



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 278 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Демьянко К.В.**

О временной устойчивости  
течения Пуазейля в канале  
эллиптического сечения

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Демьянко К.В. О временной устойчивости течения Пуазейля в канале эллиптического сечения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 278. 25 с. doi:[10.20948/prepr-2018-278](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-278)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-278>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук

К. В. Демьянко

О временной устойчивости  
течения Пуазейля  
в канале эллиптического сечения

МОСКВА, 2018 г.

К. В. Демьянко

## О временной устойчивости течения Пуазейля в канале эллиптического сечения

**Аннотация.** Описана численная модель для исследования временной устойчивости течения Пуазейля в канале постоянного эллиптического сечения, включая, алгоритм расчета максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений с использованием спектральной редукции, позволяющей существенно сократить вычислительные затраты и исключить возмущения, обусловленные погрешностью аппроксимации. Рассчитана максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии возмущений для канала круглого и эллиптического сечения. Показано, что её абсолютный максимум в случаях круглого и эллиптического сечения достигается на возмущениях различных симметрий.

**Ключевые слова:** гидродинамическая устойчивость, максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии возмущений, спектральная редукция, канал эллиптического сечения

K. V. Demyanko

## On temporal stability of the Poiseuille flow in a channel of elliptic cross-section

**Abstract.** A numerical model for the temporal stability analysis of the Poiseuille flow in a channel of constant elliptic cross-section is described, including an algorithm for computing the maximum possible amplification of the average kinetic energy density of disturbances with the use of a spectral reduction. This reduction allows us to significantly reduce the computational costs as well as to eliminate spurious disturbances associated with the approximation errors. The maximum amplification of the average kinetic energy density of disturbances is computed for channels with round and elliptic cross-sections. It is shown that its absolute maximum in the case of the round and elliptic channel cross-sections is attained on disturbances which possess different symmetries.

**Key words:** hydrodynamic stability, maximum possible amplification of the average kinetic energy density of disturbances, spectral reduction, channel of elliptic cross-section

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-60092).

# 1. Введение

Ламинарное течение заведомо теряет устойчивость при числах Рейнольдса, больших линейного критического числа Рейнольдса [1–3], определяющего границу устойчивости к бесконечно малым возмущениям. Потеря устойчивости обычно приводит к турбулизации течения, и такой сценарий перехода к турбулентности называют естественным. При этом основную роль играют отдельные, усиливающиеся во времени (временная неустойчивость) либо пространстве (пространственная неустойчивость) моды или пакеты таких мод [1–3].

Устойчивость сдвиговых течений в каналах существенно зависит от формы поперечного сечения канала [4, 5], а также от соотношения масштабов течения в направлении, перпендикулярном направлению основного течения. Так, для канала прямоугольного сечения была рассчитана зависимость линейного критического числа Рейнольдса от величины отношения длин сторон сечения [6–9], в том числе было дано физическое обоснование [8, 9] данной зависимости. Аналогичная зависимость была получена для канала эллиптического сечения [10].

Представленные в [2, 6–10] и других работах результаты говорят, что течение в каналах квадратного или круглого сечения линейно устойчиво при любых числах Рейнольдса, что не согласуется с существующими экспериментальными данными. Результаты работ [11–13] позволяют заключить, что одним из основных факторов усиления возмущений в данном случае является неортогональность мод, которая может приводить к значительному росту энергии составленного из них возмущения на конечных временных (или пространственных) промежутках. Нижнюю границу чисел Рейнольдса, при которых возможен рост энергии возмущений, называют энергетическим критическим числом Рейнольдса. При числе Рейнольдса, большем энергетического критического числа Рейнольдса, но меньшем линейного критического, максимальную амплификацию (рост по отношению к начальному моменту времени либо начальному положению в пространстве) энергии возмущений обеспечивают так называемые оптимальные возмущения, представляющие собой суперпозиции большого числа существенно неортогональных затухающих мод. Развитие малых оптимальных возмущений приводит в результате их роста и последующего нелинейного взаимодействия к переходу основного течения в квазистационарное линейно неустойчивое состояние, в котором начинает развиваться вторичная неустойчивость, приводящая к ламинарно-турбулентному переходу – докритический сценарий перехода [1, 3].

В работах [9, 14] и [15] была предложена и обоснована эффектив-

ная технология численного анализа, соответственно, временной и пространственной устойчивости и опробована на течениях вязкой несжимаемой жидкости в каналах прямоугольного сечения. В рамках настоящей работы реализован вариант технологии [9, 14], ориентированный на исследование временной устойчивости течения в каналах круглого или эллиптического сечений. В ходе численных экспериментов рассмотрено течение Пуазейля при числе Рейнольдса, большем энергетического критического, но меньшем линейного критического. Выполнен расчет максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений в канале эллиптического сечения, чего, по-видимому, ранее не делалось. В частности, показано, что абсолютного максимума данная амплификация в случаях круглого и эллиптического сечения достигает на возмущениях различных симметрий.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 выводятся линейаризованные уравнения эволюции возмущений в эллиптико-полярных координатах. В разделе 3 получены уравнения эволюции возмущений для исследования устойчивости во временной постановке. Как и в случае цилиндрических координат, переход в эллиптико-полярные координаты приводит к возникновению в уравнениях членов типа  $\sim 1/r$  или  $\sim 1/r^2$ . Поэтому для обеспечения гладкости и ограниченности решения обычно накладываюот дополнительные граничные условия на оси канала в явном виде [16]. В настоящей работе реализован альтернативный достаточно эффективный с вычислительной точки зрения подход, который описан разделе 3, позволяющий явно не накладывать граничные условия на оси канала. В разделе 4 описана пространственная аппроксимация уравнений спектральным методом коллокаций на основе многочленов Лежандра [17]. Стоит отметить, что данный метод, вообще говоря, не обеспечивает на дискретном уровне некоторые свойства входящих в уравнения эволюции возмущений операторов, такие как симметричность и отрицательная определенность оператора Лапласа, а также соотношение между дивергенцией и градиентом. Невыполнение этих свойств в конечном счете может приводить к появлению возмущений (составленных из существенно негладких и неортогональных мод), которые вызывают резкие кратковременные скачки максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии в начальный момент времени. Использование для пространственной аппроксимации, например, метода Галеркина-коллокаций [17] обеспечило бы на дискретном уровне выполнение упомянутых свойств операторов, однако цилиндрическая геометрия существенно усложняет реализацию и обоснование этого метода (см., например, работы [16, 18–20]). Поэтому в данной работе предлагается применять спектральную редукцию, описанную в разделе 5. Такая редукция не

только исключает упомянутые артефактные возмущения, но и значительно сокращает вычислительные затраты при расчете максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений. В разделе 6 описан алгоритм вычисления максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений, которое сводится к расчету нормы матричной экспоненты. В разделе 7 обсуждаются результаты численных экспериментов.

