



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 276 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б.

Поиск порождающих
решений с центральной
симметрией в задаче Хилла

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А.Б. Поиск порождающих решений с центральной симметрией в задаче Хилла // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 276. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2018-276](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-276)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-276>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

А. Б. Батхин

**Поиск порождающих решений
с центральной симметрией в задаче Хилла**

Москва — 2018

УДК 521.1+531.314

Александр Борисович Батхин

Поиск порождающих решений с центральной симметрией в задаче Хилла. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, 2018.

Неинтегрируемая классическая задача Хилла рассматривается как вариант некоторой более общей задачи, связывающей задачу Хилла с интегрируемой задачей Кеплера в равномерно вращающейся системе координат. К обобщённой задаче применяется метод нормальной формы для получения так называемых порождающих решений с различными типами симметрий. Впервые вычисляется новый класс порождающих решений с центральной симметрией, а также поправки к начальным условиям и периоду для продолжения этих решений до периодических орбит задачи Хилла.

Ключевые слова: периодическое решение, задача Хилла, нормальная форма, порождающее решение, центральная симметрия.

Alexander Borisovich Batkhin

Searching for centrally symmetric generating solutions in Hill problem.

The non-integrable classical Hill problem is embedded into more general one which links it with integrable Kepler problem in uniformly rotating frame. It makes possible to apply the method of regular normal form to the last one and to obtain so called generating solutions with different type of symmetries. New class of generating solutions with central symmetry is obtained. The corrections to the initial conditions and period of such solution are computed for continuation of such solutions up to periodic orbits of the planar circular Hill problem.

Key words: periodic solution, Hill problem, normal form, generating solution, central symmetry.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18-01-00422а.

Оглавление

1	Введение	3
2	Симметрии задачи Хилла	5
3	Вычисление порождающих решений первого вида	8
4	Центрально симметричные порождающие решения первого вида	10
	Список литературы	21

© А. Б. Батхин, 2018

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2018

1. Введение

Успех в изучении динамики неинтегрируемой системы Гамильтона часто связан с выделением некоторого «скелета» в фазовом пространстве, вокруг которого формируется иерархическая структура инвариантных многообразий различных размерностей. Для многих прикладных задач этот «скелет» связан с наличием некоторой дискретной группы симметрий уравнений движения.

В препринте рассматривается плоская круговая задача Хилла, имеющая многочисленные приложения в небесной механике и космодинамике. Обычно задача Хилла [1, гл. 10], [2; 3] используется для исследования динамики тела «нулевой» массы (спутника) в окрестности меньшего из двух тяготеющих тел. Она является некоторым предельным вариантом известной *ограниченной задачи трёх тел* (ОЗТТ) [1], когда

- 1) массовый параметр μ в ОЗТТ стремится к нулю и
- 2) большее из двух массивных тел стремится к $+\infty$ вдоль оси абсцисс в равномерно вращающейся (синодической) системе координат.

Хотя задача Хилла неинтегрируема [4], но её уравнения движения в отличие от уравнений ОЗТТ не содержат массового параметра μ , что делает их существенно проще уравнений ОЗТТ. Вторым важным отличием уравнений задачи Хилла от уравнений ОЗТТ является наличие у них двух дополнительных симметрий, т. е. уравнения задачи Хилла инвариантны относительно конечной группы четвёртого порядка преобразований симметрии с двумя образующими, обозначаемыми Σ_1 и Σ_2 (см. раздел 2). Каждое из этих преобразований имеет инвариантное множество в виде двумерной плоскости в расширенном фазовом пространстве задачи.

Ранее в работах [5; 6] автором было предложено рассматривать некоторое обобщение задачи Хилла с дополнительными параметрами. Этот вариант, называемый далее *обобщённой задачей Хилла*, позволяет исследовать периодические решения классической задачи методами теории возмущений. С одной стороны, уравнения задачи Хилла можно рассматривать как сингулярное возмущение уравнений интегрируемой задачи Энона [7—9]. Такой подход был предложен М. Эноном [7; 10—12] и продолжен автором в работах [9; 13]. С другой стороны, рассматривая задачу Кеплера в синодической системе координат и вводя некоторое квадратичное возмущение с малым параметром ε , можно, продолжая по ε , прийти к уравнениям задачи Хилла. Такой подход был предложен А.Д.Брюно [8] и реализован для двойки симметричных решений автором [6]. Наконец, оказалось возможным рассмотреть случай задачи Хилла с кулоновским потенциалом отталкивания, что позволило естественным образом объединить все известные семейства периодических решений задачи Хилла в одну общую сеть [5; 14].

Пусть система канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \partial H / \partial \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\partial H / \partial \mathbf{x}, \quad (1)$$

задаётся гамильтонианом $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в виде

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon R(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где \mathbf{x} и \mathbf{y} — обобщённые координаты и импульсы соответственно, а

- $H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — невозмущённая интегрируемая часть,
- $\varepsilon R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — возмущающая функция с малым параметром ε .

Определение 1. Ω_0 назовём *порождающим решением*, если существует семейство периодических орбит Ω_ε системы (1), параметризованных $\varepsilon > 0$, такое, что $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что порождающее решение Ω_0 может не быть решением в строгом смысле этого слова системы невозмущённых канонических уравнений, задаваемых гамильтонианом H_0 .

Следуя М. Энону [15, п. 2.10], выделим следующие виды порождающих решений. Пусть начало координат O — особая точка функции Гамильтона H_0 или возмущающей функции R . Пусть ρ'_ε и ρ''_ε — соответственно минимальные и максимальные расстояния от O до орбиты Ω_ε , а ρ'_0 и ρ''_0 их пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определение 2. Порождающее решение Ω_0 является решением

- 1) *первого вида*, если $\rho'_0 > 0$, т. е. орбита проходит вдали от особой точки;
- 2) *второго вида*, если $\rho'_0 = 0$ и $\rho'' > 0$, т. е. орбита проходит по крайней мере один раз через особую точку;
- 3) *третьего вида*, если $\rho'' = 0$, т. е. орбита целиком стягивается в особую точку.

Порождающие решения первого вида являются регулярными. Они были предложены А. Пуанкаре [16] и исследуются с помощью нормальной формы функции Гамильтона в окрестности инвариантного многообразия (см. [17, гл. II]). Порождающие решения второго вида являются сингулярными, методика их поиска и исследования для ОЗТТ была независимо разработана А.Д. Брюно и М. Эноном.

Данная работа является продолжением исследований автора [6; 18] по поиску и продолжению порождающих решений семейств симметричных периодических орбит задачи Хилла. Её предварительные результаты докладывались на семинаре имени В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости, а также на XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Конференция Пятницкого), Москва, ИПУ РАН, 30 мая – 1 июня 2018 г [19].

Автор выражает искреннюю признательность профессору А.Д. Брюно за полезное обсуждение и поддержку этой работы.

2. Симметрии задачи Хилла

Как было отмечено во введении, задача Хилла является предельным вариантом ОЗТТ, а её гамильтониан получается в результате канонического преобразования Хилла.

Гамильтониан ОЗТТ в синодической системе отсчёта записывается в виде [1, гл. 7]

$$H_{\text{ОЗТТ}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) + Q_2 P_1 - Q_1 P_2 - \frac{1 - \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2},$$

где $\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$, $\rho_1^2 = (Q_1 - \mu)^2 + Q_2^2$, $\rho_2^2 = (Q_1 + 1 - \mu)^2 + Q_2^2$. Большее из двух активных тел (Солнце) находится в точке $(\mu, 0)$, меньшее (Земля) — в точке $(\mu - 1, 0)$.

