



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 257 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.

Необратимость процессов
переноса в классической и
квантовой механике

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Необратимость процессов переноса в классической и квантовой механике // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 257. 17 с. doi:[10.20948/prepr-2018-257](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-257)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-257>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин

НЕОБРАТИМОСТЬ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА
В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Москва — 2018

Фимин Н.Н., Чечёткин В. М.

Необратимость процессов переноса в классической и квантовой механике

Рассмотрена взаимосвязь классической и квантовой статистической механики в вопросе необратимости эволюционных процессов, описываемых с помощью формализма волновых функций, функций Вигнера и функций распределения, являющихся решениями кинетических уравнений. Показано, что динамика многочастичных систем с возрастающей энтропией существенно связана с наличием допущений локальности взаимодействия.

Ключевые слова: алгебра Наймарка, неравновесный перенос, стрела времени, возрастание энтропии

Fimin Nikolay Nikolaevich, Chechetkin Valery Mikhailovich

Irreversibility of transport processes in classical and quantum mechanics

The interrelation of classical and quantum statistical mechanics is considered in problem of the irreversibility of the evolutionary processes described using the formalism of wave functions, Wigner functions and distribution functions, which are solutions of kinetic equations. We demonstrate that the dynamics of multiparticle systems with increasing entropy associated with the presence of local interaction assumptions.

Key words: Naimark algebra, nonequilibrium transfer, time arrow, entropy increase

Оглавление

1. Введение	3
2. Базисные аспекты классической динамики бесструктурных частиц	4
3. Динамика квантовой системы	8
4. Необратимость как следствие свойств операторов, ассоциированных с кинетическими уравнениями	8
5. Заключение	15
Список литературы	15

1. Введение

Свойство необратимости во времени физико–химических процессов, связанное со взаимодействием частиц на микроуровне, крайне существенным образом отличает их от механических процессов и взаимодействий макроскопических тел. Законы механики Ньютона являются инвариантными относительно направления “стрелы времени”, и поэтому возможное их применение к описанию, скажем, кинетических процессов в теории переноса должно приводить к соответствующим результатам: траектории частиц должны быть обратимы во времени, что, в частности, означает возможность протекания упомянутых процессов при формальной замене $t \rightarrow -t$. Но это противоречит “нулевому закону” термодинамики (односторонней передаче тепла от более нагретого тела менее нагретому). Поэтому кинетические процессы принадлежат классу неравновесных и динамическая эволюция систем, в которых они происходят, не может быть непосредственно и без соответствующих коррекций описана с использованием формализма законов макроскопической механики.

Вопросам понимания данного “парадокса” и возможной модификации математического аппарата микрофизики посвящено, начиная с XIX века, чрезвычайно большое количество работ, считающихся в настоящее время фундаментальными и классическими. Однако с возникновением квантовой механики задача о понимании структуры неравновесности переноса и взаимодействия частиц встала вновь, причём с новой остротой и отчётливостью. Ведь, как оказалось, уравнения эволюции квантовых объектов (Шредингера, Гейзенберга, Дирака и пр.) опять–таки являются обратимыми по времени. Соответственно, оказывается “под угрозой” транзитивность принципа соответствия при переходе к классическим кинетическим уравнениям, а также требуется объяснение временной ковариантности квантовых кинетических уравнений.

Данная работа не претендует на сколько–нибудь полный охват и детальный анализ существующих подходов к вышеописанной проблеме. Для этого потребовался бы весьма значительный объём (простой перечень публикаций, посвящённых свойствам классической и квантово–статистической необратимости, занял бы десятки, если не сотни страниц). Тем не менее, представляется целесообразным упомянуть некоторые работы, на основании которых можно построить достаточно полное и глубокое представление об обсуждаемом предмете. В частности, в работах [1]–[10] представлены основы теории неравновесной статистической физики и дан исчерпывающий анализ понятия “необратимости” для кинетических уравнений типа Больцмана, а также связь данного понятия со структурой цепочки ББГКИ; в работах [11]–[20] выявлена связь необратимости процессов переноса с математическим аппаратом, применяющимся в топологии, дифференциальной геометрии и общей теории алгебр; в работах [21]–[30] рассмотрены вопросы необратимости на квантово–механическом уровне.

Собственно предметом рассмотрения в настоящей работе является построение наиболее простой (по мнению авторов) методики анализа связи необратимости во времени кинетических уравнений и уравнений эволюции динамических систем в симплектической геометрии.

2. Базисные аспекты классической динамики бесструктурных частиц

Рассмотрим систему N классических частиц в пространстве \mathbb{R}^3 с координатами $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^3$, массами m_i и импульсами $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ ($i = \overline{1, N}$), взаимодействующих посредством потенциала $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$; обозначим $\mathcal{P} = \mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{X}_{\mathbf{p}}^3$ μ -пространство данной системы. Точка μ -пространства (кокасательного расслоения над конфигурационным пространством, см. п. 4) $(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$, где $\mathbf{x}^k = (x^{k,1}, x^{k,2}, x^{k,3})$, $k = \overline{1, N}$ (и аналогично для \mathbf{p}_k), характеризует состояние системы и наблюдаемые (величины) системы (т. е. её макрохарактеристики). Гамильтониан системы имеет вид

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + V(\mathbf{X}), \quad V(\mathbf{X}) = \sum_{i < j} V(|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j|). \quad (1)$$

Уравнения движения точек системы:

$$\frac{d\mathbf{x}^i}{dt} = \frac{\partial \mathbb{H}(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbb{H}(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{x}^i}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

С учётом того, что $\mathbf{p}_i = m_i \cdot (d\mathbf{x}^i/dt)$, из последней системы следуют уравнения Ньютона: $m_i \cdot (d(\mathbf{x}^i)^2/dt^2) = -\partial V(\mathbf{X})/\partial \mathbf{x}^i$. Если потенциал V является стационарным (или, в более общей постановке задачи, гамильтониан \mathbb{H} не зависит от времени), то можно определить стационарную энергетическую гиперповерхность или энергию, являющуюся для классической системы топологически односвязным сечением гиперцилиндра — в отличие от квантового случая, когда энергия системы может распадаться на дискретную спектральную последовательность топологически разделённых многообразий, — в μ -пространстве: $E = \mathbb{H}(\mathbf{X}(0), \mathbf{P}(0)) = \mathbb{H}(\mathbf{X}(t), \mathbf{P}(t))$ ($\forall t > 0$).

