



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 30 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Иванов Д.С., Ролдугин Д.С.

Определение углового
движения по
электродвижущей силе в
катушках и магнитное
ляпуновское управление

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Иванов Д.С., Ролдугин Д.С.
Определение углового движения по электродвижущей силе в катушках и магнитное
ляпуновское управление // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 30. 24 с.
doi:[10.20948/prepr-2018-30](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-30)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-30>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Д.С. Иванов, Д.С. Ролдугин

**Определение углового движения
по измерениям электродвижущей силы
в магнитных катушках
и магнитное ляпуновское управление**

Москва — 2018

Иванов Д.С., Ролдугин Д.С.

Определение углового движения по электродвижущей силе в катушках и магнитное ляпуновское управление

В работе рассматривается спутник, имеющий лишь магнитные катушки в составе системы ориентации. Предложен алгоритм определения трехосной ориентации аппарата по измерениям наведенной в катушках электродвижущей силы. Для этого используется расширенный фильтр Калмана. Исследуется точность предложенного алгоритма, ее зависимость от углового движения спутника и шумов измерений. Трехосная ориентация спутника обеспечивается магнитными катушками с использованием ляпуновского управления.

Ключевые слова: магнитная система ориентации, ляпуновское управление, электродвижущая сила, фильтр Калмана

Danil Ivanov, Dmitry Roldugin

Satellite magnetic attitude: Lyapunov control and determination using electromotive force in magnetorquers

This work utilizes magnetorquers as the sole attitude control system unit used both for control implementation and determination. An algorithm of the three-axis attitude determination using the measurements of the electromotive force induced in magnetorquers is proposed. The extended Kalman filter is applied. The paper studies the accuracy of the developed algorithm, its dependence on the angular motion of the satellite and measurements noise. Three axis attitude is achieved with the Lyapunov control.

Key words: magnetic attitude control system, Lyapunov control, electromotive force, Kalman filter

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-71-20117.

Содержание

Введение	3
1. Магнитные катушки для кубсатов: краткий обзор.....	4
2. Модель измерений	5
3. Модель движения спутника	7
4. Расширенный фильтр Калмана.....	9
Основы фильтра	9
Линеаризация уравнений.....	11
5. Алгоритм управления ориентацией	13
6. Численное моделирование	15
Заключение.....	23
Литература	23

Введение

Магнитные системы ориентации используются практически на всех околоземных малых спутниках. Они решают задачи демпфирования угловой скорости, ориентации по вектору геомагнитной индукции, одноосной ориентации вращающегося спутника и даже трехосной ориентации аппарата. Все эти задачи требуют определения на борту текущего углового положения спутника. Для этого используются измерения солнечных датчиков [1], магнитометров [2,3], датчиков угловой скорости [4,5] и даже миниатюрных звездных датчиков [6,7]. Однако тенденция к миниатюризации спутников требует все меньшего аппаратного состава, в том числе в части используемых датчиков ориентации. Например, для обеспечения трехосной ориентации достаточно наличия магнитных катушек и магнитометра [8,9]. Здесь стоит отметить, что недорогие компоненты, используемые на малых спутниках, особенно на кубсатах, ненадежны. Практически нет возможности дублирования систем. Поэтому при выходе из строя магнитометра такую миссию можно считать потерянной. Однако даже в этом случае есть возможность определить ориентацию и спасти аппарат, если доступны измерения электродвижущей силы (ЭДС), наведенной в магнитных катушках, используемых для управления положением спутника.

В работе рассматривается спутник, оснащенный тремя катушками-соленоидами. Магнитный поток в неработающей катушке изменяется в силу вращения спутника в геомагнитном поле. По закону Фарадея это вызывает возникновение ЭДС в катушке. ЭДС можно измерить при наличии аналого-цифрового преобразователя (АЦП), и использовать фильтр Калмана для определения ориентации. Таким образом, можно получить ориентацию спутника при свободном вращении, после чего реализовать управление с помощью все тех же магнитных катушек.

Магнитная катушка при определении движения работает фактически как датчик индукции. В [10] приведен обзор конструкций и применения таких датчиков. Однако эти датчики обычно используются для измерения частоты изменения магнитного потока и выявления переменных магнитных полей. Индукция магнитного поля может быть получена интегрированием измерений ЭДС, однако для этого необходимо знать начальное значение индукции, которое в общем случае неизвестно. Поэтому лучше использовать измерения, пропорциональные изменению магнитного потока.

Для получения информации об ориентации аппарата измерения наведенной в катушках ЭДС обрабатываются с помощью расширенного фильтра Калмана [11]. Модель измерений фильтра должна учитывать ориентацию, угловую скорость спутника и изменение геомагнитного поля при движении по орбите. Модель движения включает динамические уравнения и кинематические соотношения, использующие кватернион ориентации. В работе исследуется точность такого алгоритма определения ориентации, ее зависимость от шума измерений, возмущений, действующих на спутник, его движения. Рассматривается управляемое движение при обеспечении трехосной ориентации с помощью магнитных катушек.

1. Магнитные катушки для кубсатов: краткий обзор

Магнитные катушки особенно часто используются на кубсатах и других наноспутниках. Доступные на рынке решения разделяются на два типа: длинные катушки-соленоиды с плотной намоткой на пермалловом сердечнике (рис. 1) и плоские без сердечника (рис. 2). Соленоиды обычно предпочтительны благодаря высокой магнитной проницаемости сердечника, что позволяет получить большое значение магнитного момента катушек. На рис. 1 представлена такая катушка, изготовленная в Университете Йорка [12]. Диаметр ее сердечника 5.7 мм, число витков 6063, сопротивление провода 121 Ом, относительная проницаемость стержня 75000.



Рис. 1. Катушка-соленоид

Второй тип представляет собой плоскую намотку, зачастую выполняемую прямо на платах спутника. В англоязычной литературе такие катушки без сердечника зачастую называют «air core magnetorquers». Такие плоские катушки популярны благодаря удобству установки на кубсатах и вообще наноспутниках. В качестве примера на рис. 2 приведена катушка CUTE-1.7 [13]. Размеры катушки 50x80 мм, число витков 1000. Максимальный дипольный момент 0.0045 А·м². Еще больше сэкономить место на наноспутнике позволяют

катушки, встроенные в платы. Примером может служить кубсат CP-2 [14]. На рис. 3 приведено примерное расположение витков внутри платы спутника. Каждая боковая панель спутника имела три таких платы с 18 витками на каждой.

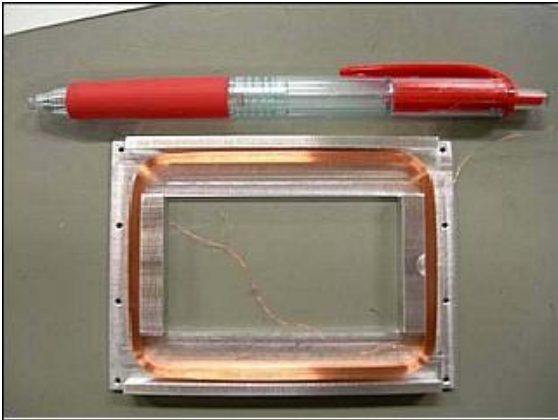


Рис. 2. Катушки CUTE-1.7

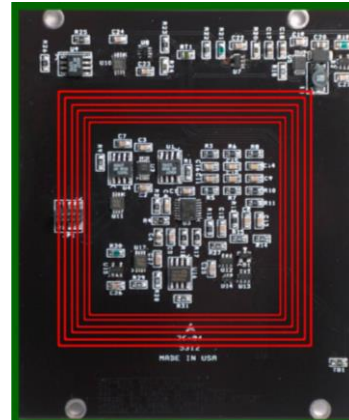


Рис. 3. Примерное расположение катушек CP2

Зачастую оба типа катушек используются в одном готовом решении для системы ориентации. Так, на рис. 4 приведен блок системы управления «SatBus MTQ» [15]. Размер блока 95.9x90.2x28 мм, дипольный момент каждой катушки $0.07 \text{ A} \cdot \text{m}^2$. Аналогичный блок спутника Delfi-n3Xt [16] приведен на рис. 6.

