{r})$, $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Частицы в состоянии возбуждения E_n^α будем называть компонентом плазмы. Количество компонентов, которые при пространственном смещении меняются *независимо* друг от друга можно уменьшить до двух–пяти независимых компонентов на частицу типа α , если объединить уровни с близкой энергией возбуждения. Пусть b есть индекс компонента, т.е. группы уровней ε_b с энергиями $E_{n1}^\alpha, E_{n2}^\alpha, \dots, E_{nN}^\alpha$. В атомной физике применяется несколько вариантов объединения уровней (см., например [24], с.54). Если учитывать бoльцмановскую статистику (4), то средняя энергия $E_b(T)$, концентрация частиц N_b и статистический вес $g_b(T)$ компонента вычисляются по формулам:

$$E_b(T) = \frac{1}{N_b} \sum_{n \in \varepsilon(b)} E_n^\alpha N_n^\alpha = \frac{1}{N_b} \sum_{n \in \varepsilon(b)} E_n^\alpha g_n^\alpha e^{-[E_n^\alpha - E_1^\alpha]/T}, \quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M,$$

$$N_b = \sum_{n \in \varepsilon(b)} N_n^\alpha = N^\alpha \frac{g_b(T)}{g^\alpha(T)} e^{-[E_b - E_1^\alpha]/T}, \quad g_b(T) = \sum_{n \in \varepsilon(b)} g_n^\alpha e^{-[E_n^\alpha - E_b]/T}.$$

Здесь и далее используется сплошная нумерация компонентов. Сначала нумеруются компоненты (группы уровней) частицы α_1 , затем – частицы α_2 и т.д. В результате объединения уровней макросечение поглощения и испускания излучения (5) можно записать в виде линейной комбинации сечений компонентов:

$$\kappa(E, \mathbf{r}) = \sum \kappa_b = \sum N_b \sigma_b = \sum N_b [\sigma_b^e + \sigma_b^p + \sigma_b^l], \quad (6)$$

$$\sigma_b^{e,p,l}(E, T, \rho) = \frac{1 - e^{-E/T}}{g_b} \sum_{n \in \varepsilon(b)} g_n^\alpha e^{-[E_n^\alpha - E_b]/T} \sigma_n^{e,p,l} = \varphi_b^{e,p,l}(T, \rho) \psi_b^{e,p,l}(E, T, \rho).$$

Сечение тормозного поглощения σ_b^e , сечение фотоионизации σ_b^p и сечение резонансных переходов σ_b^l есть произведение некоторой функции термодинамических параметров плазмы $\varphi_b^{e,p,l}(T, \rho)$ и функции энергии фотонов $\psi_b^{e,p,l}(E, T, \rho)$ [20], с.222; [21], с.124. Последняя зависит от (T, ρ) слабо. Функция $\psi_b^e(E) \sim E^{-3}$ есть монотонно убывающая функция энергии. Функция $\psi_b^p(E)$ увеличивается скачком, если энергия фотона равна энергии ионизации какого-либо уровня компонента. За порогом ионизации функция убывает примерно по тому же закону, что и функция $\psi_b^e(E)$. Функции $\psi_b^e(E)$, $\psi_b^p(E)$ можно объединить [20], с.233. Для сечения резонансных переходов:

$$\varphi_b^l(T, \rho) = \frac{1}{g_b} \sum_{n \in \varepsilon(b)} g_n^\alpha e^{-[E_n^\alpha - E_b]/T} \sum_{m>n} S_{n,m} \gamma_{n,m}(T, \rho), \quad \psi_b^l(E, T, \rho) = \frac{\sigma_b^l}{\varphi_b^l}. \quad (7)$$

Вне фойгтовского ядра линий $\gamma_{nm} + \gamma_D$, т.е. почти при всех энергиях E , $[E - E_{nm}]^2 / [\gamma_{nm} + \gamma_D]^2 > 1$ функция ψ_b^l зависит от (T, ρ) слабо:

$$\psi_b^l(E, T, \rho) \approx \frac{[1 - e^{-E/T}] \sum_{n \in \varepsilon(b)} g_n^\alpha e^{-[E_n^\alpha - E_b]/T} \sum_{m>n} \frac{S_{nm} \gamma_{nm}(T, \rho)}{[E - E_{nm}]^2}}{\sum_{n \in \varepsilon(b)} g_n^\alpha e^{-[E_n^\alpha - E_b]/T} \sum_{m>n} S_{nm} \gamma_{nm}(T, \rho)}.$$

$\gamma_{nm}(T, \rho)$ – сумма естественной и ударной ширины линии, $\gamma_D(T)$ – доплеровская ширина линии.

Метод лебеговского осреднения спектров

Метод лебеговского осреднения [8]–[10] использует схожесть, подобие поля излучения $I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r})$, формируемого вблизи разных линий в точках спектра E , имеющих одинаковое по величине макросечение поглощения $\kappa(E)$. Эти точки спектра объединяются в одну точку. В математике такое объединение точек выполняется заменой интеграла Римана немонотонной функции на интеграл Лебега. Отсюда возникло название метода.

Носители резонансов. Фактором, разрушающим подобие спектров, является неоднородность плазмы. Пространственное изменение концентраций компонентов, температуры и плотности приводит к изменениям относительной силы разных линий. Точки спектра, которые в одной части объема имеют одинаковое по величине макросечение, будут иметь разное по величине макросечение в другой части объема. Для того чтобы сохранить близость макросечения некоторой серии точек во всем объеме, спектр энергий $0 < E < \infty$ разбивается на подмножества, называемые носителями резонансов [9], [10]. Каждый носитель содержит сильные резонансы только одного компонента. На носителе макросечение поглощения пропорционально резонансному сечению компонента (6). Наличие у сечения структуры $\sigma_b^l = \phi_b^l \psi_b^l$ (7), где функция $\psi_b^l(E, T, \rho)$ не зависит от концентраций компонентов и слабо зависит от термодинамических параметров, обеспечивает примерное равенство макросечения по величине во всех точках серии. Величина макросечения может меняться, но меняется одинаково во всех точках серии. Уравнение переноса излучения решается на каждом носителе отдельно, независимо от других носителей.

Для выделения носителей резонансов осредним макросечение поглощения по объему $V(t)$ и по характерному временному интервалу $t_0 < t < t_0 + \tau$, если задача нестационарна:

$$\langle \kappa(E) \rangle = \sum \langle \kappa_b(E) \rangle = \sum \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{1}{V(t)} \int_V \kappa_b(E, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt. \quad (8)$$

Средние макросечения компонентов $\langle \kappa_b(E) \rangle$ зависят только от энергии фотонов E . Средние достаточно вычислить приближенно, используя характерный для задачи диапазон изменения концентраций компонентов $N_b(\mathbf{r}, t)$, диапазон изменения термодинамических параметров (T, ρ) и таблицы сечений $\sigma_b(E, T, \rho)$. Погрешность вычисления средних слабо влияет на погрешность метода лебеговского осреднения.

В носитель резонансов $\omega(b)$ компонента b включаются интервалы спектра энергий E , на которых среднее макросечение компонента больше среднего макросечения любого другого компонента: $\langle \kappa_b(E) \rangle > \langle \kappa_d(E) \rangle$, где $d \neq b$. Носитель резонансов может состоять из конечного числа несмежных интервалов $E_k^{left} < E < E_k^{right}$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Направленный эффект Доплера приводит к асимметрии спектра излучения $I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r})$, формируемого в левом и в правом крыле линии E_{nm} на интервале, размер которого имеет порядок нескольких доплеровских ширин. Для учета асимметрии спектра поделим носитель резонансов на два: $\omega(b) = \omega^+(b) + \omega^-(b)$,

включив в носитель $\omega^+(b)$ интервалы роста среднего макросечения $d\langle\chi\rangle/dE \geq 0$, а в носитель $\omega^-(b)$ – интервалы падения макросечения $d\langle\chi\rangle/dE < 0$. Левые крылья линий компонента b окажутся в носителе $\omega^+(b)$, правые крылья – в носителе $\omega^-(b)$. Если носители $\omega^\pm(b)$ слишком широки, т.е. расстояние между крайними границами значительно превышает T , то целесообразно дополнительно разбить их на более компактные носители, так чтобы планковская интенсивность $B(E,T)(2)$ в пределах носителя менялась не очень сильно.

В результате спектр энергий фотонов будет разбит на некоторое количество носителей резонансов. Число носителей сопоставимо с числом компонентов плазмы. Некоторые компоненты, имеющие слабые линии, могут не получить собственного носителя. Так как линии относительно узки по сравнению с расстоянием между ними, то на носителе $\omega^+(b)$ или $\omega^-(b)$ сильные линии и пороги фотоионизации компонента b лежат на фоновом сечении, формируемом далекими крыльями линий остальных компонентов $d \neq b$, сечением тормозных процессов и частично сечением фотоионизации. Фоновое сечение есть функция малой вариации.

Макросечение поглощения (6) в пределах носителя резонансов $\omega^\pm(b)$ можно аппроксимировать функцией:

$$\chi(E, \mathbf{r}) \approx N_b(\mathbf{r}) \sigma_b(E, T, \rho) + k_b^\pm(\mathbf{r}), \quad k_b^\pm(\mathbf{r}) = \sum_{d \neq b} N_d(\mathbf{r}) \sigma_{d,b}^\pm(T, \rho), \quad (9)$$

$$\sigma_{d,b}^\pm(T, \rho) = \int_{\omega^\pm(b)} \sigma_d(E, T, \rho) B(E, T) dE \Big/ \int_{\omega^\pm(b)} B(E, T) dE, \quad E \in \omega^\pm(b), \quad (10)$$

где $\sigma_b = \sigma_b^e + \sigma_b^p + \sigma_b^l$ – сечение поглощения излучения частицей компонента b ; $k_b^\pm(\mathbf{r})$ – среднее фоновое макросечение, не зависящее от энергии фотонов. Макросечение формируется частицами остальных компонентов $d \neq b$ на носителе резонансов $\omega^\pm(b)$; $\sigma_{d,b}^\pm(T, \rho)$ – среднее парциальное сечение частицы компонента d на носителе $\omega^\pm(b)$.