Сразу же, во избежание недоразумений, отметим, что и в классическом случае в некоторых ситуациях возникает неоднозначность энергетического многообразий — этот факт обусловлен вырождением гессиана лагранжиана системы (так называемые “особенности остановки и отражения” импульсов). Но для обсуждаемой формы гамильтониана у нас нет причин для беспокойства.

На данной гиперповерхности (т. е. при выполнении закона сохранения системы), для любой наблюдаемой $\mathfrak{B} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^1$ (определённой на $6N$ -мерном μ -пространстве системы со значениями на вещественной оси) эволюция вдоль классической траектории $\mathfrak{B}[t] = \mathfrak{B}(\mathbf{X}(t), \mathbf{P}(t))$ задаётся линейным операторным уравнением

$$\frac{d\mathfrak{B}[t]}{dt} = \widehat{L}[\mathbb{H}] \mathfrak{B}[t], \quad (3)$$

причём постановка соответствующей задачи Коши обеспечивается наличием начальных данных в виде $\mathfrak{B}[t = 0] \equiv \mathfrak{B}(\mathbf{X}(0), \mathbf{P}(0))$. Линейный оператор сдвига по траекториям $\widehat{L}[\mathbb{H}]$ определён на векторном пространстве наблюдаемых скобками Пуассона:

$$\widehat{L}[\mathbf{H}](...) = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (...) - \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} (...) \equiv -\{\mathbf{H}, \dots\}. \quad (4)$$

Если ввести меру Лебега на \mathcal{P} обычным образом:

$$d\mu_{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^3 dx^{i,j} \prod_{k=1}^3 dx^{i,k}.$$

Оператор $\widehat{L}[\mathbf{H}]$ является антисамосопряжённым в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{cl} = L^2(\mathcal{P}, d\mu)$ (т.е. $(\widehat{L}[\mathbf{H}])^* = -\widehat{L}[\mathbf{H}]$), и его непрерывный спектр $C\sigma(\widehat{L}[\mathbf{H}])$ лежит на мнимой оси на комплексной λ -плоскости (дискретного и остаточного спектра у него нет). Следует заметить, что спектр композиции фурье-преобразования (по переменной \mathbf{X}) и оператора $\widehat{L}[\mathbf{H}]$ в силу теоремы Г. Вейля о функции от существенного спектра будет совпадать со спектром $C\sigma(\widehat{L}[\mathbf{H}])$; для простоты возьмём одномерный случай без взаимодействия и внешних сил: $\sigma(ikp) = \sigma(p \cdot \partial/\partial x)$. Этот факт будет использован ниже.

Формальное решение уравнения эволюции наблюдаемой (3) имеет вид:

$$\mathfrak{B}(\mathbf{X}(t), \mathbf{P}(t)) = \exp(t\widehat{L}[\mathbf{H}])\mathfrak{B}(\mathbf{X}(0), \mathbf{P}(0)), \quad (5)$$

причём операторная полугруппа $\varphi[t] \equiv \exp(t\widehat{L}[\mathbf{H}])$ унитарна в $L^2(\mathcal{P}, d\mu)$. Иными словами, выполнено условие сохранения фазового объёма (теорема Лиувилля):

$$\frac{\partial(\mathbf{X}(t), \mathbf{P}(t))}{\partial(\mathbf{X}(0), \mathbf{P}(0))} = 1.$$

На основании этой теоремы можно ввести уравнение Лиувилля для фазовой плотности $D_N(\mathbf{X}, \mathbf{P}, t)$ $6N$ -мерной системы в \mathcal{P} :

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \widehat{L}[\mathbf{H}](D_N) \equiv \frac{\partial D_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial D_N}{\partial \mathbf{x}^i} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial D_N}{\partial \mathbf{p}_i} \right) = 0. \quad (6)$$

Это уравнение будет использовано в п. 4.

Теперь обратимся непосредственно к понятию (не)обратимости во времени. Следуя [31], отметим, что “изменение направления времени” экспериментально нереализуемо. Если произвести формальную замену $t \rightarrow -t$, то соответствующие новому “направлению времени” канонические переменные соответственно преобразуются следующим образом: $\mathbf{x}^i(t) \rightarrow \mathbf{x}^i(-t)$, $\mathbf{p}_i(t) \rightarrow -\mathbf{p}_i(-t)$. Иначе говоря, существует возможность определить на переменных μ -пространства оператор обращения времени \widehat{T} :

$$\widehat{T}(\mathbf{x}^i, \mathbf{p}_i) = (\widehat{T}\mathbf{x}^i, \widehat{T}\mathbf{p}_i) = (\mathbf{x}^i, -\mathbf{p}_i).$$

С его помощью можно легко описать динамику “обращенного” движения (будем обозначать его значком \dagger) исследуемой системы; примем за начальные данные для него следующие: $(\mathbf{x}^i)^\dagger(0) = \mathbf{x}^i(0)$, $(\mathbf{p}_i)^\dagger(0) = -\mathbf{p}_i(0)$ ($i = \overline{1, N}$). Движение точек обратимо, если

$(\mathbf{x}^i)^\dagger(t) = \mathbf{x}^i(-t)$, $\mathbf{p}_i^\dagger(t) = -\mathbf{p}_i(-t)$. Если полагать, что гамильтониан системы является квадратичным по импульсам, то

$$\widehat{T}\mathbf{H}(\mathbf{x}^i, \mathbf{p}_i) = \mathbf{H}(\widehat{T}\mathbf{x}^i, \widehat{T}\mathbf{p}_i) = \mathbf{H}(\mathbf{x}^i, -\mathbf{p}_i) = \mathbf{H}(\mathbf{x}^i, \mathbf{p}_i),$$

то есть такой гамильтониан обладает временной симметрией (инвариантностью относительно обращения хода времени).