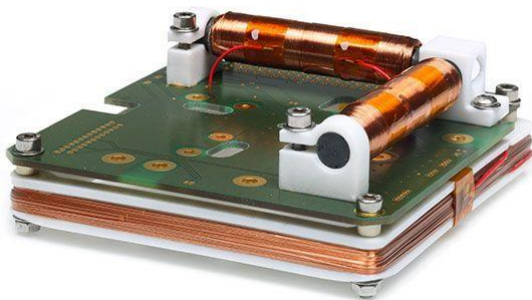


Рис. 4. Блок магнитных катушек «SatBus MTQ»

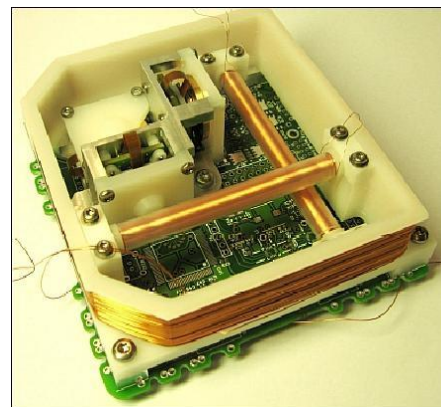


Рис. 5. Катушки спутника Delfi-n3Xt

2. Модель измерений

Рассмотрим кубсат с тремя взаимно ортогональными катушками (рис. 6). Угловое движение аппарата пассивное, система управления не подает ток на

катушки. Из-за вращения спутника в геомагнитном поле ЭДС V наводится в катушке согласно закону Фарадея

$$V_i = -N \frac{d\Phi_i}{dt} = -NS \frac{d(\mathbf{B}, \mathbf{n}_i)}{dt}, \quad i = x, y, z, \quad (1)$$

где Φ – магнитный поток в катушке с площадью S и числом витков N , \mathbf{n}_i – вектора нормалей к виткам катушек. Будем считать, что вектора \mathbf{n}_i направлены по связанным осям спутника. Тогда (1) можно записать как

$$\mathbf{V} = -NS \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (2)$$

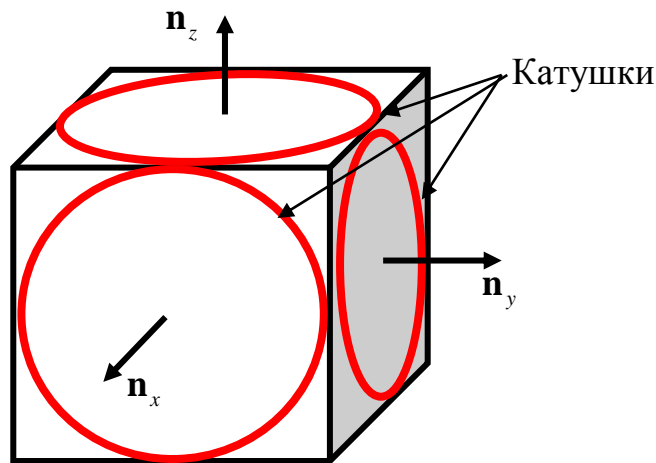


Рис. 6. Спутник с тремя катушками

В случае использования катушек-соленоидов необходимо принять во внимание магнитное поле \mathbf{H} в сердечнике. Оно связано с геомагнитным полем как

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника. Ферромагнитный стержень действует как конденсатор магнитного потока в катушке и усиливает сигнал,

$$\mathbf{V} = -NS\mu \frac{d\mathbf{H}}{dt}.$$

Благодаря этому ЭДС в соленоиде может быть больше, чем в плоской катушке, несмотря на заметно меньшую площадь поперечного сечения. Это компенсируется величиной μ (около $10^5 \mu_0$, μ_0 – магнитная постоянная). Однако относительная проницаемость стержня μ_c может быть заметно ниже, чем у его материала из-за размагничивания, определяемого коэффициентом D , зависящим от формы катушки,

$$\mu_c = \frac{\mu_r}{1 + D(\mu_r - 1)},$$

где $\mu_r = \mu / \mu_0$.

Для использования измерений ЭДС в определении ориентации необходимо преобразовать аналоговый сигнал V в цифровую величину. Наиболее важным свойством АЦП является его чувствительность. Если сигнал, преобразуемый АЦП – 1 В, то 16-битный преобразователь имеет разрешение около 15 мкВ [17]. Это – теоретический предел сигнала, который можно получить с помощью такого АЦП. Однако измерения подвержены шумам, вызванным колебаниями температуры и тока, на практике они имеют величину порядка 2 бит АЦП. Поэтому модель измерений в общем случае имеет вид

$$V = -NS \frac{d(\mathbf{B}, \mathbf{n})}{dt} + \delta V, \quad (3)$$

где δV – шум измерений, который считается нормально распределенной случайной величиной.

Магнитные катушки – соленоид с некоторой индуктивностью, влияющей на запаздывание в распространении тока. Индуктивность L катушки-соленоида может быть оценена по формуле

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l},$$

где l – длина катушки. В результате изменение тока I в катушке задается согласно закону

$$I = I_0 e^{-t/\tau},$$

где I_0 – подаваемый на катушку ток, $\tau = L/R$ – время релаксации, R – сопротивление катушки. Для типичных катушек кубсатов τ не превышает нескольких миллисекунд. Если интервал опроса между измерениями dT больше τ , запаздывания в измерениях незначительны.

3. Модель движения спутника

Введем две системы координат:

$Ox_1x_2x_3$ – орбитальная система с центром в центре масс спутника. Ox_3 направлена по радиус-вектору спутника, Ox_1 направлена вдоль скорости поступательного движения спутника на круговой орбите, Ox_2 дополняет систему до правой;

$Ox_1x_2x_3$ – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями аппарата.

Ориентация спутника относительно орбитальной системы координат описывается самолетными углами α, β, γ (последовательность поворотов 1-2-3); матрицей направляющих косинусов \mathbf{A} и ее элементами a_{ij} ; и кватернионом $\Lambda = (\mathbf{q}, q_0)$. Угловая скорость может характеризовать движение в абсолютном пространстве ($\boldsymbol{\omega}$ и ее компоненты ω_i) или движение относительно орбитальной системы координат ($\boldsymbol{\Omega}$ и ее компоненты Ω_i). Абсолютная и относительная скорости связаны соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{orb} = (0, \omega_0, 0)$ – угловая скорость орбитальной системы координат. Динамические уравнения Эйлера для спутника с тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}. \quad (5)$$

Момент \mathbf{M} содержит управление $\mathbf{M}_{упр}$ и возмущающую часть. Последняя включает в себя гравитационный момент и моменты неизвестной природы, так что в целом $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{упр} + \mathbf{M}_{гр} + \mathbf{M}_{возм}$. Управление задается как

$$\mathbf{M}_{упр} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

где \mathbf{m} – управляющий дипольный момент спутника, \mathbf{B} – вектор геомагнитной индукции в связанной системе координат. Гравитационный момент

$$\mathbf{M}_{гр} = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}\mathbf{e}_3) \times \mathbf{J}(\mathbf{A}\mathbf{e}_3),$$

где $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ – радиус-вектор спутника в орбитальной системе координат. Возмущающий момент неизвестной природы моделируется случайным шумом с нормальным распределением и величиной $5 \cdot 10^{-8}$ Н·м. Это возмущение на порядок меньше управляющего воздействия.

