



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Зенюк Д.А., Малинецкий Г.Г.,
Фаллер Д.С.

Математические модели
коррупционного поведения с
несовершенным аудитом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зенюк Д.А., Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С. Математические модели коррупционного поведения с несовершенным аудитом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 53. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2018-53](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-53)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-53>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук**

Д. А. Зенюк, Г. Г. Малинецкий, Д. С. Фаллер

**Математические модели
коррупционного поведения с
несовершенным аудитом**

Москва — 2018

УДК 51-77

Д. А. Зенюк, Г. Г. Малинецкий, Д. С. Фаллер

Математические модели коррупционного поведения с несовершенным аудитом

В работе предложена простая стохастическая модель коррупционного поведения, для которой получено точное решение. Также исследована имитационная модель, позволяющая ослабить некоторые ограничения аналитической и более реалистично описать динамику коллективного поведения коррупционеров. В обеих моделях учтена возможность сговора между коррупционерами и аудиторами. Решена задача выбора оптимальных параметров стратегии ограничения коррупции.

Ключевые слова: математическая социология, коррупционное поведение, стохастическое моделирование, динамические процессы на графах

Dmitry Alexeyevich Zenyuk, Georgy Gennadiyevich Malinetsky, Dmitry Sergeevich Faller

Mathematical models of corruptional behavior with imperfect audit

A simple stochastic model of corruptional behavior, which can be solved explicitly, is proposed. Moreover, a simulation model, which allows one to relax several restrictions of this analytical treatment and realistically describe the dynamics of collective behavior among corrupted actors, is also discussed. In both cases the possibility of a deal between a corrupted actor and an auditor has been taken into account. The problem of anti-corruptional strategy parameters optimization is addressed.

Key words: mathematical sociology, corruption, stochastic simulation, dynamics on graphs

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 16-01-00342, 18-011-00567 и 18-511-00008.

Оглавление

Введение	3
Аналитические результаты	4
Имитационная модель	11
Заключение	18
Библиографический список	19

Введение

Бюрократическая коррупция, по-видимому, является одним из наиболее очевидных «дефектов» публичной власти [1]. Она в равной мере поражает демократические и авторитарные режимы, а свидетельства ее тлетворного влияния прослеживаются вплоть до государств Древнего мира. Тем не менее, несмотря на столь внушительную историю, понимание феномена коррупционного поведения остается во многом схематичным и неполным. Даже вопрос о том, какое именно поведение и при каких условиях может быть отнесено к коррупционному, остается открытым (см., например, [2, 3]). Проблема осложняется тем, что субъективное восприятие коррупции может существенно меняться со временем и в зависимости от социокультурного контекста [4].

В данной работе мы ограничимся «рыночно-центристским» подходом к коррупции, акцентируя внимание в первую очередь на экономических механизмах, связанных с распределением незаконно полученного дохода между акторами бюрократической системы. Разумеется, такой подход является некоторым упрощением, однако, как отмечено в [5]: «Экономика — действенный инструмент анализа коррупции. Культурные различия и мораль добавляют свои нюансы и частности, однако для понимания того, где искушение коррупции является наиболее ощутимым и где оно оказывает наибольшее воздействие, необходим общий экономический подход».

Математические подходы к проблеме моделирования коррупции можно условно разделить на две больших группы. К первой относятся модели, опирающиеся на аппарат теории игр (подробные обзоры можно найти в [6, 7]). Круг рассматриваемых в этих работах вопросов весьма широк: исследование механизмов внешней и внутренней коррупции; существование и единственность равновесных состояний; устойчивость коррумпированной иерархии к внешним возмущениям; исследование эффективности различных стратегий борьбы с коррупцией. К этим работам тесно примыкают исследования оптимизационных задач, связанных с управлением коррумпированными системами; реферативное изложение результатов, полученных в рамках этого направления, приведено в [7].