Если макросечение рассеяния излучения $\chi(E)$, индикатрисса рассеяния $w(E, \Omega \Omega')$ и дифференциальное сечение отражения от границы не имеют резонансов, то их можно аппроксимировать кусочно-постоянными функциями на носителях резонансов:

$$\chi(E, \mathbf{r}) \approx \chi_b^\pm(\mathbf{r}) = \frac{\int \chi(E, \mathbf{r}) B(E, T) dE}{\int_{\omega^\pm(b)} B(E, T) dE}, \quad E \in \omega^\pm(b), \quad (11)$$

$$w(E, \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}', \mathbf{r}) \approx w_b(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}', \mathbf{r}) = \frac{\int w(E, \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}', \mathbf{r}) \chi(E) B(E, T) dE}{\int_{\omega^\pm(b)} \chi(E) B(E, T) dE},$$

$$K(E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma) \approx K_b(\mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma) = \frac{\int K(E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma) B(E, T) dE}{\int_{\omega^\pm(b)} B(E, T) dE}.$$

Система вложенных множеств. Дальнейшие построения проводятся в пределах носителя ω^+ или ω^- какого-либо компонента. Будем следовать варианту метода лебеговского осреднения [25], в котором для дальнейшего разбиения носителя используется среднее по объему полное макросечение (8). В вариантах метода [8]–[10] для этих целей используется локальное полное макросечение (5).

Представим среднее полное макросечение (8) в виде суммы:

$$\langle \chi(E) \rangle = \eta_b(E) + \langle \chi \rangle_b, \quad \langle \chi \rangle_b = \min_{E \in \omega^\pm(b)} \langle \chi(E) \rangle, \quad (12)$$

где $\langle \chi \rangle_b$ – минимум (фон) сечения на носителе резонансов $\omega^\pm(b)$, $\eta_b(E)$ – среднее по объему полное макросечение за вычетом фона. Индекс носителя будем опускать, если это допускает изложение. Построим на носителе ω^\pm систему вложенных множеств, включив в множество $\omega^\pm(\eta) = \{E : \eta(E) < \eta\}$ такие энергии E , при которых макросечение удовлетворяет условию: $\eta(E) < \eta$, где η – линия уровня (см. Рис. 1). Множество $\omega^\pm(\eta)$ состоит из интервалов $E_k^l < E < E_k^r(\eta)$, $k = 1, 2, \dots$, на которых макросечение растет $d\eta/dE \geq 0$. Левая граница каждого интервала E_k^l есть точка локального минимума макросечения $\eta(E)$, совпадающая с левой границей соответствующего интервала носителя резонансов ω^+ : $E_k^l = E_k^{left}$. Правые границы интервалов $E_k^r(\eta)$, $k = 1, 2, \dots$ суть точки с одинаковым уровнем поглощения: $\eta = \eta(E_k^r)$. При увеличении уровня η от η_1 до η_2 , $\eta_1 < \eta_2$ левые границы неподвижны, правые границы

смещаются вправо так, что: $E_k^r(\eta_1) \leq E_k^r(\eta_2)$. Имеет место вложение множеств: $\omega^+(\eta_1) \subseteq \omega^+(\eta_2) \subseteq \omega^+$.

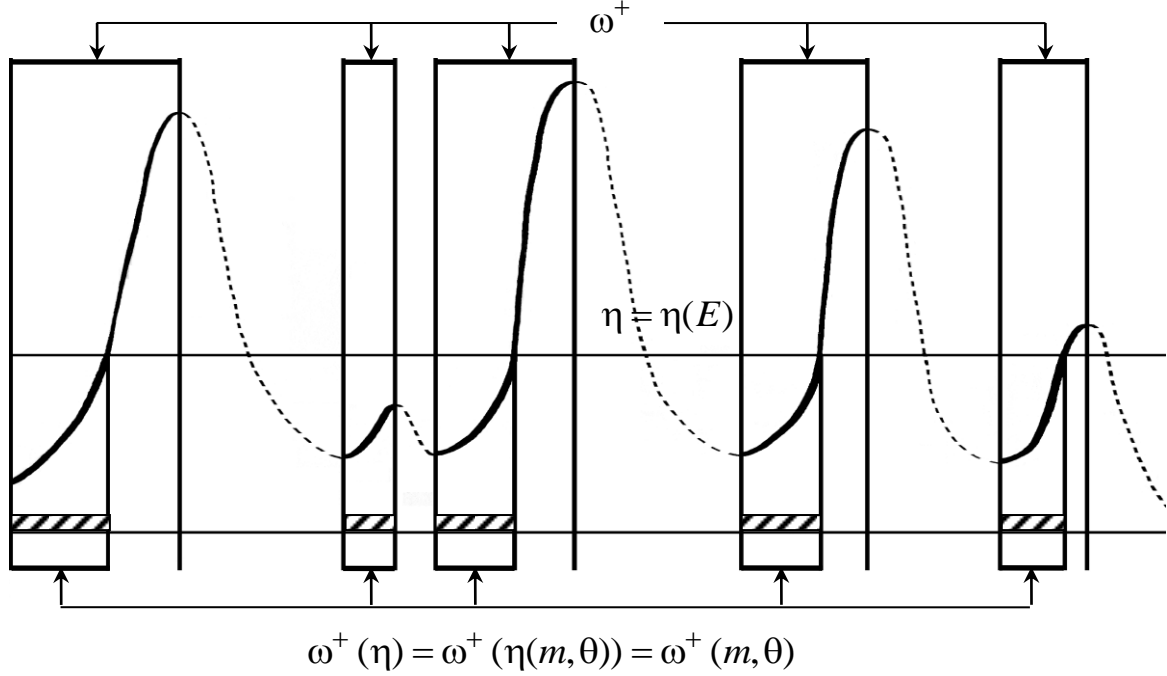


Рис. 1. Лебегово множество $\omega^+(\eta)$ на носителе резонансов ω^+ .

Множество $\omega^-(\eta)$ состоит из интервалов $E_k^l(\eta) < E < E_k^r$, $k = 1, 2, \dots$, на которых $d\eta/dE < 0$. Правая граница каждого интервала E_k^r совпадает с неподвижной правой границей E_k^{right} соответствующего интервала носителя ω^- : $E_k^r = E_k^{right}$. Левые границы интервалов $E_k^l(\eta)$, $k = 1, 2, \dots$ суть точки с равновеликим уровнем поглощения $\eta = \eta(E_k^l)$. При увеличении уровня η от η_1 до η_2 левые границы смещаются влево: $E_k^l(\eta_2) \leq E_k^l(\eta_1)$. Имеет место вложение множеств: $\omega^-(\eta_1) \subseteq \omega^-(\eta_2) \subseteq \omega^-$, $\eta_2 > \eta_1$.

При $\eta = 0$ множество пусто $\omega^\pm(0) = \emptyset$. При некотором $\eta = \eta_b$ множество $\omega^\pm(\eta_b)$ всюду плотно заполняет носитель резонансов ω^\pm . Введем меру m множества $\omega^\pm(\eta)$ с помощью интеграла:

$$m(\eta, \theta) = \int_{\omega^\pm(\eta)} S(E, \theta) dE = \sum_k \int_{E_k^l(\eta)}^{E_k^r(\eta)} S(E, \theta) dE, \quad S(E, \theta) = \frac{B(E, \theta)}{\int_{\omega^\pm} B(E, \theta) dE}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \eta} \geq 0, \quad 0 \leq m(\eta, \theta) \leq 1, \quad m(0, \theta) = 0, \quad m(\eta_b, \theta) = 1.$$

Здесь $S(E, \theta)$ – весовой спектр, пропорциональный планковской интенсивности (2) с яркостной температурой излучения $\theta = \theta(\mathbf{r})$. Весовой спектр нормирован на единицу на носителе резонансов ω^\pm . Так как мера есть неубывающая функция аргумента η , то существует неубывающая обратная функция $\eta = \eta(m, \theta)$. Параметризуем систему вложенных множеств через их меру m , выполнив с помощью обратной функции замену переменных: $\omega^\pm(\eta) = \omega^\pm(\eta(m, \theta)) = \omega^\pm(m, \theta)$. При $m=0$ множество пусто $\omega^\pm(0, \theta) = \emptyset$. При $m=1$ множество $\omega^\pm(1, \theta)$ плотно заполняет носитель резонансов ω^\pm . Правые границы $E_k^r(m, \theta) = E_k^r(\eta(m, \theta))$, $k=1, 2, \dots$ множества $\omega^+(m, \theta)$ и левые границы $E_k^l(m, \theta)$, $k=1, 2, \dots$ множества $\omega^-(m, \theta)$ по-прежнему суть точки с равновеликим поглощением. Уровень поглощения (он свой для множества $\omega^+(m, \theta)$ и множества $\omega^-(m, \theta)$) есть функция $\eta = \eta(m, \theta)$, зависящая от аргументов m и θ .

Дифференцируя (13) по мере множества m и по переменной θ , при условии, что m выбирается в качестве независимой переменной, задающей систему лебеговых множеств, получим следующие тождества.