Динамические уравнения движения относительно орбитальной системы координат запишем в виде

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{зур} + \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb},$$

где $\mathbf{M}_{зур} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ – гироскопический момент.

Динамические уравнения дополняются кинематическими соотношениями. При использовании кватерниона

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}(q_0\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{W}_\Omega\mathbf{q}), \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\boldsymbol{\Omega},\end{aligned}\tag{6}$$

\mathbf{W}_y – кососимметрическая матрица для любого \mathbf{y} ,

$$\mathbf{W}_y = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{7}$$

Магнитное поле моделируется с помощью дипольного приближения. Использование наклонного диполя [18] позволяет достаточно точно описать поле Земли, не требуя значительных вычислительных затрат. Вектор геомагнитной индукции

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_e}{r^5}(\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}),\tag{8}$$

где \mathbf{k} – вектор направления диполя, \mathbf{r} – радиус-вектор спутника, r – его величина. При проведении аналитических исследований используется модель прямого диполя (\mathbf{k} антипараллельно оси вращения Земли). В этом случае в орбитальной системе координат

$$\mathbf{B}_{orb} = B_0 \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ \cos i \\ -2 \sin u \sin i \end{pmatrix},\tag{9}$$

где $B_0 = \frac{\mu_e}{r^3}$, $\mu_e = 7.812 \cdot 10^6 \text{ км}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$, u – аргумент широты.

4. Расширенный фильтр Калмана

Расширенный фильтр Калмана широко применяется для определения движения спутников. Он позволяет оценить не измеряемые напрямую компоненты вектора состояния и не требует больших вычислительных затрат, что позволяет использовать его на бортовом компьютере. Рассмотрим применение фильтра для определения движения по измерениям наведенной в катушках ЭДС.

Основы фильтра

Фильтр Калмана – рекурсивный алгоритм, использующий модель динамической системы и измерения датчиков для определения движения аппарата в режиме реального времени. Оценка вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ = \hat{\mathbf{x}}(t_k)$

вычисляется для каждого дискретного момента времени t_k , когда доступны измерения. Дискретный фильтр Калмана работает по принципу прогноз-коррекция [19]. Рассмотрим шаг $k-1$ и соответствующие ему оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ и ковариационную матрицу \mathbf{P}_{k-1}^+ . Необходимо найти оценку вектора состояния на следующем шаге $\hat{\mathbf{x}}_k^+$. Сначала вычисляется априори оценка $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ с помощью интегрирования уравнений движения системы. Затем используется вектор измерений \mathbf{z}_k , чтобы скорректировать эту оценку и получить апостериори вектор состояния $\hat{\mathbf{x}}_k^+$. Ковариационная матрица ошибок \mathbf{P}_k^- вычисляется по информации с предыдущего шага с помощью уравнения Риккати. Измерения позволяют уточнить эту матрицу и получить \mathbf{P}_k^+ .

Фильтр Калмана разработан для линейных динамических систем и дает наилучшую оценку вектора состояния по среднеквадратическому критерию. Однако фильтр можно использовать для работы с нелинейными моделями как самой динамической системы, так и измерений:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t), \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t), \quad (11)$$

где $\mathbf{w}(t)$ – нормально распределенная ошибка модели системы с ковариационной матрицей \mathbf{D} , \mathbf{G} – матрица, задающая влияние этой ошибки на модель динамической системы, $\mathbf{v}(t)$ – нормально распределенная ошибка измерений с ковариационной матрицей \mathbf{R} .

Для применения фильтра Калмана функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$, входящие в правые части уравнений, необходимо разложить в ряды Тейлора в окрестности текущего вектора состояния. В фильтре используются только линейные члены. Матрицы моделей динамической системы и измерений для линейного приближения

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}. \quad (12)$$

Дискретный расширенный фильтр Калмана использует нелинейные модели системы и измерений для получения априори и апостериори оценок [20]. На этапе прогноза для получения априори оценки используются следующие выражения

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt, \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k,$$

где \mathbf{Q}_k – ковариационная матрица дискретного шума системы, вычисляемая согласно

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}_k \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \mathbf{\Phi}_k^T dt. \quad (14)$$

На этапе коррекции для получения апостериори оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t_k)), \\ \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{\Phi}_k = \exp(\mathbf{F}_k (t_k - t_{k-1}))$ – матрица перехода от шага $k-1$ к шагу k , \mathbf{E} – единичная матрица, \mathbf{K} – весовая матрица.

Построим фильтр Калмана для определения ориентации спутника в орбитальных осях. Примем вектор состояния

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{\Omega}). \quad (16)$$

Динамические уравнения управляемого углового движения спутника задаются (5), при этом нормально распределенное возмущение не учитывается в фильтре. Также используются кинематические соотношения в кватернионах (6).

Линеаризация уравнений

Уравнения движения должны быть линеаризованы в окрестности текущего положения. Перепишем уравнения (5), (6) в виде

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x}(t), \quad (17)$$

где $\delta \mathbf{x}(t)$ – малое приращение вектора состояния, $\mathbf{F}(t)$ – матрица уравнений движения, линеаризованных около текущего вектора состояния. Вектор состояния $\mathbf{x}(t)$ можно разделить на его оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ и малое приращение $\delta \mathbf{x}(t)$,

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \delta \mathbf{x}(t). \quad (18)$$

Чтобы линеаризовать кинематические соотношения (6) заметим, что сумма кватернионов в (18) означает сложение вращений. Это формализуется умножением кватернионов в параметрах Родриго-Гамильтона

$$\Lambda = \hat{\Lambda} \circ \delta\Lambda.$$

Здесь $\hat{\Lambda}$ – текущая оценка кватерниона. Опустим члены второго порядка малости и предположим, что $\delta\Lambda = (\delta\mathbf{q}, 1)$ имеет единичную скалярную часть.

Тогда линеаризованные кинематические соотношения имеют вид

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W}_\Omega \delta\mathbf{q} + \frac{1}{2} \delta\Omega, \quad (19)$$

$$\delta\dot{q}_0 = 0.$$

Для линеаризации динамических уравнений (5) требуется линеаризация гравитационного момента

$$\mathbf{M}_{zp} = 3\omega_0^2 \mathbf{A}(\Lambda) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{J} \mathbf{A}(\Lambda) \mathbf{e}_3.$$

Используем вращение на малый угол около текущего положения,

$$\mathbf{A}(\Lambda) = \mathbf{A}(\hat{\Lambda} \circ \delta\Lambda) = \mathbf{A}(\delta\Lambda) \mathbf{A}(\hat{\Lambda}). \quad (20)$$

Принимая во внимание $\delta\Lambda = (\delta\mathbf{q}, 1)$, можно получить приближенное соотношение

$$\mathbf{A}(\delta\Lambda) = \mathbf{E} - 2\mathbf{W}_{\delta\mathbf{q}}. \quad (21)$$

Отсюда

$$\delta\mathbf{M}_{zp} = 6\omega_0^2 (\mathbf{W}_{\mathbf{Ae}_3} \mathbf{J} \mathbf{W}_{\mathbf{Ae}_3} - \mathbf{W}_{\mathbf{JAe}_3} \mathbf{W}_{\mathbf{Ae}_3}) \delta\mathbf{q}.$$

