



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 273 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Петров А.П.**

Оптимальное управление в  
моделях выбора позиций  
индивидами при  
информационном  
противоборстве

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Петров А.П. Оптимальное управление в моделях выбора позиций индивидами при информационном противоборстве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 273. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2018-273](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-273)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-273>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.П. Петров**

**Оптимальное управление в моделях  
выбора позиций индивидами  
при информационном противоборстве**

**Москва — 2018**

***Петров А.П.***

## **Оптимальное управление в моделях выбора позиций индивидами при информационном противоборстве**

Рассматриваются две модели выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме. Для каждой из них рассматривается задача оптимального управления, предполагающая, что интенсивность пропагандистского вещания одной из сторон противоборства имеет смысл управления. Показано, что в зависимости от параметров системы оптимальное управление является либо монотонно возрастающей, либо монотонно убывающей функцией времени. Результатам дана содержательная трактовка.

***Ключевые слова:*** математическая модель, информационное противоборство, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина

***Alexander Phoun Chzho Petrov***

## **Optimal control in models of position selection by individuals during information warfare**

Two models of choice of positions by individuals at information warfare in society are considered. For each of them, the optimal control problem is considered, assuming that the intensity of propaganda broadcasting by one of the parties is a control variable. It is shown that depending on the parameters of the system, the optimal control is either monotonically increasing or monotonically decreasing function of time. The results are given a meaningful interpretation.

***Key words:*** mathematical model, information warfare, optimal control, Pontryagin's maximum principle

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 17-01-00390-а.

## **Оглавление**

Введение .....	3
1. Модель .....	3
2. Постановка задачи управления .....	6
3. Решение задачи управления .....	7
4. Расширенная модель: социум, состоящий из двух групп .....	16
Заключение.....	19
Библиографический список.....	20

## Введение

Основную содержательную проблему, которой посвящена данная работа, можно сформулировать следующим образом. Происходит информационное противоборство двух партий. Вставая в позицию одной из них, мы желаем максимизировать к заданному моменту времени количество наших сторонников, при этом минимизируя затраты на вещание средств массовой информации. Вопрос состоит в том, чтобы определить наиболее предпочтительную стратегию: например, следует ли начать кампанию со слабой интенсивностью медиапропаганды и течением времени усиливать ее? Или, наоборот, следует начать кампанию с пропагандой высокой интенсивности, а затем уменьшать ее? Или оптимальной является какая-либо более сложная, немонотонная стратегия? Для простоты мы предполагаем, что пропаганда противника имеет постоянную интенсивность.

Для изучения данной проблемы в настоящей работе используется модель выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме [1]. Заметим, что данная модель оперирует с входными параметрами, некоторые из которых весьма трудно поддаются оцениванию. Поэтому, с прикладной точки зрения, анализ нацелен не столько на получение количественных результатов, сколько на выявление качественных закономерностей. Для этих выявленных закономерностей в разделе 6 представлена прозрачная социологическая трактовка, допускающая практическое применение результатов. Полученные при этом выводы не противоречат интуиции, но являются, на наш взгляд, неочевидными и вряд ли могли бы быть получены на основании соображений общего характера, т.е. без применения методов математического моделирования.

## 1. Модель

Модель выбора позиции индивидами при информационном противоборстве в социуме ([1], см. также ее применение в [2]) основана на традиционной нейрологической схеме [3, 4] и имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = c \left( 2 \int_{-\psi}^{\infty} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi. \quad (1)$$

Здесь параметры  $a, b, c, u$  положительны, и их содержательный смысл определен в теории Рашевского [3, 4]. Они зависят как от стимулов, которые исходят из социальной среды, так и от внутренних параметров нейрологической системы. Для целей настоящей работы важно, что  $u$  и  $b$

связаны с интенсивностью масс-медиа, поддерживающих Правую и Левую партии соответственно.

В самых общих чертах, социологический смысл модели выбора позиций и уравнения (1) можно пояснить следующим образом. Предполагается, что в обществе, состоящем из  $N_0$  индивидов, происходит информационная борьба двух сторон (партий):левой и Правой. Каждый индивид принимает решение о поддержке той или иной партии на основе своей установки и стимулов, поступающих из социальной среды.

Ниже мы поочередно рассмотрим, что представляют собой эти стимулы и установка, а затем опишем механизм принятия решений.