Вторая группа включает в себя эволюционные модели и использует инструментарий теории дифференциальных уравнений (с частными или обычными производными). Здесь необходимо упомянуть цикл работ [8-10], в которых распределение властных полномочий в системе институтов публичной власти рассматривалось с помощью термодинамической аналогии. Эволюция системы была сведена к краевой задаче для нелинейного уравнения параболического типа с источником. Коррупция в этой модели описывалась с помощью дополнительного коэффициента, в общем случае зависящего от времени, меняющего интенсивность потоков властных полномочий так, что их естественное распределение нарушалось. В [11] была предложена модель на

основе трехмерной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве фазовых переменных были выбраны общественная поддержка режима, объем накопленных коррупционных доходов и стоимость расследования коррупционных преступлений. Было показано, что при определенном выборе параметров в системе могут наблюдаться сложные периодические режимы, соответствующие повторяющимся крахам коррумпированных правительств, за которыми следовал спад активности антикоррупционных кампаний. Еще один интересный подход к проблеме описания динамики коррумпированной иерархии на основе аппарата одномерных клеточных автоматов был рассмотрен в [12]. Также известны [13] обобщения упоминавшейся выше модели «власть—общество», использующие формализм клеточных автоматов.

В настоящей работе будет представлена дискретная стохастическая модель коррупционного поведения, которая допускает аналитическое решение. Эволюция системы является результатом конкуренции двух механизмов: механизма вовлечения акторов в коррупционные сделки и механизма санкций за участие в этих сделках. Рассматриваемая модель позволяет в явном виде учесть возможность сговора между коррупционерами и аудиторами, которые должны применять санкции. Наряду с этой простой аналитической моделью будет также предложен подход к имитационному моделированию коррупционного поведения, который позволяет значительно детализировать картину коллективного поведения акторов в коррумпированной иерархии.

Аналитические результаты

Будем рассматривать иерархическую систему, состоящую из K взаимодействующих акторов. В рамках предлагаемой в настоящем разделе аналитической модели топология связей между акторами не имеет значения. В каждый момент времени $D \leq K$ наудачу выбранных акторов получают возможность заключить коррупционную сделку, которую они либо используют, либо отвергают. При этом мы не будем различать, каким именно способом они получают эту возможность и в чем состоит существо самой сделки — значение здесь имеет лишь сам факт нелегитимного получения ренты акторами. Величину D можно интерпретировать как сумму сделки, которая поровну распределяется между всеми ее участниками. Вероятность того, что сделка будет принята, равна $0 \leq \tau \leq 1$. Далее в тексте этот параметр также будет называться *коррупционной толерантностью*. Он характеризует, в какой мере коррупционное поведение считается приемлемой стратегией для акторов данной иерархии. Коррупционерами будем считать тех акторов, кто хотя бы раз участвовал в сделке.

Механизмом, препятствующим распространению коррупции, является аудит. Для этого в системе существует $Q \leq K$ аудиторов, каждый из которых проверяет одного наудачу выбранного актора на каждом T -м шаге, $T \geq 1$.

Будем считать, что аудиторы всегда выявляют участие в коррупционной сделке, как бы давно она ни произошла. Если аудитор обнаружил коррупционера, он может применить к нему санкции, изгнав последнего из иерархии, либо вступить с ним в сговор. Аудиторы принимают решение о сговоре независимо друг от друга с вероятностью $1-p$, которая зависит от соотношения $\eta = W/D$, где $W \geq 0$ — легальное вознаграждение аудиторов, которое они получают от принципала (некоторого условного правителя, обладающего верховной властью). Если принципал назначает слишком маленькое вознаграждение, то у аудиторов нет стимулов сохранять ему лояльность — вместо этого им выгоднее вступить в сговор с коррупционерами и взять некоторую сумму у него. Вероятность сговора, таким образом, должна монотонно убывать по η . В настоящей работе функциональная зависимость p от η была выбрана в виде $p(\eta) = 1 - e^{-\eta}$. Если аудитор не принял предложение коррупционера, то последний заменяется новым некоррупцированным актором с теми же характеристиками.