Рассмотрим динамическую систему Υ , заданную с помощью вышеприведённого набора правил эволюции частиц в μ -пространстве со временем (включающего наличие подгруппы $\varphi[t]$ с действием, описываемым формулой (5), и топологию пространства состояний системы $\mathcal{H}_{cl}(\mathcal{P}, d\mu)$). Следуя [32], определим эволюцию динамической системы Υ как необратимую, если существует вещественнозначная функция $\wp \in \mathcal{H}_{cl}(\mathcal{P}, d\mu)$, такая, что $\wp(\varphi[t]\beta)$ монотонно убывает с ростом t , возможно, за исключением некоторого подмножества $\Pi_0 \subset \mathcal{P}$, где определяемая функция остаётся постоянной. Таким образом, если $\beta[t_1]$ и $\beta[t_2]$ — состояния системы (наблюдаемые) в моменты времени соответственно t_1 и $t_2 (> t_1)$, то $\beta[t_1] \geq \beta[t_2]$; множество Π_0 — аттрактор системы: набор неподвижных точек, периодических орбит или множество хаотизации динамики траекторий частиц (“странный аттрактор”).

Принятое определение необратимости процессов в динамической системе вполне согласуется с термодинамическим эмпирическим её определением: под пространством \mathcal{H}_{cl} (принадлежности наблюдаемых) следует понимать множество термодинамических состояний системы, а под функцией \wp — соответственно, H -функцию Больцмана (то есть энтропию системы, взятую со знаком “минус”).

3. Динамика квантовой системы

Рассмотрим коротко свойства систем квантовых частиц. Они в некотором смысле вытекают из свойств классических частиц, рассмотренных ниже, естественно, с определенными изменениями, которые обусловлены известными правилами квантования:

1) μ -пространство динамической системы \mathcal{P} заменяется на гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})^{3N}$ со скалярным произведением $\langle h_1 | h_2 \rangle$ ($h_{1,2} \in \mathcal{H}$), а состояние (чистое) системы характеризуется единичным вектором $\psi(x)$ из этого ГП (единственным с точностью до фазового множителя) или комплекснозначной нормированной волновой функцией.

2) Наблюдаемые системы задаются самосопряженными линейными операторами на ГП \mathcal{H} , получаемыми из их классических аналогов: в частности, $\mathbf{p}_i \rightarrow -i\hbar \cdot \partial(\dots)/\partial \mathbf{x}^i$, $\mathbf{x}^i \rightarrow (\dots) \cdot \mathbf{x}^i$ ($i = \overline{1, N}$), а гамильтониан становится эрмитовым оператором вида

$$\widehat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^N (-\hbar^2/2m_i) \nabla_i^2 + \widehat{V}(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N). \quad (7)$$

Для общего вида наблюдаемых, которые в классическом случае ранее обозначались как $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^1$ (взято $N = 1$), имеем квантовый аналог в виде преобразования Вейля

волновой функции $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}_W$:

$$(\mathbb{B}_W\psi)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbb{B}\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{2}, \mathbf{p}\right) \exp\left(i\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{p}}{\hbar}\right) \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{p}. \quad (8)$$

Фактически мы имеем здесь проинтегрированную по импульсам функцию Вигнера; она соответствует уже не чистым, а смешанным состояниям (квантовой) системы: в ней за-действованы одновременно как конфигурационные, так и импульсные переменные.

3) Результатом измерения наблюдаемой \mathbb{B} для квантово–механической системы, харак-теризуемой волновой функцией $\psi \in \mathcal{H}$, является число $\epsilon_{\mathbb{B}} \in \mathbb{R}^1$, принадлежащее спектру $\sigma(\widehat{\mathbb{B}})$ самосопряжённого оператора $\widehat{\mathbb{B}}$. Вероятность нахождения собственного значения $\epsilon_{\mathbb{B}}$ в интервале $(\epsilon_{\mathbb{B}}^1; \epsilon_{\mathbb{B}}^2]$ равна $\|\widehat{P}_{\mathbb{B}}((\epsilon_{\mathbb{B}}^1; \epsilon_{\mathbb{B}}^2])\psi\|^2$, где $\widehat{P}_{\mathbb{B}}(\zeta)$ — спектральный проектор оператора $\widehat{\mathbb{B}}$ на отрезок $\zeta \subset \mathbb{R}^1$.

4) Временная эволюция системы определяется оператором Гамильтона \widehat{H} (наблюда-емой величиной энергии системы). Для описания эволюции наблюдаемых системы ис-пользуем прямое обобщение уравнения (3) для классической наблюдаемой $\mathbb{B}(t)$, с учётом замены скобок Пуассона $\{.,.\}$ на квантовый коммутатор $[\cdot, \cdot]/(i\hbar)$:

$$\frac{d\widehat{\mathbb{B}}(t)}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}[\widehat{H}, \widehat{\mathbb{B}}(t)], \quad \widehat{\mathbb{B}}(0) = \widehat{\mathbb{B}}_0. \quad (9)$$

Это — так называемое уравнение Гейзенберга для нестационарного оператора наблюдае-мой $\widehat{\mathbb{B}}(t)$ (зависящей, помимо времени, только от конфигурационных переменных) в про-странстве эрмитовых операторов над ГП \mathcal{H} . Оно эквивалентно уравнению Шредингера с использованием зависящей от времени волновой функции:

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = \widehat{H}\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (10)$$

Соответственно определяется унитарная эволюционная полугруппа $\widehat{U}(t) = \exp(t\widehat{H}/(i\hbar))$, такая, что выполнены следующие свойства:

$$\psi(t) = \widehat{U}(t)\psi_0, \quad \widehat{\mathbb{B}}(t) = (\widehat{U}(t))^*\widehat{\mathbb{B}}(0)\widehat{U}(t). \quad (11)$$

Для обсуждения свойства обратимости в квантовой системе остановимся на операторно–алгебраический подходе к эволюции последней. Будем рассматривать только ограничен-ные наблюдаемые, которым отвечают ограниченные самосопряжённые операторы в ГП \mathcal{H} (обобщение на неограниченные тривиально). Введём множество $\widetilde{\mathcal{K}}$ всех таких опера-торов в указанном гильбертовом пространстве; $\widetilde{\mathcal{K}}$ является $*$ -алгеброй, так как это мно-жество замкнуто относительно операций бинарного сложения (коммутативного и ассоциа-тивного), умножения (ассоциативного и некоммутативного), умножения на элемент $\kappa \in \mathbb{C}$ (со свойством дистрибутивности относительно сложения) и отображения элементов в со-пряженные $K \rightarrow K^*$, причём $(K^*)^* = K$ и $(K_1K_2)^* = K_2^*K_1^*$. Кроме того, множество $\widetilde{\mathcal{K}}$ есть

банахово пространство с операторной нормой и свойством $\|K^*K\| \equiv \|K\|^2$. На основании всего перечисленного можно полагать $\tilde{\mathcal{K}}$ C^* - алгеброй (алгеброй Наймарка).