Под стимулами в нашей модели понимается информационное влияние на индивида со стороны СМИ и других индивидов. Под этим влиянием с течением времени индивид может менять свою партийную принадлежность. При этом он и сам создает стимулы для других индивидов тем, что агитирует их за свою текущую партию. В результате, возникает социальная динамика, описываемая уравнением (1). Если интенсивность пропаганды СМИ постоянна, то динамический процесс завершается формированием стационарного состояния. Довольно часто возможны несколько стационарных состояний; в этом случае от начального условия зависит то, какое из них достигается. В разделе 1 формулируется задача оптимального управления, в которой планировщик отождествляется с одной из сторон противоборства (с Правой партией), причем интенсивность ее пропаганды через СМИ принимается в качестве управляющего параметра, а целевая функция учитывает эту интенсивность (как показатель расходов) и количество сторонников этой партии на заданный момент времени (окончание противоборства).

Рассмотрим теперь модель более подробно.

Каждый из  $N_0$  индивидов характеризуется установкой (attitude), т.е. своей предрасположенностью  $\varphi$  к поддержке той или иной партии, связанной с его фундаментальной принадлежностью к определенной идеологии, предыдущим опытом, социальным состоянием и т.д. Эта величина предполагается постоянной на отрезке масштабе времени, в течение которого длится информационная борьба.

Тем самым, предполагается, что имеется постоянное, экзогенно заданное распределение индивидов по оси установок  $n(\varphi)$ , при этом отрицательная установка соответствует поддержке первой партии, положительная – поддержке второй партии, а абсолютное значение отражает силу поддержки.

Здесь функция  $n(\varphi)$  равна нулю вне отрезка при  $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ , и далее будем полагать, что на этом отрезке функция  $n(\varphi)$  положительна, кроме, быть может, конечного количества изолированных точек, в которых она обращается в ноль.

Очевидно,

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} n(\varphi) d\varphi.$$

Правило, по которому индивид относит себя к той или иной партии, можно выразить следующим образом: если сумма стимула и установки отрицательна, то индивид относит себя клевой партии, если положительна, то к правой.

Рассматриваемый в данной работе вариант модели предполагает, что влияние масс-медиа равномерно распределено по обществу, в частности, это означает, что не учитывается селективное пользование СМИ (например, «консерваторы читают только консервативные газеты, либералы читают только либеральные газеты»). Стимул в поддержку некоторой партии, связанный с агитацией, проводимой сторонниками этой партии, принимается пропорциональным ее текущей численности.

Численности сторонников левой ( $L$ ) и правой ( $R$ ) партий равны, соответственно,

$$L(t) = \int_{\varphi_{\min}}^{-\psi(t)} n(\varphi) d\varphi, R(t) = \int_{-\psi(t)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Начальное условие  $\psi(0)$ , необходимое для однозначного определения  $\psi(t)$ , находится из распределения индивидов между партиями в момент  $t=0$  и имеет вид

$$L(0) = \int_{-\psi(0)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi, \quad (3)$$

или, что то же самое,

$$R(0) = \int_{\varphi_{\min}}^{-\psi(0)} n(\varphi) d\varphi.$$

Здесь  $L(0)$  (а также  $R(0)$ ) является наблюдаемой величиной, и каждое из этих равенств можно рассматривать как уравнение для  $\psi(0)$ , имеющее единственное решение, если функция  $N(\varphi)$  положительна почти при всех  $\varphi$ .

Очевидно,  $\psi(0) = \varphi_{\max}$  если  $X(0) = 0$ , и  $\psi(0) = \varphi_{\min}$  если  $Y(0) = 0$ . Реалистическое предположение состоит в том, что  $0 < X(0) < N_0$ ,  $0 < Y(0) < N_0$  so that  $\varphi_{\min} < \psi(0) < \varphi_{\max}$ .

Заметим, что, строго говоря, функция  $\psi(t)$  может принимать значения в более широком диапазоне, вплоть до  $-\infty < \psi < \infty$ . Например, неравенство  $\psi(t) > \varphi_{\max}$  соответствует ситуации, когда абсолютно все члены социума поддерживают первую партию, т.е. ее преимущество в интенсивности пропаганды настолько велико, что оно перевешивает установку даже самого радикального сторонника второй партии. Такая ситуация представляется малореалистичной. Поэтому в нашем анализе будем выбирать области изменения параметров так, что  $\varphi_{\min} < \psi(t) < \varphi_{\max}$  для всех  $0 \leq t \leq T$ .

Итак, функция  $\psi(t)$  находится как решение начальной задачи (1), (3).