Окончательно линеаризованный гравитационный момент

$$\delta\mathbf{M}_{zp} = 6\omega_0^2 \mathbf{F}_{zp} \delta\mathbf{q}, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{F}_{zp} = \mathbf{W}_{\mathbf{Ae}_3} \mathbf{J} \mathbf{W}_{\mathbf{Ae}_3} - \mathbf{W}_{\mathbf{JAe}_3} \mathbf{W}_{\mathbf{Ae}_3}.$$

Линеаризованный гироскопический момент

$$\delta\mathbf{M}_{zur} = \mathbf{F}_{zur}^\Omega \delta\Omega + \mathbf{F}_{zur}^q \delta\mathbf{q}, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{F}_{zur}^\Omega = \mathbf{W}_{\mathbf{J}\Omega} - \mathbf{W}_\Omega \mathbf{J}, \quad \mathbf{F}_{zur}^q = 2 \left(\mathbf{W}_{\mathbf{J}\omega} \mathbf{W}_{\Lambda\omega_{orb}} - \mathbf{W}_\omega \mathbf{J} \mathbf{W}_{\Lambda\omega_{orb}} \right).$$

Линеаризация управляющего момента \mathbf{M}_{ynp} в окрестности $\hat{\Lambda}$ дает

$$\mathbf{M}_{ynp} = \delta\mathbf{M}_{ynp} + \hat{\mathbf{M}}_{ynp} = \mathbf{m} \times \mathbf{A}(\hat{\Lambda} \circ \delta\Lambda) \mathbf{B}_{orb},$$

и линеаризованный момент

$$\delta\mathbf{M}_{ynp} = 2\mathbf{W}_m \mathbf{W}_{\hat{\mathbf{B}}} \delta\mathbf{q}.$$

В результате получаем линеаризованные уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x}(t),$$

где матрица \mathbf{F} задается с использованием (19), (22) и (23) как

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\mathbf{W}_\omega & \frac{1}{2} \mathbf{E} \\ \mathbf{J}^{-1} \left(6\omega_0^2 \mathbf{F}_{zp} + \mathbf{F}_{zup}^q + 2\mathbf{W}_{J\Omega} \mathbf{W}_{A\omega_{orb}} + 2\mathbf{W}_m \mathbf{W}_{\hat{\mathbf{B}}} \right) & \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{F}_{zup}^\Omega - \mathbf{W}_{A\omega_{orb}} \mathbf{J} \right) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Используя соотношение $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}_{orb}$, перепишем модель измерений магнитометра (2) в виде

$$\mathbf{z} = -NS \frac{d(\mathbf{A}\mathbf{B}_{orb})}{dt} + \boldsymbol{\eta}_V = -NS \left[-\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{B}_{orb}) \right] + \boldsymbol{\eta}_V,$$

где $\boldsymbol{\eta}_V$ – нормально распределенная ошибка измерений ЭДС с нулевым математическим ожиданием. Линеаризованная модель измерений

$$\mathbf{z} = \delta \mathbf{z} + \hat{\mathbf{z}}.$$

Используя (20) и (21) получаем

$$\delta \mathbf{z} = -NS \left[\mathbf{W}_{\hat{\mathbf{B}}} \delta \boldsymbol{\Omega} - 2\mathbf{W}_\Omega \mathbf{W}_{\hat{\mathbf{B}}} \delta \mathbf{q} - 2\mathbf{W}_{A\hat{\mathbf{B}}_{orb}} \delta \mathbf{q} \right],$$

и матрица измерений задается соотношением

$$\mathbf{H} = -NS \left[-2\mathbf{W}_\Omega \mathbf{W}_{\hat{\mathbf{B}}} - 2\mathbf{W}_{A\hat{\mathbf{B}}_{orb}} \quad 2\mathbf{W}_{\hat{\mathbf{B}}} \right]. \quad (25)$$

Перейдем теперь к вопросу управления движением спутника.

5. Алгоритм управления ориентацией

Рассмотрим управление, построенное на основе функции Ляпунова

$$\mathbf{m} = -k_\omega \mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega} - k_a \mathbf{B} \times \mathbf{S},$$

где $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})$. Это стандартный подход обеспечения трехосной ориентации с помощью магнитных катушек. Строится ляпуновское управление, после чего катушки реализуют лишь доступную его часть (проекцию на плоскость, перпендикулярную вектору геомагнитной индукции). Можно показать [21–23], что если коэффициенты усиления в управлении правильно подобраны и достаточно малы, то предложенное управление обеспечивает трехосную ориентацию. Подбор коэффициентов управления играет важную роль и проводится в два этапа. Сначала уравнения движения линеаризуются в окрестности требуемой ориентации. При этом используется модель прямого диполя, из возмущений учитывается лишь гравитационный

момент. В результате получаем следующие линейные уравнения с периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{du} &= -k'_\omega \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[(B_2^2 + B_3^2)w_1 - B_1B_2w_2 - B_1B_3w_3 \right] - \\ &- 2k_a \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[-B_1B_2\alpha - B_1B_3\beta + (B_2^2 + B_3^2)\gamma \right] - w_3 + \frac{B-C}{A}(w_2 - 4\gamma), \\ \frac{dw_2}{du} &= -k'_\omega \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[-B_1B_2w_1 + (B_1^2 + B_3^2)w_2 - B_2B_3w_3 \right] - \\ &- 2k_a \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[(B_1^2 + B_3^2)\alpha - B_2B_3\beta - B_1B_2\gamma \right] + 3\frac{C-A}{B}\alpha, \\ \frac{dw_3}{du} &= -k'_\omega \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[-B_1B_3w_1 - B_2B_3w_2 + (B_1^2 + B_2^2)w_3 \right] - \\ &- 2k_a \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[-B_2B_3\alpha + (B_1^2 + B_2^2)\beta - B_1B_3\gamma \right] + w_1 + \frac{A-B}{C}(w_1 + \beta), \\ \frac{d\alpha}{du} &= w_2, \quad \frac{d\beta}{du} = w_3, \quad \frac{d\gamma}{du} = w_1. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент усиления k_ω заменен на $k'_\omega = k_\omega \omega_0$. Это позволяет сравнивать два коэффициента усиления, характеризующие вклад позиционной и демпфирующей частей в управление, так как они имеют одинаковую размерность. B_i – компоненты вектора геомагнитной индукции в орбитальной системе координат, $w_i = \Omega_i / \omega_0$ – безразмерные компоненты относительной угловой скорости, в уравнениях используется дифференцирование по аргументу широты (безразмерному времени). Линейные уравнения с периодическими коэффициентами исследуются с помощью теории Флоке [24]. На рис. 7 представлены характеристические показатели вблизи области устойчивости. Были приняты следующие параметры спутника:

- круговая орбита, высота 400 км, наклонение 51.7° , радиус Земли 6371 км;
- тензор инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(5 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3})$ кг·м².