В качестве основного параметра, описывающего распространение коррупции в системе, естественно выбрать долю коррупционеров от общего числа акторов в иерархии. В рамках описанных эволюционных правил удастся получить аналитическое выражение для математического ожидания этой величины. Заметим, что рассматриваемый случайный процесс легко может быть сведен к т.н. урновой модели с последствием. Если отождествить коррупционеров в черными шарами, а некоррупцированных акторов — с белыми, то на каждом шаге происходит извлечение наудачу некоторого количества шаров, которые могут изменять цвет на противоположный, после чего эти шары возвращаются обратно. Модели такого рода хорошо известны (один из наиболее изученных и распространенных вариантов — схема Пойа) и применяются для описания различных физических и биологических процессов. Подробное изложение результатов, связанных с урновыми схемами, и их приложений можно найти в [14, 15].

Пусть начальное количество коррупционеров (которое в общем случае является случайным) в иерархии равно ζ_0 , и обозначим через ζ_1 количество коррупционеров после T шагов (напомним, что на T -м шаге проводится аудит). Эти величины связаны очевидным соотношением:

$$\zeta_1 = \zeta_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_T - z.$$

Здесь x_k — зависимые случайные величины, выражающие увеличение количества коррупционеров на k -м шаге, а случайная величина z соответствует количеству коррупционеров, покинувших иерархию в результате применения санкций. Если на k -м шаге сделка была принята, то x_k есть количество белых шаров (т.е. следует рассматривать только коррупционеров, появившихся на этом шаге и еще не учтенных ранее), которое можно

наблюдать при извлечении наудачу D шаров из K , среди которых $\zeta_0 + x_1 + \dots + x_{k-1}$ черных. Таким образом, условное распределение x_k относительно $\zeta_0 + x_1 + \dots + x_{k-1}$ является гипергеометрическим:

$$\mathbf{P}(x_k = m | \zeta_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} = y) = \frac{\binom{m}{K-y} \binom{D-m}{y}}{\binom{D}{K}}, \quad m = 0, 1, \dots, D. \quad (1)$$

В знаменателе (1) стоит число всевозможных способов, которыми можно выбрать D объектов из K без возвращения и учета порядка их следования. В числителе, соответственно, число способов, которым можно выбрать m белых шаров и $D-m$ черных. Гипергеометрическая схема очень похожа на биномиальную, основное отличие заключается именно в том, что выбор происходит без возвращения — это означает, что вероятность появления шара определенного цвета зависит от того, сколько шаров такого же цвета уже было извлечено из урны. Гипергеометрическое распределение хорошо изучено, известны точные выражения для его моментов, а также для его характеристической функции и производящей функции моментов. Подробное изложение свойств этого распределения и его связей с другими дискретными распределениями можно найти, например, в [16]. Мы остановимся лишь на вычислении математического ожидания, поскольку этот результат будет использоваться далее в тексте:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{m=0}^D m \binom{m}{K-y} \binom{D-m}{y}}{\binom{D}{K}} &= \frac{\sum_{m=0}^D \frac{m(K-y)(K-y-1)!}{m(m-1)!(K-y-1-m+1)!} \frac{y!}{(D-1-m+1)!(y-D+1+m-1)!}}{\frac{K(K-1)!}{D(D-1)!(K-1-D+1)!}} = \\ &= [n = m-1] = \frac{\sum_{n=0}^{D-1} (K-y) \binom{n}{K-y-1} \binom{D-1-n}{y}}{\frac{K}{D} \binom{D-1}{K-1}} = 1 \cdot \frac{D(K-y)}{K}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что после вынесения множителей, не зависящих от n , под знаком суммы остаются гипергеометрические вероятности с несколько измененными параметрами, и в силу нормировочного условия эта сумма тождественно равна единице.