Рашевский [3, 4] анализировал стационарное уравнение, соответствующее (1) в случае  $u = b = 0$  (в терминах настоящей модели это соответствует процессу, проходящему в отсутствие пропаганды масс-медиа) и четной функции  $n(\varphi)$ . Он показал, что при достаточно малых значениях отношения  $c/a$  существует единственное стационарное решение, оно асимптотически устойчиво и соответствует равному распределению индивидов между партиями, т.е.  $R(t) - L(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Содержательно это соответствует случаю, когда реакцию (каждого) индивида существенно больше определяет его установка, чем мнение других индивидов. И наоборот, при достаточно больших значениях  $c/a$  реакция индивида более определяется мнением других индивидов, чем его собственной установкой. Вследствие этого равновесие между партиями неустойчиво: если одна из них имеет численное превосходство при  $t = 0$ , то оно позволяет создать преимущество в силе стимула (т.е. в количестве агитирующих за нее индивидов), которое увеличивается с течением времени. В результате, устойчивые стационарные решения соответствуют ситуациям, в которых одна из партий приобретает существенное большинство. Именно такие случаи представляют наибольший интерес для анализа, и именно им уделяется наиболее внимание в настоящей работе.

## 2. Постановка задачи управления

Будем рассматривать процесс информационного противоборства на временном интервале  $(0; T)$ , где экзогенно заданный момент времени  $T$  можно условно трактовать как «день выборов». При этом интенсивность и пропагандистского вещания Правой партии принимается в качестве управления и имеет ограничение

$$0 \leq u \leq u_m. \quad (4)$$

Целевой функционал отражает стремление планировщика максимизировать численность своих сторонников в момент времени  $T$  при минимизации затрат в течение кампании:

$$J = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + R(T) \rightarrow \max,$$

т.е.

$$J = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \int_{-\psi(T)}^{\varphi_{\max}} n(\varphi) d\varphi \rightarrow \max. \quad (5)$$

При этом ограничимся случаем равномерного симметричного распределения:  $\varphi_{\max} = -\varphi_{\min} = \varphi_m$  и  $N(\varphi) = \text{const} > 0$  при  $-\varphi_m < \varphi < \varphi_m$ .

### 3. Решение задачи управления

#### 3.1. Основные уравнения

Гамильтониан задачи оптимального управления (1)-(5) имеет вид

$$H(\psi, p, u) = \left[ c \left( 2 \int_{-\psi(t)}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi \right] p - \frac{ku^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\psi}{dt} = c \left( 2 \int_{-\psi}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi - N_0 \right) + u - b - a\psi, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dt} = [-2cn(-\psi) + a] p, \quad p(T) = n(-\psi(T)). \quad (7)$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы максимизировать гамильтониан по управлению. Имеем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p - ku.$$

Эта производная обращается в ноль при



$$u = \frac{p}{k}.$$

С учетом ограничения (4) получаем, что оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \begin{cases} 0, & p < 0 \\ p/k, & 0 \leq p \leq ku_m \\ u_m, & p > ku_m \end{cases} \quad (8)$$

С учетом того, что мы ограничились случаем равномерного симметричного распределения:  $N(\varphi) = \text{const} > 0$  при  $-\varphi_m < \varphi < \varphi_m$ , имеем

$$\int_{-\psi}^{\varphi_m} n(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \psi < -\varphi_m, \\ \frac{N_0}{2} \left( 1 + \frac{\psi}{\varphi_m} \right), & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ N_0, & \psi > \varphi_m, \end{cases}$$

Стационарные решения дифференциального уравнения (6) находятся из уравнения

$$f(\psi) = a\psi, \quad (9)$$

где

$$f(\psi) = \begin{cases} -cN_0 + u - b, & \psi < -\varphi_m, \\ cN_0 \frac{\psi}{\varphi_m} + u - b, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ cN_0 + u - b, & \psi > \varphi_m. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что если  $a > cN_0 / \varphi_m$ , то уравнение (9) имеет одно решение для любого постоянного  $u$ . Если же  $a < cN_0 / \varphi_m$ , то оно имеет три корня при  $a\varphi_m - cN_0 < u - b < -a\varphi_m + cN_0$  и только один корень при  $u - b < a\varphi_m - cN_0$  или  $-a\varphi_m + cN_0 < u - b$  (в данной работе мы не рассматриваем особый случай  $a = cN_0 / \varphi_m$ ).