Введём квантовый оператор обращения времени \hat{T} , определённый следующим образом. Если мы имеем нестационарное уравнение Шрёдингера $i\hbar \cdot \partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi$ (оператор Гамильтона задаётся формулой (7)), то уравнение $-i\hbar \cdot \partial\bar{\psi}/\partial t = \hat{H}\bar{\psi}$ (где черта над волновой функцией означает комплексное сопряжение) отвечает динамике системы с обращёнными импульсами, то есть обращённому времени ($t \rightarrow -t$). Так что определим оператор \hat{T} действием на волновую функцию, переводящим её в комплексно-сопряжённую: $\hat{T}\psi = \bar{\psi}$ ($\forall\psi \in \mathcal{H}$). Далее, определим операцию $\hat{\tau}$ на $\tilde{\mathcal{K}}$: $\hat{\tau}K = \hat{T}K^*\hat{T}$ ($\forall K \in \tilde{\mathcal{K}}$), обладающую, в силу определения рассматриваемой алгебры, свойством антиавтоморфизма (при этом $\hat{\tau}^2 = \hat{I}$). Её действие на операторы координаты, импульса и гамильтониан: $\hat{\tau}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\tau}\hat{\mathbf{p}} = -\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\tau}\hat{H} = \hat{H}$. Если применить эту операцию к $\hat{U}(t)K$, получим: $\hat{\tau}\hat{U}(t)K = \hat{U}(-t)\hat{\tau}K$ ($K \in \tilde{\mathcal{K}}$, $t \in \mathbb{R}^1$); иначе говоря, операция $\hat{\tau}$ соответствует обращению времени. Последнее равенство можно (в связи с произвольностью элемента алгебры K) переписать как $\hat{\tau}\hat{U}(t) = \hat{U}(-t)\hat{\tau}$ для любого $t > 0$.

Следовательно, система квантовых частиц, исследуемая нами, обладает следующим свойством: обращение всех импульсов после эволюции системы от исходного момента до времени t эквивалентно эволюции системы в обращенном времени (принцип микроскопической обратимости).

Таким образом, мы видим, что, несмотря на различие в математическом аппарате, применяемом для описания классических и квантовых динамических систем, и те, и другие являются обратимыми во времени.

Но это противоречит, как уже указывалось, феноменологическим теориям. Поэтому нам необходимо понять, чем же эволюция систем частиц, понимаемых как набор физических точек (в классической механике) или совокупность волновых функций (в квантовой механике), будет отличаться от эволюции статистических систем, которая описывается с помощью необратимых во времени уравнений.

4. Необратимость как следствие свойств операторов, ассоциированных с кинетическими уравнениями

Вопрос о кардинальном различии “кинетического” подхода и динамического (квази)детерминистического состоит из нескольких аспектов. Во-первых, нам следует выяснить, что за допущения делаются при переходе к статистическому описанию многочастичных систем, которые приводят к новым эффектам, в частности, сводится ли динамика указанных многочастичных систем к динамике совокупности локальных подсистем (вплоть до одной частицы); во-вторых, требуется установить, какими свойствами обладают уравнения кинетического типа, и может ли применяемый в их теории математический формализм дать объяснение необратимости времени?

Рассмотрим несколько подробнее **первый аспект**.

Мы предварительно уже построили модель некоторую динамики многих тел (см. п. 1): в \mathbb{R}^{3N} с точками $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N)$ задана кривая $\mathbf{X}(t)$, где $t \in \mathbb{R}^1$ — параметр, то есть заданы функции $\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Касательным вектором “в момент t ” называется вектор $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{x}}^1, \dot{\mathbf{x}}^2, \dots, \dot{\mathbf{x}}^n)$.

Фазовое пространство $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_{(2N)}$ — это, вообще говоря, пространство точек

$$\mathbf{Z} \equiv (\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N; \dot{\mathbf{x}}^1, \dots, \dot{\mathbf{x}}^N), \quad \mathbf{X} \in X^{(N)}, \quad \dot{\mathbf{X}} \in X_{\bullet}^{(N)}.$$

Пусть при заданном L точка $\mathbf{Z} \in \mathcal{P}$ за время t переходит в точку $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}(t)$; этим определяется преобразование $\widehat{L}[t](\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}) : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}(t) \equiv \widehat{L}[t]\mathbf{Z}$. Множество всех $\widehat{L}[t]$ ($t \in \mathbb{R}^1$) — фазовый поток в \mathcal{P} , сами линии $\widehat{L}[t](\mathbf{Z})$ — траектории частиц в фазовом пространстве \mathcal{P} . Механическая система N точек состоит из точек в топологическом смысле (то есть нульмерных несвязных множеств — ибо каждую точку–математический образ физической частицы окружает пустое множество — в физических терминах вакуум), то $\dim \mathbf{x}^i = 0$, $i = 1, \dots, N$; “точка фазового пространства” $\mathcal{P}_{(2N)}$, изображающая состояние механической системы в некоторый начальный момент времени (t_0) определяется $6N$ параметрами: метрический “образ”, характеризующий (в бесконечномерном пространстве возможных начальных состояний \mathcal{I}_0) структуру такого множества, причем предполагается, что \mathcal{I}_0 является отделимым с дискретной топологией; таким образом, получается, что согласно определению топологической размерности, $\dim \mathbf{Z}(t_0) = 0$. Иначе говоря, рассматривая систему N “механических точек”, мы не можем получить $6N$ -мерный статистический ансамбль.

Согласно теореме Брауэра, многообразия с различающейся топологической размерностью не могут быть непрерывным преобразованием переведены друг в друга.