Условные математические ожидания величин x_k имеют вид:

$$\mathbf{E}[x_k | \zeta_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} = y] = (1 - \tau) \cdot 0 + \tau \frac{D}{K} (K - y). \quad (2)$$

Из свойств условного математического ожидания (см., например, [17]) и (2) следует, что

$$\mathbf{E}[x_k] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[x_k | \zeta_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} = y]] = \tau \frac{D}{K} \mathbf{E}[K - \zeta_0 - x_1 - \dots - x_{k-1}]. \quad (3)$$

Введем обозначения $C_0 = \mathbf{E}[\zeta_0]$ и $\rho = \tau D / K$. Выписав соотношения (3) для нескольких первых k , легко получить общее выражение для математических ожиданий x_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[x_1] &= \rho [K - C_0], \\ \mathbf{E}[x_2] &= \rho [K - C_0 - \rho(K - C_0)] = \rho [K - C_0] (1 - \rho), \\ \mathbf{E}[x_3] &= \rho [K - C_0 - \rho(K - C_0) - \rho(K - C_0)(1 - \rho)] = \rho [K - C_0] (1 - \rho)^2, \\ \mathbf{E}[x_k] &= \rho [K - C_0] \left[1 - \rho \sum_{j=0}^{k-2} (1 - \rho)^j \right] = \rho [K - C_0] (1 - \rho)^{k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание количества коррупционеров до аудита имеет вид

$$\mathbf{E}[\zeta_0 + x_1 + \dots + x_T] = \zeta_0 + \rho (K - \zeta_0) \sum_{j=0}^{T-1} (1 - \rho)^j = \zeta_0 + (K - \zeta_0) \underbrace{\left(1 - (1 - \rho)^T \right)}_{=h(\rho, T)}. \quad (4)$$

Поскольку аудиторы с некоторой вероятностью вступают в сговор с коррупционерами, то количество S тех, к кому действительно будут применены санкции, само является случайной величиной, имеющей биномиальное распределение, для которого Q — число повторных испытаний, а $p(\eta)$ — вероятность успеха в каждом испытании. Эта случайная величина не зависит x_k . Тогда условное распределение z относительно S и $\zeta_0 + x_1 + \dots + x_T$ также является гипергеометрическим:

$$\mathbf{P}(z = m | \zeta_0 + x_1 + \dots + x_T = y, S = s) = \frac{\binom{m}{y} \binom{s-m}{K-y}}{\binom{s}{K}}, \quad m = 0, 1, \dots, s.$$

Полученные соотношения после перехода к удельным величинам $c_n = E[\zeta_n] / K$ приводят к

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{E[\zeta_0 + x_1 + \dots + x_T] - E[z]}{K} = \frac{E[\zeta_0 + x_1 + \dots + x_T]}{K} \left(1 - \frac{E[S]}{K} \right) = \\ &= \left(c_0 + (1 - c_0)h(\rho, T) \right) \left(1 - \frac{p(\eta)Q}{K} \right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что проведенные вычисления остаются в силе и для следующих T шагов. Таким образом, математическое ожидание доли коррупционеров в иерархии подчиняется простому линейному разностному уравнению (для удобства аргументы вспомогательных функций опущены)

$$c_n = (1 - h)(1 - \mu p)c_{n-1} + h(1 - \mu p), \quad \mu = Q / K. \quad (5)$$

Отметим, что временной индекс n здесь соответствует не отдельным шагам, а «эпохам», состоящим из T последовательных шагов, за которыми следует процедура аудита.