Для краткости записи введем обозначение

$$\lambda = a - \frac{cN_0}{\varphi_m}. \quad (10)$$

Задача (6), (7) принимает вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \begin{cases} -cN_0 + u - b - a\psi, & \psi < -\varphi_m, \\ -\lambda\psi + u - b, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ cN_0 + u - b - a\psi, & \psi > \varphi_m. \end{cases} \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} ap, & \psi < -\varphi_m, \\ \lambda p, & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ ap, & \psi > \varphi_m, \end{cases} \quad p(T) = n(-\psi(T)). \quad (12)$$

С учетом того, что мы рассматриваем случай, когда  $-\varphi_m \leq \psi(t) \leq \varphi_m$  для всех  $t$ , имеем

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u - b, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (13)$$

$$\frac{dp}{dt} = \lambda p, \quad p(T) = N_0 / 2\varphi_m. \quad (14)$$

Решение задачи (14) для сопряженного уравнения имеет вид

$$p(t) = \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)]. \quad (15)$$

Таким образом, функция  $p(t)$  либо строго возрастает (если  $\lambda > 0$ ), либо строго убывает (если  $\lambda < 0$ ), либо постоянна (если  $\lambda = 0$ ). Рассмотрим первые два варианта последовательно.

### 3.2. Строго возрастающая функция $p(t)$

На протяжении подраздела 3.2 будем полагать, что

$$a - cN_0 / \varphi_m > 0. \quad (16)$$

Тогда могут иметь место три случая (см. рис.1).

Случай 1 (рис. 1а):  $ku_m \geq p(T)$ , т.е.

$$N_0 / 2\varphi_m \leq ku_m.$$

Случай 2 (рис. 1б):  $p(0) < ku_m < p(T)$ , т.е.

$$\frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T] < ku_m < \frac{N_0}{2\varphi_m}.$$

Случай 3 (рис. 1в):  $ku_m \leq p(0)$ , т.е.

$$ku_m \leq \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

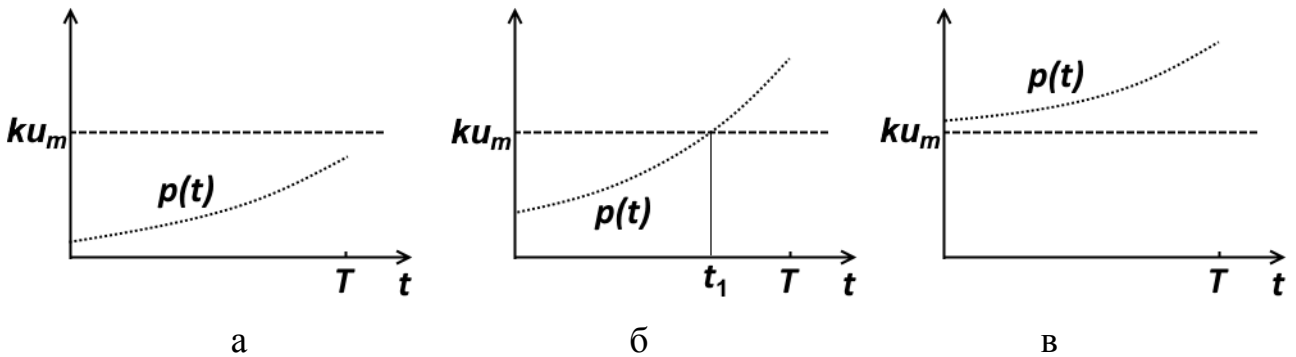


Рис 1. Три варианта расположения функции  $y = p(t)$  относительно прямой  $y = ku_m$ : случаи 1-3

Рассмотрим каждый из этих случаев.

**Случай 1.**  $\lambda > 0$ ,  $ku_m \geq p(T)$ .

Тогда  $p(t) \leq ku_m$  при всех  $t \in [0; T]$ . Тогда из формулы (8) следует, что

$$u^*(t) = \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)] \quad (17)$$

Подставляя это в (13), получаем

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)] - b, \quad \psi(0) = \psi^0. \quad (18)$$

Решение этой задачи Коши имеет вид

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t-T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[ \psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{4\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t] \quad (19)$$

при  $0 \leq t \leq T$ .