Выполним каноническое преобразование с валентностью $\mu^{2/3}$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mu^{1/3} x_1 + \mu - 1, & P_1 &= \mu^{1/3} y_1 \\ Q_2 &= \mu^{1/3} x_2, & P_2 &= \mu^{1/3} y_2 + \mu - 1, \end{aligned}$$

задаваемое производящей функцией

$$S(\mathbf{P}, \mathbf{x}) = (1 - \mu) \left(\mu^{2/3} P_1 - \mu^{1/3} x_2 \right) - \mu^{-1/3} (\mathbf{P}, \mathbf{x}).$$

Здесь $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ — новые векторы координат и импульсов. Это преобразование переносит Солнце в точку $(\mu^{-1/3}, 0)$, Землю в начало координат, а фазовые переменные масштабируются с коэффициентом $\mu^{-1/3}$. Новая функция Гамильтона $\tilde{H}_{\text{ОЗТТ}}$ может быть представлена в виде ряда по степеням малого параметра $\mu^{1/3}$

$$\tilde{H}_{\text{ОЗТТ}} = H(\mathbf{z}) + O\left(\mu^{1/3}\right). \quad (2)$$

После предельного перехода $\mu \rightarrow 0$ первое слагаемое в правой части (2) представляет собой функцию Гамильтона классической задачи Хилла.

Гамильтониан так называемой *обобщённой задачи Хилла* представим в виде

$$H(\mathbf{z}, \varepsilon) = H_0(\mathbf{z}) + \varepsilon H_1(\mathbf{z}), \quad (3)$$

где

$$H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{\sigma}{|\mathbf{x}|}, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (4)$$

$$H_1(\mathbf{z}) = -x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2, \quad (5)$$

а величины $\varepsilon \in [0; 1]$ и $\sigma \in \{-1, 0, +1\}$ суть новые параметры обобщённой задачи. Введение новых параметров позволяет рассматривать задачу Хилла как некоторый вариант возмущения интегрируемых задач. А именно:

- 1) При значениях параметров $\varepsilon = 0$ и $\sigma = -1$ получаем гамильтониан так называемой *синодической задачи Кеплера*, т. е. классической задачи Кеплера в равномерно вращающейся системе координат. Далее в тексте для краткости будем называть её задачей Кеплера. Семейства её периодических решений полностью описаны в [17, гл. III] и используются в дальнейшем исследовании в качестве невозмущённых решений.
- 2) При значениях параметров $\varepsilon = 1$ и $\sigma = 0$ получаем гамильтониан так называемой *задачи Энона* [7—9]. Заметим, что уравнения задачи Энона являются частным случаем уравнений Клохесси-Вилтшира [20] (Clohessy-Wiltshire equations), применяемых в работах по спутниковой навигации.
- 3) При значениях параметров $\varepsilon = 1$ и $\sigma = -1$ получаем гамильтониан задачи Хилла, а при значениях $\varepsilon = 1$ и $\sigma = +1$ — гамильтониан задачи с кулоновым отталкиванием, названный в [5; 14] *задачей анти-Хилла*.

Возмущающая функция $H_1(\mathbf{z})$ разрушает однопараметрическую группу симметрий вращения гамильтониана задачи Кеплера и делает задачу Хилла неинтегрируемой [4]. Единственным первым интегралом системы канонических уравнений задачи Хилла

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2, & \dot{y}_1 = y_2 + 2\varepsilon x_1 - \sigma \frac{x_1}{|\mathbf{x}|^3}, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, & \dot{y}_2 = -y_1 - \varepsilon x_2 - \sigma \frac{x_2}{|\mathbf{x}|^3}, \end{cases} \quad (6)$$

остаётся интеграл энергии, традиционно записываемый в форме интеграла Якоби

$$\mathcal{J} = (1 + 2\varepsilon)x_1^2 + (1 - \varepsilon)x_2^2 - \frac{2\sigma}{|\mathbf{x}|} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = C,$$

где постоянная C удовлетворяет соотношению $C = -2H(\mathbf{z}, \varepsilon)$.

Тем не менее, в силу структуры возмущающей функции $H_1(\mathbf{z})$ (5), уравнения (6) инвариантны относительно преобразований

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &: (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, x_1, -x_2, -y_1, y_2) \\ \Sigma_2 &: (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, -x_1, x_2, y_1, -y_2) \\ \Sigma_{12} &\equiv \Sigma_1 \circ \Sigma_2 : (t, x_1, x_2, x_1, x_2) \rightarrow (t, -x_1, -x_2, -y_1, -y_2). \end{aligned}$$

Эти линейные преобразования расширенного фазового пространства задачи вместе с тождественным образуют конечную группу порядка 4 с образующими Σ_1 и Σ_2 . Это значит, что все периодические решения относятся к одной из следующих групп.

- 1) Несимметричные решения, которые изменяются под действием любого из преобразований Σ_1 , Σ_2 и Σ_{12} .
- 2) Однократно симметричные решения, инвариантные относительно только одного из преобразований Σ_1 или Σ_2 .

- 3) Двойко симметричные решения, инвариантные относительно любого из преобразований Σ_1 , Σ_2 или Σ_{12} .
- 4) Центральное симметричные, инвариантные относительно преобразования Σ_{12} , но не преобразований Σ_1 или Σ_2 .

Однократно и двойко симметричные решения исследовались во многих работах (см., например, обзор ранних работ в [7]). Большое количество таких семейств было найдено и изучено с помощью метода сингулярных порождающих решений, предложенного независимо А.Д.Брюно и М.Эноном для исследования периодических решений ОЗТТ (см. [15; 17; 21]). Этот метод был затем адаптирован для поиска симметричных [11] и несимметричных [12] периодических решений классической задачи Хилла, глобальная кратность которых не превышала трёх. В качестве невозмущённой задачи выступала задача Энона (см. п. 2) на стр. 6). Позднее автором вначале для классического варианта [9; 22], а затем и для варианта обобщённой задачи Хилла [5; 14] был предложен алгоритм исследования семейств симметричных периодических орбит по их порождающим решениям. Этот алгоритм был успешно апробирован на симметричных порождающих решениях с глобальной кратностью не более шести и позволил найти и исследовать более 30 новых семейств периодических орбит [13]. Некоторые из найденных семейств оказались полезными при проектировании перелётов в окрестность ближайших коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 [23].

В работе [11] была высказано предположение, что среди решений задачи Хилла должны быть центрально симметричные периодические орбиты. Но описанные выше алгоритмы не позволили найти ни одной из таких орбит. В данной работе с использованием метода регулярных порождающих решений для синодической задачи Кеплера (см. п. 1) на стр. 6) вычисляются порождающие решения с центральной симметрией.

В силу автономности функции Гамильтона (3) все периодические решения образуют однопараметрические семейства при фиксированном значении параметра ε . Поскольку возмущающая функция (5) регулярна (не имеет особенностей), то при малых значениях параметра ε характеристики семейств периодических орбит обобщённой задачи Хилла представляют собой малые возмущения характеристик соответствующих семейств задачи Кеплера за исключением точек бифуркации последних. При дальнейшем продолжении по параметру возможно появление таких топологических препятствий, которые не позволяют найденное порождающее решение задачи Кеплера продолжить до периодического решения задачи Хилла при $\varepsilon = 1$. Как показано в [6], одним из таких препятствий может быть изменение характера устойчивости вертикальных точек либрации $L_{1,2}^y$ обобщённой задачи Хилла, а другим — их уход на бесконечность при стремлении параметра $\varepsilon \rightarrow 1$. Таким образом, далеко не каждому порождающему решению обобщённой задачи соответствует семейство периодических решений классической задачи Хилла.

3. Вычисление порождающих решений первого вида

Для поиска порождающих решений первого вида применим классический метод в теории возмущений — метод приведения гамильтониана полной задачи к нормальной форме вблизи периодического решения невозмущённой задачи.

Схематично идея метода состоит в следующем.

- 1) Выбираются локальные координаты, т. е. такие координаты, в которых гамильтониан наиболее близок к квадратичной нормальной форме вблизи положения равновесия.
- 2) Выполняется процедура нормализации до определённого порядка.
- 3) На каждом шаге нормализации проверяются условия существования порождающего решения, и в случае их выполнения вычисляются поправки первого порядка к начальным условиям и периоду.