Таким образом, для динамической системы, состоящей из N точек, взаимодействующих по законам Ньютона, начальное состояние системы состоит из N наборов координат точек ($\mathbf{x}^i = \{x^{1,i}, x^{2,i}, x^{3,i}\}$) и N наборов скоростей точек ($\dot{\mathbf{x}}^i = \{\dot{x}^{1,i}, \dot{x}^{2,i}, \dot{x}^{3,i}\}$); для статистической системы (классической или квантовой) в начальный момент характерно некоторое распределение координат и/или скоростей.

Чтобы перейти к статистической системе, необходимо определить касательное расслоение импульсно-конфигурационного пространства, связывающее систему дискретных точек в топологическое пространство с ненулевой размерностью.

Касательный вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ в точке $\mathbf{X} \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}_{\mathbf{X}}^3$ — класс эквивалентности C^1 -кривых $[\sigma]$ на \mathcal{M} , где отношением эквивалентности между кривыми является то, что они касательны в точке \mathbf{v} .

Касательное пространство $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ к \mathcal{M} в т. $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ — множество всех касательных векторов \mathbf{v} в т. \mathbf{x} .

Касательное расслоение $T\mathcal{M}$ определяется как

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}. \quad (12)$$

Элементы касательного пространства $\dot{\mathbf{x}}^i \equiv \mathbf{v}^i$ (которые можно интерпретировать как все возможные значения векторов скоростей, опирающихся на данную точку \mathbf{x}^i) определены не локально, а вдоль параметризованных смещений $d\mathbf{x}^i$; таким образом, объединение множества пар элементов $(\mathbf{x}^i, \dot{\mathbf{x}}^i)$ представляет собой топологическое произведение двух соответствующих подпространств. Компоненты \mathbf{x}^i касательного расслоения суть элементы пространства возможных значений “центров инерции” физических частиц, представляющего собой континуальное (не дискретное) множество топологической размерности, а $\dot{\mathbf{x}}^i$ — элементы подобного же кинематического пространства.

Кокасательный вектор в точке $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ — вещественнозначное отображение $\mathbf{p}: T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^1$. Значение \mathbf{p} на касательном векторе $\dot{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ обозначим $\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{x}} \rangle_{\mathbf{x}}$.

Кокасательное пространство в т. $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ есть множество $T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M}$ всех таких линейных отображений, то есть дуальное векторному пространству $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$; при этом $\dim T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M} = \dim T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} = \dim \mathcal{M}$.

Кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}$ представляет собой объединение всех кокасательных пространств к многообразию \mathcal{M} во всех его точках:

$$T^*\mathcal{M} := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M}. \quad (13)$$

Таким образом, точка (ковектор) из $T^*\mathcal{M}$ представляет собой 1–форму на касательном пространстве к \mathcal{M} в какой-либо точке $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$:

$$\omega_{\mathbf{x}} = \sum_{s=1}^N \omega_s(\mathbf{x})(d\mathbf{x}^s)_{\mathbf{x}}, \quad (14)$$

причём компоненты ω_s 1–формы ω есть функции, определенные на координатной карте посредством соотношения $\omega_s := \langle \omega, (\partial/\partial \mathbf{x}^s)_{\xi} \rangle_{\xi} \forall \xi \in U \subset \mathcal{M}$. Если \mathbf{x} — набор N локальных координат точки из \mathcal{M} , то данная 1–форма задается своими N компонентами \mathbf{p}_s (и, как уже отмечалось, вместе $2N$ чисел x, p составляют набор локальных координат точки $T^*\mathcal{M}$).

Симплектической структурой на (чётномерном) многообразии $T^*\mathcal{M}$ ($\dim T^*\mathcal{M} = 2N$) называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2–форма ω^2 на $T^*\mathcal{M}$:

$$d\omega^2 = d\omega^1 = 0, \quad \forall \varpi_1 \neq 0 \exists \varpi_2 : \omega^2(\varpi_1, \varpi_2) \neq 0 \quad (\varpi_1, \varpi_2 \in T_x\mathcal{M}). \quad (15)$$

Кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}$ конфигурационного пространства (фазовое пространство статистической системы в рассматриваемом формализме) согласно теореме Дарбу имеет естественную симплектическую структуру, локально симплектоморфную $\omega^2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x}$.

Поток векторного поля $\hat{L}[t]$ на симплектическом (чётномерном) многообразии сохраняет симплектическую структуру ω , если и только если это поле локально гамильтоново (выполнена теорема Дарбу); для статистической механики особенно важно, что гамильтонов поток сохраняет меру Лиувилля $\omega^N = N! \sum_{j=1}^N d\mathbf{x}^j \wedge d\mathbf{p}_j$. Эволюция фазовой

плотности ($\sim \omega^N$) под действием гамильтонова поля описывается уравнением Лиувилля, откуда вытекает стационарность распределения Гиббса $\exp(-\beta H)\omega^N$. Следовательно, мы можем найти среднее значение любой физической наблюдаемой величины, характеризующей данную систему (для квантовой системы имеем распределение Гиббса – фон Неймана с аналогичными результатами).

Таким образом, переход от динамической “механической” (и даже квантово–механической) системы к статистической сопровождается необходимостью усреднения наблюдаемых в соответствии с некоторым распределением. Если же состояние нестационарно, то каноническое распределение здесь неприменимо и необходимо решать кинетическое уравнение.

Тем самым мы переходим ко **второму аспекту**.

Как уже было сказано выше, уравнение Лиувилля формулируется изначально для фазовой плотности D_N (которая “глобальным образом” характеризует динамику всех N частиц статистической неравновесной системы).