## 2. Уравнения эволюции малых возмущений в канале эллиптического сечения

В декартовой системе координат с продольным направлением  $x$ , вертикальным направлением  $y$  и поперечным –  $z$  рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерном бесконечном в продольном направлении канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, y^2/(1 - \epsilon) + z^2/(1 + \epsilon) < r_0^2\} \quad (1)$$

постоянного эллиптического сечения

$$\Sigma = \{(y, z) : y^2/(1 - \epsilon) + z^2/(1 + \epsilon) < r_0^2\},$$

где  $r_0$  – некоторая заданная положительная величина, а  $0 \leq \epsilon < 1$  – параметр эллиптичности, тогда параметр

$$A = \left( \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right)^{1/2}$$

выражает отношение длин большой и малой полуосей эллиптического сечения  $\Sigma$ . Обозначим компоненты скорости вдоль этих направлений, давление, коэффициент кинематический вязкости и плотность среды через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\nu$  и  $\rho$  соответственно. Движение жидкости в этом канале определяется следующими трехмерными уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta u &= 0, \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \Delta v &= 0, \\ \frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \Delta w &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$$

означает полную производную по времени функции  $f$ , а  $\Delta$  – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Одним из решений уравнений (2) с условием прилипания на стенках канала (1) является стационарное течение  $u = U$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ ,  $p = -\tau x$ , с заданным постоянным  $\tau > 0$ , называемое течением Пуазейля, где  $U = U(y, z)$  – профиль течения, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\tau}{\nu \rho}$$

в области  $\Sigma$  с нулевыми граничными условиями. Нас будет интересовать устойчивость этого решения к малым возмущениям.

Записывая произвольное решение системы (2), близкое к течению Пуазейля, в виде

$$u = U + \delta u' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad v = \delta v' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad w = \delta w' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad p = -\tau x + \delta p' + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3)$$

где  $\delta$  – малый параметр, а  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ,  $p'$  – некоторые функции, не зависящие от  $\delta$ , и требуя, чтобы функции (3) удовлетворяли (2) при всех значениях  $\delta$  в окрестности 0, получим следующую систему линейных уравнений относительно  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  и  $p'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} v' + \frac{\partial U}{\partial z} w' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} - \nu \Delta u' &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} - \nu \Delta v' &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \nu \Delta w' &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

с нулевыми граничными условиями для  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  на стенке канала. Эту систему мы далее будем называть линеаризованными уравнениями эволюции возмущений.

Для удобства из декартовой системы координат перейдем в неортогональную эллипτικο-полярную систему координат  $(x, r, \theta)$ . Декартовы координаты  $y$  и  $z$  будут связаны с координатами  $r$  и  $\theta$  следующим образом:

$$y = r(1 - \epsilon)^{1/2} \sin \theta, \quad z = r(1 + \epsilon)^{1/2} \cos \theta, \quad (5)$$

где

$$\{(r, \theta) : 0 \leq r < r_0, -\pi \leq \theta < \pi\}.$$

В выбранной системе координат  $(x, r, \theta)$  вектор скорости основного течения имеет вид

$$\mathbf{U} = U(r)\mathbf{e}_x, \quad U(r) = U_0\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

где  $U(r)$  – профиль скорости основного течения,  $U_0$  – его максимальное значение, достигаемое на продольной оси канала, а  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^T$  – орт в продольном направлении.

Определим вид уравнений (4) в эллиптико-полярных координатах. Для этого, вычислив якобиан

$$\mathcal{J} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} = r(1 - \epsilon^2)^{1/2}$$

преобразования координат (5), выразим дифференцирование по  $y$  и  $z$  через дифференцирование по  $r$  и  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \left( \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r(1 - \epsilon)^{1/2}} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \left( -\frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{-r(1 + \epsilon)^{1/2}} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Оператор Лапласа, за которым сохраним старое обозначение, примет вид

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{(1 - \epsilon^2)r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{2\epsilon \sin 2\theta}{(1 - \epsilon^2)r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{2\epsilon \sin 2\theta}{(1 - \epsilon^2)r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{(1 - \epsilon^2)r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Ковариантные  $(\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_\theta, \mathbf{g}_r)$  и контравариантные  $(\mathbf{g}^x, \mathbf{g}^\theta, \mathbf{g}^r)$  вектора в выбранной эллиптико-полярной системе координат имеют вид (п.6.3, [21]):

$$\mathbf{g}_x = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{g}_\theta = r\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{g}_r = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{g}^x = \mathbf{e}^x, \quad \mathbf{g}^\theta = \frac{1}{r}\mathbf{e}^\theta, \quad \mathbf{g}^r = \mathbf{e}^r,$$

где  $\mathbf{e}^x = \mathbf{e}_x$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \epsilon)^{1/2} \cos \theta \\ -(1 + \epsilon)^{1/2} \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \epsilon)^{1/2} \sin \theta \\ (1 + \epsilon)^{1/2} \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}^\theta &= \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \epsilon)^{-1/2} \cos \theta \\ -(1 + \epsilon)^{-1/2} \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \epsilon)^{-1/2} \sin \theta \\ (1 + \epsilon)^{-1/2} \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



тогда оператор градиента будет иметь вид:

$$\nabla = \mathbf{g}^x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{g}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{g}^r \frac{\partial}{\partial r} = \mathbf{e}^x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{r} \mathbf{e}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}^r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Запишем уравнения (4) эволюции возмущений в векторном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}', \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p' &= \nu \Delta \mathbf{u}', \\ (\nabla, \mathbf{u}') &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{u}'(x, r, \theta, t) = u'(x, r, \theta, t) \mathbf{e}_x + v'(x, r, \theta, t) \mathbf{e}_\theta + w'(x, r, \theta, t) \mathbf{e}_r$$

– вектор возмущений скорости в координатах  $(x, r, \theta)$ . Затем последовательно спроектируем векторное уравнение движения на направления  $\mathbf{e}^x$ ,  $\mathbf{e}^\theta$  и  $\mathbf{e}^r$ . Получим уравнения эволюции трехмерных возмущений в координатах  $(x, r, \theta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2rU_0 w'}{r_0^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{\partial p'}{\partial r} &= \\ \nu \left[ \left( \Delta - \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r^2} \right) v' \right. & \\ \left. + \left( \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \right) w' \right], & \quad (6) \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{1 - \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{\partial p'}{\partial r} &= \\ \nu \left[ \left( \Delta - \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r^2} \right) w' \right. & \\ \left. + \left( -\frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \right) v' \right], & \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) w' &= 0, \end{aligned}$$

в канале

$$\{(x, r, \theta) : -\infty < x < \infty, 0 \leq r < r_0, -\pi \leq \theta < \pi\}.$$

Определим число Рейнольдса  $\text{Re} = U_0 r_0 (1 - \epsilon)^{1/2} / \nu$ . Нормируем пространственные координаты  $x, r$  на  $r_0 (1 - \epsilon)^{1/2}$ , скорости  $u', v', w'$  и профиль основного течения  $U$  – на  $U_0$ , время  $t$  – на  $r_0 (1 - \epsilon)^{1/2} / U_0$ , и давление  $p'$  –

на  $\rho U_0^2$ . В нормированных переменных, за которыми сохраним старые обозначения, система уравнений (6) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u'}{\partial t} + (1 - (1 - \epsilon)r^2) \frac{\partial u'}{\partial x} - 2(1 - \epsilon)rw' + \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta u', \\
& \frac{\partial v}{\partial t} + (1 - (1 - \epsilon)r^2) \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{\partial p'}{\partial r} = \\
& \quad \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \Delta - \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r^2} \right) v' \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \right) w' \right], \quad (7) \\
& \frac{\partial w'}{\partial t} + (1 - (1 - \epsilon)r^2) \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1 - \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{\partial p'}{\partial r} = \\
& \quad \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \Delta - \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r^2} \right) w' \right. \\
& \quad \left. + \left( -\frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \right) v' \right], \\
& \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) w' = 0,
\end{aligned}$$