Для формулировки условия существования порождающего решения воспользуемся результатами [17, гл. VII], где вычислялись порождающие решения ОЗТТ при малых значениях параметра μ . Следующий подпункт изложен в соответствии с § 1 главы VII указанной выше монографии.

3.1. Условие существования порождающего решения. Пусть система Гамильтона с двумя степенями свободы определяется функцией $H = H_0 + \varepsilon R$, где $H_0 = -y_1 + f(y_2)$, причем функции $f(y_2)$ и $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ аналитичны в некоторой области и R — двояко периодическая по координатам $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

При $\varepsilon = 0$ и $y_2 = 0$ система Гамильтона имеет аналитическое интегральное многообразие \mathcal{M} , расслоенное на инвариантные торы $\mathcal{T}(y_1^0)$, на которых движение имеет вид

$$y_1 = y_1^0, \quad y_2 = 0, \quad x_1 = x_1^0 - t, \quad x_2 = x_2^0 - Nt,$$

где $N = f'(0)$. Существует такая каноническая замена локальных координат [17, гл. II, VII]

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \xi(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \varepsilon), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \varepsilon \eta(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \varepsilon) \quad (7)$$

многообразия \mathcal{M} , которая приводит исходную систему к гамильтоновой нормальной форме

$$\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k = \sum \mathcal{H}_{mn}(\mathbf{x}^*) e^{i(mx_1 + nx_2)},$$

причем H^* содержит только резонансные члены, для которых $-m + Nn = 0$.

Если $N = (p + q)/p$ — рациональное число, где $p > 0$ и q — взаимно простые целые числа, то торы $\mathcal{T}(y_1^0)$ расслаиваются на периодические решения, на которых нормализованный гамильтониан H^* зависит только от одной угловой

переменной $\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} x_1^* + N^{-1}x_2^*$. Нормализующее преобразование (7) в случае рационального N сходится на множестве \mathcal{A} , определяемом системой уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta^*} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_1^*} = 0.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решения этой системы и есть порождающие решения, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta^*} = 0,$$

при этом поправки первого порядка к периоду T и к индексу устойчивости S порождающего решения определяются по формулам

$$T = T_0 + \varepsilon T_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_1} + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

$$s = 1 - \frac{\varepsilon}{2} f''(0) T_0^2 N^{-2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta^{*2}} + O(\varepsilon^2). \quad (9)$$

3.2. Процедура нормализации. Для вычисления резонансной нормальной формы гамильтониана воспользуемся методом В. Ф. Журавлёва инвариантной нормализации (симметризации) [24, гл. 7, 8], основанном на интегрировании гомологического уравнения для получения генератора Ли \mathcal{G} и нормальной формы \mathcal{H} . Пусть исходный гамильтониан имеет вид

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \sum_{k=1} \varepsilon^k H_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Ищем его нормальную форму $\mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ и генератор Ли \mathcal{G} нормализующего преобразования в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \sum_{k=1} \varepsilon^k \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{G} = \sum_{k=1} \varepsilon^k \mathcal{G}_k.$$

Затем составляются гомологические уравнения

$$H_0 * \mathcal{F}_k = 0, \quad \mathcal{F}_k = H_0 * \mathcal{G}_k + M_k, \quad k = 1, \dots,$$

где $H * \mathcal{G}^k$ — k -я итерация скобки Пуассона, а функция M_k выражается через вычисленные ранее слагаемые $\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_j, i, j < k$. Первые значения слагаемых $M_k, k = 1, 2, 3$ суть

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathcal{F}_1, \quad M_2 = H_2 + \frac{1}{2}(H_1 + \mathcal{F}_1) * \mathcal{G}_1, \\ M_3 &= H_3 + \frac{1}{2}(H_2 + \mathcal{F}_2) * \mathcal{G}_1 + \frac{1}{2}(H_1 + \mathcal{F}_1) * \mathcal{G}_2 + \frac{1}{12}(H_1 - \mathcal{F}_1) * \mathcal{G}_1^2. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{Z}(t)$ – решение системы с гамильтонианом H_0 , тогда

$$\int_0^t M_k(\mathbf{Z}(t))dt = t\mathcal{F}_k(\mathbf{Z}) + \mathcal{G}_k(\mathbf{Z}) + f(t). \quad (10)$$

На каждом шаге нормализации выполняется процедура усреднения функции M_k вдоль невозмущённого решения $\mathbf{Z}(t)$. Получаем следующие члены \mathcal{F}_k и \mathcal{G}_k нормальной формы и генератора Ли соответственно.

Нормализующее преобразование задаётся формулами

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \sum_{k=1} \frac{1}{k!} \mathbf{Q} * \mathcal{G}^k, \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} + \sum_{k=1} \frac{1}{k!} \mathbf{P} * \mathcal{G}^k. \quad (11)$$

Вместе с формулой (8) эти формулы позволяют получить поправки первого порядка к периоду и начальным условиям порождённого решения для малых значений возмущающего параметра ε . Это решение следует уточнить и затем попытаться продолжить по ε до нужных значений.

4. Центрально симметричные порождающие решения первого вида

4.1. Структура периодических решений задачи Кеплера. Рассмотрим задачу Кеплера с гамильтонианом (4) в качестве невозмущённой задачи. Напомним структуру семейств её периодических решений, которая подробно описана в [17, гл. III]. Как известно, все финитные движения задачи Кеплера в инерциальной (сидерической) системе отсчёта периодические, но при переходе в равномерно вращающуюся систему отсчёта свойство периодичности сохраняется лишь у двух видов орбит:

- 1) круговые орбиты, прямые или обратные;
- 2) эллиптические орбиты, периоды которых рационально соизмеримы с числом 2π .

Круговые орбиты формируют 2 семейства:

- Id — семейство прямых орбит;
- Ir — семейство обратных орбит.

Пусть T_s — период эллиптической орбиты $N = \frac{2\pi}{T_s}$ в сидерической системе отсчёта. Если орбита периодическая в синодической системе, то

$$N = \frac{p+q}{p}, \quad p \in \mathbb{N} \text{ и } q \in \mathbb{Z},$$

а угол α между соседними апсидами равен $\pi/(p+q)$. Для того чтобы эллиптическая орбита обладала одним из видов симметрии, необходимо выполнение следующих условий.

- I) Орбита Σ_1 -симметрична, если $\varpi + k\alpha = 0$ или π , Σ_2 -симметрична, если $\varpi + k\alpha = \pm\pi/2$, $k = -1, 0, 1$.
- II) Орбита двояко симметричная, если p и q нечётные и одна из апсид равна $\{0, \pi/2, \pi, -\pi/2\}$.
- III) Орбита центрально симметричная, если p и q нечётные, при этом ни одна из апсид не равна $\{0, \pi/2, \pi, -\pi/2\}$.

Семейства симметричных эллиптических периодических орбит обозначаются E_N . Примеры орбит семейств E_N с различными видами симметрий показаны на рис. 1.