Для носителя ω^+ :

$$\frac{\partial m}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \sum_k \int_{E_k^{left}}^{E_k^r(m, \theta)} S(E, \theta) dE = \sum_k S(E_k^r, \theta) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} = 1, \quad \frac{\partial E_k^r}{\partial m} \geq 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \theta} = \sum_k S(E_k^r, \theta) \frac{\partial E_k^r}{\partial \theta} + \int_{\omega^+(m, \theta)} \frac{\partial S(E, \theta)}{\partial \theta} dE = \sum_k S(E_k^r, \theta) \frac{\partial E_k^r}{\partial \theta} - \frac{A(m, \theta)}{\theta} = 0.$$

Для носителя ω^- :

$$\frac{\partial m}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \sum_k \int_{E_k^l(m, \theta)}^{E_k^{right}} S(E, \theta) dE = -\sum_k S(E_k^l, \theta) \frac{\partial E_k^l}{\partial m} = 1, \quad \frac{\partial E_k^l}{\partial m} \leq 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \theta} = -\sum_k S(E_k^l, \theta) \frac{\partial E_k^l}{\partial \theta} + \int_{\omega^-(m, \theta)} \frac{\partial S(E, \theta)}{\partial \theta} dE = -\sum_k S(E_k^l, \theta) \frac{\partial E_k^l}{\partial \theta} - \frac{A(m, \theta)}{\theta} = 0.$$

Здесь применены правила дифференцирования интеграла с переменными пределами интегрирования. Функция $A(m, \theta)$ дается выражением:

$$A(m, \theta) = -\theta \int_{\omega^\pm(m, \theta)} \frac{\partial S(E, \theta)}{\partial \theta} dE = [\gamma(1, \theta) - \gamma(m, \theta)] m, \quad (16)$$

$$\gamma(m, \theta) = \int_{\omega^{\pm}(m, \theta)} \frac{EB(E, \theta) dE}{1 - e^{-E/\theta} \theta} \bigg/ \int_{\omega^{\pm}(m, \theta)} B(E, \theta) dE.$$

При $m=0$ и $m=1$ функция равна нулю: $A(0, \theta) = A(1, \theta) = 0$. Как показали расчеты [14], она мала и при промежуточных значениях m , что является следствием нормировки весового спектра $S(E, \theta)$ на единицу на носителе резонансов. При решении многих практических задач функцией $A(m, \theta)$ можно пренебрегать.

Лебегова интенсивность излучения. Введем кумулятивное (нарастающим итогом) распределение излучения $F(m, \theta, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)$ на системе вложенных множеств, определяемое как интеграл от интенсивности излучения $I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)$ по множеству $\omega^{\pm}(m, \theta)$:

$$F(m, \theta) = \int_{\omega^{\pm}(m, \theta)} I(E) dE = \sum_k \int_{E_k^l(m, \theta)}^{E_k^r(m, \theta)} I(E) dE, \quad 0 \leq m \leq 1. \quad (17)$$

При $m=0$ кумулятивное распределение равно нулю, при $m=1$ оно равно интегралу от интенсивности излучения по носителю резонансов. Лебеговой интенсивностью излучения называется плотностью распределения: $J(m, \theta, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \partial F / \partial m \geq 0$.

Для носителя ω^+ :

$$\begin{aligned} J(m, \theta) &= \frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \sum_k \int_{E_k^{left}}^{E_k^r(m)} I(E) dE = \sum_k I(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} = \\ &= \sum_k \frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} = \left\langle \frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} \right\rangle \sum_k S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} = \left\langle \frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Для носителя ω^- :

$$\begin{aligned} J(m, \theta) &= \frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \sum_k \int_{E_k^l(m)}^{E_k^{right}} I(E) dE = - \sum_k I(E_k^l) \frac{\partial E_k^l}{\partial m} = \\ &= - \sum_k \frac{I(E_k^l)}{S(E_k^l)} S(E_k^l) \frac{\partial E_k^l}{\partial m} = - \left\langle \frac{I(E_k^l)}{S(E_k^l)} \right\rangle \sum_k S(E_k^l) \frac{\partial E_k^l}{\partial m} = \left\langle \frac{I(E_k^l)}{S(E_k^l)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Равенства получены с помощью (14), (15). Из (18), (19) следует, что лебегова интенсивность излучения имеет физический смысл среднего отношения интенсивности излучения $I(E)$ к весовому спектру $S(E, \theta)$, вычисляемому по

точкам с равновеликим поглощением. На носителе ω^+ это точки $E_k^r(m, \theta)$, $k = 1, 2, \dots$; на носителе ω^- – точки $E_k^l(m, \theta)$, $k = 1, 2, \dots$. Определение среднего корректно, т.к. все слагаемые сумм неотрицательны. Дисперсия распределения отношений:

$$D_1(m, \theta) = \sum_k \left[\frac{I(E_k^{r,l})}{S(E_k^{r,l})} - J(m, \theta) \right]^2 S(E_k^{r,l}) \left| \frac{\partial E_k^{r,l}}{\partial m} \right| \ll J^2(m, \theta), \quad (20)$$

мала вследствие подобия (одинаковости) спектров излучения: $I(E_k^{r,l})/S(E_k^{r,l}) \approx const$, $k = 1, 2, \dots$ на множестве точек с равновеликим поглощением/испусканием.

Аргумент m , $0 \leq m \leq 1$, лебеговой интенсивности $J(m)$ соответствует аргументу E спектральной интенсивности излучения $I(E)$. В результате перехода к (18), (19) выполнено объединение точек с равновеликим поглощением $\eta = \eta(m, \theta) = \eta(E_k^{l,r}(m, \theta))$ в одну точку, где $\eta(E) = \langle \varkappa(E) \rangle - \langle \varkappa \rangle_b$ есть среднее полное макросечение (8), (12), вычисленное осреднением по объему плазмы $V(t)$. При объединении значительно, на порядки сокращено число расчетных точек, в которых требуется находить интенсивность излучения.

Уравнение переноса излучения. Для вывода кинетического уравнения, которому удовлетворяет лебегова интенсивность излучения, проинтегрируем уравнение (1) по множеству $\omega^+(m, \theta)$. Поясним вычисление отдельных интегралов.

$$\text{Дифференциальный оператор переноса } L = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_i \frac{\partial}{\partial r_i} :$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega^+(m)} LI dE &= L \sum_k \int_{E_k^{left}}^{E_k^r(m, \theta)} IdE - \sum_k I(E_k^r) L E_k^r = \\ &= LF - \sum_k \frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial \theta} L \theta \approx LF - J \sum_k S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial \theta} L \theta = \\ &= LF(m, \theta) - J(m, \theta) A(m, \theta) L \ln \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь применены правила дифференцирования интеграла с переменными пределами интегрирования; из суммы по серии точек $\{k\}$ с равновеликим поглощением вынесено среднее отношение $\langle I(E_k^r)/S(E_k^r) \rangle = J$ (18), затем применены тождества (14).

Скорость прихода/ухода фотонов вследствие направленного доплеровского сдвига:

$$\int_{\omega^+(m)} \frac{\partial[EI]}{\partial E} dE = \sum_k [E_k^r I(E_k^r) - E_k^{left} I(E_k^{left})] = \quad (22)$$

$$= \sum_k \frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} E_k^r S(E_k^r) - \sum_k E_k^{left} I(E_k^{left}) \approx J(m, \theta) \sum_k E_k^r S(E_k^r) - \sum_k E_k^{left} I(E_k^{left}).$$

Из суммы вынесено среднее отношение $\langle I(E_k^r)/S(E_k^r) \rangle = J$.

Скорость поглощения излучения:

$$\int_{\omega^+(m)} \varkappa I dE = \int_0^m \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega^+(m)} \varkappa I dE dm = \int_0^m \frac{\partial}{\partial m} \sum_k \int_{E_k^{left}}^{E_k^r(m)} \varkappa I dE dm = \quad (23)$$

$$= \int_0^m \sum_k \frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} \varkappa(E_k^r) S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} dm \approx \int_0^m \varkappa(m, \theta) J(m, \theta) dm,$$

$$\varkappa(m, \theta, \mathbf{r}) = \sum_k \varkappa(E_k^r) S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega^+(m)} \varkappa S(E, \theta) dE.$$

Из суммы вынесено среднее отношение $\langle I(E_k^r)/S(E_k^r) \rangle = J$. Оценим ошибку Δ :

$$\Delta = \sum_k \left[\frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} - J \right] \varkappa(E_k^r) S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} =$$

$$= \sum_k \left[\frac{I(E_k^r)}{S(E_k^r)} - J \right] [\varkappa(E_k^r) - q(m, \theta)] S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m},$$

$$q(m, \theta) = \sum_k \varkappa(E_k^r) S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m},$$

$$D_2(m, \theta) = \sum_k \left[\varkappa(E_k^r) - q(m, \theta) \right]^2 S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} \ll q^2(m, \theta).$$

Здесь $q(m, \theta, \mathbf{r})$ есть среднее макросечение поглощения в точке \mathbf{r} на множестве точек с равновеликим поглощением. Дисперсия D_2 распределения макросечений $\varkappa(E_k^r, \mathbf{r})$, $k=1,2,\dots$, мала вследствие алгоритма построения

системы лебеговых множеств. Вследствие малости D_2 и дисперсии D_1 (20) ошибка осреднения пренебрежимо мала: $\Delta \approx 0$. Вычисление остальных интегралов, как и интегралов по множеству $\omega^-(m, \theta) \in \omega^-$, проводится аналогично.