в канале

$$\{(x, r, \theta) : -\infty < x < \infty, 0 \leq r < 1/(1 - \epsilon)^{1/2}, -\pi \leq \theta < \pi\}.$$

### 3. Задача временной устойчивости

В случае временного анализа устойчивости предполагают [1–3], что возмущение задано при  $t = 0$  во всем канале и является гармоническим по  $x$ :

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{bmatrix} (x, r, \theta, t) = \begin{bmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \\ p'' \end{bmatrix} (r, \theta, t) e^{i\alpha x}, \quad (8)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\alpha$  – фиксированное вещественное продольное волновое число. Подставляя (8) в (7) и отбрасывая для простоты двойные штрихи, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} + i\alpha(1 - (1 - \epsilon)r^2)u - 2(1 - \epsilon)rw + i\alpha p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u = 0, \\
& \frac{\partial v}{\partial t} + i\alpha(1 - (1 - \epsilon)r^2)v + \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{\partial p}{\partial r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \Delta - \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r^2} \right) v \right. \\
& \left. + \left( \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \right) w \right] = 0, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + i\alpha(1 - (1 - \epsilon)r^2)w + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1 - \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{\partial p}{\partial r} & \quad (9) \\
& -\frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \Delta - \frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{1}{r^2} \right) w \right. \\
& \left. + \left( -\frac{1 + \epsilon \cos 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{1 - \epsilon^2} \frac{2}{r^2} \right) v \right] = 0, \\
& i\alpha u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) w = 0,
\end{aligned}$$

в области

$$\{(r, \theta) : 0 \leq r < 1/(1 - \epsilon)^{1/2}, -\pi \leq \theta < \pi\}. \quad (10)$$

Преобразование координат (5), как и преобразование к цилиндрическим или сферическим координатам, вырождено при  $r = 0$ . Кроме того, при переходе в эллиптико-полярные координаты в уравнениях (6) и, как следствие, в уравнениях (9), возникают члены типа  $\sim 1/r$  или  $\sim 1/r^2$ . Поэтому для обеспечения гладкости и ограниченности решения необходимо накладывать дополнительные граничные условия на оси канала  $r = 0$ . Существует большое количество работ, где описываются различные подходы к постановке таких условий (применительно к спектральным методам аппроксимации см. например, [16]).

В данной работе будет использован другой подход [10, 22, 23], в котором не требуется явной постановки граничных условий на оси канала. В рамках этого подхода, во-первых, выбирается специальная область, граница которой не содержит оси канала: вместо области (10) мы будем рассматривать вдвое большую в радиальном направлении область

$$\Omega = \{(r, \theta) : -1/(1 - \epsilon)^{1/2} < r < 1/(1 - \epsilon)^{1/2}, -\pi \leq \theta < \pi\},$$

а во-вторых, используемая для пространственной аппроксимации расчетная сетка не содержит узлов в точке  $r = 0$ .

Особенность выбранной области  $\Omega$  заключается в том, что точки  $(r, \theta)$  и  $(-r, \theta \pm \pi)$  отвечают одной и той же точке  $(y, z)$  в "физическом" пространстве. Следовательно, вектор скорости и давление должны быть инвариантны относительно преобразования координат  $(r, \theta) \rightarrow (-r, \theta \pm \pi)$ . Поэтому среди решений системы (9) в такой области ищутся только те, что обладают этим свойством. Так как  $\mathbf{e}_r(\theta \pm \pi) = -\mathbf{e}_r(\theta)$  и  $\mathbf{e}_\theta(\theta \pm \pi) = -\mathbf{e}_\theta(\theta)$ , то

представляющие интерес компоненты скорости и давления должны удовлетворять следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned}
u(-r, \theta \pm \pi, t) &= u(r, \theta, t), \\
-v(-r, \theta \pm \pi, t) &= v(r, \theta, t), \\
-w(-r, \theta \pm \pi, t) &= w(r, \theta, t), \\
p(-r, \theta \pm \pi, t) &= p(r, \theta, t).
\end{aligned} \tag{11}$$

Благодаря условиям (11) достаточно найти решения только при  $r > 0$ , что существенно сокращает вычислительные затраты.

Таким образом, далее система (9) рассматривается в области  $\Omega$  с граничными условиями

$$\begin{aligned}
u(\pm 1/(1 - \epsilon)^{1/2}, \theta, t) &= v(\pm 1/(1 - \epsilon)^{1/2}, \theta, t) = w(\pm 1/(1 - \epsilon)^{1/2}, \theta, t) = 0, \\
u(r, -\pi, t) &= u(r, \pi, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t), \\
v(r, -\pi, t) &= v(r, \pi, t), \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \pi, t), \\
w(r, -\pi, t) &= w(r, \pi, t), \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial w}{\partial \theta}(r, \pi, t),
\end{aligned} \tag{12}$$

и, кроме того, компоненты скорости и давления должны удовлетворять условиям симметрии (11).

Учитывая, что коэффициенты в системе (9) зависят от угла только посредством  $\sin 2\theta$  и  $\cos 2\theta$ , то поиск её решений можно свести [10] к поиску решений, обладающих одной из следующих четырех симметрий:

$$\begin{aligned}
\text{I} & (u_{-+}, v_{+-}, w_{-+}, p_{-+}), \\
\text{II} & (u_{--}, v_{++}, w_{--}, p_{--}), \\
\text{III} & (u_{++}, v_{--}, w_{++}, p_{++}), \\
\text{IV} & (u_{+-}, v_{-+}, w_{+-}, p_{+-}),
\end{aligned} \tag{13}$$

где, например,  $v_{-+}$  означает, что  $v$  несимметрична относительно большой оси эллиптического сечения и симметрична относительно малой.

## 4. Аппроксимация

Перейдем от области  $\Omega$  к области

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta) : -1 < r < 1, \quad -\pi \leq \theta < \pi\},$$

такой, что  $r = r/(1 - \epsilon)^{1/2}$ . В замыкании  $\tilde{\Omega}$  введем две сетки  $\mathcal{G}_p$  и  $\mathcal{G}_v$ , первую из которых будем использовать для аппроксимации давления, а вторую –

для аппроксимации скорости. Обе сетки выберем равномерными по азимутальному направлению  $\theta$  с четным числом узлов  $n_\theta$ , включая левую граничную точку  $-\pi$  и исключая, в силу периодичности по  $\theta$ , правую граничную точку  $\pi$ . По радиальному направлению  $r$  в качестве узлов для сетки  $\mathcal{G}_p$  выберем корни производной многочлена Лежандра степени  $2n_r + 1$ , а для сетки  $\mathcal{G}_v$  – корни производной многочлена Лежандра той же степени и граничные точки  $\pm 1$  (узлы Гаусса-Лобатто). Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_p &= \{(r_i, \theta_j) : i = 1, \dots, 2n_r, j = 1, \dots, n_\theta\}, \\ \mathcal{G}_v &= \{(r_i, \theta_j) : i = 0, \dots, 2n_r + 1, j = 1, \dots, n_\theta\},\end{aligned}$$

где  $r_i$  – корни производной многочлена Лежандра  $L_{2n_r+1}$  степени  $2n_r + 1$ ,  $r_0 = -1$  и  $r_{2n_r+1} = 1$ , а  $\theta_j = 2\pi(j - 1)/n_\theta - \pi$ . Отметим, что узлы  $r_i$  не лежат на оси канала, более того, они сгущены у стенки канала и разрежены вблизи оси, что при исследовании гидродинамической устойчивости часто является предпочтительным [10].