Для наглядного представления указанных выше семейств задачи Кеплера в [17, гл. III] было предложено рассматривать сечение Пуанкаре фазового потока, задаваемого системой канонических уравнений задачи Кеплера, плоскостью симметрии $\Pi_1 : x_2 = y_1 = 0$. Σ_1 -симметричные и двояко симметричные решения пересекают эту плоскость ортогонально в точках с координатами $(x_1, 0, 0, y_2)$. Вдоль семейства периодических решений эти ненулевые координаты меняются гладко и образуют некоторую кривую на плоскости Π_1 . В силу наличия второй симметрии в задаче Хилла можно рассматривать сечение Пуанкаре плоскостью $\Pi_2 : x_1 = y_2 = 0$, на которой точки ортогонального пересечения Σ_2 -симметричных и двояко симметричных периодических решений также формируют соответствующие семейства гладких кривых. Преобразования

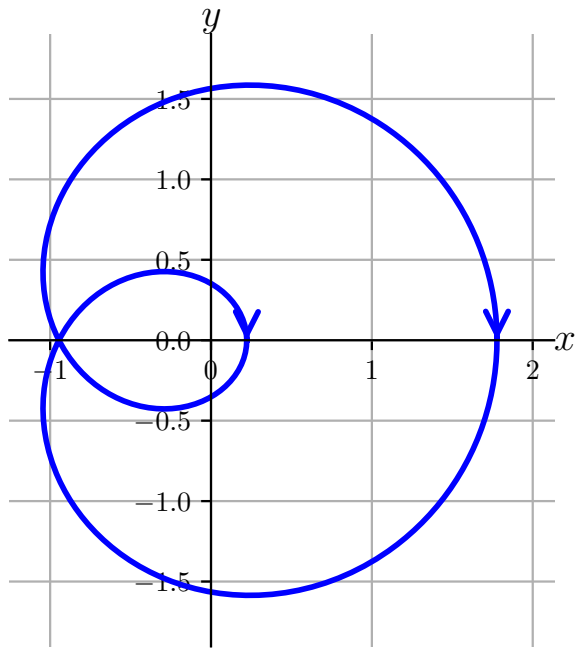
$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{x_1}{2 - |\tilde{e}|}, \quad \tilde{e} = y_2|y_2x_1|, \quad \text{для плоскости } \Pi_1 \\ \tilde{a} &= \frac{x_2}{2 - |\tilde{e}|}, \quad \tilde{e} = -y_1|y_1x_2|, \quad \text{для плоскости } \Pi_2 \end{aligned} \tag{12}$$

обеспечивают наиболее простую форму характеристик периодических решений на плоскостях сечений. Большая полуось a и эксцентриситет e связаны с новыми параметрами соотношением $a = |\tilde{a}|$, $e = |1 - |\tilde{e}||$.

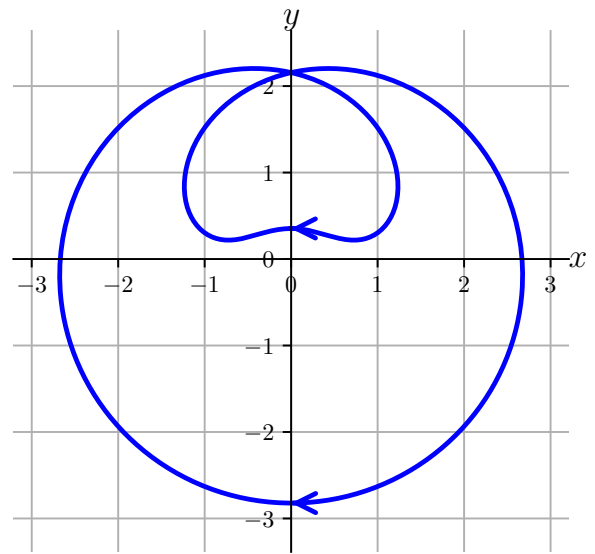
Семейства Id и Ir круговых орбит в координатах (12) представлены горизонтальными прямыми с $\tilde{e} = \pm 1$, а семейства E_N — вертикальными отрезками с координатами $\tilde{a} = \pm N^{-2/3}$, $N = \frac{p+q}{p}$. Отрезки характеристик эллиптических орбит сгущаются слева и справа к отрезкам с координатами $\tilde{a} = \pm 1$. Семейство Id делится окружностью неподвижных точек на две части: Id^+ — круговых орбит, лежащих внутри единичной окружности, и Id^- , лежащих вне её.

Части допустимых областей движения (областей Хилла) плоскостей симметрии Π_1 и Π_2 в координатах \tilde{a} , \tilde{e} представляют собой цилиндры. Развёртка части такого цилиндра показана на рис. 2.

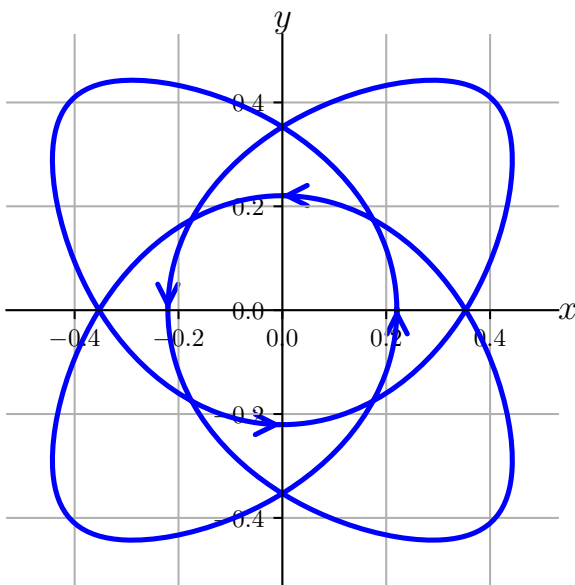
Было показано [6], что при сколь угодно малом возмущении ε в точках пересечения семейства прямых круговых орбит Id с семействами эллиптических орбит E_N при $N = \frac{p \pm 1}{p}$, p — нечётное, происходит бифуркация, в результате которой



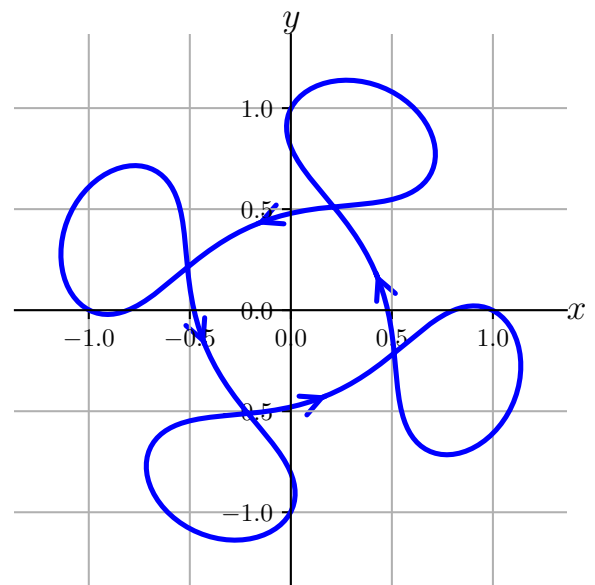
а) Σ_1 -симметричная обратная орбита при $p = 1, q = 0, e = \frac{7}{9}, \varphi = 0$.



б) Σ_2 -симметричная прямая орбита при $p = 2, q = -1, e = \frac{7}{9}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.



в) Двойко симметричная прямая орбита при $p = 1, q = 3, e = \frac{4}{9}, \varphi = 0$.



г) Центральнo симметричная прямая орбита при $p = 3, q = 1, e = \frac{4}{9}, \varphi = \frac{\pi}{8}$.

Рис. 1. Примеры орбит семейств E_N с различными видами симметрий.