**Случай 2.**  $\lambda > 0$ ,  $p(0) < ku_m < p(T)$ .

Тогда существует точка  $t_1 \in (0; T)$ , такая, что  $p(t_1) = ku_m$  (см. рис 1б). Другими словами,  $t_1$  определяется путем приравнивания функции  $p(t)$ , даваемой выражением (15), к величине  $ku_m$ . Имеем для этой величины уравнение  $N_0 / (2\varphi_m) \exp[\lambda(t_1 - T)] = ku_m$ , т.е.

$$t_1 = T - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{2\varphi_m ku_m}. \quad (20)$$

Вычисленное таким образом  $t_1$  положительно ввиду условия  $p(0) < ku_m < p(T)$ , определяющего Случай 2 (неположительность  $t_1$  означала бы, что  $p(0) > ku_m$ , т.е. имеет место Случай 3).

Для оптимального управления получаем

$$u^* = \begin{cases} p(t)/k, & 0 \leq t \leq t_1 \\ u_m, & t_1 < t \leq 1 \end{cases}. \quad (20)$$

Подставив  $u = u^*$  в уравнение (13), получим для функции  $\psi(t)$  задачу Коши с правой частью, заданной отдельно на отрезках  $0 \leq t \leq t_1$  и  $t_1 \leq t \leq 1$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)] - b, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (21)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad t_1 \leq t \leq 1, \quad \psi(t_1 + 0) = \psi(t_1 - 0). \quad (22)$$

Последовательно решая задачи (21), (22), получаем

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t-T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[ \psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{4\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad (23)$$

$$0 \leq t \leq t_1.$$

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\lambda} + \left[ \psi(t_1) - \frac{u_m - b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda(t-t_1)], \quad t_1 \leq t \leq 1. \quad (24)$$

**Случай 3.**  $\lambda > 0$ ,  $ku_m \leq p(0)$

В этом случае  $p(t) \geq ku_m$  для всех  $t \in [0; T]$ , в частности  $p(T) = N_0 / 2\varphi_m > ku_m$ . Из (8) следует, что оптимальное управление имеет тогда вид

$$u^*(t) = u_m, \quad t \in [0; T]. \quad (25)$$

Подставив  $u = u^*$  в уравнение (13), получим для функции  $\psi(t)$  задачу Коши

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad \psi(0) = \psi^0,$$

решение которой имеет вид

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\alpha} + \left[ \psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha t]. \quad (26)$$

### 3.3. Строго убывающая функция $p(t)$

На протяжении подраздела 3.3 будем полагать, что

$$\lambda = a - cN_0 / \varphi_m < 0. \quad (27)$$

Для удобства перепишем формулу (15):

$$p(t) = \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)]$$

Могут иметь место три случая (см. рис. 2).

Случай 4 (рис. 2а):  $ku_m \geq p(0)$ , т.е.

$$ku_m \geq \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

Случай 5 (рис. 2б):  $p(T) < ku_m < p(0)$ , т.е.

$$\frac{N_0}{2\varphi_m} < ku_m < \frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T].$$

Случай 6 (рис. 2в):  $ku_m \leq p(T)$ , т.е.

$$ku_m \leq \frac{N_0}{2\varphi_m}.$$

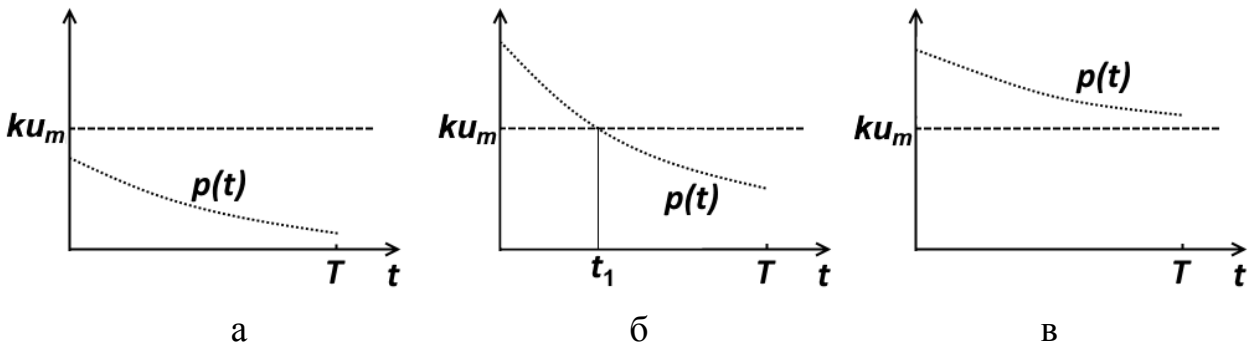


Рис 2. Три варианта расположения функции  $y = p(t)$  относительно прямой  $y = ku_m$ : случаи 4-6

Рассмотрим эти случаи последовательно.