В качестве базисных функций для аппроксимации давления и компонент скорости будем использовать интерполяционные многочлены вида:

$$\Upsilon_{ij}^p = \psi_i(r)\chi_j(\theta), \quad \Upsilon_{ij}^v = \varphi_i(r)\chi_j(\theta),$$

где базисными функциями по  $r$  являются элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа, которые для сетки  $\mathcal{G}_p$  можно представить в виде [17]:

$$\psi_k(r) = \frac{(r_k^2 - 1)L'_{2n_r+1}(r)}{(2n_r + 1)(2n_r + 2)(r - r_k)L_{2n_r+1}(r_k)}, \quad k = 1, \dots, 2n_r,$$

а для сетки  $\mathcal{G}_v$  – в виде

$$\varphi_k(r) = \frac{(r^2 - 1)L'_{2n_r+1}(r)}{(2n_r + 1)(2n_r + 2)(r - r_k)L_{2n_r+1}(r_k)}, \quad k = 0, \dots, 2n_r + 1.$$

В качестве базисных функций по направлению  $\theta$  выберем элементарные тригонометрические многочлены [24]:

$$\chi_k(\theta) = \frac{\sin(n_\theta(\theta - \theta_k)/2)}{n_\theta \cot((\theta - \theta_k)/2)}, \quad k = 1, \dots, n_\theta.$$

Отметим, что базисная функция  $\psi_k$  является многочленом степени  $2n_r - 1$ , принимающим значение 1 в узле  $r_k$  и значение 0 во всех остальных узлах  $r_i$ ,  $i \neq k$  сетки  $\mathcal{G}_p$ . Базисная функция  $\varphi_k$  является многочленом степени  $2n_r + 1$ , принимающим значение 1 в узле  $r_k$  и значение 0 во всех остальных узлах  $r_i$ ,  $i \neq k$  сетки  $\mathcal{G}_v$ . Наконец, базисная функция  $\chi_k$  является тригонометрическим многочленом степени  $n_\theta$ , принимающим значение 1 в узле  $\theta_k$  и значение 0 во всех остальных узлах  $\theta_i$ ,  $i \neq k$ .

Таким образом, давление будет аппроксимироваться как

$$p(r, \theta) \approx \sum_{i=1}^{2n_r} \sum_{j=1}^{n_\theta} \Upsilon_{ij}^p(r, \theta) p_{ij},$$

а каждая из компонент вектора скорости возмущений, с учетом нулевых граничных условий, как

$$f(r, \theta) \approx \sum_{i=1}^{2n_r} \sum_{j=1}^{n_\theta} \Upsilon_{ij}^v(r, \theta) f_{ij}.$$

Для дифференцирования базисных функций  $\Upsilon_{ij}^v$  в узлах сетки  $\mathcal{G}_v$  будут использоваться матрицы

$$D_r = \{\varphi'_j(r_i)\}_{i,j=0}^{2n_r+1}, \quad D_\theta = \{\chi'_j(\theta_i)\}_{i,j=1}^{n_\theta},$$

а для дифференцирования базисных функций  $\Upsilon_{ij}^p$  в узлах сетки  $\mathcal{G}_p$  будут использоваться матрицы

$$D_r^p = \{\psi'_j(r_i)\}_{i,j=1}^{2n_r}$$

и  $D_\theta$ . Таким образом, чтобы выполнять дифференцирование по  $r$  с помощью матриц  $D_r$  и  $D_r^p$ , эти матрицы нужно умножить на  $(1 - \epsilon)^{1/2}$ .

Явные формулы для вычисления элементов матриц  $D_r$  и  $D_r^p$  приведены в [17], однако более эффективный с вычислительной точки зрения алгоритм основан на использовании барицентрических формул лагранжевой интерполяции [25], а также некоторых приемов, помогающих уменьшить ошибки округления [26]. Для вычисления элементов матрицы  $D_\theta$  можно использовать явные формулы, приведенные в [27], и так называемый “flipping trick”, предложенный в [28] для увеличения точности и основанный на том, что  $\sin(\xi)$  при малом  $\xi > 0$  можно вычислить в условиях машинной арифметики с более высокой относительной точностью, чем при большом  $\xi$ .

Описанная пространственная аппроксимация системы (9) с учетом условий (12), (11) приводит к системе обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = J\mathbf{v} + Gp, \quad F\mathbf{v} = 0, \quad (14)$$

где  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n_v}$  – вектор дискретных аналогов компонент скорости,  $p \in \mathbb{C}^n$  – вектор дискретного аналога давления ( $n_v = 3n_p$ ),  $J$  – квадратная матрица порядка  $n_v$ , матрицы  $G$  и  $F$  – прямоугольные размера  $n_v \times n_p$  и  $n_p \times n_v$  соответственно, а  $n_p = n_r n_\theta$ . Учет симметрий (13) относительно осей эллипса

позволяет дополнительно сократить алгебраическую размерность системы еще примерно в четыре раза.

При  $\alpha > 0$  матрицы  $G$  и  $F$  в системе (14), полученной после описанной выше аппроксимации, хотя и не являются взаимно сопряженными, но имеют полные ранги, то есть ядра матриц  $F$  и  $G^*$  имеют одинаковую размерность. Кроме того, максимальный угол между этими ядрами меньше  $\pi/2$ . Эти свойства, эквивалентные невырожденности матрицы  $FG$ , позволяют свести систему (14) обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, с помощью алгебраической редукции, предложенной и обоснованной в [29].

Пусть  $Q_F$  и  $Q_G$  – унитарные прямоугольные матрицы, столбцы которых образуют ортонормированные базисы в ядрах матриц  $F$  и  $G^*$  соответственно. Матрицы  $Q_F$  и  $Q_G$  можно вычислить на основе QR-разложения [30] матриц  $F^*$  и  $G$  соответственно. Поскольку максимальный угол между этими ядрами меньше  $\pi/2$ , матрица  $Q_G^*Q_F$  является невырожденной. Произвольный вектор  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющий второму уравнению в (14), однозначно представим в виде  $\mathbf{v} = Q_F\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u} = Q_F^*\mathbf{v}$ . Подставив это представление в первое уравнение в (14) и умножив полученное уравнение слева на  $Q_G^*$ , получим уравнение

$$Q_G^*Q_F\frac{d\mathbf{u}}{dt} = Q_G^*JQ_F\mathbf{u},$$

разделив которое слева на матрицу  $Q_G^*Q_F$ , придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = H\mathbf{u} \tag{15}$$

с матрицей  $H = (Q_G^*Q_F)^{-1}(Q_G^*JQ_F)$ , собственные значения которой являются конечными собственными значениями матричного пучка

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - J & -G \\ F & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5. Спектральная редукция

Пусть задано некоторое подмножество  $\Lambda$  спектра  $\lambda(H)$  матрицы  $H$ , отделенное от остальной части спектра, и нас интересуют решения системы (15), лежащие в инвариантном подпространстве матрицы  $H$ , отвечающем этому подмножеству. Найдем разложение Шура [30]

$$H = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} [Q_1, Q_2]^*,$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — квадратные верхние треугольные матрицы с непересекающимися спектрами,  $\lambda(S_1) = \Lambda$ , а матрица  $[Q_1, Q_2]$  — унитарная и ее разбиение на блоки соответствует разбиению на блоки формы Шура.