Собрав все интегралы в одно равенство и выполнив дифференцирование равенства по независимой переменной m , получим уравнение переноса лебеговой интенсивности излучения J в неоднородно движущейся плазме, учитывающее эффект Доплера:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \Omega_i \frac{\partial J}{\partial r_i} \mp \frac{\Omega_i \Omega_j}{c} \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \frac{\partial [v^\pm J]}{\partial m} + [\varkappa(m, \theta) + \chi(m, \theta)] J = \quad (24)$$

$$= \varkappa(m, T) B(T) + \frac{\chi(m, \theta)}{2\pi} \int_{4\pi} w(\Omega\Omega', m) J(\Omega') d\Omega' + \frac{\partial [AJ]}{\partial m} L \ln \theta,$$

$$B(T) = \int_{\omega^\pm} B(E, \theta) dE.$$

Верхний знак относится к носителю резонансов ω^+ , нижний – к носителю ω^- ; $B(T)$ – интеграл планковской функции (2) по носителю резонансов $\omega^\pm = \omega^\pm(1)$. Подчеркнутое слагаемое описывает скорость прихода/ухода фотонов из пучка вследствие направленного доплеровского сдвига центров линий относительно неподвижного наблюдателя. Лебеговы макросечения равны:

$$\varkappa(m, \theta, \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega^\pm(m)} \varkappa(E) S(E, \theta) dE \approx N_b(\mathbf{r}) \sigma_b(m, \theta, T, \rho) + k_b^\pm(\mathbf{r}), \quad (25)$$

$$\sigma_b(m, \theta, T, \rho) = \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega^\pm(m)} \sigma_b(E, T, \rho) S(E, \theta) dE,$$

$$\chi(m, \theta, \mathbf{r}) = \sum_k \chi(E_k^r) S(E_k^r) \frac{\partial E_k^r}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega^\pm(m)} \chi(E) S(E, \theta) dE \approx \chi_b(\mathbf{r}), \quad (26)$$

$$w(m, \Omega\Omega', \mathbf{r}) \approx w_b(\Omega\Omega', \mathbf{r}), \quad \omega_b^\pm(m, \theta) \in \omega_b^\pm.$$

Конечные равенства формул получены применением аппроксимаций спектральных макросечений (9)–(11). Лебеговы сечения компонентов плазмы $\sigma_b(m, \theta, T, \rho)$ и средние парциальные сечения компонентов (10), входящие в макросечения $k_b^\pm(\mathbf{r})$, вычисляются при подготовке исходных данных для расчетов переноса излучения. Лебегово макросечение испускания излучения

$\varkappa(m, T)$ дается формулой (25) при $\theta = T$. Параметр A (16) и параметры v^\pm (они входят в скорость прихода/ухода фотонов из пучка вследствие доплеровского сдвига энергии фотонов):

$$v^+(m, \theta) = \sum_k E_k^r S(E_k^r), \quad \omega^+(m, \theta) \in \omega^+; \quad (27)$$

$$v^-(m, \theta) = \sum_k E_k^l S(E_k^l), \quad \omega^-(m, \theta) \in \omega^-$$

тоже вычисляются на этапе подготовки исходных данных.

Граничные условия получаем интегрированием (3), (11) по множеству $\omega^\pm(m, \theta)$:

$$J(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0} = \int_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega}' > 0} \mathbf{K}(\mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) J(m, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + J^{ext}(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0}, \quad (28)$$

$$J^{ext}(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma) = \frac{\partial F^{ext}(m)}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega^\pm(m, \theta)} I^{ext}(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_\Gamma) dE.$$

Лучистый поток \mathbf{W} , плотность энергии излучения U и скорость обмена энергией между плазмой и полем излучения Q :

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \int_{0 4\pi} \mathbf{\Omega} I(E, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} dE = \sum_b \int_0^1 \int_{0 4\pi} \mathbf{\Omega} J_b(m, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} dm, \quad (29)$$

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{0 4\pi} I(E, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} dE = \frac{1}{c} \sum_b \int_0^1 \int_{0 4\pi} \mathbf{\Omega} J_b(m, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} dm,$$

$$Q(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} \mathbf{W} = \int_0^\infty \int_{0 4\pi} \varkappa(E) [B(E, T) - I(E, \mathbf{\Omega})] d\mathbf{\Omega} dE =$$

$$= \sum_b \int_0^1 \int_{0 4\pi} [\varkappa_b(m, T, \mathbf{r}) B_b(T) - \varkappa_b(m, \theta, \mathbf{r}) J_b(m, \mathbf{\Omega})] d\mathbf{\Omega} dm$$

вычисляются на некоторой сетке по переменной m – своей для каждого носителя резонансов. Лебегова интенсивность излучения $J_b(m)$ на сетке находится в результате решения задачи (24), (28). Вследствие монотонного изменения лебеговых сечений по m и непрерывной, относительно плавной (без скачков) зависимости лебеговой интенсивности от m достаточно вводить не более 20 узлов сетки для достижения высокой точности. Применение метода спектральных моментов [25] сокращает число узлов сетки до 4–8.

Яркостную температуру $\theta(\mathbf{r}, t)$ весового спектра $S(E, \theta)$ можно полагать равной локальной температуре вещества: $\theta = T(\mathbf{r}, t)$. Такой выбор является экономичным, т.к. снижает на единицу размерность таблиц оптических данных для расчетов. Если температура вещества T в пределах объема испытывает сильный разрыв, то переход через поверхность разрыва желательно выполнять, сохраняя непрерывность $\theta(\mathbf{r}, t)$. Тогда лебегова интенсивность сохранит свойства непрерывности, присущие спектральной интенсивности. Сильный разрыв T может возникать в слабоионизованном газе, где T есть кинетическая температура молекул. В плазме T есть температура свободных электронов. Сильный разрыв электронной температуры встречается значительно реже. Если спектр излучения определяет доминирующий внешний источник излучения, то температуру θ можно выбирать равной температуре спектра источника или задавать весовой спектр пропорционально спектру источника. Возможны варианты с постоянной температурой θ или с температурой, вычисляемой в процессе решения задачи.

Точность осреднения. Уравнение переноса (24) является приближенным уравнением, предназначенным для моделирования процессов лучистого теплообмена. Оно обеспечивает более высокую точность решения широкого круга задач в сравнении с уравнениями многогруппового приближения и уравнениями, использующими факторы ускользания излучения (escape-factors – англ.). Важно отметить, что точность осреднения не падает при увеличении неоднородности вещества. Уравнение (24) не теряет точность, в том числе в гетерогенных объемах, состоящих из зон, заполненных плазмой разных элементов. При переходе из зоны в зону резко, скачком меняется резонансная структура макросечения поглощения/испускания излучения. Разнесение линий компонентов по разным носителям резонансов сохраняет резонансную структуру спектров. При входе пучка излучения в зону, где концентрация компонента падает до нуля, макросечение поглощения на соответствующем носителе резонансов стремится к постоянному фоновому сечению. Затухание пучка излучения в серии точек с равновеликим поглощением идет в нужном темпе. При входе пучка излучения в другую зону, в которой концентрация компонента скачком увеличивается, уровень поглощения в серии точек с равновеликим поглощением восстанавливается до нужной величины. Тестирование метода в гетерогенном веществе проведено в [25]. Точность метода может быть доведена до уровня точности исходных спектральных сечений взаимодействия излучения с веществом, если увеличивать число компонентов и носителей резонансов. Такой уровень точности достигнут в расчетах этим методом переноса излучения в атмосфере Земли [14], [26], [27]. При этом число арифметических операций в сравнении с поточечными расчетами полного спектра излучения сокращается на три–четыре порядка.

Результаты оценочных расчетов

С помощью методики проведены оценочные расчеты модельных задач с учетом и без учета направленного эффекта Доплера. В первую очередь нас интересовал вопрос о силе влияния направленного доплеровского сдвига линий на лучистый теплообмен. Для оценки мы воспользовались модельным макросечением поглощения/испускания излучения в линиях Эльзассера [15], [16]. Линии имеют одинаковую силу, профиль и размещены в спектре с одинаковым шагом. Эта простая модель не дает надежных абсолютных значений лучистых потоков. Однако она пригодна для грубой оценки относительного влияния эффекта Доплера на лучистый теплообмен. В самом деле, расстояние между линиями значительно превышает ширины линии. Эффект Доплера искажает спектр излучения вблизи ядра линии, т.е. искажения спектров разных линий слабо коррелируют друг с другом. Поэтому малосущественно – размещены ли линии в спектре равномерно или неравномерно; имеют они одинаковую силу или нет. Периодичность сечения позволила выполнить расчеты с помощью осредненного уравнения переноса (24) и с помощью уравнения (1). Контрольные поточечные расчеты спектра выполнялись на периоде макросечения.

Рассматривались одномерные течения излучающей плазмы с большим градиентом скорости и градиентом температуры. Расчет переноса излучения проводился на заданном поле термодинамических параметров и скорости плазмы, соответствующих задаче о точечном взрыве. Скорость потока возрастала примерно по линейному закону от нуля в центре симметрии $r = 0$ до максимальной скорости при $r = R = 1 \text{ см}$ (см. *Рис. 2*). Центр симметрии это – плоскость (плоское течение), прямая (цилиндрическое течение), точка (сферически симметричное течение). Отношение скорости потока к скорости звука на границе в одном варианте выбиралось равным $M(R) = 1$, в другом варианте – $M(R) = 3$. Температура падала линейно от $T_0 = 30 \text{ эВ}$ до $T_R = 3 \text{ эВ}$. Параметры вещества соответствовали плазме азота. Профили плотности и средней кратности ионизации вычислялись с помощью модельного уравнения состояния.

В данной конфигурации течения число Маха $M(R)$ задает максимальную величину направленного доплеровского сдвига и градиент газодинамической скорости потока — параметры, определяющие скорость прихода/ухода фотонов из пучка вследствие направленного эффекта Доплера. Третьим параметром, определяющим силу эффекта, является отношение доплеровской ширины к лоренцевской ширине: $\lambda = \gamma_D / [\gamma_{nm}^0 + \gamma_{nm}^c]$, точнее – среднее отношение, вычисляемое осреднением по объему. Доплеровская ширина линии γ_D менялась по пространству пропорционально корню из температуры. Естественная ширина γ_{nm}^0 задавалась постоянной. Ударная ширина γ_{nm}^c менялась пропорционально концентрации свободных электронов. Четвертый

определяющий параметр – это оптическая толщина объема плазмы. В самом деле, если линия излучает в режиме оптически тонкого тела, то форма профиля линии, наличие доплеровского сдвига центра линии или отсутствие его не влияют на суммарный выход излучения в линии. В проведенной серии модельных расчетов варьирование оптической толщины производилось заданием характерной величины планковского коэффициента поглощения:

$$\kappa_{pl}(\mathbf{r}) = \frac{\int_0^{\infty} \kappa(E, \mathbf{r}) B(E, T) dE}{\int_0^{\infty} B(E, T) dE} = \frac{\sum_b B_b(T) \int_0^1 \kappa_b(m, T, \mathbf{r}) dm}{\sum_b B_b(T)}.$$

Так как планковский коэффициент пропорционален плотности плазмы, то можно считать, что варьировалась характерная плотность плазмы.