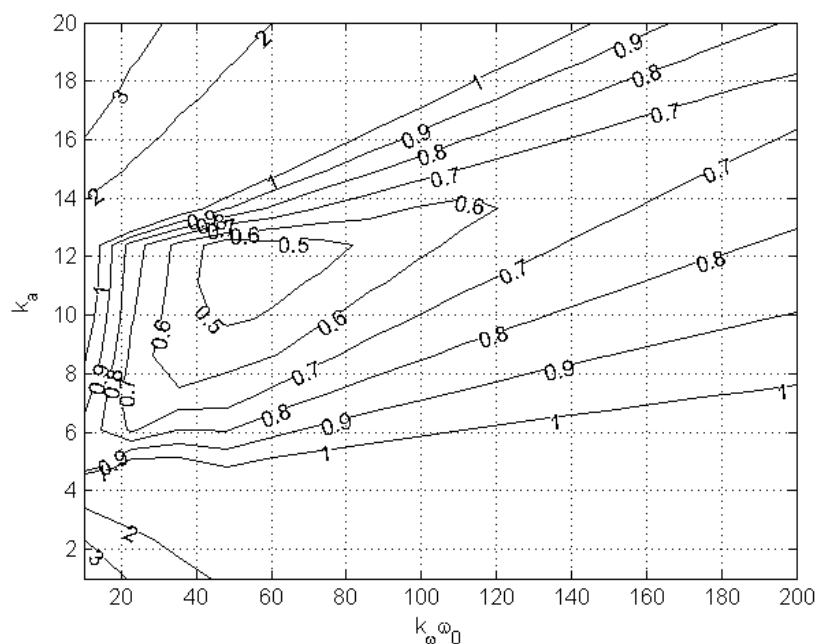


Рис. 7. Область устойчивости

Рис. 7 позволяет определить примерные значения параметров управления, обеспечивающие требуемую ориентацию. Вообще говоря, желательно провести еще один этап их поиска – подбор вручную. Численное моделирование исходных уравнений, при необходимости с менее строгими ограничениями (более точная модель геомагнитного поля, дополнительные возмущения и т.д.), позволяет уточнить наилучшие коэффициенты усиления, подбирая их около определенных по рис. 7. Так, для рассматриваемого случая хороший результат дают параметры $k_\omega = 40/\omega_0$ Н·м/Т, $k_a = 12$ Н·м/Т². Эти параметры близки к оптимальным согласно рис. 7.

6. Численное моделирование

Рассмотрим спутник-кубсат с параметрами, приведенными выше. Будем считать, что на нем установлены три ортогональные катушки с диаметром сердечника $d = 5.7$ мм, так что площадь поперечного сечения составляет $S = 10^{-4}$ м², относительная проницаемость сердечника в виде стержня составляет 75000, число витков $N = 6000$ для каждой катушки (параметры аналогичны тем, что соответствуют катушкам, описанным в [12]).

Для инициализации фильтра Калмана необходимо задать ковариационные матрицы ошибок измерений \mathbf{R} , ошибок модели \mathbf{Q} и начальную матрицу ошибок определения вектора состояния \mathbf{P}_0 .

Будем считать, что среднеквадратическое отклонение измерений ЭДС составляет $\sigma_{meas}=50$ мкВ. Ковариационная матрица ошибок измерений $\mathbf{R} = diag(\sigma_{meas}^2, \sigma_{meas}^2, \sigma_{meas}^2)$.

Ковариационная матрица дискретного шума определяется согласно (14). Интегрирование уравнения (14) требует значительных вычислительных ресурсов. Для бортовых компьютеров малых спутников, особенно кубсатов, имеет смысл упростить это выражение. Для этого можно использовать усеченную постоянную матрицу перехода между состояниями

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{E}\Delta t \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

Матрица влияния ошибки модели на вектор состояния

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда упрощенная ковариационная матрица дискретного шума, полученная из соотношения (14), имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\sigma_q^2 & \mathbf{E}\sigma_\omega\sigma_q \\ \mathbf{E}\sigma_\omega\sigma_q & \mathbf{E}\sigma_\omega^2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_\omega = I^{-1}d\Delta t, \quad \sigma_q = I^{-1}d\Delta t^2/2, \quad (26)$$

где I – минимальный момент инерции, Δt – интервал опроса, d – среднеквадратическое отклонение возмущения, действующего на аппарат.

Начальная оценка вектора состояния может быть любой. Предположим точную ориентацию (единичный кватернион, нет угловой скорости). При этом будем считать, что ошибки в знании ориентации и скорости заведомо очень высоки, $\sigma_{q_0} = \pi/2$ и $\sigma_{\omega_0} = 10$ °/с. Начальная матрица ошибок

$$\mathbf{P}_0 = (\sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2).$$

В качестве начальных данных возьмем большую скорость вращения $\boldsymbol{\omega}(t=0) = (10\omega_0, 10\omega_0, 10\omega_0)$, где орбитальная скорость $\omega_0 = 0.06$ °/с, и начальный кватернион $\Lambda_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$. Интервал между измерениями магнитных катушек – 1 с.

На рис. 8 приведен результат моделирования неуправляемого движения спутника с принятыми параметрами. Спутник хаотически вращается относительно центра масс. Измерения ЭДС в магнитных катушках приведены на рис. 9. При этом максимальная ЭДС составила около 0.01 В. Таким образом, соотношение сигнал-шум находится на уровне около 200.

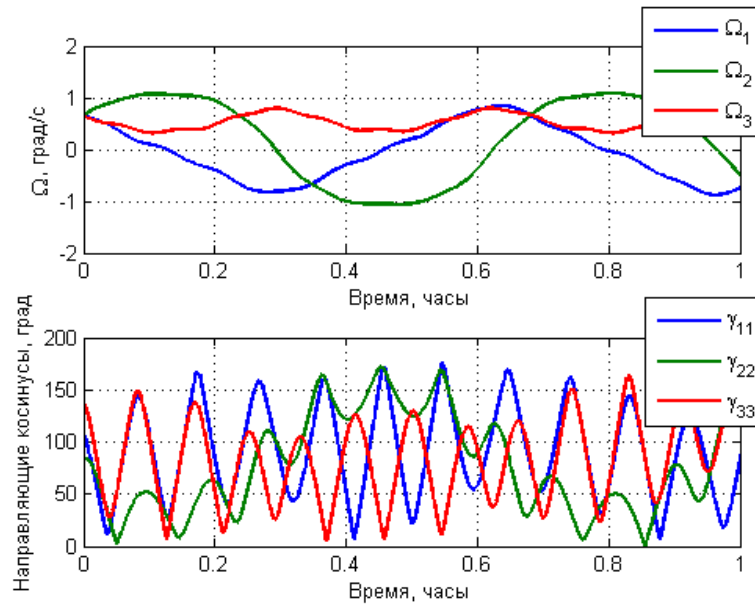


Рис. 8. Ориентация спутника во время неуправляемого движения

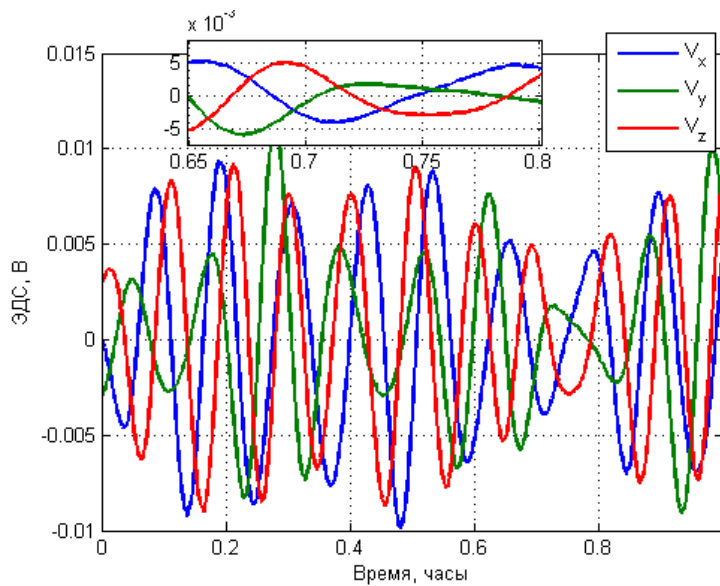


Рис. 9. Измерения ЭДС, наведенной в катушках

Рассмотрим точность определения ориентации спутника. На рис. 10 приведена разница между реальным значением вектора состояния при моделировании и его оценкой. Точность после сходимости оказывается не лучше 1° и $0.01 \text{ }^\circ/\text{с}$. Интерес представляет изменение точности в некоторые моменты времени. Так, в момент времени около 0.75 часа после старта моделирования точность определения углов α и β заметно упала. В то же время значение ЭДС (рис. 9) было относительно невелико. Это привело к

возникновению больших по сравнению с предшествующим отрезком времени ошибок по определению углов ориентации.