отдельные участки характеристик Id^+ и Id^- «сшиваются» с соответствующими участками характеристик семейств E_N , образуя на поверхности цилиндра лабиринтные кривые. Каждая из этих кривых асимптотически приближается к

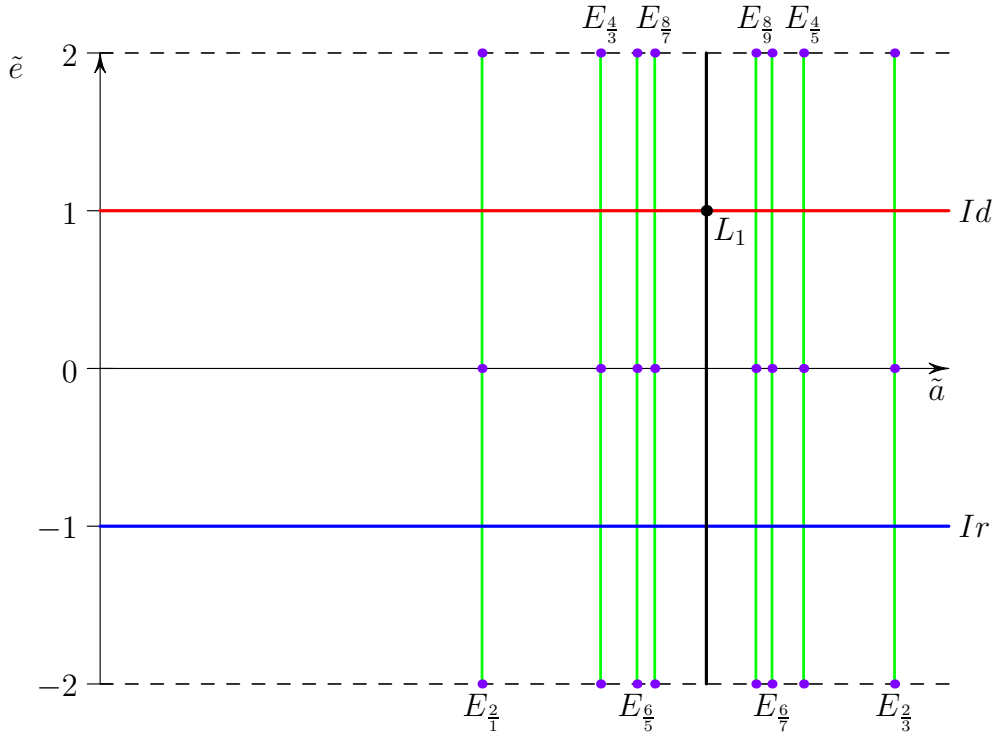


Рис. 2. Характеристики основных семейств симметричных периодических решений синодической задачи Кеплера. Семейство прямых круговых орбит Id показано красным, обратных круговых Ir — синим, эллиптических E_N — зелёным цветом. Орбиты столкновения выделены пурпурными точками.

точкам сгущения, соответствующим точкам либрации L_1 и L_2 .

4.2. Локальные координаты. Две системы координат являются «удобными» локальными координатами задачи Кеплера:

- для круговых орбит — *первая или вторая система элементов Пуанкаре*;
- для эллиптических орбит — *модифицированные переменные Делоне* (l, g, L, G) (подробнее см. [1, гл. VII, п. 7.7], [25, гл. XX, § 8], [26, гл. 2, п. 2.10]). Заметим, что в [27, гл. 1, п. 1.9] система элементов Пуанкаре названа модифицированными переменными Делоне. Здесь мы будем придерживаться терминологии, принятой в [1; 25; 26].

В переменных Делоне невозмущённая часть гамильтониана H_0 имеет вид

$$H_0 = -G - \frac{1}{2L^2}.$$

Следовательно, при $\varepsilon = 0$ эллиптические орбиты определяются значениями

$$L = \sqrt{a}, \quad G = e', \quad l = Nt + l_0, \quad g = \varpi - t,$$

где a — большая полуось орбиты, e — её эксцентриситет, $e' = \varepsilon' \sqrt{a(1 - e^2)}$ —

коэксцентриситет, $N = a^{-3/2}$ — среднее движение, ϖ — аргумент перицентра, l — средняя аномалия. Канонические переменные l и g имеют следующий смысл. Величина $\varepsilon' l$ определяет положение точки на орбите, $\varepsilon' = \pm 1$ — направление движения, а переменная g описывает движение перицентра. Канонически сопряжённые импульсы L и G суть интегралы задачи Кеплера — интеграл энергии и интеграл площадей соответственно. Параметры орбиты a и e выражаются через переменные Делоне по формулам

$$a = L^2, \quad e' = \varepsilon' \frac{G}{L}, \quad e = \frac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L}. \quad (13)$$

Связь между аномалиями показана на рис. 3, где массивное тело находится в точке S .

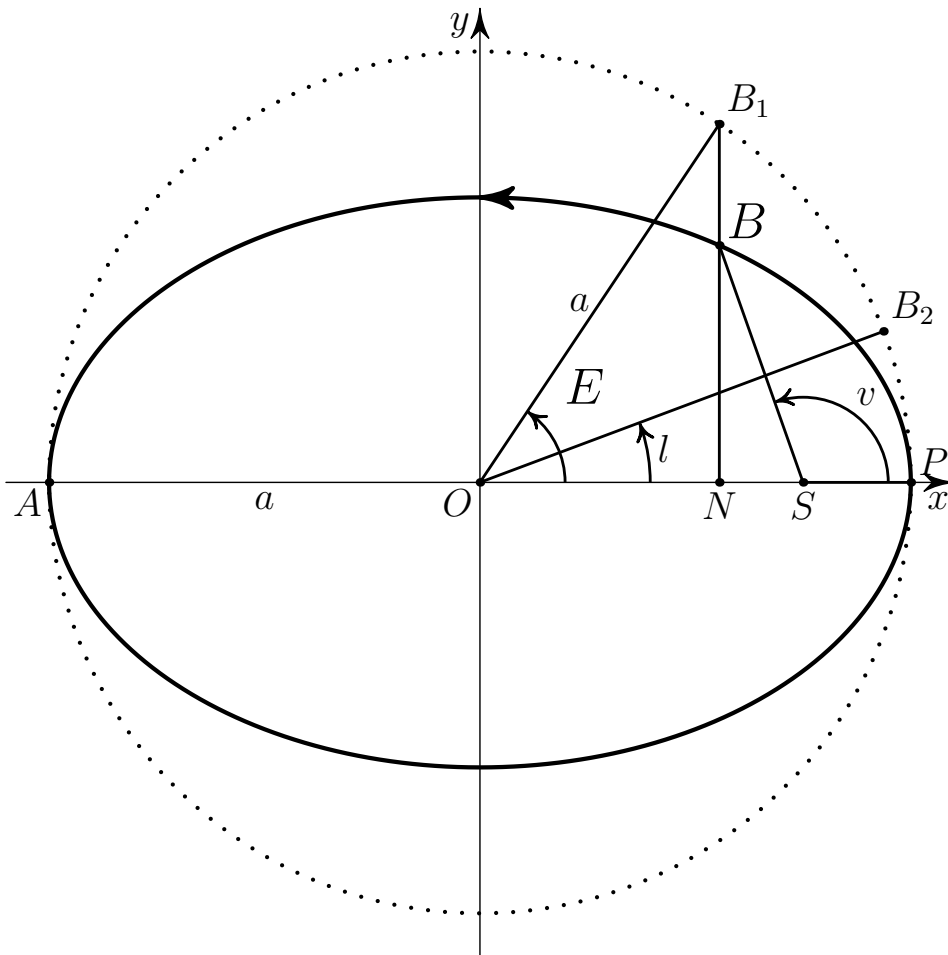


Рис. 3. Эллиптическая орбита в сидерической системе координат. Показана связь между истинной аномалией v и эксцентрической аномалией E .

4.3. Обобщённая задача Хилла в переменных Делоне. Введём полярную систему координат (r, h) , центр которой находится в фокусе эллипса, а угол

между полярной осью и направлением на перицентр P равен g . Тогда связь между полярным углом h , истинной аномалией v и координатой g задаётся соотношением

$$h = \varepsilon'v + g. \quad (14)$$

В полярных координатах возмущающая функция H_1 обобщённой задачи Хилла имеет вид

$$H_1 = -x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{2}r^2 (1 - 3 \cos^2 h) = -\frac{r^2}{4} (3r^2 \cos 2h - 1),$$

подставляя в неё формулу (14), получим выражение возмущающей функции через полярный радиус r и истинную аномалию v :

$$H_1 = -\frac{1}{4}r^2 - \frac{3}{4}r^2 \cos 2v \cos 2g + \frac{3}{4}\varepsilon'r^2 \sin 2v \sin 2g.$$