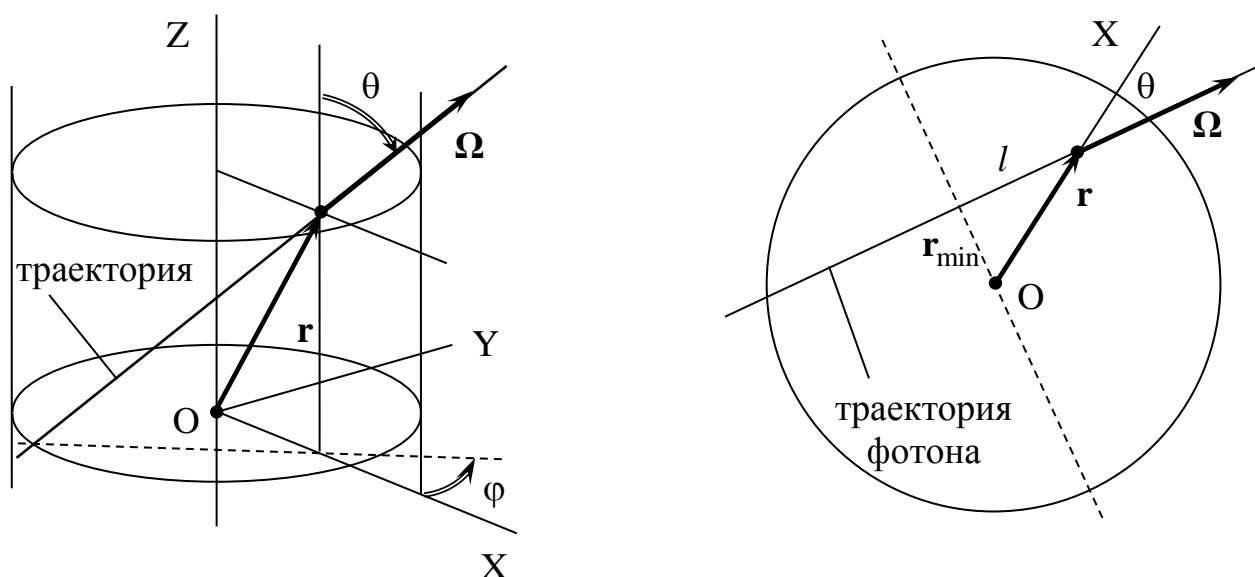


Рис. 2. Геометрия одномерных течений плазмы с цилиндрической и сферической симметрией.

На Рис. 3 и Рис. 4 приведена относительная погрешность: $w = (W_D - W) / W \times 100\%$, где W_D и W – лучистый поток на границе $r = R$, вычисленный с учетом и соответственно без учета направленного эффекта Доплера. Лучистый поток вычислялся по формуле (29). Ось абсцисс задает средний планковский коэффициент $\kappa_{pl} = \langle \kappa_{pl} \rangle$, осредненный по объему. Левая группа графиков соответствует варианту $M(R) = 1$, правая – варианту $M(R) = 3$. Непрерывная линия соответствует сферической геометрии, пунктирная – цилиндрической и штрих-пунктирная – плоской геометрии задачи.

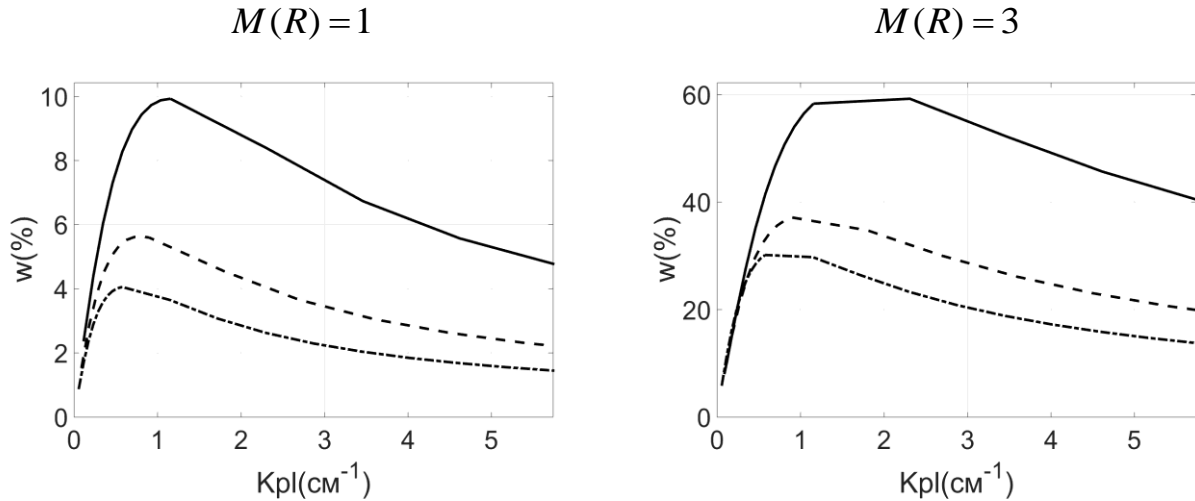


Рис. 3. Относительная погрешность потока лучистой энергии w , (%) на границе объема $r=R=1\text{см}$, вычисленного с учетом и без учета направленного доплеровского сдвига центров линий, в зависимости от среднего планковского коэффициента κ_{pl} , (см^{-1}). Среднее отношение доплеровской и лоренцевской ширины линий равно $\lambda=1$.

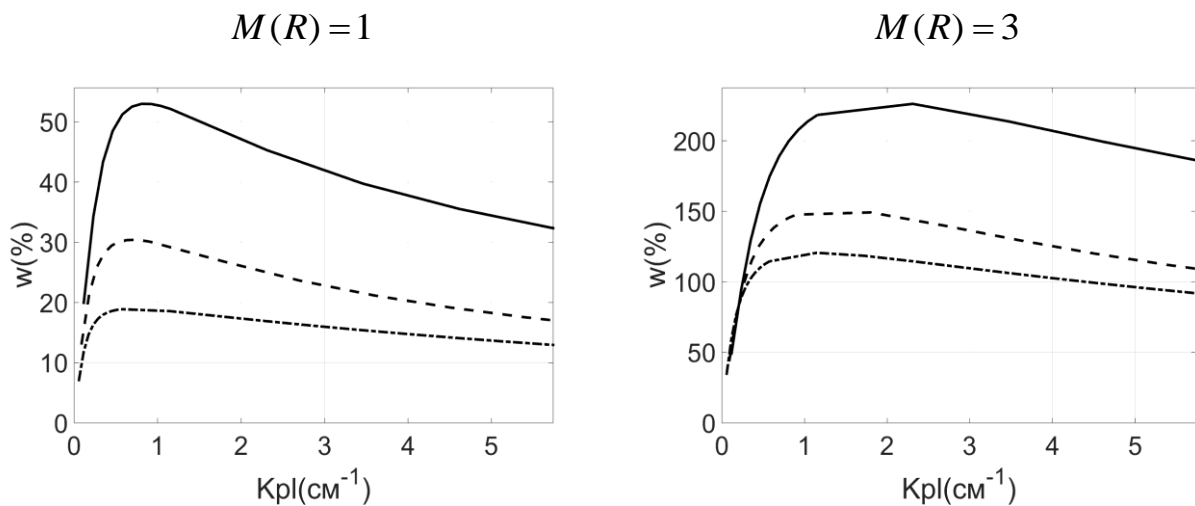


Рис. 4. То же, что и на Рис.3. Среднее отношение доплеровской ширины линии к лоренцевской ширине равно $\lambda=10$.

С увеличением планковского коэффициента (увеличением плотности плазмы) погрешность растет. После достижения максимума в некоторой точке она начинает падать, что соответствует постепенному переходу в режим излучения оптически толстого тела. Как видим, погрешность может достигать значимых величин. Кроме плотности плазмы, величина погрешности зависит от отношения доплеровской ширины линий к лоренцевской ширине λ , величины градиента скорости течения, абсолютного значения числа Маха и градиента температуры. В пределах $\kappa_{pl} \rightarrow 0, \infty$ (плазма низкой или высокой плотности) эффект Доплера не оказывает влияния на теплообмен излучением.

В приложении приведен графический материал, иллюстрирующий влияние направленного доплеровского сдвига линий на спектр выходящего из плазмы излучения в разрезе отдельных определяющих факторов: плотности плазмы, градиента температуры, градиента газодинамической скорости течения и др. Спектры получены с помощью поточечных расчетов модельных задач, выполненных на периоде макросечения Эльзассера.

Заключение

В работе выведено осредненное по энергии фотонов уравнение переноса излучения в неинерциальной системе отсчета, движущейся вместе с веществом. Помимо осреднения с весовым спектром, которое используется в многогрупповом приближении, методика осреднения учитывает схожесть, подобие спектров излучения, формируемых в серии точек с равновеликим поглощением, т.е. структуру резонансных сечений взаимодействия излучения с плазмой, а также асимметрию спектров в левом и правом крыле линий, возникающую вследствие эффекта Доплера. Суть метода лебеговского осреднения [8]–[10] состоит в объединении точек с равновеликим поглощением в одну расчетную точку, за счет чего достигается сокращение числа арифметических операций и экономия памяти при выполнении численных расчетов. В отличие от многих других методов, основанных на схожих принципах осреднения [1]–[7], [11]–[13], метод не теряет точность в неоднородных и гетерогенных потоках излучающих газов и плазмы. Это достигается разнесением сильных линий компонентов плазмы (групп уровней с близкой энергией) по разным носителям резонансов и применением математически обоснованной процедуры замены интегрирования функций по Риману на интегрирование по Лебегу. Решение осредненного уравнения позволяет экономично и достаточно точно моделировать перенос тепла излучением в сверхзвуковых потоках плазмы.