**Случай 4.**  $\lambda < 0$ ,  $p(0) \leq ku_m$

Таким образом,  $\frac{N_0}{2\varphi_m} \exp[-\lambda T] \leq ku_m$ . В этом случае  $p(t) \leq ku_m$  для всех  $t \in [0; T]$ . Тогда из (8) следует, что

$$u^*(t) = \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)]. \quad (28)$$

Подставив  $u = u^*$  в уравнение (13), получим для функции  $\psi(t)$  задачу Коши

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)] - b, \quad \psi(0) = \psi^0. \quad (29)$$

Ее решение имеет при  $0 \leq t \leq T$  вид

$$\psi(t) = \frac{N_0 \exp[\lambda(t-T)]}{4\lambda k\varphi_m} - \frac{b}{\lambda} + \left[ \psi^0 - \frac{N_0 \exp[-\lambda T]}{2\lambda k\varphi_m} + \frac{b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t]. \quad (30)$$

**Случай 5.**  $\lambda < 0$ ,  $p(T) < ku_m < p(0)$

Таким образом,  $N_0 / (2\varphi_m) < ku_m < N_0 / (2\varphi_m) \exp[-\lambda T]$ . Тогда существует точка  $t_1 \in (0; T)$ , такая, что  $p(t_1) = ku_m$ . Т.е.  $t_1$  определяется путем приравнивания функции  $p(t)$ , даваемой формулой (15) к величине  $ku_m$ . Получим

$$t_1 = T - \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{2\varphi_m ku_m}. \quad (31)$$

Тогда оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \begin{cases} u_m, & 0 \leq t \leq t_1 \\ p(t)/k, & t_1 < t \leq 1 \end{cases}. \quad (32)$$

Подставим это в (13). Получим

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (33)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + \frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\lambda(t-T)] - b, \quad t_1 \leq t \leq 1, \quad \psi(t_1+0) = \psi(t_1-0). \quad (34)$$

Решив данные задачи на соответствующих интервалах времени, получаем

$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\lambda} + \left[ \psi^0 - \frac{u_m - b}{\lambda} \right] \exp[-\lambda t], \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (35)$$

$$\psi = \left\{ \frac{\frac{N_0}{2k\varphi_m} \exp[\alpha(t-T)]}{2\alpha} - \frac{b}{a} \right\} + C \exp[-\alpha(t-T)], \quad t_1 \leq t \leq T, \quad (36)$$

где

$$C = \frac{u_m - b}{\alpha} \exp[\alpha(t_1 - T)] + \left[ \psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha T] - \exp[\alpha(t_1 - T)] \left\{ \frac{N_0 \exp[\alpha(t_1 - T)]}{4\alpha k\varphi_m} - \frac{b}{\alpha} \right\}. \quad (37)$$

**Случай 6.**  $\lambda < 0$ ,  $ku_m \leq p(T)$ .

В этом случае  $p(t)/k \geq u_m$  для всех  $t \in [0; T]$ . Из (8) следует, что оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = u_m \quad \text{для всех } t \in [0; T]. \quad (38)$$

Подставив это в (13), получаем задачу Коши

$$\frac{d\psi}{dt} = -\lambda\psi + u_m - b, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (39)$$

решением которой является функция



$$\psi(t) = \frac{u_m - b}{\alpha} + \left[ \psi^0 - \frac{u_m - b}{\alpha} \right] \exp[-\alpha t]. \quad (40)$$

Основной вывод настоящего раздела состоит в том, что

- при достаточно высоких значениях параметра релаксации  $a$  и/или достаточно малых значениях интенсивности передачи информации при межличностной коммуникации (параметр  $c$ ) оптимальная стратегия является неубывающей (рис. 1),

- в обратном случае оптимальная стратегия является невозрастающей (рис. 2).

#### 4. Расширенная модель: социум, состоящий из двух групп

Данный раздел посвящен анализу модели, рассматривающей социум более подробно, по сравнению с моделью из предыдущего раздела. Основная цель заключается в том, чтобы установить, сохраняется ли для этой, более сложной, модели вывод предыдущего раздела о влиянии параметров  $a$ ,  $c$  на характер оптимальной кампании.