В небесной механике функции вида $r^2 \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (mv)$ могут быть представлены в виде так называемых рядов Ханзена (Ганзена) [25, гл. VI, § 7] по кратным средней аномалии l . Коэффициенты рядов Ханзена представляют собой ряды по эксцентриситету e и дают хорошее приближение для малых его значений. Однако в нашем случае удобнее выразить величины $r^2 \sin 2v$ и $r^2 \cos 2v$ через параметры орбиты a , e и эксцентрическую аномалию E :

$$\begin{aligned} r^2 \cos 2v &= x^2 - y^2, & r^2 \sin 2v &= 2xy, \\ x &= a(\cos E - e), & \varepsilon'y &= ae' \sin E. \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{a^2}{2} \left(3e^2 - 4e \cos E + (1 + e'^2) \cos 2E \right), \\ \varepsilon'xy &= \frac{1}{2}a^2 e' (\sin 2E - 2e \sin E). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться разложением тригонометрических функций эксцентрической аномалии E по средней аномалии l :

$$\begin{aligned} \cos E &= -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)) \cos kl, \\ \cos mE &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} (J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)) \cos kl, \quad m > 1, \\ \sin mE &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} (J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)) \cos kl, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

а также разложением r^2 по l :

$$r^2 = a^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \right) - 4a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} J_k(ke) \cos kl.$$

Здесь $J_k(x)$ — функции Бесселя первого рода. Тогда получаем

$$x^2 - y^2 = \frac{5}{2}a^2e^2 - \frac{4a^2}{e^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + (1 - 2k)e'^2 \right) J_k(ke) + 2kee'^2 J_{k+1}(ke) \right\} \frac{\cos kl}{k},$$

$$\varepsilon'xy = \frac{4a^2e'}{e^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(ke'^2 - 1 \right) J_k(ke) + eJ_{k+1}(ke) \right\} \frac{\sin kl}{k^2}.$$

С учётом подстановки (13) возмущающая функция H_1 в переменных Делоне примет вид

$$H_1(L, G) = -\frac{L^2}{8} (5L^2 - 3G^2) - \frac{15}{8}L^2 (L^2 - G^2) \cos 2g +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k(L, G) \cos kl + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{\pm}(L, G) \cos(kl \pm 2g),$$

где

$$A_k = \frac{L^4}{k^2} J_k(ke), \quad K = \frac{3L^3}{2k^2(L^2 - G^2)},$$

$$D_k^{\pm} = K \left\{ \left(L^3 \pm 2L^2G + (1 - 2k)LG^2 \mp 2kG^3 \right) J_k(ke) + \right.$$

$$\left. + 2G\sqrt{L^2 - G^2}(kG + L) J_{k+1}(ke) \right\}.$$

4.4. Нормальная форма I-го порядка. Рассматриваем такие L_0 , что среднее движение $N = L_0^{-3}$ является рациональным числом $N = (p + q)/p$, тогда многообразии \mathcal{M} состоит из периодических орбит с периодом $T_0 = 2\pi p$. На этих резонансах гамильтониан H зависит только от одной угловой переменной ϖ и обобщённого импульса G . Условие, выделяющее среди множества периодических решений многообразия \mathcal{M} порождающие орбиты, следующее:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\varpi, G)}{\partial \varpi} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, порождающие решения образуют однопараметрическое семейство.

В НФ попадут только те члены возмущения, которые не зависят от t . На невозмущённом решении такое возможно при $k = \pm \frac{2p}{p + q}$. Выделяем три случая.

Случай I: $p + q = 1$. Тогда $k = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, $L_0^3 = p$, $N = \frac{1}{p}$.

Случай II: $p + q = 2$. Тогда $k = p$, p — нечётное, $L_0^3 = \frac{p}{2}$, $N = \frac{2}{p}$.

Случай III: $p + q > 2$. Тогда таких k нет.

В результате вычислений получаем, что поправки первого порядка к нормальной форме суть

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{L_0^2}{8} (5L_0^2 - 3G_0^2) + \begin{cases} D_{2p}^+(G_0) \cos 2\varpi, & p + q = 1, \quad L_0^3 = p, \\ D_p^+(G_0) \cos 2\varpi, & p + q = 2, \quad L_0^3 = p/2, \\ 0, & p + q > 2. \end{cases} \quad (16)$$

Генератор \mathcal{G}_1 согласно (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 = & \frac{15}{16} L_0^2 (L_0^2 - G_0^2) \sin 2\varpi + L_0^3 \sum_k A_k(L_0, G_0) \frac{\sin kl_0}{k} + \\ & + L_0^3 \sum_k \frac{D_k^-(L_0, G_0)}{k + 2L_0^3} \sin(kl_0 - 2\varpi) + L_0^3 \sum_k' \frac{D_k^+(L_0, G_0)}{k - 2L_0^3} \sin(kl_0 + 2\varpi). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь \sum' означает отсутствие слагаемого для $k = 2p$ при $p + q = 1$, $k = p$ при $p + q = 2$. При $p + q > 2$ все слагаемые в последней сумме присутствуют.

Утверждение. Для однократно или двойко симметричных порождающих решений поправки первого порядка к начальным условиям для угловых переменных l и g равны нулю.

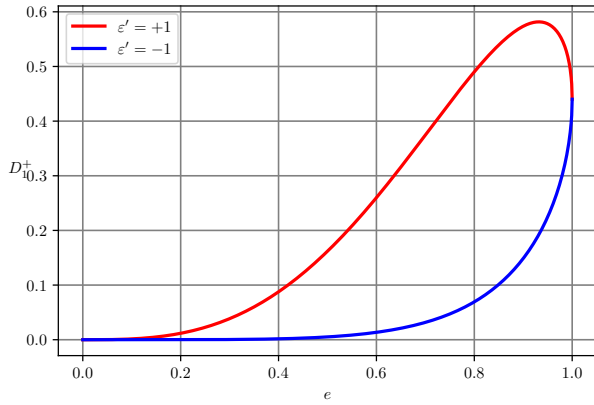
Действительно, согласно формулам (11) поправки первого порядка к угловым переменным l и g зависят от величин $\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial L_0}$ и $\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial G_0}$ соответственно. Для однократно или двойко симметричных невозмущённых решений в силу условий I) и II) на стр. 11 начальные значения выбираются равными $l_0 = 0$, $\varpi = k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. Подставляя их в частные производные генератора \mathcal{G}_1 по обобщённым импульсам, приходим к выводу, что поправки первого порядка к начальным условиям для средней аномалии l и положения перицентра g равны нулю для симметричных порождающих решений. Следовательно, продолжение по малому параметру ε симметричного порождающего решения имеет те же симметрии, что и исходное.

Условие на существование порождающих решений есть

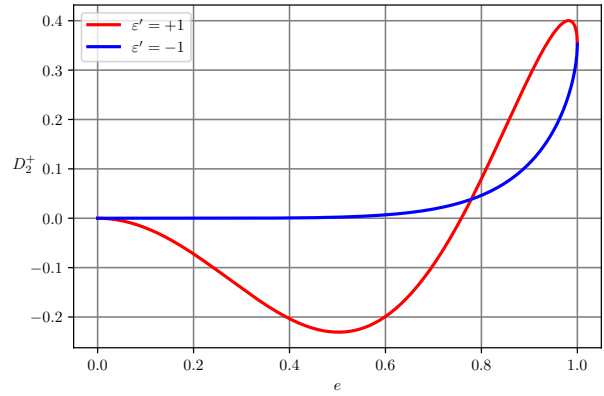
$$\begin{aligned} D_{2p}^+(e, \varepsilon') \sin 2\varpi &= 0, \quad \text{при } p + q = 1, \\ D_p^+(e, \varepsilon') \sin 2\varpi &= 0, \quad \text{при } p + q = 2. \end{aligned}$$

Получаем два семейства порождающих решений:

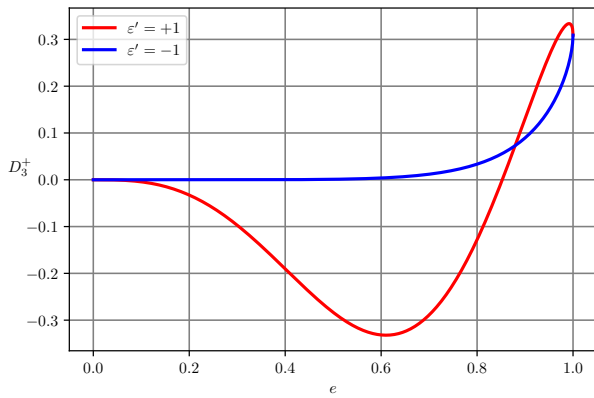
- **симметричные** при $\varpi = \frac{k\pi}{2}, k = 0,1,2,3;$
- **несимметричные** при $D_p^+(e, \varepsilon') (G_0) = 0, p \in \mathbb{N}, \varpi \neq \frac{k\pi}{2}.$



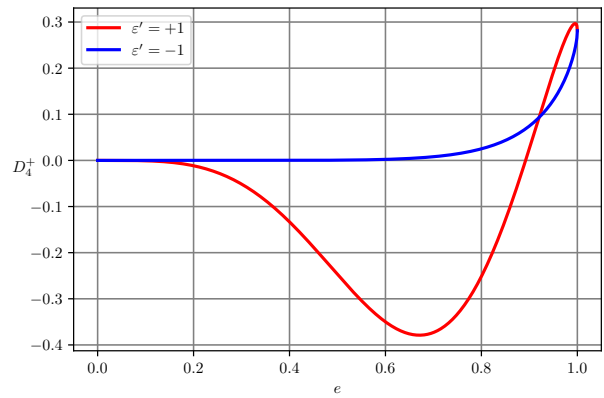
а) $p = 1$



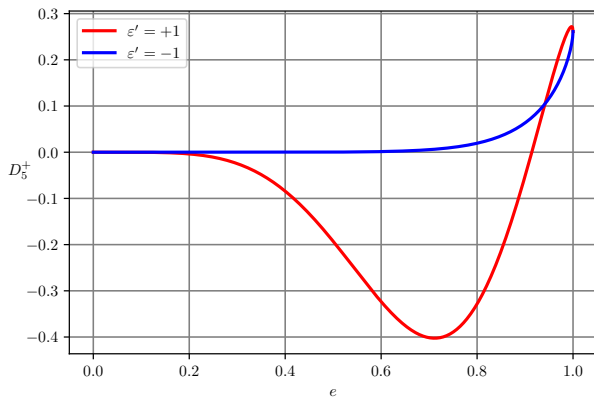
б) $p = 2$



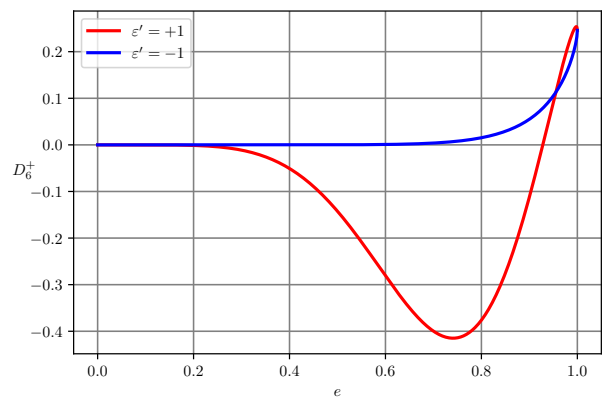
в) $p = 3$



г) $p = 4$



д) $p = 5$



е) $p = 6$

Рис. 4. Графики функции $D_p^+(e)$ для значений $p = 1, \dots, 6$. Красным цветом показан график для прямых, а синим — для обратных орбит.

Функция $D_p^+(e, \varepsilon')$ имеет единственный нуль на полуоткрытом интервале

$(0; 1]$ для всех $p \geq 2$ и $\varepsilon' = +1$. Её корни на этом интервале для $p = 2, \dots, 10$ приведены в таблице 1, а графики для первых шести значений p показаны на рис. 4.

Таблица 1. Нули e_p функции $D_p^+(e)$, $\varepsilon' = 1$.

p	e_p
2	0.7582285804
3	0.8525432355
4	0.8921553603
5	0.9140378191
6	0.9279703994
7	0.9376536212
8	0.9447962860
9	0.9502967798
10	0.9546729043

Таким образом, при $p+q = 1$ имеются только либо однократно симметричные порождающие решения для $p \geq 1$, либо несимметричные прямые ($\varepsilon' = 1$) порождающие решения для $p \geq 2$.

Согласно условию III) на стр. 11, центрально симметричные порождающие решения имеют место при $p + q = 2$, p — нечётное и $p \geq 3$. В этом случае $q < 0$, т. е. $a > 1$. Это означает, что орбита такого решения может проходить вне вертикальных точек либрации, которые при продолжении по параметру ε до 1 уходят на бесконечность и тем самым создают препятствие для продолжения такого порождающего решения до периодической орбиты задачи Хилла.

Итак, при $p + q = 2$ найти центрально симметричные порождающие решения с большой полуосью $a < 1$ по первой нормальной форме (16) не удаётся. Необходимо выполнить следующий шаг нормализации.

Замечание. Ранее в работе автора [18] уже вычислялась нормальная форма I-го порядка и приводился вид функции $D_p^\pm(e, \varepsilon')$ (в упомянутой работе она имела обозначение $S_p(\varepsilon', e)$). Однако при её выводе была допущена неточность, что, разумеется, сказалось на значениях корней e_p и на виде графика функции. Хотя качественные выводы были сделаны верно.

4.5. Нормальная форма II-го порядка. Поскольку слагаемое $H_2 \equiv 0$, то для вычисления НФ II-го порядка согласно формуле (10) необходимо усреднить функцию

$$M_2 = \frac{1}{2}(H_1 + \mathcal{F}_1) * \mathcal{G}_1 \quad (18)$$

вдоль невозмущенного решения

$$L_0 = \sqrt[3]{p/4}, \quad G_0, \quad l = \frac{4}{p}t + l_0, \quad g = \varpi - t, \quad p = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Условие $p + q > 2$ приводит к тому, что выражение (16) для нормальной формы I-го порядка принимает вид

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{L^2}{8} (5L^2 - 3G^2),$$

а в выражении (17) генератора \mathcal{G}_1 суммирование ведётся по всем натуральным k в последнем слагаемом. Очевидно, что при указанном выше условии $p + q > 2$ в поправки II-го порядка \mathcal{F}_2 к НФ попадут только те слагаемые, которые либо не зависят от угловых переменных l и g , либо содержат множитель $\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (kl + 4g)$ при $p + q = 4$, $k = p$, $N = \frac{4}{p}$, т. е. нормальная форма II-го порядка имеет вид

$$\mathcal{F}_2(G, \varpi) = \mathcal{F}_2^{(1)}(G) + \mathcal{F}_2^{(2)}(G, \varpi).$$

Поскольку условие (15) на существование порождающих решений зависит от второго слагаемого $\mathcal{F}_2^{(2)}(G, \varpi)$, то в функции (18) нужно найти все слагаемые с множителем $\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (pl + 4g)$.

Это удалось сделать после довольно громоздких вычислений, и в итоге получилось следующее выражение

$$\mathcal{F}_2^{(2)}(G, \varpi) = -\frac{45p^2}{256} (1 + e^2) D_p^+(e, \varepsilon') \cos 4\varpi$$

для нечётных p .