Решение уравнения для D_N в связи с астрономическим числом переменных в прямом виде невозможно, поэтому фазовую плотность системы редуцируют к одночастичным функциям F :

$$V^{-1}F(\mathbf{Z}_n, t) = \int d\mathbf{Z}_1 d\mathbf{Z}_2 \dots, d\mathbf{Z}_N D_N(\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N, t), \quad \mathbf{Z}_n = (\mathbf{X}_n, \mathbf{P}_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где V — объём системы. Сходным образом вводятся s -частичные функции ($s = 2, 3, \dots, N-1$), в частности, 2-частичная:

$$\begin{aligned} V^{-2}F(\mathbf{Z}_n, (\mathbf{Z}_m, t) = \\ = \int d\mathbf{Z}_1 d\mathbf{Z}_2 \dots, d\mathbf{Z}_{m-1} d\mathbf{Z}_{m+1} \dots, d\mathbf{Z}_{n-1} d\mathbf{Z}_{n+1} \dots d\mathbf{Z}_N D_N(\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Эти многочастичные функции содержат информацию о взаимозависимом движении частиц в системе (функции F отличаются от стандартно используемых f нормировкой: $F = N_p f$, где N_p — количество частиц в системе). Эффект такой взаимозависимости может быть охарактеризован с помощью так называемых корреляционных функций. В качестве примера снова возьмём 2-частичную функцию:

$$\frac{N^2}{V^2}F_2(\mathbf{Z}_\ell, \mathbf{Z}_n, t) = f(\mathbf{X}_\ell, \mathbf{P}_\ell, t) \cdot f(\mathbf{X}_n, \mathbf{P}_n, t) + g(\mathbf{X}_\ell, \mathbf{P}_\ell, \mathbf{X}_n, \mathbf{P}_n, t). \quad (18)$$

Уравнение Лиувилля можно преобразовать посредством редукции получающейся из него цепочки “зацепляющихся” друг за друга уравнений для многочастичных функций к уравнению Больцмана для одночастичной функции при условии “ослабления корреляций”, состоящем в том, что априорно принимается существование некоторого эффективного максимального радиуса межчастичного взаимодействия, за пределами которого частицы полагаются независимыми и невзаимодействующими. Тем самым двухчастичная функция распределения становится мультипликативной ($f_2 = f_1 f_1$), и цепочку ББГКИ можно

оборвать. Получаемый из члена с самосогласованным полем уравнения Лиувилля так называемый “столкновительный член” является, таким образом, генератором марковских процессов, сущность которых состоит в утере в акте взаимодействия каждой пары частиц информации о предыдущих состояниях системы. Как известно, для уравнения Больцмана справедлива “H–теорема”, описывающая процесс возрастания энтропии в системе (энтропия стационарна только на равновесных решениях). Иначе говоря, процесс переноса, описываемый кинетическим уравнением Больцмана, становится необратимым. Этот факт связан с тем, что данное уравнение (для простоты берём наипростейший его вид):

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \int b(\theta, |\mathbf{v}_* - \mathbf{v}|) (f'_* f' - f_* f) d\phi dv' d\theta. \quad (19)$$

уже априорно выписано с учётом последовательности временной связи между событиями, им описываемыми. Действительно, форма билинейного оператора правой части выбирается специальным образом — в предположении, что столкновение уже совершилось относительно момента t , входящего в левую часть (оператор субстанциональной производной). Именно поэтому предопределена вполне конкретная последовательность событий, приводящая к выделению направления течения процессов.

Кроме этого, в теории кинетических уравнений существует ещё один момент, который нельзя игнорировать при учёте возможности возникновения выделения направления времени. Обычно считается, что функция фазовой плотности D_N “...является симметричной функцией координат фазового пространства системы частиц” [33]. Априорное принятие симметрии основывается на предположении о тождественности частиц и неразличимости их при перестановке. Однако в классическом случае гамильтоновой динамической системы “тождественные” частицы можно различить, в частности, по их положению в момент времени $t = 0$: возьмём, например, вариант, когда для исследуемой статистической системы $D_N(t = 0)$ может быть задана в виде

$$D_N(t = 0) = \prod_{i=1}^N \alpha_i \exp(-\delta_i(x_i - x_i(0))) \cdot \phi(p_i). \quad (20)$$

Данная функция несимметрична относительно перестановки любой пары конфигурационных переменных; только если величины δ_i достаточно велики (велика дисперсия начального распределения), функция D_N может оказаться симметричной относительно перестановки части или всех координат.

Если D_N — несимметричная функция, то она приведёт в общем случае к N различным одночастичным функциям. Системы в целом будет описываться “глобальной” функцией $D^{(1)} = \sum_{k=1}^N [^k]f$, где $[^k]f$ — аддитивные локальные функции распределения частиц. Для них эволюцию будут описывать уже не единственные уравнения (как уравнение Больцмана для симметричной функции распределения), а системы уравнений:

$$\frac{\partial [^k]f}{\partial t} + v \frac{\partial [^k]f}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \int B(V_{rel}, \theta) ([^k]f_* \cdot [^j]f'_2 - [^k]f \cdot [^j]f_2) dv_2 d\theta d\varphi, \quad k = \overline{1, N}. \quad (21)$$

Если D_N симметрична, то все аддитивные функции совпадут между собой, и тогда имеем $D^{(1)} = N^{[1]}f = Nf$, то есть мы приходим к статистической теории Больцмана.

Необходимо отметить, что аддитивные функции можно объединять между собой в группы/комплексы, из поведения которых будет формироваться общая динамика системы; например, для расчёта ударной волны (бимодальное приближение) или погранслоя достаточно использовать только две группы, объединяющие “родственные по духу” частицы с близкими в некотором смысле аддитивными функциями распределения.

Приведём вид системы (21) для 2-группового случая (предварительно произведя безразмеривание и выделив малые параметры):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{[1]}f}{\partial t} + v \frac{\partial^{[1]}f}{\partial x} &= (\epsilon_{[11]})^{-1} \int B(V_{rel}, \theta) ([^1]f^* \cdot [^1]f_2^* - [^1]f \cdot [^1]f_2) dv_2 d\theta d\varphi + \\ &+ (\epsilon_{[12]})^{-1} \int B(V_{rel}, \theta) ([^1]f^* \cdot [^2]f_2^* - [^1]f \cdot [^1]f_2) dv_2 d\theta d\vartheta = \widehat{\mathcal{I}}^{[11]}(f, f) + \widehat{\mathcal{I}}^{[12]}(f, f), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{[2]}f}{\partial t} + v \frac{\partial^{[2]}f}{\partial x} &= (\epsilon_{[12]})^{-1} \int B(V_{rel}, \theta) ([^1]f^* \cdot [^2]f_2^* - [^1]f \cdot [^2]f_2) dv_2 d\theta d\varphi + \\ &+ (\epsilon_{[22]})^{-1} \int B(V_{rel}, \theta) ([^2]f^* \cdot [^2]f_2^* - [^2]f \cdot [^2]f_2) dv_2 d\theta d\varphi = \widehat{\mathcal{I}}^{[12]}(f, f) + \widehat{\mathcal{I}}^{[22]}(f, f), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\epsilon_{[ij]}$ — локальные числа Кнудсена, $i, j = 1, 2$.