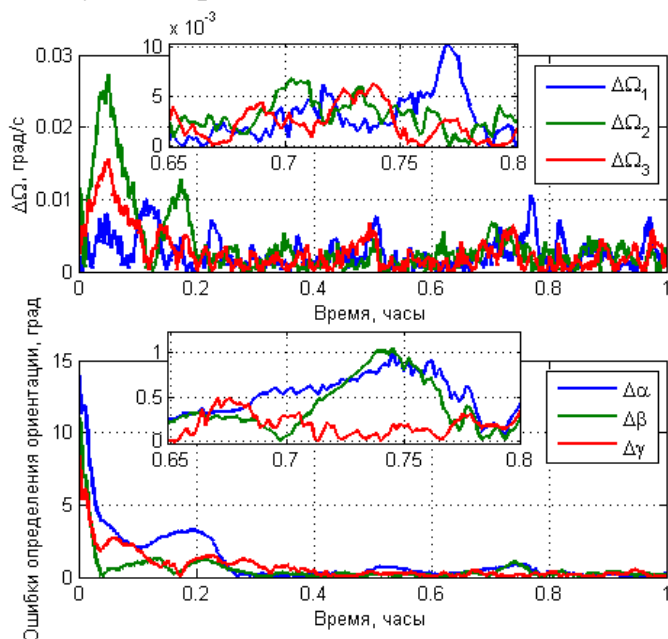


Рис. 10. Точность определения углового движения

Интересно определить точность, используя ковариационную матрицу \mathbf{P} . Диагональные элементы этой матрицы представляют собой дисперсию σ^2 . Это позволяет определить среднеквадратическое отклонение $\sigma_i = \sqrt{p_{ii}}$, $i = 1, \dots, 6$, где p_{ii} – диагональные элементы матрицы \mathbf{P} . На рис. 11 приведена зависимость предельной ошибки 3σ от времени. Видно, что среднеквадратическое отклонение не постоянно и зависит от времени.

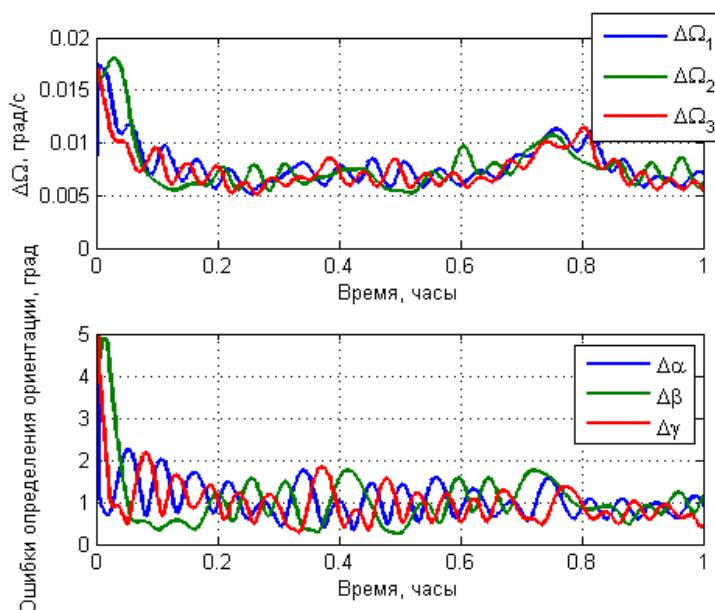


Рис. 11. Точность определения ориентации, полученная по ковариационной матрице (3σ)

На рис. 12 и 13 приведен результат моделирования управляемого движения спутника. На рис. 14 изображены измерения ЭДС на магнитных катушках во время управляемого движения. При реализации управления предполагалось, что на измерения отводится одна секунда, на управление – 5 секунд. Точность стабилизации спутника оказалась не хуже 8° , и в целом лучше 5° . Видно, что точность стабилизации падает на интервалах времени около 2, 3,5 и 4,5 часов с момента старта моделирования (рис. 12). Соответствующее ухудшение точности определения ориентации можно видеть на рис. 13. При этом точность определения падает после наилучших показателей по точности ориентации (увеличенная область на рис. 12). Спутник время от времени приобретает «слишком» точную ориентацию, угловая скорость становится практически нулевой. В результате наведенная в катушках ЭДС уменьшается и, как следствие, падает точность определения ориентации. Вслед за падением точности определения падает и точность стабилизации. Спутник снова увеличивает скорость вращения, ЭДС также увеличивается и фильтр быстро сходится, точность определения ориентации улучшается.

На рис. 14 представлены измерения ЭДС катушек на интервале, когда управление выключено. Видно, что величина сигнала в стабилизированном положении спутника составляет порядка 800 мкВ. На рис. 15 изображен график управления, из которого можно заключить, что величина управляющего момента в начале моделирования составляет порядка $3 \cdot 10^{-7}$ Н·м, а в стабилизированном положении не превышает 10^{-8} Н·м, что меньше величины случайного возмущения, среднеквадратическое отклонение которого принято за $5 \cdot 10^{-8}$ Н·м. На увеличении рис. 15 можно увидеть интервалы измерения магнитных катушек и интервалы управления.