Модель имеет вид (см. [5])

$$\frac{d\psi_1}{dt} = f_1(\psi_1, \psi_2, u) - a\psi_1. \quad (41)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = f_2(\psi_1, \psi_2, u) - a\psi_2. \quad (42)$$

$$J(n, u) = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \int_{-\psi_1(T)}^{\Phi_m} n_1(\varphi) d\varphi + \int_{-\psi_2(T)}^{\Phi_m} n_2(\varphi) d\varphi \rightarrow \max, \quad (43)$$

где

$$f_1(\psi_1, \psi_2, u) = c \left[ \gamma \left( 2 \int_{-\psi_1}^{\Phi_m} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) + (1 - \gamma) \left( 2 \int_{-\psi_2}^{\Phi_m} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + (u - b),$$

$$f_2(\psi_1, \psi_2, u) = c \left[ (1-\gamma) \left( 2 \int_{-\psi_1}^{\varphi_m} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) + \gamma \left( 2 \int_{-\psi_2}^{\varphi_m} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + (u - b),$$

и по-прежнему имеет место ограничение

$$0 \leq u \leq u_m. \quad (44)$$

Здесь предполагается, что система состоит из двух групп индивидов, каждая из которых характеризуется своим распределением  $n_1(\varphi)$ ,  $n_2(\varphi)$ , при этом каждый индивид более общается с членами своей группы, чем чужой, что описывается параметром  $\gamma$  (при этом  $\gamma=1$  соответствует тому, что межгрупповая коммуникация отсутствует, а  $\gamma=0,5$  соответствует однородной коммуникации, когда группы фактически отсутствуют; далее будем полагать, что  $0,5 < \gamma < 1$ ). Обозначим численность первой группы через  $N_1$ , численность второй группы – через  $N_2$ ; положим, что распределения индивидов по установке внутри каждой из групп аналогичны распределению из модели, рассмотренной в предыдущем разделе. Другими словами, распределения являются равномерными на некотором экзогенно заданном интервале  $(-\varphi_m, \varphi_m)$ , так что

$$\int_{-\psi}^{\varphi_m} n_i(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & \psi < -\varphi_m, \\ \frac{N_i}{2} \left( 1 + \frac{\psi}{\varphi_m} \right), & -\varphi_m \leq \psi \leq \varphi_m, \\ N_i, & \psi > \varphi_m, \end{cases}$$

(здесь и в формулах (45):  $i=1,2$ ). Имеем для численностей сторонников Правой илевой партий в первой и группах:

$$R_i(t) = \int_{-\psi_i(t)}^{\varphi_m} n_i(\varphi) d\varphi, \quad L_i(t) = \int_{-\varphi_m}^{-\psi_i(t)} n_i(\varphi) d\varphi. \quad (45)$$

Кроме того, здесь предполагается, что группы в равной степени подвержены медийной пропаганде каждой из партий

С учетом выбранного вида функций  $f_i(\psi_1, \psi_2, u), n_i(\varphi)$  формулы (41)-(43) принимают вид

$$\frac{d\psi_1}{dt} = c \left[ \gamma N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + (1-\gamma) N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_1, \quad -\varphi_m \leq \psi_1 \leq \varphi_m. \quad (46)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = c \left[ (1-\gamma) N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + \gamma N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_2, \quad -\varphi_m \leq \psi_2 \leq \varphi_m \quad (47)$$

$$J(n, u) = -\frac{k}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{N_1}{2} \frac{\varphi_m + \psi_1(T)}{\varphi_m} + \frac{N_2}{2} \frac{\varphi_m + \psi_2(T)}{\varphi_m} \rightarrow \max. \quad (48)$$

Гамильтониан имеет вид

$$H(\psi_1, \psi_2, p_1, p_2, u) = \left\{ c \left[ \gamma N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + (1-\gamma) N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_1 \right\} p_1 + \\ + \left\{ c \left[ (1-\gamma) N_1 \frac{\psi_1}{\varphi_m} + \gamma N_2 \frac{\psi_2}{\varphi_m} \right] + (u-b) - a\psi_2 \right\} p_2 - \frac{ku^2}{2}.$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы максимизировать гамильтониан по управлению. Имеем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_1 + p_2 - ku.$$

Эта функция имеет максимум при

$$u = \frac{p_1 + p_2}{k}.$$

С учетом ограничения (44) получаем, что оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \begin{cases} 0, & p_1 + p_2 < 0 \\ (p_1 + p_2)/k, & 0 \leq p_1 + p_2 \leq ku_m \\ u_m, & p_1 + p_2 > ku_m \end{cases} \quad (49)$$