Для исследования свойств решений данных уравнений рассмотрим их представления в виде разложения правой части в ряд Фреше–Тейлора. При этом линеаризация проводится, соответственно, для уравнения (22) — вблизи равновесного решения $\omega_{n_1, \beta_1}^{[1]}$ этого уравнения в предположении $R^{[12]} \equiv 0$ ($Kn^{[12]} \rightarrow \infty$), для уравнения (23) — вблизи равновесного решения $\omega_{n_2, \beta_2}^{[2]}$ этого уравнения в том же предположении ($\beta = 1/(kT)$), n — плотность частиц). Тогда, в частности, для правой части первого уравнения рассматриваемой системы получаем:

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{I}}^{[11]}(f, f) + \widehat{\mathcal{I}}^{[12]}(f, f) = \\ &= (\epsilon_{[11]})^{-1} \left(\widehat{\mathcal{L}}^{[11]}(\phi) + \widehat{\mathcal{N}}^{[11]}(\phi, \phi) \right) + (\epsilon_{[12]})^{-1} \left(\widehat{\mathcal{L}}^{[12]}(\phi) + \widehat{\mathcal{N}}^{[12]}(\phi, \phi) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}^{[11]}(\phi) &\equiv \frac{\partial \widehat{\mathcal{I}}^{[11]}}{\partial f} \Big|_{f=0} ([^1]\phi) = \\ &= \int B(V_{rel}, \theta) \omega_{n_1, \beta_1}(v_2) ([^1]\phi(v_2^*) + [^1]\phi(v^*)) dv_2 d\theta d\varphi - \\ &- \int B(V_{rel}, \theta) [^1]\phi(v_2) \omega_{n_1, \beta_1}(v_2) dv_2 d\theta d\varphi - \nu^{[1]}\phi(v), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\widehat{\mathcal{N}}^{[11]}([^1]\phi, [^1]\phi) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widehat{\mathcal{I}}^{[11]}}{\partial f^2} \Big|_{f=0} ([^1]\phi, [^1]\phi) = \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
&= \int B(V_{rel}, \theta) \omega_{n_1, \beta_1}(v_2) ([^1]\phi(v_2^*) [^1]\phi(v^*) - [^1]\phi(v_2) [^1]\phi(v)) dv_2 d\theta d\varphi. \\
&\quad \widehat{\mathcal{L}}^{[12]}(\phi) \equiv \frac{\partial \widehat{\mathcal{I}}^{[12]}}{\partial f} \Big|_{f=0} ({}^{[1]}\phi) = \\
&= \int B(V_{rel}, \theta) \omega_{n_1, \beta_1}(v_2) ([^1]\phi(v_2^*) + [^1]\phi(v^*)) dv_2 d\theta d\varphi - \\
&\quad - \int B(V_{rel}, \theta) [^1]\phi(v_2) \omega_{n_1, \beta_1}(v_2) dv_2 d\varphi - \nu [^1]\phi(v), \\
&\quad [^1]f(t, x, v) = \omega_{n_1, \beta_1}(v) (1 + [^1]\phi(t, x, v)).
\end{aligned} \tag{27}$$

Мы тем самым получили задачу о ветвлении решения стационарного решения интегродифференциального уравнения с билинейным оператором при наличии возмущения. Применяя к линеаризованным уравнениям преобразование Фурье по конфигурационной переменной, мы получаем спектральную задачу. Известно, что линейный оператор Больцмана (являющийся фредгольмовым с 5-мерным в общем случае ядром; в одномерном случае ядро 3-мерно) имеет спектр собственных значений, расположенный в левой полуплоскости, причём, в силу его самосопряжённости, все собственные значения лежат на вещественной оси. Наличие возмущения $-ikv$ переводит данный оператор в разряд секториальных со спектром, симметричным относительно вещественной оси, и расположенным в секторе с углом разворота $< \pi$. Перекрестный член, рассматриваемый как возмущение, даёт симметричное расщепление значения $\lambda = 0$ на 5 возмущенных собственных значений; для остальных $\lambda_n \in \mathcal{L}^{[11]}$ получаем сдвиг вправо (в правую полуплоскость спектральной плоскости), что на физическом уровне говорит о неустойчивости движения и возникновении вихревых движений, отвечающих решениям Хопфа (собственные значения чисто мнимые).

Применяя метод Ляпунова–Шмидта к исследуемому уравнению (выбирая в качестве проектора эндоморфизм на множество сумматорных инвариантов), получаем пару уравнений. При этом первое из них — дифференциально-функциональное типа Риккати для профиля течений. Приводя его к уравнению 2-го порядка, в результате получаем бифуркацию нестационарного решения (при определенном значении параметра Кнудсена). Это позволяет сделать вывод о существовании двух аттрактивных множеств — решений исходного нестационарного уравнения, что, в свою очередь, говорит о возникающем в системе хаосе. Тем самым обратимость движения в системе, описываемой с помощью локального кинетического подхода в виде множества аддитивных функций распределения, является очевидным следствием структуры используемых уравнений и непосредственно вытекает из факта возможности ветвления их решений.

Аналогично ситуация обстоит и с кинетическим квантовыми уравнениями: квантовое уравнение для функции Вигнера (или, как его ещё называют, квантовое уравнение Власова) обратимо (как и его классический аналог). Но если ввести эффективный член взаимодействия, аналогичный столкновительному больцмановскому члену, то эволюция квантовой системы становится необратимой; ситуация не меняется при учёте статистики

Бозе и Ферми — соответствующее уравнение Юлинга–Уленбека обладает трилинейным столкновительным оператором и также подвержено ветвлению решений при учете возмущений, что приводит к необратимости описываемых им квантовых процессов переноса.