Решение уравнения (5) с естественным начальным условием $c_0 = 0$ имеет вид

$$c_n = h(1 - \mu p) \frac{1 - (1 - h)^n (1 - \mu p)^n}{1 - (1 - h)(1 - \mu p)}.$$

Понятно, что это решение стремится к стационарному значению

$$c_* = \frac{h(1 - \mu p)}{1 - (1 - h)(1 - \mu p)}, \quad (6)$$

определяющему установившийся уровень коррупции, характерный для данной системы. Выражение в правой части (6) зависит от T и трех безразмерных параметров ρ , μ и η . На рис. 1 показаны примеры зависимостей этого стационарного решения от параметров. Установившийся уровень коррупции монотонно возрастает по T и ρ и монотонно убывает по η и μ , что вполне ожидаемо.

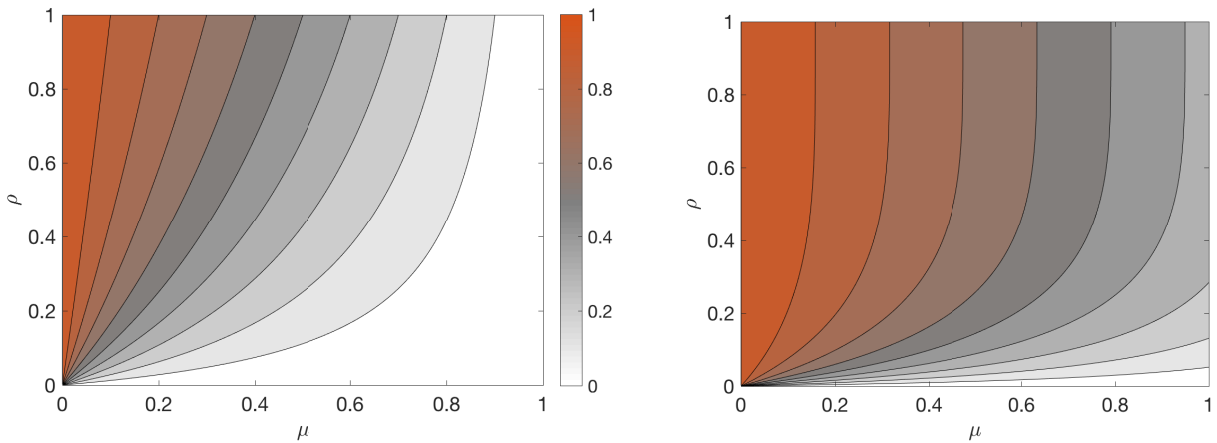


Рис. 1. Зависимости установившегося уровня коррупции (ρ) от ρ и μ при $\eta = 100$ (слева) и $\eta = 0.5$ (справа), $T = 1$

С точки зрения противодействия коррупции целью принципала является достижение наименьшего возможного установившегося уровня коррупции. Понятно, что тривиальным решением здесь будет проводить аудит максимально часто и с наибольшим количеством аудиторов, гарантировав им при этом максимальное вознаграждение (т.е. выбрать наибольшие допустимые значения μ и η и наименьшее T). При этом, разумеется, издержки принципала, связанные с выплатой легального вознаграждения аудиторам, также будут максимальными. В связи с этим интересно рассмотреть оптимальные параметры аудита при ограничении на совокупный бюджет, который принципал может потратить.

Будем рассматривать экстремальную задачу

$$c_*(T, \mu, \eta) \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$\mu\eta = \beta T, \quad \mu \in (0, M], \quad T \in \{1, 2, \dots, T_{\max}\}, \quad (8)$$

считая ρ и β фиксированными. Ограничение (8) выражает связь между параметрами аудита: например, увеличить количество аудиторов можно, либо уменьшив частоту самой процедуры аудита, либо сократив вознаграждение аудиторов; но оба эти действия приведут к некоторому увеличению уровня коррупции. Поскольку ограничение (8) задано в виде равенства, один из управляющих параметров можно выразить через оставшиеся два. Это позволяет свести задачу на условный экстремум к поиску минимума скалярной функции двух аргументов $f(T, \mu) = c_*(T, \mu, \beta T / \mu)$ в ограниченной области $(0, M] \times \{1, 2, \dots, T_{\max}\}$. Несколько сечений поверхности $f(T, \mu)$ плоскостями $\mu = \text{const}$ при фиксированных значениях ρ и β приведены ниже.