С помощью методики проведены оценочные расчеты модельных задач с учетом и без учета направленного доплеровского сдвига линий в целях выяснения влияния эффекта на лучистый теплообмен. Обсуждены определяющие параметры. Показано, что при некоторых значениях параметров эффект может оказывать влияние на точность результатов численного моделирования лучистого теплообмена в движущейся плазме.

Приложение

На

Рис. 5–

Рис. 12 приведены расчетные спектры излучения на границе $r = R = 1$ см плоского течения плазмы (плоский слой). Рисунки дают качественное представление о влиянии эффекта Доплера на спектр излучения в разрезе ряда определяющих параметров. Каждый рисунок содержит три графика,

показывающих вариацию спектра излучения при изменении одного из параметров. По оси абсцисс отложена энергия фотонов в эВ. По оси ординат – спектральная интенсивность излучения в долях планковской интенсивности, соответствующей максимальной температуре плазмы в центре симметрии течения $T_0 = 3 \text{ эВ}$. Сплошной линией изображены спектры с учетом доплеровского сдвига линии, пунктирной линией – без учета сдвига. Уширение линий за счет теплового движения частиц учитывается всегда.

Зависимость спектра от градиента температуры иллюстрируют *Рис. 5* и *Рис. 6*.

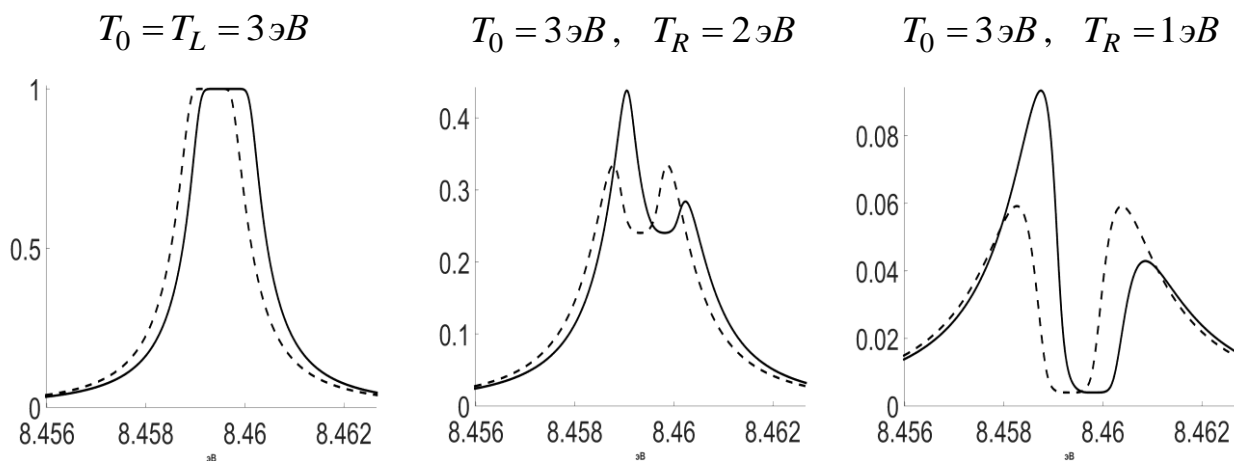


Рис. 5. Зависимость спектра излучения от градиента температуры для линии, расположенной в максимуме планковского спектра. Лоренцевская ширина линии $\gamma_0 = 10^{-4} \text{ эВ}$.

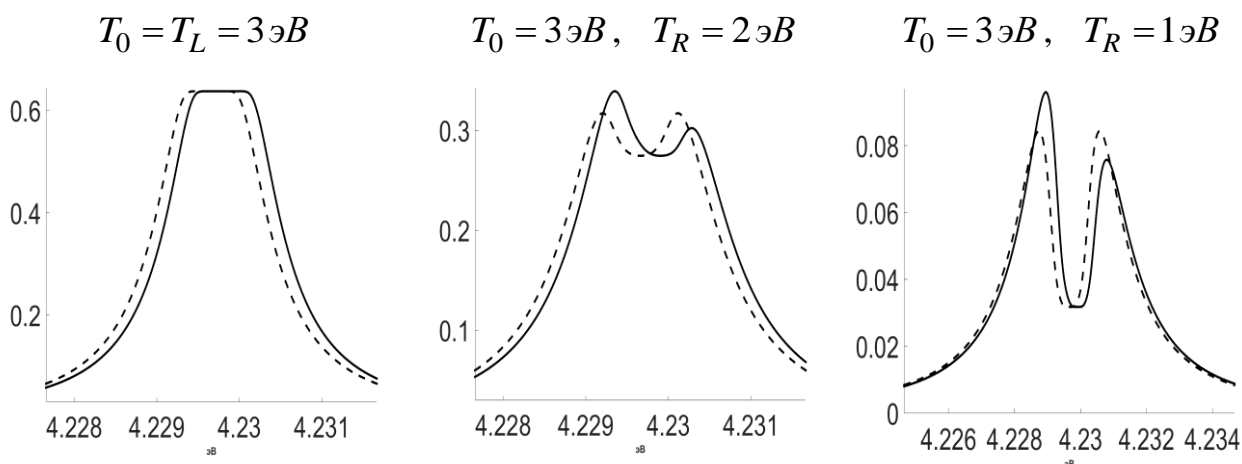


Рис. 6. То же, что и на *Рис. 5*, для линии, расположенной в рэлей-джинсовской части спектра.

Температура в центре симметрии течения $T_0 = 3 \text{ эВ}$, температура на границе принимает значения $T_R = 1, 2 \text{ и } 3 \text{ эВ}$. Остальные параметры равны: $R = 1 \text{ см}$, $\kappa_{pl} = 10^{-1} \text{ см}^{-1}$, $M(R) = 3$. Появление провала в центре (явление

обращения линии) связано с падением температуры к краю слоя. Падение температуры на правом рисунке составляет три раза. Как видим, даже небольшое падение приводит к сильному обращению спектра излучения вследствие сильной зависимости тепловых источников излучения от температуры (суммарная по спектру мощность $\sim T^4$). Направленный эффект Доплера (интенсивности изображаются сплошными кривыми) привносит асимметрию в спектры излучения в левом и правом крыле линии.

Зависимость спектра от плотности плазмы. На

Рис. 7 и

Рис. 8 изображены спектры излучения в зависимости от κ_{Pl} (и плотности плазмы) для линии в максимуме планковского распределения и линии в рэлей-джинсовской части спектра соответственно. Остальные параметры имеют значения: $R = 1 \text{ см}$, $T_0 = 3 \text{ эВ}$, $T_R = 0.3 \text{ эВ}$, $\gamma_0 = 10^{-4} \text{ эВ}$, $M = 1$.

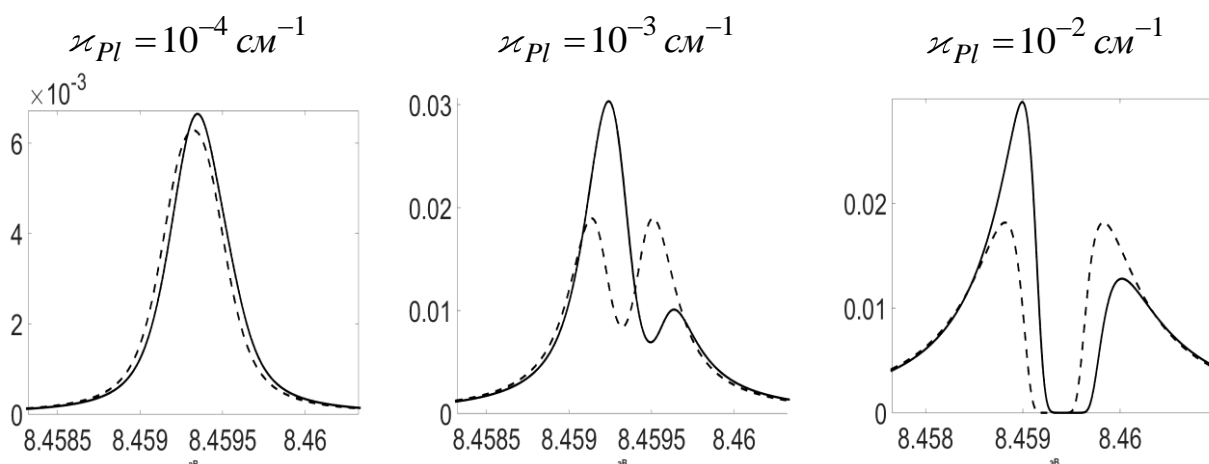


Рис. 7. Зависимость спектра излучения от оптической толщины слоя для линии, расположенной в максимуме планковского спектра.