Решение системы (15) лежит в инвариантном подпространстве матрицы  $H$ , отвечающем  $\Lambda$ , в том и только том случае, если

$$Q_2^* \mathbf{u}(0) = 0. \quad (16)$$

Если условие (16) выполнено, то решение системы (15) представимо в виде

$$\mathbf{u}(t) = Q_1 \exp\{t S_1\} Q_1^* \mathbf{u}(0). \quad (17)$$

## 6. Расчет максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений

Пусть  $\mathbf{v}(t; \mathbf{v}^0)$  — решение задачи Коши для системы (14) с начальным вектором  $\mathbf{v}^0$ , удовлетворяющим уравнению неразрывности  $F\mathbf{v}^0 = 0$ . В качестве оптимизируемого функционала выберем дискретный аналог средней плотности кинетической энергии возмущений в сечении канала. Этот функционал может быть записан в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = (E\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

где  $E$  — эрмитова положительно определенная матрица квадратурных коэффициентов. После замены переменных

$$E^{1/2}\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}, \quad E^{1/2}JE^{-1/2} \rightarrow J, \quad E^{1/2}G \rightarrow G, \quad FE^{-1/2} \rightarrow F$$

вид системы (14) не изменится, а дискретный аналог средней плотности кинетической энергии возмущений примет вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_2^2.$$

После описанной в разделе 4 алгебраической редукции, приводящей систему (14) к эквивалентной системе (15), дискретный аналог средней плотности кинетической энергии возмущений с учетом описанной замены переменных вычисляется следующим образом:

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|_2^2.$$

Следовательно, расчет максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений сводится к вычислениям с матрицей  $H$  системы (15).



Обозначим через  $\mathbf{u}(t; \mathbf{u}^0)$  решение задачи Коши для системы (15) с начальным вектором  $\mathbf{u}^0$ , удовлетворяющим уравнению  $Q_2^* \mathbf{u}^0 = 0$ . Тогда максимальная амплификация  $\Gamma(t)$  средней плотности кинетической энергии возмущений при заданном значении  $t$  определяется следующим образом [14, 15]:

$$\Gamma(t) = \max \{ \mathcal{E}(\mathbf{u}(t; \mathbf{u}^0)) : \mathbf{u}^0 \in \mathbb{C}^n, \mathcal{E}(\mathbf{u}^0) = 1, Q_2^* \mathbf{u}^0 = 0 \},$$

а  $n$  – порядок матрицы  $H$ . Используя представление (17), несложно проверить, что

$$\frac{\mathcal{E}(\mathbf{u}(t; \mathbf{u}^0))}{\mathcal{E}(\mathbf{u}^0)} = \frac{(\exp\{tS_1\}Q_1^* \mathbf{u}^0, \exp\{tS_1\}Q_1^* \mathbf{u}^0)}{(Q_1^* \mathbf{u}^0, Q_1^* \mathbf{u}^0)} = \frac{\|\exp\{tS_1\} \tilde{\mathbf{u}}^0\|_2^2}{\|\tilde{\mathbf{u}}^0\|_2^2},$$

где  $\tilde{\mathbf{u}}^0 = Q_1^* \mathbf{u}^0$ . Для расчета нормы матричной экспоненты  $\|\exp\{S_1\}\|_2$  в работе [31] предложен эффективный алгоритм, основанный на малоранговой аппроксимации.

## 7. Численные эксперименты

В работе [10] была получена зависимость линейного критического числа Рейнольдса от величины параметра  $A$  отношения длин полуосей эллиптического сечения. Эта зависимость качественно совпадает с той, которая была рассчитана для канала прямоугольного сечения [6–9]: в частности, для канала эллиптического сечения также существует критическое значение  $A_c \approx 10.8$  [10] параметра  $A$ , такое, что при  $A < A_c$  течение линейно устойчиво при любом значении числа Рейнольдса (для канала прямоугольного сечения  $A_c \approx 3.2$  [6–9]). В настоящей работе рассматривалось течение при  $A < A_c$  и  $\text{Re} = 1000$ ,  $\alpha = 1.0$ , то есть течение было заведомо линейно устойчивым.

В соответствии с принятыми в механике обозначениями, удобными для волновой интерпретации возмущений, собственные значения матрицы  $H$  системы (15) мы будем записывать в виде  $\lambda = -i\omega$  и вместо спектра матрицы  $H$  рассматривать спектр матрицы  $iH$ , точками которого являются значения  $\omega$ . На рис. 1 слева представлен спектр матрицы  $iH$ , а справа – его ведущая часть, рассчитанные при  $A = 1$  без учета симметрий на четырех сетках: первые две выбирались с одинаковым числом узлов по каждому направлению –  $n_r = n_\theta = 40$  и  $n_r = n_\theta = 60$  соответственно, а третья и четвертая – с различным –  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$  и  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 80$ . Видно (см. рис. 1 справа), что ведущие собственные значения достаточно хорошо сходятся. При этом в радиальном и азимутальном направлениях следует

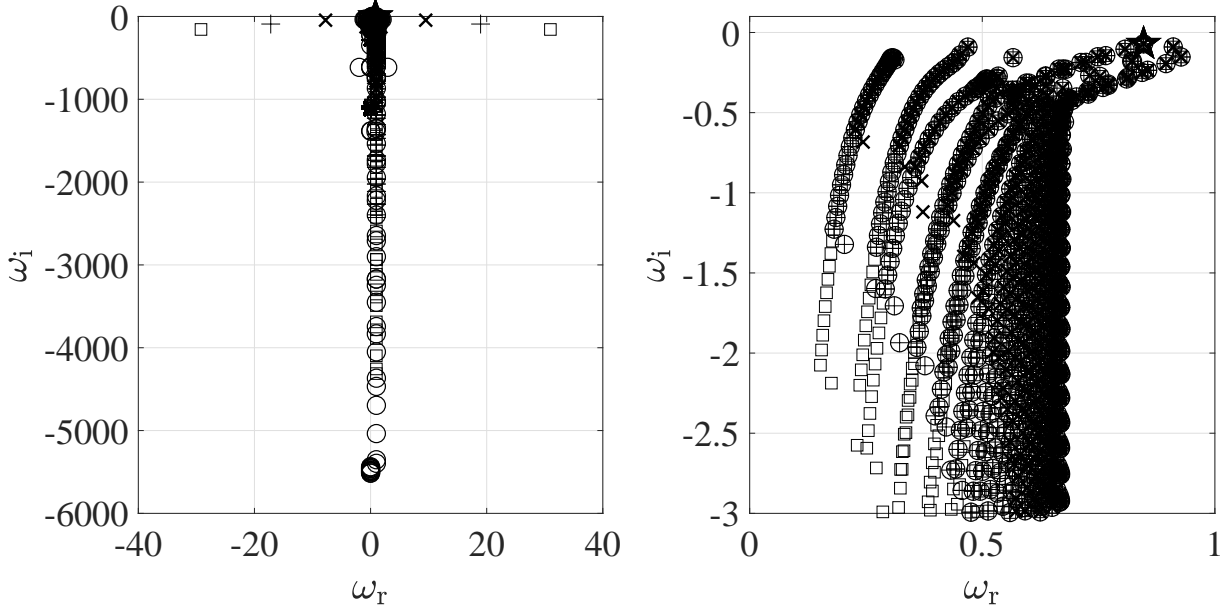


Рис. 1: Спектр матрицы  $iH$ , при  $A = 1$ ,  $\text{Re} = 1000$ ,  $\alpha = 1.0$ . Сетка  $n_r = n_\theta = 40$  ( $\times$ ), сетка  $n_r = n_\theta = 60$  ( $\circ$ ), сетка  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$  ( $+$ ), сетка  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 80$  ( $\square$ ), ведущее собственное значение  $\omega = 0.846749828757212 - 0.070864005346511i$  ( $\star$ ).