5. Заключение

В настоящей работе мы кратко рассмотрели вопрос о необратимости эволюции классических и квантовых динамических систем. Можно заключить, что как формализм Гамильтона, так и Шрёдингера (и Гейзенберга) не приводят к необратимости процессов в рассматриваемых системах (естественно, только для квадратичного вида гамильтонианов). Однако переход к кинетическому образу описания движения в системах даёт возможность получить феноменологически адекватную картину, хотя и требует допущений, которые нельзя априори назвать очевидными.

В то же время возникает вопрос о правомерности применимости недиссипативных обратимых уравнений для анализа динамических систем. Возможно, одним из путей развития в этом направлении будет являться разработка аппарата квантования фазового пространства Х. Мойяла [34]. Во всяком случае, мы начинаем понимать, что необратимость процессов является следствием хаотизации динамики системы, что не есть какая-то определённая экзотика её поведения, а неотъемлемый атрибут наличия многих частиц и объективного отсутствия детерминизма в задании их состояния.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН №28 “Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей” (В.М. Чечеткин) и гранта РФФИ № 16-02-00656-А (Н.Н. Фимин).

Список литературы

- [1] Sachs R. G., *The Physics of Time Reversal*, University of Chicago, Chicago, 1987.
- [2] Price H., *Time's Arrow and the Archimedes' Point*, Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [3] Castagnino M., Lara L., Lombardi O., *The direction of time: from the global arrow to the local arrow*, Int. J. Theor. Phys., V. 42, p. 2487, 2003.
- [4] Prigogine I., *From Being to Becoming. Time and Complexity in the Physical Sciences*, W.H. Freeman and Co., N. Y., 1980.
- [5] Prigogine I., *Time, Dynamics and Chaos*, in *Nobel Conference XXVI, Chaos: The New Science*, John Holte ed., Gustavus Adolphus College, St. Peter, Minnesota, 1993.
- [6] Antoniou I., Prigogine I., *Intrinsic Irreversibility and Integrability of Dynamics*, Physica A, V. 192, p. 443, 1993.

- [7] Lebowitz J. L., *Time's Arrow and Boltzmann's Entropy*, in: *Physical Origin of Time Asymmetry*, Halliwell J. et al. (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [8] Zeh D., *The Physical Bases of the Direction of Time*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [9] Zwanzig R. W., *Statistical Mechanics of Irreversibility*, in: *Lectures in Theoretical Physics III*, Britten W. E. et al. (eds.), Interscience, New York, 1961.
- [10] Ruelle D., *Smooth Dynamics and New Theoretical Ideas in Nonequilibrium Statistical Mechanics*, J. Statist. Phys., V. 95, pp. 393–468, 1999.
- [11] Bratteli O., Robinson D. W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, II*, Springer–Verlag, New York, 1979, 1981.
- [12] Wojtkowski M. P., Liverani C., *Conformally Symplectic Dynamics and Symmetry of the Lyapunov Spectrum*, Commun. Math. Phys., V. 194, pp. 47–60, 1998.
- [13] Emch G. G., *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, J. Wiley, New York, London, 1972.
- [14] Arnold V. I., Avez A., *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York, 1968.
- [15] Hirsch M. W., Smale S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1974.
- [16] MacKay R.S., Meiss J.D., *Hamiltonian Dynamical Systems*, Bristol and Philadelphia, Adam Hilger, 1987.
- [17] Araki H., *Positive Cone, Radon-Nikodym Theorems, Relative Hamiltonian and the Gibbs Condition in Statistical Mechanics*, in: *C*-Algebras and Their Applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, D. Kastler ed., North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [18] Dereziński J., Jakšić V., Pillet, C.-A., *Perturbation Theory of W^* -dynamics, Liouvilleans and KMS-states*, Rev. Math. Phys., V. 15, p. 447, 2003.
- [19] Mané R., *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer–Verlag, Berlin, 1987.
- [20] Sakai S., *Operator Algebras in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [21] Sewell G. L., *Quantum Mechanics and Its Emergent Macrophysics*, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2002.
- [22] Thirring W., *Quantum Mechanics of Large Systems*, Springer–Verlag, New York, Vienna, 1983.
- [23] R. Alicki R., Fannes M., *Quantum Dynamical Systems*, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [24] Benatti F., *Deterministic Chaos in Infinite Quantum Systems*, Springer–Verlag, Berlin, 1993.
- [25] Bardos C., Golse F., Mauser N.J., *Weak Coupling Limit of the N -particle Schrödinger equation*, Math. Anal. Appl., V. 2, № 7, pp. 275–293, 2000.

- [26] Jakšić V., Pillet, C.-A., *Mathematical Theory of Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics*, J. Stat. Phys., V. 108, p. 787, 2002.
- [27] Spohn H., *Quantum Kinetic Equations*, in: *On Three Levels (Micro-, Meso- and Macro- Approaches in Physics)*, M. Fannes, C. Maes, and A. Verbeure (editors), Plenum, New York, pp. 1–10, 1994.
- [28] Petrina D. Ya., *Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems*, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [29] Giulini D., Joos E., Kiefer C., Kupsch J., Stamatescu I.-O. , and Zeh H. D., *Decoherence and the Appearance of the Classical World in Quantum Theory*, chap. 8, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1996.
- [30] Eu B. C., Mao K., *Quantum Kinetic Theory of Irreversible Thermodynamics: Low-Density Gases*, Phys. Rev. E, V. 50, p. 4380, 1994.
- [31] Castagnino M. A, Gunzig E., *Dynamics, Thermodynamics, and Time Asymmetry*, Int. J. Theor. Phys., V. 37, № 4, pp. 1333–1422, 1998.
- [32] Sewell G.L., *Quantum Theory of Irreversibility: Open Systems and Continuum Mechanics*, in: *Irreversible Quantum Dynamics*, eds. F. Benatti and R. Floreanini, Lecture Notes in Physics, Vol. 622, Springer, Berlin, 2003.
- [33] Силин В.П., *Введение в кинетическую теорию газов*, с.186, М., изд-во ФИ РАН, 1998.
- [34] Zachos C. K., Fairlie D. B., Curtright T. L., *Quantum Mechanics in Phase Space*, World Scientific, Singapore, 2005.