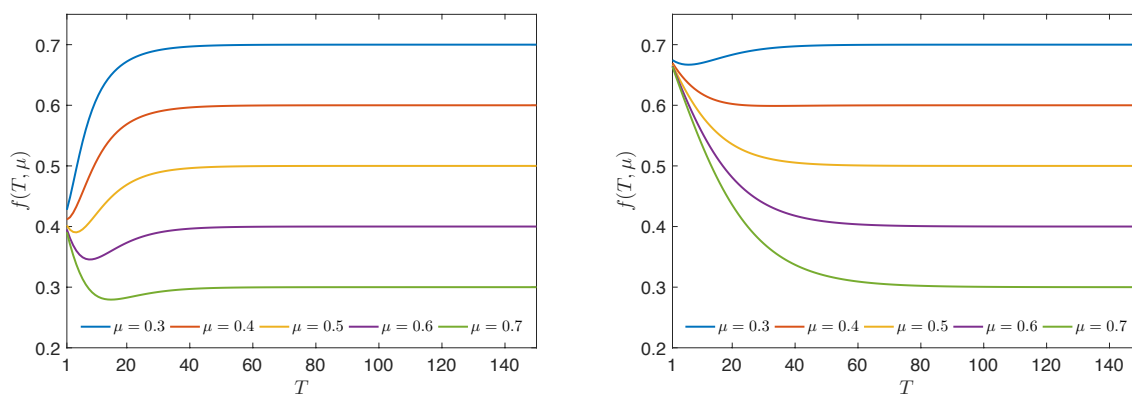


Рис. 2. Зависимости $f(T, \mu)$ для нескольких μ , $\rho = 0.1$, $\beta = 0.15$ (слева) и $\beta = 0.05$ (справа)

При фиксированном μ можно выделить три характерных ситуации. В первом случае функция f монотонно возрастает по T , так что ее минимальное значение достигается при $T_* = 1$ (см. кривые для $\mu = 0.3$ и $\mu = 0.4$ на рис. 2 слева). Здесь следует проводить аудит как можно чаще. Возможно также монотонное убывание f вплоть до достижения некоторого стационарного значения (см. рис. 2 справа). В этом случае можно указать такое T_* , что для любого $T \geq T_*$ достигается минимальное значение уровня коррупции. Это означает, что начиная с некоторого момента система становится нечувствительной к увеличению T , которое может привести к соразмерному увеличению вознаграждения аудиторов. Наиболее интересный режим реализуется в том случае, если функция f уже не будет монотонной по T , и существует единственное оптимальное значение T_* , позволяющее добиться наименьшего уровня коррупции в системе. Если отклониться от этого оптимального значения в большую сторону, это приведет к росту коррупции за счет того, что акторы получают больше возможностей для заключения коррупционных сделок. Если же уменьшить T по сравнению с T_* , это приведет к тому, что легальное вознаграждение аудиторов станет недостаточно большим и они начнут чаще вступать в сговор с коррупционерами вместо того, чтобы применять к ним санкции. На рис. 3 (слева) показано, какой из этих режимов реализуется в зависимости от соотношения параметров ρ и μ при фиксированном β . Изменение приводит к деформации границ, разделяющих разные режимы, но их относительное расположение остается неизменным.

Можно показать, что при фиксированном T целевая функция $f(T, \mu)$ монотонно убывает по μ (это хорошо видно на рис. 2), поэтому минимум в (7) всегда достигается на границе $\mu = M$. Таким образом, задача сводится к отысканию оптимальной величины T_* , доставляющей минимум $f(T, M)$.

Оптимальные значения были найдены простым перебором. Если оптимум неединственен, то в качестве T_* выбирается наименьшее из подходящих значений.