брать различное количество узлов, так как ведущие собственные значения, вычисленные на сетках с  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$  и  $n_r = n_\theta = 60$  совпали с высокой точностью. Далее расчеты для  $A = 1$  выполнялись на сетке  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$  узлов.

Следует отметить (см. рис. 1 слева), что большие по модулю собственные значения, вычисленные на различных сетках, сильно отличаются. Это следствие погрешности аппроксимации, которое существенно не влияет на точность расчета максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений, так как оптимальные возмущения, на которых она достигается, являются достаточно гладкими функциями  $r$  и  $\theta$  и вклад в них мод, отвечающих большим по модулю собственным значениям (для которых также отсутствует сходимость по шагу сетки), незначителен. Тем не менее, возмущения, являющиеся композицией отвечающих "несошедшимся" большим по модулю собственным значениям мод, могут приводить к резким скачкам максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений при значениях  $t$  вблизи 0. Эти скачки видны на рис. 2, где для  $A = 1$  представлена максимальная амплификация  $\Gamma(t)$  средней плотности кинетической энергии возмущений, отвечающих четырем различным симметриям (13), вычисленная на сетке с  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$ . Видно, что абсолютного максимума  $\Gamma(t)$  достигает на возмущениях симметрии III, в то время как медленней всего затухают моды, отвечающие симметрии I.

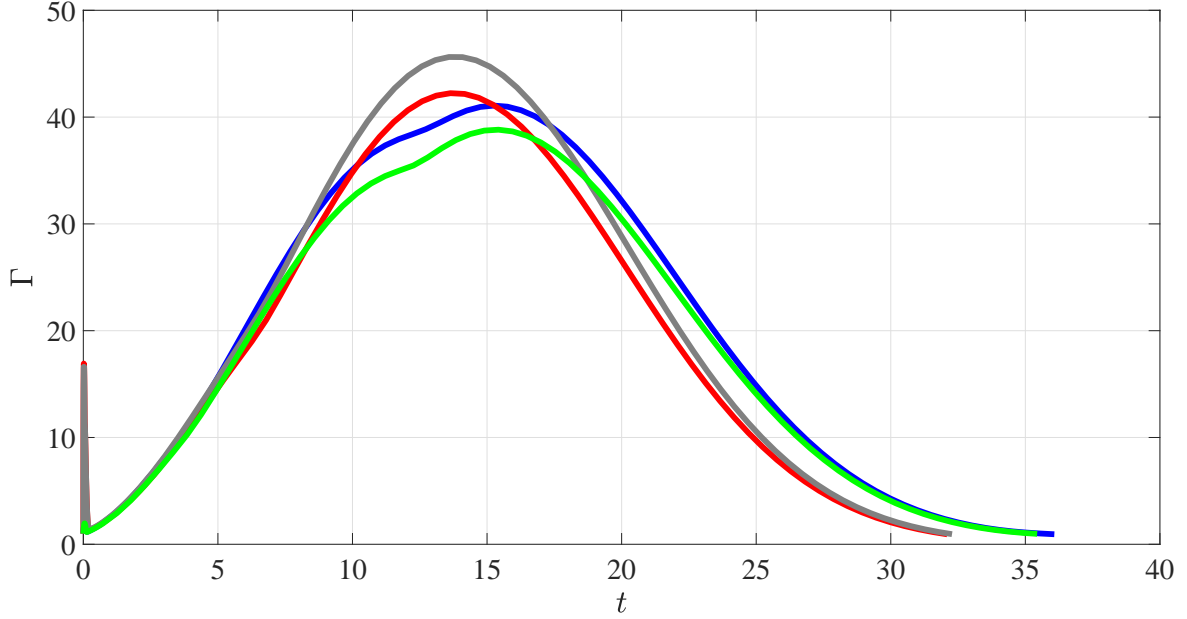


Рис. 2: Максимальная амплификация  $\Gamma(t)$  средней плотности кинетической энергии возмущений, при  $A = 1$ ,  $\text{Re} = 1000$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$ . Симметрии: I – синий, II – красный, III – серый, IV – зеленый.

Оптимальное возмущение, на котором достигается максимальная амплификация  $\Gamma(t)$  средней плотности кинетической энергии, представляет собой суперпозицию большого числа устойчивых мод. Однако, число значимых членов этого ряда, как правило, невелико (в данном случае значительно меньше алгебраической размерности системы (15)). На рис. 3 серым цветом по-прежнему дана зависимость  $\Gamma(t)$  для симметрии III, вычисленная на сетке  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$  без применения спектральной редукции, описанной в разделе 5. Остальными линиями на рис. 3 дана зависимость  $\Gamma(t)$ , рассчитанная с применением спектральной редукции, которая заключалась в проектировании системы (15) на инвариантное подпространство матрицы  $H$ , отвечающее собственным значениям, по модулю не превосходящим величины  $R_{\text{sr}}$ . Количество отобранных при спектральной редукции собственных значений было равно 75 при  $R_{\text{sr}} = 0.9$ , 84 при  $R_{\text{sr}} = 0.95$ , 93 при  $R_{\text{sr}} = 1.0$ , 156 при  $R_{\text{sr}} = 1.5$ , при этом порядок матрицы  $H$  был равен 1200. Видно, что полученная с использованием спектральной редукции с  $R_{\text{sr}} = 1.5$  кривая  $\Gamma(t)$  хорошо совпадает с кривой, полученной без редукции, но для её расчета требуется существенно меньше вычислительных затрат. Кроме того, спектральная редукция позволяет избавиться от скачка в зависимости  $\Gamma(t)$ , поскольку отсеиваются негладкие моды, отвечающие "несошедшимся" большим по модулю собственным значениям.