Условие $\frac{\partial \mathcal{F}_2^{(2)}(G, \varpi)}{\partial \varpi} = 0$ выделяет два семейства порождающих решений:

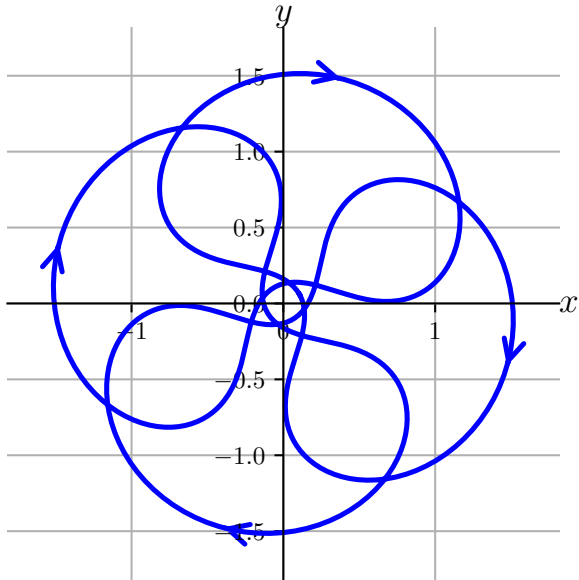
- 1) аргумент перицентра $\varpi = \frac{k\pi}{4}$, $k = 0, \dots, 7$, эксцентриситет e — любой;
- 2) аргумент перицентра $\varpi \neq \frac{k\pi}{4}$, эксцентриситет e — нуль функции $D_p^+(e)$.

Первое условие соответствует двойко симметричным орбитам, поскольку угол α между апсидами равен $\pi/(p + q) = \pi/4$.

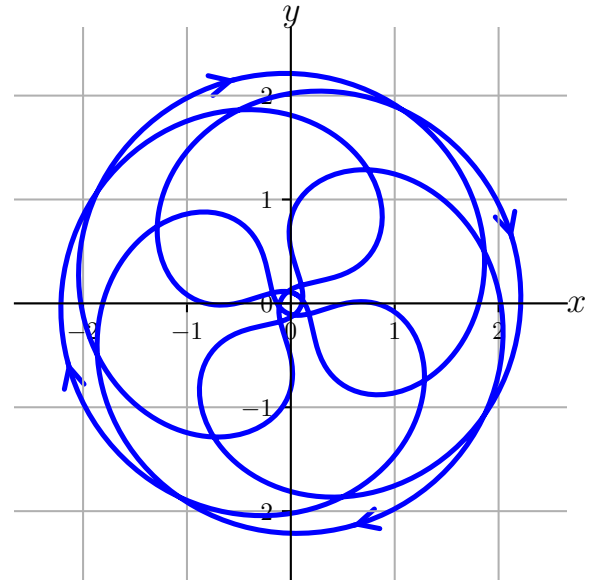
Покажем, что для первого семейства решений поправки первого порядка для угловых переменных l и g также равны нулю. Для этого выполним каноническое ортогональное преобразование поворота системы координат на угол $\pi/4$. Нетрудно видеть, что возмущающая функция H_1 примет вид $H_1 = r^2(3 \sin 2h - 1)/4$. Повторяя выкладки подраздела 4.3, получим аналогичное выражение для возмущающей функции H_1 в переменных Делоне, и, следовательно, после применения

процедуры нормализации, аналогичное выражение для генератора \mathcal{G}_1 нормализующего преобразования. Тогда, согласно утверждению на стр. 17, поправки к l и g равны нулю.

Второе условие позволяет найти несимметричные прямые порождающие решения, в том числе и центрально симметричные. В силу того что функция $D_1^+(e)$ не имеет нулей на интервале $(0; 1]$, то центрально симметричные решения в силу условия III) на стр. 11 получаются при нечётных $p \geq 3$, $p + q = 4$. Следовательно, порождающее решение с большой полуосью $a < 1$ соответствует единственному набору значений $p = 3$, $q = 1$, $e = e_3$, $\varpi \neq k\pi/4$. Для решений с большой полуосью $a > 1$ получаем счётное семейство порождающих решений с параметрами $q = 4 - p$, $p \geq 5$ и нечётное, $e = e_p$, $\varpi \neq k\pi/4$. Значения эксцентриситета берутся из таблицы 1. На рис. 5 приведены примеры порождающих орбит с разными значениями больших полуосей.



а) $p = 3, q = 1, e = e_p, \varpi = \frac{\pi}{6}$.



б) $p = 5, q = -1, e = e_p, \varpi = \frac{\pi}{3}$.

Рис. 5. Центрально симметричные порождающие решения.

Наконец, поправки к начальным условиям

$$l_0 \equiv 0, \quad g_0 \equiv \varpi, \quad L_0 \equiv \sqrt[3]{p/4}, \quad G_0 \equiv L_0 \sqrt{1 - e_p^2},$$

периоду $T_0 \equiv \frac{2\pi p}{4 - p}$ и индексу устойчивости s находятся по формулам (11), (8) и (9) соответственно.

Список литературы

1. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М. : Наука, 1982. 656 с.
2. Батхин А. Б., Батхина Н. В. Задача Хилла. Волгоград : Волгоградское научное издательство, 2009. 200 с.
3. Wilson C. The Hill-Brown Theory of the Moon's Motion: Its Coming-to-be and Short-lived Ascendancy (1877-1984). New York, Dordrecht, Heidelberg, London : Springer, 2010. 323 p. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences).
4. Morales-Ruiz J., Simó C., Simon S. Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2005. Vol. 25, no. 4. P. 1237–1256.
5. Батхин А. Б. Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 131—137. ISSN 0869-5652.
6. Batkhin A. B. New families of doubly symmetric periodic solutions of Hill problem // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL SCIENCES. Vol. 1. IEEE RUSSIA, MOSCOW, V.A, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541164.
7. Hénon M. Numerical Exploration of the Restricted Problem. V. Hill's Case: Periodic Orbits and Their Stability // Astron. & Astrophys. 1969. Vol. 1. P. 223–238.
8. Брюно А. Д. Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1996. 32 с. (Препринт № 93).
9. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 4. С. 308—322.
10. Hénon M. Numerical exploration of the restricted problem. Hill's case: non-periodic orbits // Astron. & Astr. 1970. No. 9. P. 24–36.
11. Hénon M. New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2003. Vol. 85. P. 223–246.
12. Hénon M. Families of asymmetric periodic orbits in Hill's problem of three bodies // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2005. Vol. 93. P. 87–100.
13. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 6. С. 497—510.

14. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2014. № 9. ISSN 2071-2898. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2014/prep2014_09.pdf.
15. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1997. 278 p. (Lecture Note in Physics. Monographs ; 52).
16. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 1. М. : Наука, 1971. 771 с.
17. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.
18. *Батхин А. Б.* Порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2010. № 47. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_47.pdf.
19. *Батхин А. Б.* Порождающие решения семейств периодических орбит со специфической симметрией задачи Хилла // «УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ (КОНФЕРЕНЦИЯ ПЯТНИЦКОГО)», Материалы XIV Международной научной конференции / под ред. В. Н. Тхай. М. : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва), 2018. С. 63—66.
20. *Clohessy W. H., Wiltshire R. S.* Terminal Guidance for Satellite Rendezvous // J. Aerospace Sciences. 1960. Sept. Vol. 27. P. 653–658, 674. DOI: 10.2514/8.8704.
21. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. II. Quantitative Study of Bifurcations. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2001. 308 p. (Lecture Note in Physics. Monographs ; 65).
22. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2012. № 52. ISSN 2071-2898. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_52.pdf.
23. *Крейсман Б. Б.* Одноимпульсные перелеты с орбит искусственных спутников на орбиты вокруг точки либрации L_1 или L_2 // Космические исследования. 2011. Т. 49, № 4. С. 335—344.
24. *Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М. : ЛЕНАНД, 2015. С. 304. 304 с.
25. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. Издательство «Наука», 1968. 800 с.
26. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы / под ред. И. И. Шевченко. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 588 с.

27. Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы / под ред. И. И. Шевченко. М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2014. 432 с.

Список таблиц

1	Нули e_p функции $D_p^+(e)$, $\varepsilon' = 1$	19
---	--	----

Список рисунков

1	Примеры орбит семейств E_N	12
2	Характеристики основных семейств симметричных периодических решений задачи Кеплера	13
3	Эллиптическая орбита в сидерической системе координат	14
4	Графики функции $D_p^+(e)$ для значений $p = 1, \dots, 6$	18
5	Центрально симметричные порождающие решения	21