Сопряженная система имеет вид

$$\frac{dp_1}{dt} = -\left(\frac{\gamma c N_1}{\Phi_m} - a\right) p_1 - \frac{(1-\gamma)c N_1}{\Phi_m} p_2, \quad p_1(T) = \frac{N_1}{2\Phi_m};$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{(1-\gamma)c N_2}{\Phi_m} p_1 - \left(\frac{\gamma c N_2}{\Phi_m} - a\right) p_2, \quad p_2(T) = \frac{N_2}{2\Phi_m}.$$

Нетрудно видеть, что ввиду положительности значений  $p_1(T), p_2(T)$  функции  $p_1(t), p_2(t)$  положительны при  $0 \leq t \leq T$ . Очевидно также, что каждая из производных  $dp_1/dt, dp_2/dt$  положительна при достаточно больших значениях параметра  $a$  и/или малых значениях параметра  $c$  и отрицательна в обратном случае. Следовательно, оптимальное управление, даваемое формулой (49), является неубывающим при достаточно высоких значениях параметра релаксации  $a$  и невозрастающим при достаточно малых его значениях. Тем самым, модель данного раздела сохраняет основное свойство более простой модели, рассмотренной в предыдущем разделе.

## Заключение

Основной вывод настоящей работы состоит в том, что, в зависимости от параметров системы, оптимальная стратегия пропагандистской кампании может быть как «нарастающей» (т.е. проходящей с неубывающей интенсивностью пропагандистского вещания), так и «убывающей» (проходящей с невозрастающей интенсивностью).

Из полученных формул для обеих рассмотренных моделей следует, что параметры влияют на оптимальную стратегию следующим образом.

- Параметр релаксации  $a$ : большие значения способствуют нарастающей кампании, малые значения способствуют убывающей.
- Продолжительность противоборства  $T$  и интенсивность  $b$  вещания оппозирующей партии не влияет на выбор стратегии (при условии, что эта интенсивность является постоянной).
- Интенсивность передачи информации через межличностную коммуникацию (параметр  $c$ ), численность социума, а также консолидированность группы параметр  $\Phi_{\max}$ : большие значения способствуют убывающей кампании, малые значения – нарастающей.

Дадим содержательную трактовку полученным результатам. Информация распространяется через СМИ и путем межличностной коммуникации (слухов): от индивида к индивиду. При этом влияние информации на конкретного индивида после того, как он ее получит, постепенно уменьшается, так что он может быть «перевербован» более свежей информацией противника.

Соответственно, «нарастающая» кампания ориентирована на то, чтобы для большинства индивидов наша информация была получена непосредственно

перед финишем, и чтобы впечатление от этой информации не успело ослабнуть. Обратная сторона такой стратегии состоит в том, что принявшие нашу сторону индивиды не успеют широко распространить ее «из уст в уста»: ведь каждый акт межличностной коммуникации требует определенного времени. В противоположность этому, стратегия убывающей кампании подразумевает высокую роль межличностной коммуникации: она основана на том, чтобы в самом ее начале убедить в своей позиции значительное количество индивидов, которые затем будут пересказывать ее своим собеседникам. У этой стратегии также есть обратная сторона: с течением времени интерес индивидов к нашей позиции будет угасать, так что к концу кампании противник может «перевербовать» их за счет более интенсивного вещания. Параметры системы определяют баланс между этими типами стратегий. Таким образом, полученные в работе выводы не являются очевидными, но и не противоречат интуиции.

## Библиографический список

1. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование, 2015. Т.27, №12. С.137-148. URL: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3684>.
2. Прончева О.Г. О влиянии степени поляризации общества на исход информационного противоборства // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 75. 29 с. doi:10.20948/prepr-2016-75. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-75>
3. Rashevsky N. Outline of a Physico-mathematical Theory of Excitation and Inhibition // Protoplasma, 1933.
4. Рашевский Н. Две модели: подражательное поведение и распределение статуса // Математические методы в современной буржуазной социологии. Сборник статей. Под ред. Г.В. Осипова. М.: Прогресс. 1966. с. 175-197.
5. Petrov A., Proncheva O. Modeling Propaganda Battle: Decision-Making, Homophily, and Echo Chambers. In: Ustalov D., Filchenkov A., Pivovarova L., Žižka J. (eds) // Artificial Intelligence and Natural Language. AINL 2018. Communications in Computer and Information Science, vol 930. Springer. P. 197-209. DOI: 10.1007/978-3-030-01204-5\_19. URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-01204-5\\_19](https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-01204-5_19)