На рис. 4 слева представлен спектр матрицы  $iH$ , а справа – его ве-

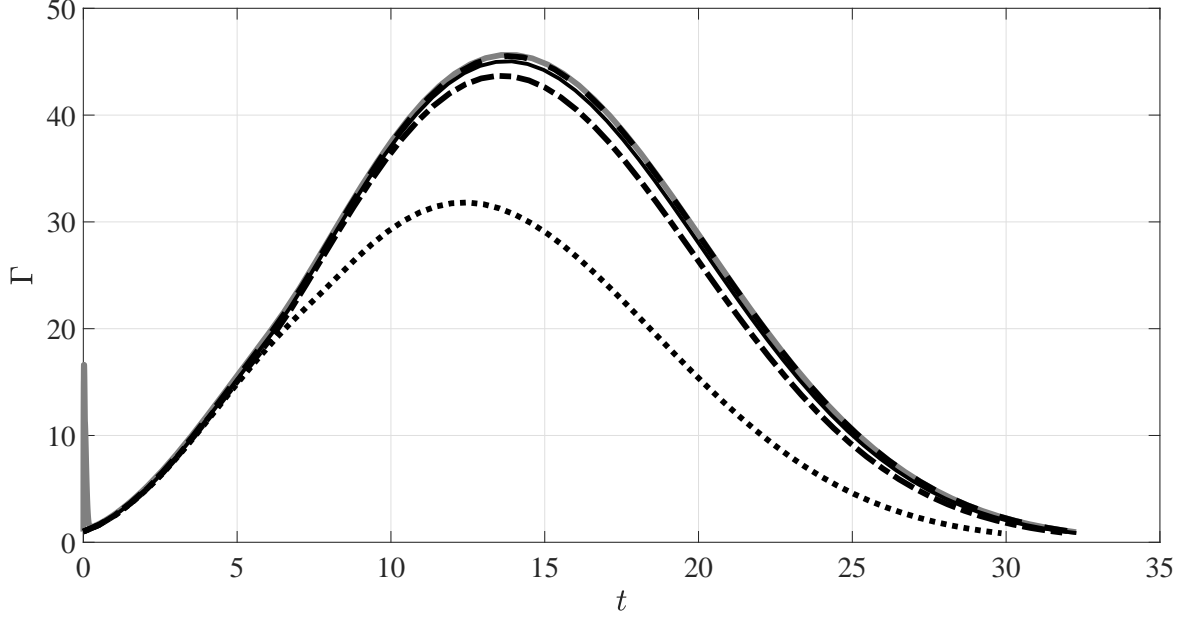


Рис. 3: Максимальная амплификация  $\Gamma(t)$  средней плотности кинетической энергии возмущений, при  $A = 1$ ,  $\text{Re} = 1000$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$ , симметрия I. Без спектральной редукции, то есть  $R_{\text{sr}} = \infty$ , – серая линия,  $R_{\text{sr}} = 0.9$  ( $\cdots$ ),  $R_{\text{sr}} = 0.95$  ( $- \cdot -$ ),  $R_{\text{sr}} = 1.0$  ( $-$ ),  $R_{\text{sr}} = 1.5$  ( $- \cdot \cdot -$ ).

дущая часть, рассчитанные при  $A = 2$  без учета симметрий на сетке с  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$  и сетке с  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 80$ . Сходимость ведущих собственных значений по-прежнему наблюдается, хотя и для меньшего, чем при  $A = 1$ , количества собственных значений, поэтому дальнейшие расчеты для  $A = 2$  проводились на сетке  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 80$ . Заметно отличаются мнимые части  $\omega_i$  ведущего собственного значения при  $A = 1$  и при  $A = 2$ :  $-0.070864005346511$  и  $-0.047411498903344$  соответственно. То есть наименее устойчивая мода в канале круглого сечения затухает быстрее, чем наименее устойчивая мода в канале эллиптического сечения с  $A = 2$ , что согласуется с результатами [10].

На рис. 5 дана зависимость  $\Gamma(t)$  для  $A = 2$  и всех четырех симметрий (13). Расчет выполнен на сетке  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 80$ , с использованием спектральной редукции с  $R_{\text{sr}} = 1.5$ , при этом отбиралось 310 собственных значений для симметрии I, 309 – для симметрии II и по 305 – для симметрий III и IV. Видно, что, во-первых, абсолютный максимум  $\Gamma(t)$  при  $A = 2$  заметно больше, чем при  $A = 1$ . Во-вторых, в отличие от канала круглого сечения (см. рис 2), этот максимум  $\Gamma(t)$  достигается на возмущениях симметрии I, а не III, в то время как медленней всего затухают моды, отвечающие симметрии IV, а не I.

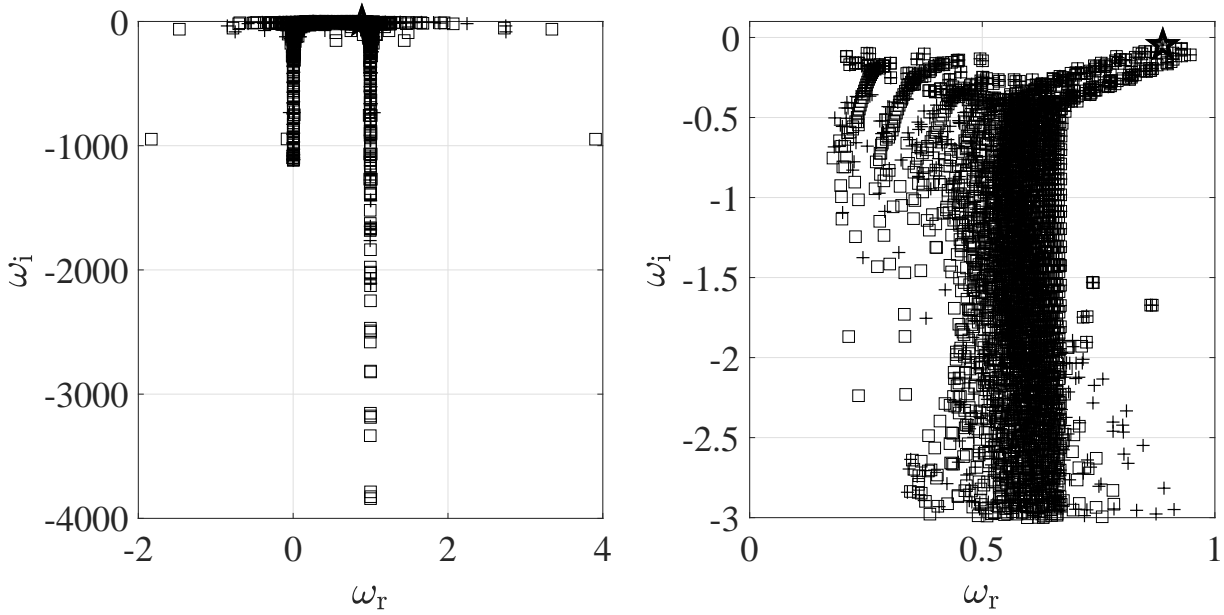


Рис. 4: Спектр матрицы  $iH$ , при  $A = 2$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 1.0$ . Сетка  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 60$  (+), сетка  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 80$  ( $\square$ ), ведущее собственное значение  $\omega = 0.888133525025535 - 0.047411498903344i$  ( $\star$ ).

## 8. Заключение

В работе описана численная модель для исследования временной устойчивости течения Пуазейля в бесконечном в продольном направлении канале эллиптического сечения. Рассчитана максимальная амплификация средней плотности кинетической энергии возмущений для канала круглого и эллиптического сечения с отношением полуосей эллипса, равным 2. Увеличение масштаба течения в поперечном направлении по сравнению с вертикальным в данном случае привело к росту максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии, кроме того, её абсолютные максимумы в случае круглого и эллиптического сечения отвечали возмущениям с различными симметриями. Дальнейший интерес представляет исследование зависимости максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений от величины отношения полуосей эллиптического сечения.

Автор выражает благодарность проф. Ю.М. Нечепуренко (ИВМ РАН), за обсуждение данной работы и ценные советы.