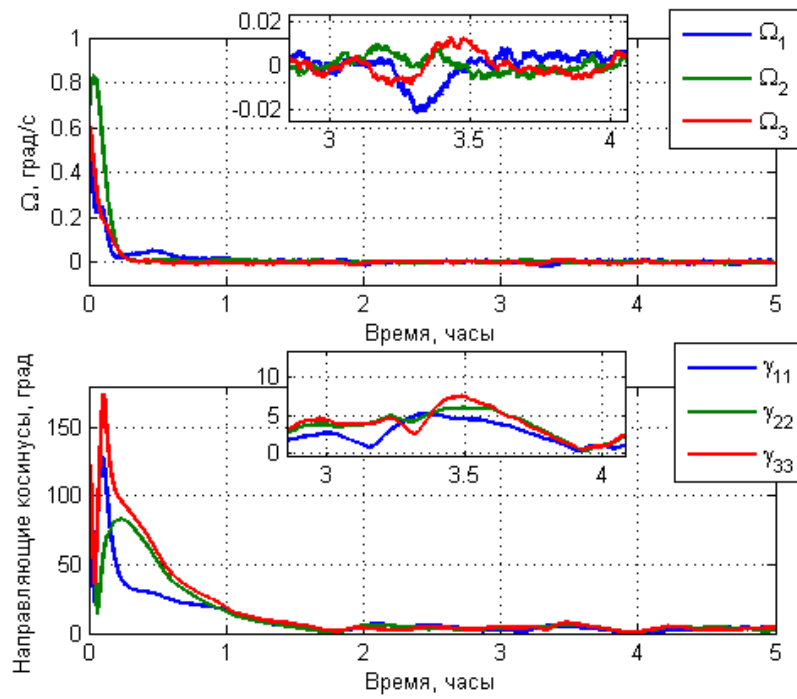


Рис. 12. Точность стабилизации спутника

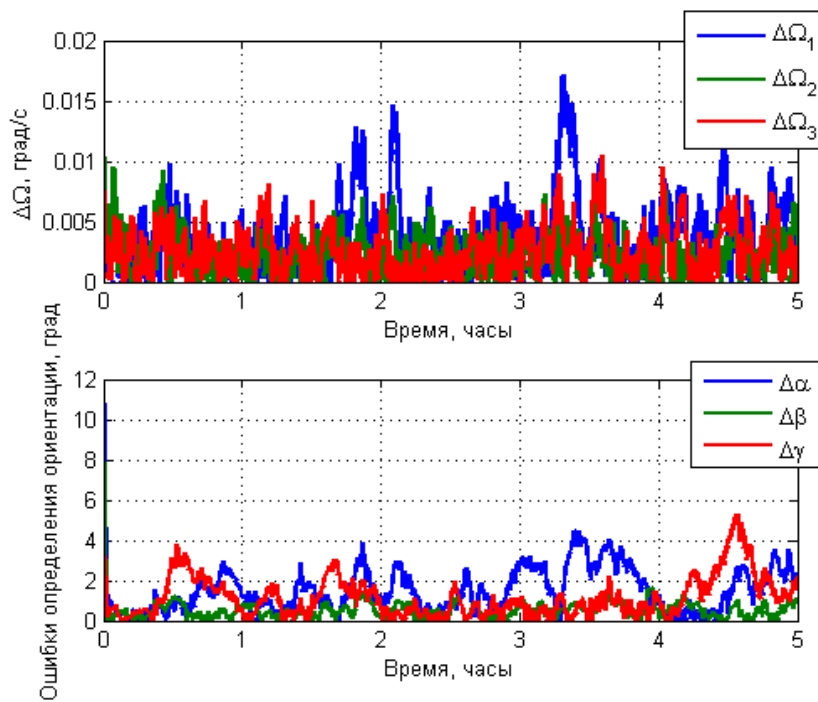


Рис. 13. Точность оценки трехосной ориентации

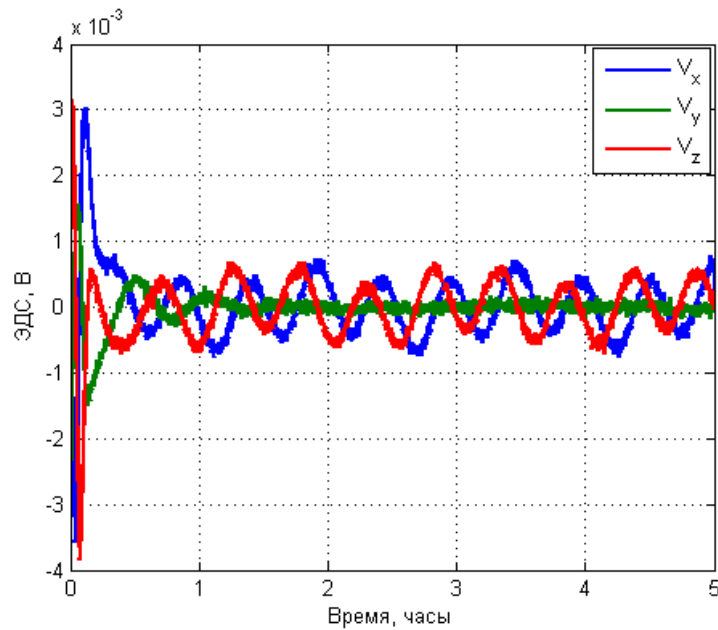


Рис. 14. Измерения ЭДС на магнитных катушках во время управляемого движения при $\sigma_{meas} = 50$ мкВ

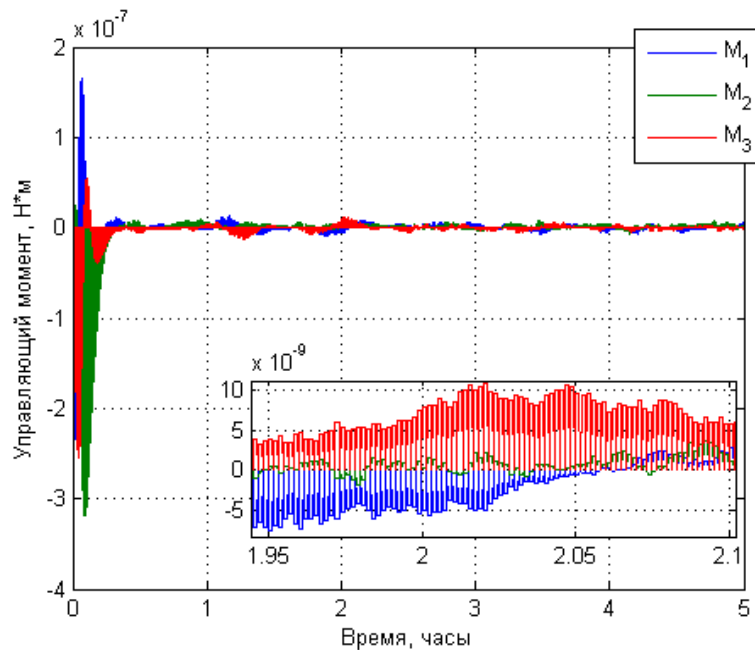
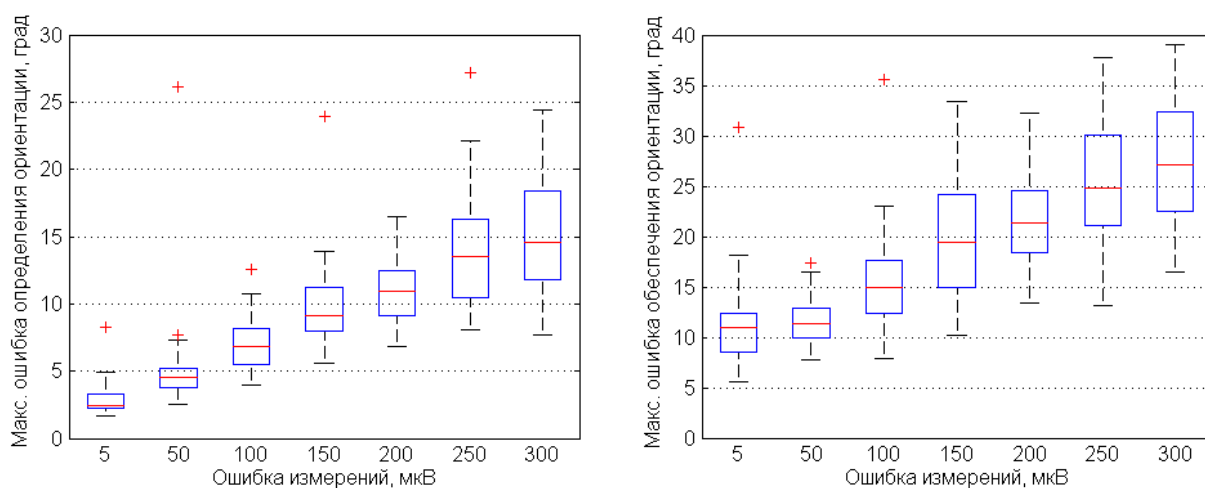