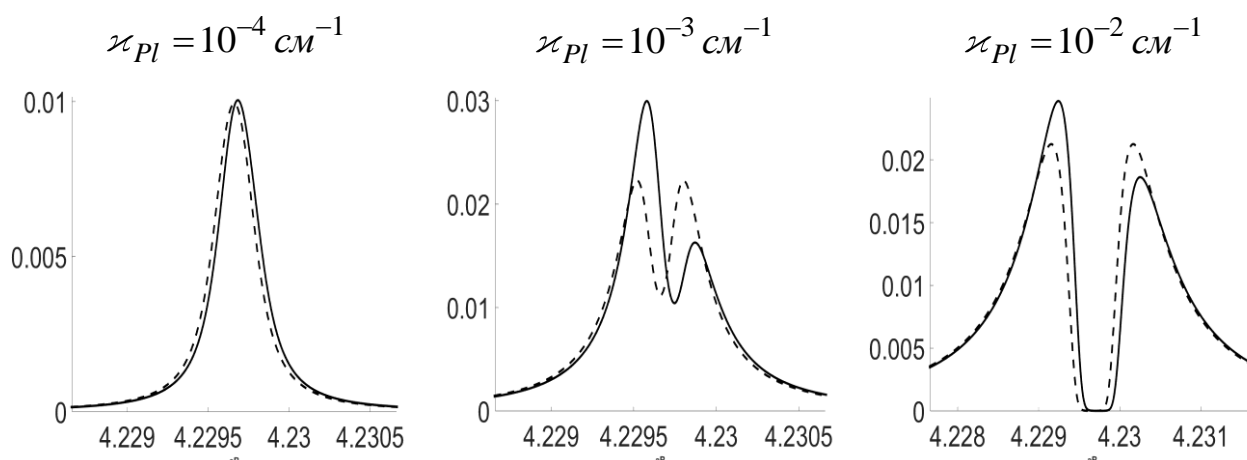


Рис. 8. То же, что и на Рис. 7, для линии в рэлей-джинсовской части спектра.

Левый рисунок дает спектр излучения слабой линии. Падение температуры к границе слоя в 10 раз к явлению обращения линии не приводит. Иное поведение спектра наблюдается в сильной линии (средний и правый рисунок).

Зависимость спектра от числа Маха и градиента газодинамической скорости демонстрируют

Рис. 9 и

Рис. 10. Остальные параметры имеют значения $R = 1 \text{ см}$, $T_0 = 3 \text{ эВ}$, $T_L = 0.3 \text{ эВ}$, $\kappa_{pl} = 10^{-2} \text{ см}^{-1}$, $\gamma_0 = 10^{-4} \text{ эВ}$.

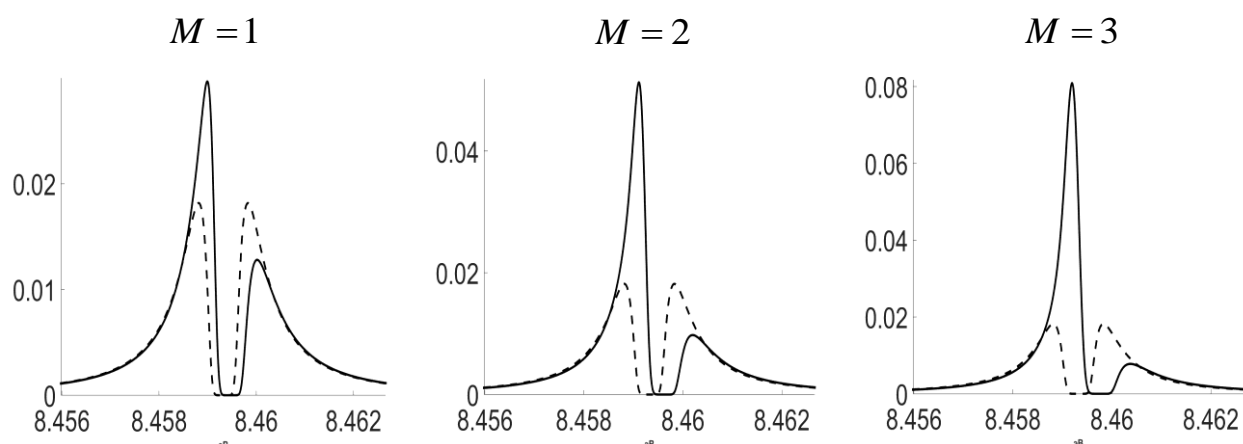


Рис. 9. Зависимость спектра излучения от градиента скорости для линии, расположенной в максимуме планковского спектра

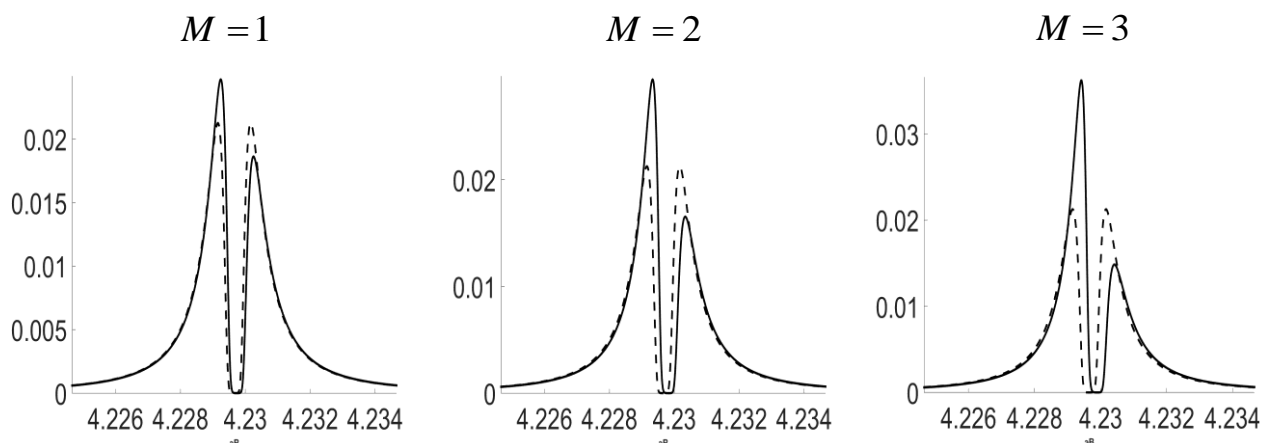


Рис. 10. То же, что и на Рис. 9, для линии, расположенной в рэлей-джинсовской части спектра

Зависимость спектра от угла между лучом зрения и направлением скорости демонстрирует

Рис. 11. Доплеровский сдвиг линии определяется скалярным произведением вектора скорости и направлением излучения. Увеличение угла приводит к уменьшению влияния направленного эффекта Доплера на

асимметрию спектра. Параметры течения: $R = 1 \text{ см}$, $T_0 = 3 \text{ эВ}$, $T_L = 0.3 \text{ эВ}$, $\kappa_{pl} = 10^{-2} \text{ см}^{-1}$, $\gamma_0 = 10^{-4} \text{ эВ}$, $M = 1$.

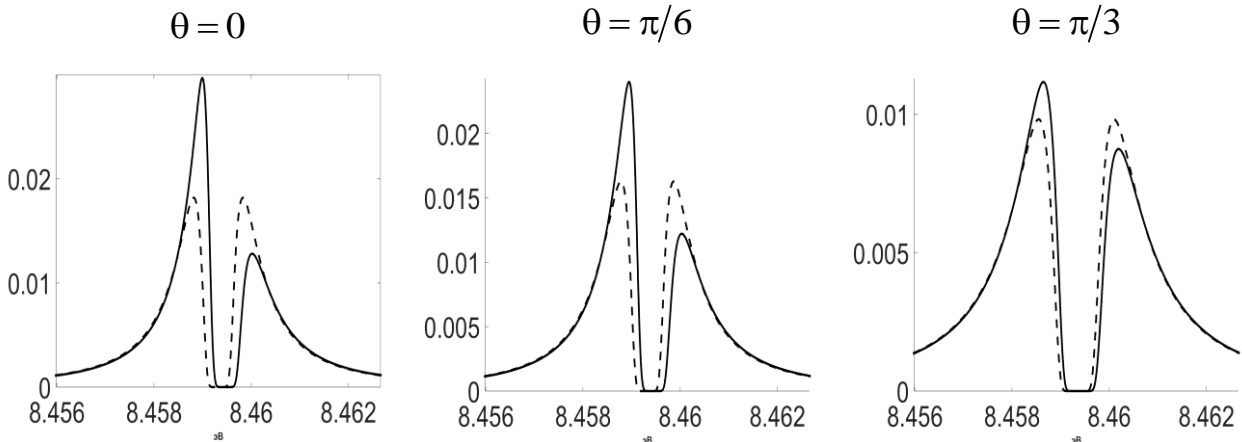


Рис. 11. Зависимость спектра излучения от угла наблюдения для линии в максимуме планковского спектра.

Зависимость спектра от отношения доплеровской и лоренцевской ширин линии иллюстрирует

Рис. 12. Остальные параметры как и на

Рис. 11. В случае, когда доплеровская ширина много меньше лоренцевской ширины ($\lambda \ll 1$), влияние эффекта Доплера (и тепловой и направленной части) становится несущественным. При $\lambda \sim 1$ и $\lambda \gg 1$ асимметрия спектра излучения велика.

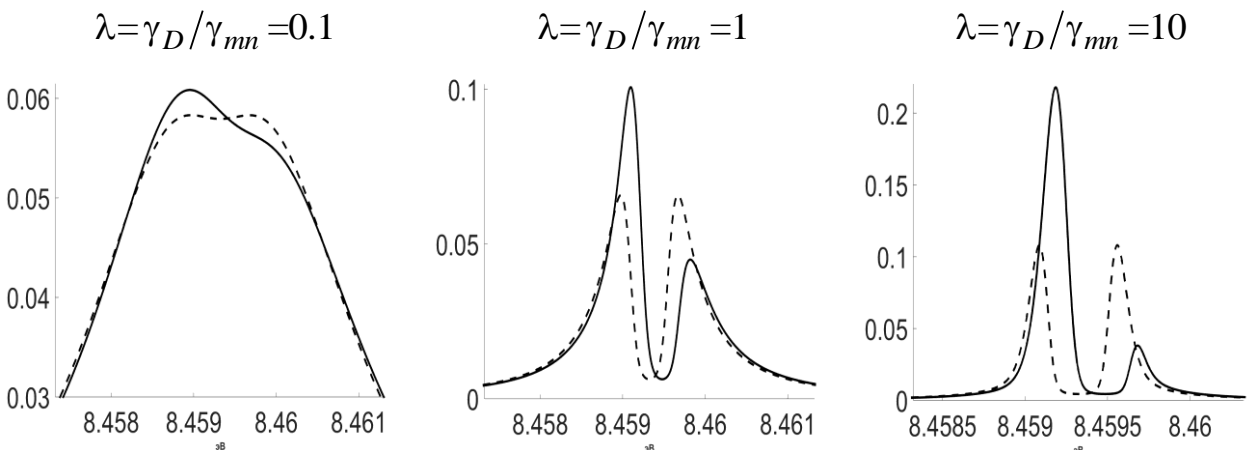


Рис. 12. Зависимость спектра излучения от отношения лоренцевской ширины к доплеровской ширине линии λ для линии, расположенной в максимуме планковского спектра.