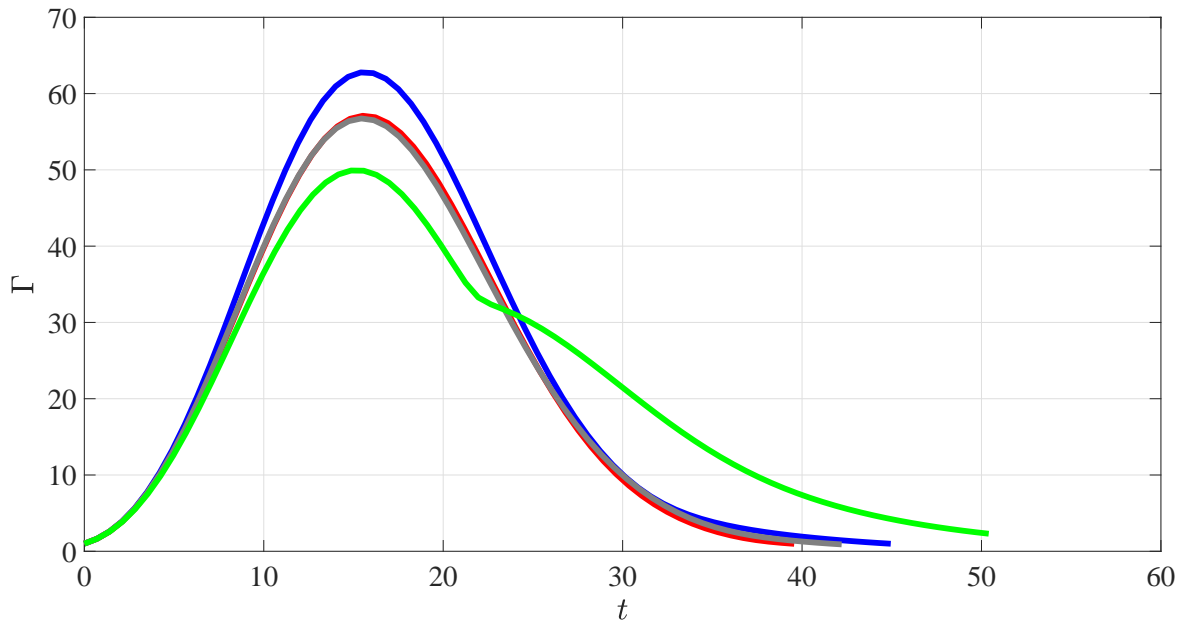


Рис. 5: Максимальная амплификация  $\Gamma(t)$  средней плотности кинетической энергии возмущений, при  $A = 2$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $n_r = 40$ ,  $n_\theta = 80$ ,  $R_{sr} = 1.5$ . Симметрии: I – синий, II – красный, III – серый, IV – зеленый.

## Список литературы

- [1] *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. В.: Springer–Verlag, 2000. 556 p.
- [2] *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic stability, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 258 p.
- [3] *Boiko A.V., Dougal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012. 272 p.
- [4] *Boiko A.V., Klyushnev N.V., Nечепуренко Y.M.* On stability of Poiseuille flow in grooved channels // *Europhysics Letters*. 2015. V. 111. P. 14001–p1–p6.
- [5] *Бойко А.В., Ключнев Н.В., Нечепуренко Ю.М.* Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 123 с.
- [6] *Tatsumi T., Yoshimura T.* Stability of the laminar flow in a rectangular duct // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 212. P. 437–449.
- [7] *Theofilis V., Duck P.W., Owen J.* Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flow // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 505. P. 249–286.

- [8] *Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M.* Dependence of the linear stability of Poiseuille flows in a rectangular duct on the cross-sectional aspect ratio // Doklady Physics. 2011. V. 56. N 10. P. 531—533.
- [9] *Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M.* Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. V. 28. N 2. P. 125—148.
- [10] *Kerswell R.R., Davey A.* On the linear stability of elliptic pipe flow // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 1999. V. 21, P. 231—240.
- [11] *Galletti B., Bottaro A.* Large-scale secondary structures in duct flow // J. Fluid Mech. 2004. V. 512. P. 85—94.
- [12] *O'Sullivan P.L., Breuer K.S.* Transient growth in circular pipe flow. I. Linear disturbances // Phys. Fluids. 1994. V. 6. N 11. P. 3643—3651.
- [13] *Tumin A., Reshotko E.* Spatial theory of optimal disturbances in a circular pipe flow // Phys. Fluids. 2001. V. 13. N 4. P. 991—996.
- [14] *Бойко А.В., Нечепуренко Ю.М.* Численный спектральный анализ временной устойчивости в каналах постоянного сечения // Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 2008. V. 48. № 10. P. 1—17.
- [15] *Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М.* Численный анализ пространственной устойчивости сдвиговых течений в каналах постоянного сечения // ЖВМ и МФ 2018. Т.58. N.5. С. 726—740.
- [16] *Boyd J.P* Chebyshev and Fourier Spectral Methods, 2nd ed. New York: DOVER Publications, Inc., 2000. 594 p.
- [17] *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods. Fundamentals in single domains. Berlin: Springer, 2006. 581 p.
- [18] *Shen J.* Efficient spectral-Galerkin methods III: polar and cylindrical geometries // SIAM. J. Sci. Comput. 1997. V. 18. N 6. P. 1583—1604.
- [19] *Lopez J.M., Marques F., Shen J.* An efficient spectral-projection method for the Navier–Stokes equations in cylindrical geometries // J. Comput. Phys. 2002. V. 176. P. 384—401.
- [20] *Bernardi C., Dauge M., Maday Y.* Spectral methods for axisymmetric domains. Gauthier-Villars, 1999. 345 p.
- [21] *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1973. 832 с.

- [22] *Trefethen L.N.* Spectral Methods in MATLAB. Philadelphia: SIAM, 2000. 160 p.
- [23] *Fornberg B.* A pseudospectral approach for polar and spherical geometries // SIAM J. Sci. Comp. 1995. V. 16, P. 1071–1081.
- [24] *Hesthaven J., Gottlieb S., Gottlieb D.* Spectral methods for time-dependent problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 284 p.
- [25] *Berrut J.P., Trefethen L.N.* Barycentric Lagrange interpolation // SIAM Rev. 2004. V. 46. N. 3. P. 501–517.
- [26] *Baltensperger R.* Improving the accuracy of the matrix differentiation method for arbitrary collocation points // Appl. Num. Math. 2000. V. 33. P. 143–149.
- [27] *Weideman J.A.C., Reddy S.C.* A MATLAB Differentiation Matrix Suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. V. 26. N 4. P. 465–519.
- [28] *Don W. S., Solomonoff A.* Accuracy and speed in computing the Chebyshev collocation derivative // SIAM J. Sci. Comput. 1994. V. 6. P. 1253–1268.
- [29] *Нечепуренко Ю.М.* О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления // Доклады АН. 2012. Т. 445. № 1. С. 17–19.
- [30] *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix computations. Third ed. London: The John Hopkins University Press, 1996. 694 p.
- [31] *Nechepurenko Yu.M., Sadkan M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm // SIAM J. Matr. Anal. Appl. 2011. V. 32. N 2. P. 349–363.



## Содержание

1. Введение . . . . .	3
2. Уравнения эволюции малых возмущений в канале эллиптического сечения . . . . .	5
3. Задача временной устойчивости . . . . .	9
4. Аппроксимация . . . . .	11
5. Спектральная редукция . . . . .	14
6. Расчет максимальной амплификации средней плотности кинетической энергии возмущений . . . . .	15
7. Численные эксперименты . . . . .	16
8. Заключение . . . . .	20
Список литературы . . . . .	21