Рис. 15. Величина управляющего момента

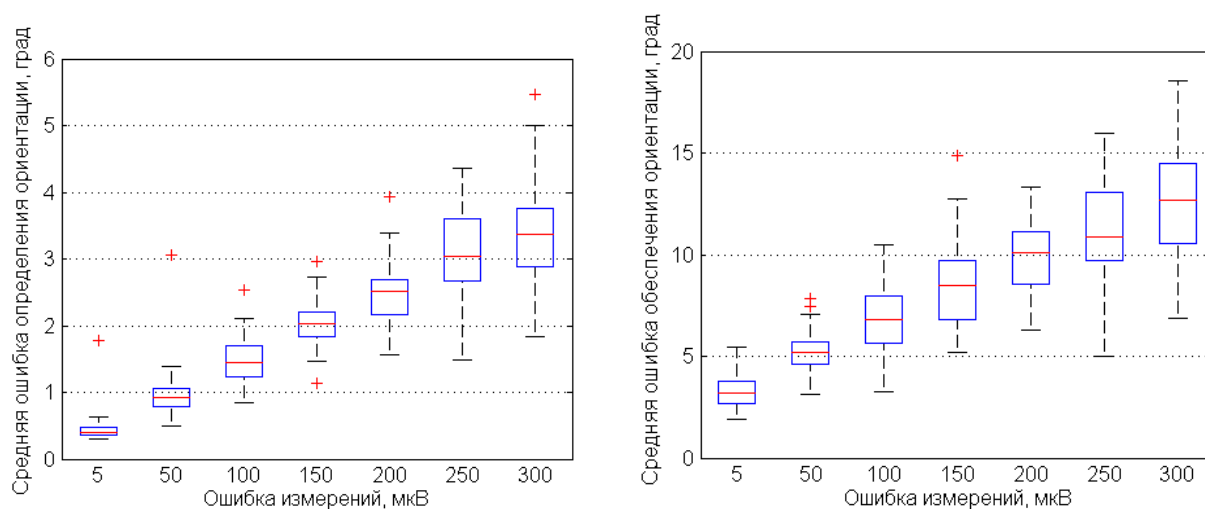
Временное ухудшение точности определения ориентации и точности стабилизации, как в приведенных выше примерах, носит случайный характер. Для изучения наихудших показателей точности были проведены массовые расчеты. При одних и тех же начальных условиях, описанных выше, 50 раз проводилось численное моделирование управляемого углового движения

спутника. На интервале после сходимости фильтра Калмана и стабилизации в орбитальной системе координат выбирались наихудшее и среднее значения точности определения движения и точности стабилизации. На рис. 16 представлена диаграмма размаха максимальных ошибок определения движения и обеспечения ориентации для различных значений среднеквадратической ошибки измерений. Внутри прямоугольника попадает 50% значений, математическое ожидание обозначено красной чертой внутри прямоугольника. Выше и ниже прямоугольника попадает по 25%. Красными крестиками обозначены значения, выпадающие за пределы 3σ , при предположении, что исходные данные распределены по нормальному закону вероятности. На рис. 17 представлены диаграммы размаха по средним значениям.



а) б)

Рис. 16. Наихудшие точности определения (а) и управления (б) ориентацией в зависимости от ошибок измерений



а) б)

Рис. 17. Средние точности определения (а) и управления (б) ориентацией в зависимости от ошибок измерений

Из рис. 16 и 17 видно, что точность определения ориентации зависит от ошибок измерений почти линейно, также близко к линейной зависимости падает точность обеспечения ориентации. Следует отметить, что при значении ошибок измерений $\sigma_{meas} = 300$ мкВ шум измерений всего в примерно два раза ниже полезного сигнала, однако даже при таком низком значении удается определить ориентацию со средней точностью 3,5 градуса, а обеспечить стабилизацию в среднем около 13 градусов.

Заключение

Предложен алгоритм определения трехосной ориентации спутника по измерениям электродвижущей силы, наведенной в магнитных катушках системы ориентации. Точность определения ориентации зависит в первую очередь от угловой скорости спутника и шума измерений. Наихудшая точность определения оказывается в целом порядка нескольких градусов, а точность стабилизации в среднем не хуже 15 градусов. Несмотря на то, что такая точность определения ориентации и точность стабилизации недостаточна для многих требовательных миссий, предложенная связка алгоритмов определения и управления с помощью только магнитных катушек может быть успешно использована на некоторых малых спутниках, а также в качестве аварийного режима в случае выхода из строя основных элементов системы ориентации.

Литература

1. Springmann J.C. et al. The attitude determination system of the RAX satellite // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2012. Vol. 75. P. 120–135.
2. Searcy J.D., Pernicka H.J. Magnetometer-Only Attitude Determination Using Novel Two-Step Kalman Filter Approach // *J. Guid. Control. Dyn.* 2012. Vol. 35, № 6. P. 1693–1701.
3. Psiaki M.L., Martel F., Pal P.K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data // *J. Guid. Control. Dyn.* 1990. Vol. 13, № 3. P. 506–514.
4. Lefferts E.J., Markley F.L., Shuster M.D. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation // *J. Guid. Control. Dyn.* 1982. Vol. 5, № 5. P. 417–429.
5. Pittelkau M.E. Kalman Filtering for Spacecraft System Alignment Calibration Introduction // *J. Guid. Control. Dyn.* 2001. Vol. 24, № 6. P. 1187–1195.
6. Gai E. et al. Star-Sensor-Based Satellite Attitude / Attitude Rate Estimator // *J. Guid. Control Dyn.* 1985. Vol. 8, № 5. P. 560–565.
7. Xiong K., Liang T., Yongjun L. Multiple model Kalman filter for attitude determination of precision pointing spacecraft // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2011. Vol. 68, № 7–8. P. 843–852.
8. Abdelrahman M., Park S.-Y. Integrated attitude determination and control system via magnetic measurements and actuation // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2011. Vol. 69, № 3–4. P. 168–185.
9. Ivanov D.S. et al. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // *Acta Astronaut.* 2017. Vol. 132. P. 103–110.
10. Tumanski S. Induction coil sensors—a review // *Meas. Sci. Technol.* IOP Publishing, 2007. Vol. 18, № 3. P. 31–46.
11. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // *Trans. ASME,*

- Ser. D, J. Basic Eng. 1960. Vol. 82. P. 35–45.
12. Li J. et al. Design of Attitude Control Systems for CubeSat-Class Nanosatellite // J. Control Sci. Eng. Hindawi Publishing Corporation, 2013. Vol. 2013. P. 1–15.
 13. CUTE-1.7+APD - eoPortal Directory - Satellite Missions [Electronic resource]. URL: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/c-missions/cute-17-apd> (accessed: 20.05.2017).
 14. Guerrant D.V. Design and Analysis of Fully Magnetic Control for Picosatellite Stabilization // PhD Thesis, Calif. Polytech. State Univ. 2005. № June. P. 143.
 15. CubeSat Magnetorquer SatBus MTQ NanoAvionics [Electronic resource]. URL: <http://n-avionics.com/cubesat-components/attitude-control-systems/cubesat-magnetorquer-satbus-mtq/> (accessed: 20.05.2017).
 16. Delfi-n3Xt Attitude Determination and Control Subsystem [Electronic resource]. URL: <http://www.delfispace.nl/delfi-n3xt/attitude-determination-and-control-subsystem> (accessed: 20.05.2017).
 17. Analog-to-Digital Converter Design Guide High-Performance, Stand-Alone A/D Converters for a Variety of Embedded Systems Applications [Electronic resource]. URL: <http://www.t-es-t.hu/download/microchip/ds21841c.pdf> (accessed: 21.05.2017).
 18. Pichuzhkina A.V., Roldugin D.S. Geomagnetic field models for satellite angular motion // Keldysh Inst. Prepr. 2016. № 87. P. 25.
 19. Kalman R.E., Bucy R.S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng. 1961. Vol. 83. P. 95–108.
 20. Wertz J.R. Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht/Boston, London: Acad. press, 1990. 880 p.
 21. Ovchinnikov M.Y. et al. Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame // Acta Astronaut. 2015. Vol. 116. P. 74–77.
 22. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // Acta Astronaut. 2015. Vol. 110. P. 279–286.
 23. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // Acta Astronaut. 2015. Vol. 107. P. 87–96.
 24. Malkin I.G. Some problems in the theory of nonlinear oscillations. Oak Ridge: U.S. Atomic Energy Commission, Technical Information Service, 1959.