Эффект Доплера, связанный с газодинамическим движением плазмы, может приводить к заметным искажениям спектра излучения в линиях в сверхзвуковых потоках относительно разреженной плазмы, в которых велики

градиенты скорости и температуры, а доплеровская ширина превышает столкновительную и естественную ширину линий.

Список литературы

- [1] *Ambartzumian V.* The effect of the absorption lines on the radiative equilibrium of the outer layers of the stars // Ученые записки Ленингр. унив. Серия Мат. наук (Астрономия). 1936. № 6(1). С. 7–18.
- [2] *Кондратьев К.Я.* Перенос длинноволнового излучения в атмосфере. М.: Гостехиздат, 1950. 288 с. URL: <http://www.twirpx.com/file/1346993/>
- [3] *Stewart J.C.* Non-Grey Radiative Transfer // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1964. V. 4. P. 723. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022407364900329>.
- [4] *Николаев М.Н., Игнатов А.А., Исаев Н.В., Хохлов В.Ф.* Метод подгрупп для учета резонансной структуры сечений в нейтронных расчетах. Часть 1 // Атомная энергия. 1970. Т. 29. № 1. С. 11–16.
URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/BF01338769>
Nikolaev M.N., Ignatov A.A., Isaev N.V., Kokhlov V.F. The method of subgroups for considering the resonance structure of the cross sections in neutron calculations. Part 1 // Soviet Atomic Energy. 1970. V. 29. No 1. P. 689. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01338769>.
- [5] *Гольдин В.Я., Четверушкин Б.Н.* Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики // Ж. Вычисл. матем. и мат. физики. 1972. Т. 12(4). С. 990–1001.
URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=6661>
Gol'din V.Ya., Chetverushkin B.N. Methods of solving one-dimensional problems of radiation gas dynamics // USSR Comp. Mathematics and Math. Physics. 1972. V. 12. No 4. P. 177.
URL.: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/004155537290122X?via%3Dihub>
- [6] *Arking A.A., Grossman K.* The Influence of Line Shape and Band Structure on Temperatures in Planetary Atmospheres // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. P. 937–949. URL: <http://journals.ametsoc.org/toc/atsc/29/5>
- [7] *Cullen D.E.* Application of the Probability Tabel Method to Multigroup Calculations of Neutron Transport // J. Nuclear Sci. and Engineering. 1974. V. 55. P. 387–400. URL: http://www.ans.org/pubs/journals/nse/a_23472
- [8] *Цветкова И.Л., Шильков А.В.* Осреднение уравнения переноса в резонансно поглощающей среде // Матем. моделирование. 1989. Т. 1(1). С. 91–100. URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2504>
- [9] *Шильков А.В.* Методы осреднения сечений и энергетического спектра в задачах переноса нейтронов // Математ. Моделирование. 1991. Т. 3(2). С. 63–81. URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=2189>
- [10] *Shilkov A.V.* Generalized multigroup approximation and Lebesgue averaging method in particle transport problems // Transp. Theory and Stat. Phys. 1994. V. 23(6), P. 781–814. URL: <http://arch.neicon.ru/xmlui/handle/123456789/1697260?show=full>
- [11] *Lacis A.A., Oinas V.* A Description of the Correlated K-Distribution Method

- for Modeling Nongray Gaseous Absorption. Thermal Emission and Multiple Scattering in Vertically Inhomogeneous Atmospheres // *J. Geoph. Research*, 1991. V. 96(D5). P. 9027–9063. URL: <http://arch.neicon.ru/xmlui/handle/123456789/4715640>
URL: <http://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/agu/issue/10.1002/jgrd.v96.D5>
- [12] *Modest M.F.* The Weighted-Sum-of-Gray-Gases Model for Arbitrary Solution Methods In Radiative Transfer // *ASME J. Heat Transfer*. 1991. V. 113. №3. P. 650. URL: <http://heattransfer.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1440795>
- [13] *Modest M.F., Zhang H.* The Full-Spectrum Correlated-k Distribution for Thermal Radiation From Molecular Gas-Particulate Mixtures // *J. Heat Transfer*. 2001. V. 124. No 1. P. 30.
URL: <http://heattransfer.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1445408>.
- [14] *Шильков А.В., Герцев М.Н.* Верификация метода лебеговского осреднения // *Матем. моделирование*. 2015. Т. 27(8). С. 13–31.
URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3635>
Shilkov A.V., Gerthev M.N. Verification of the Lebesgue Averaging Method // *Math. Models and Comp. Simulations*. 2016. V. 8(2). P. 93–107.
URL: <https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048216020125>
- [15] *Elsasser W.M.* Mean absorption and equivalent absorption coefficient of a band spectrum // *Phys. Rev.* 1938, V. 54. P. 126.
URL: <http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.54.126>
- [16] *Смирнов Б.М., Шляпников Г.В.* Перенос инфракрасного излучения в молекулярных газах // *УФН*. 1980. Т. 130(3). С. 377–414.
URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1980/3/a/>
Smirnov B.M., Shlyapnikov G.V. Infrared radiation transfer in molecular gases // *Soviet Physics Uspekhi*. 1980. V. 23(3). P. 179.
URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1070/PU1980v023n03ABEH004912/meta>.
- [17] *McCrea W.H., Mitra K.K.* Schuster's Problem for a Moving Atmosphere // *Mit 5 Abbildungen. Zeitschrift für Astrophysik*. 1936. V. 11. P. 359–378.
URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1936ZA.....11..359M>
- [18] *Михалас Д.* Звездные атмосферы. Т. 2. М.: Мир, 1982. 422 с.
URL: <https://www.twirpx.com/file/543852/>
Mihalas D. *Stellar Atmospheres*. 2nd ed. San Francisco: W.H. Freeman, 1978. 655 pp. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1978stat.book.....M>
- [19] *Peraiah A.* *An Introduction to Radiative Transfer*. Cambridge Univ. Press. 2001. 480 pp.
URL: <https://www.cambridge.org/ru/academic/subjects/physics/astrophysics/introduction-radiative-transfer-methods-and-applications-astrophysics?format=PB>
- [20] *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
URL: <http://www.twirpx.com/file/46551/>
Zel'dovich Y.B., Raizer Y.P. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. V. 1. New York. Academic Press. 1966. 464 pp.
URL: <https://www.twirpx.com/file/503393/>

Zel'dovich Y.B., Raizer Y.P. Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena. V. 2. New York. Academic Press. 1967. 465–916 pp. URL: <https://www.twirpx.com/file/503397/>

- [21] *Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А.* Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука, ГФМЛ. 1979. 319 с.
URL: <https://www.twirpx.com/file/1125326/>
Sobelman I.I., Vainshtein L.A., Yukov E.A. Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines. Heidelberg: Springer. 1981. 309 pp.
URL: <https://www.springer.com/gp/book/9783642965586>
- [22] *Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б.* Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: ФМЛ. 2000. 400 с.
URL: <https://www.twirpx.com/file/224429/>
Nikiforov A.F., Novikov V.G., Uvarov V.B. Quantum-Statistical Models of Hot Dense Matter. Methods for Computation Opacity and Equation of State. Basel: Birkhauser-Verlag. 2005. 428 pp. URL: <https://www.twirpx.com/file/552021/>
- [23] *Суржиков С.Т.* Оптические свойства газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2004. 576 с.
- [24] *Chung H.-K., Hansen S.B., and Scott H.A.* Generalized Collisional Radiative Model Using Screened Hydrogenic Levels // Modern Methods in Collisional-Radiative Modeling of Plasmas / Ed. Ralchenko Y., Springer, Switzerland. 2016. pp. 51–79. URL: <https://www.springer.com/us/book/9783319275123>
- [25] *Шильков А.В.* Моментный метод лебеговой агрегации и восстановления спектра в проблемах переноса частиц // Матем. моделирование. 2016. Т. 28(11). С. 33–54. URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3785>
Shilkov A.V. The Moment Method of Lebesgue Aggregation and Spectrum Recovery in Particle Transport Problems // Math. models and comp. simulations. 2017. V. 9(3). P. 263–280.
URL: <https://link.springer.com/article/10.1134%2FS2070048217030115>
- [26] *Шильков А.В., Шилькова С.В.* Система ATRAD для расчетов атмосферной радиации: расчеты переноса теплового излучения для безоблачной летней атмосферы средних широт // Матем. моделирование. 1999. Т. 11(1). С. 18–24. URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=1049>
- [27] *Аристова Е.Н., Гольдин В.Я., Шильков А.В., Шилькова С.В.* Система ATRAD для расчетов атмосферной радиации: расчеты переноса солнечного излучения для летней атмосферы средних широт // Матем. моделирование. 1999. Т. 11(5). С. 117–125.
URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=1115>

Оглавление

Введение	3
Метод лебеговского осреднения спектров	7
Результаты оценочных расчетов.....	19
Заключение.....	22
Приложение	22
Список литературы.....	27