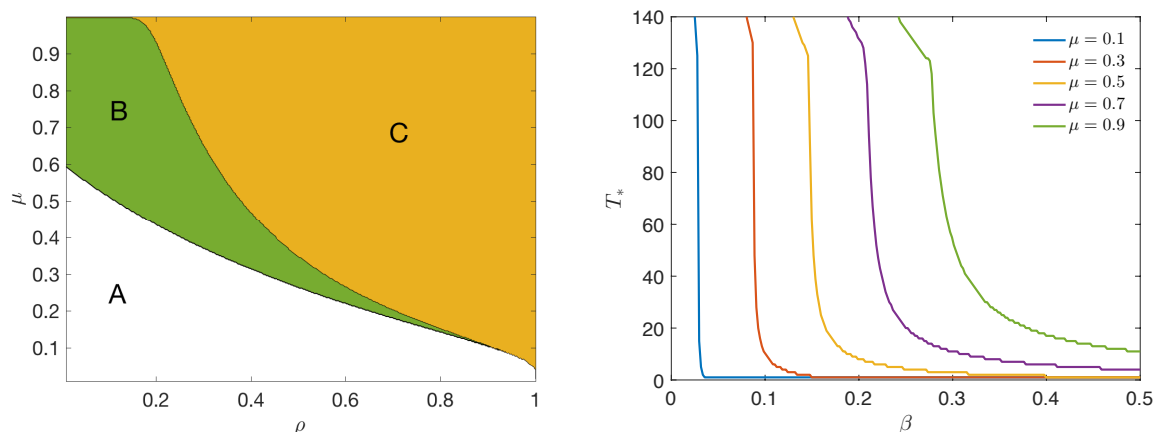


Рис. 3. Слева: Различные режимы поведения f в зависимости от сочетания ρ и μ при $\beta = 0.25$; А — монотонное возрастание f , В — режим с единственным нетривиальным минимумом, С — монотонное убывание f . Справа: зависимости T_* от β для нескольких μ и $\rho = 0.25$

Монотонное убывание T_* по β , которое видно на рис. 3 (справа), вполне закономерно: при фиксированных значениях остальных параметров увеличение бюджета позволяет принципалу проводить аудит чаще, сохраняя при этом такое вознаграждение для аудиторов, которое почти исключает возможность их сговора с коррупционерами. Зависимость T_* от ρ при фиксированном β также является монотонной: с ростом ρ оптимальная частота проведения аудита увеличивается, для того чтобы обеспечить все большее вознаграждение аудиторам, которые будут противостоять все более коррумпированным акторам.

Имитационная модель

Хотя построенная аналитическая модель и позволяет сделать ряд нетривиальных выводов, она является весьма схематичной и не учитывает некоторых существенных аспектов феномена институциональной коррупции. Например, понятно, что реальные системы являются стратифицированными, т.е. параметры акторов (к примеру, коррупционная толерантность) зависят от того, какое положение они занимают в иерархии. Также эта модель не позволяет описать возможную кооперацию между акторами при заключении сделки — на каждой итерации мы наудачу выбираем нескольких акторов, каждый из которых получает фиксированную ренту, причем выбор этих акторов никак не зависит от их собственной толерантности и предыстории.

Наконец, параметры стратегии аудита не меняются со временем и не зависят от состояния системы. Для того чтобы более корректно описать динамику коррупционного поведения, необходимо использовать более сложную имитационную модель, к описанию которой мы и переходим.

В имитационной модели бюрократической иерархии будет соответствовать граф без петель и кратных ребер. Вершины этого графа отождествляются с актерами, а ребра — с неформальными попарными связями между ними. Наличие ребра между вершинами будет означать, что i -й элемент, если он уже как-либо участвует в коррупционной сделке, может вовлечь в нее j -й элемент. При этом ребра графа не обязательно воспроизводят структуру связей супер- и субординации, поскольку сделка может распространяться в иерархии не только «вертикально», но и «горизонтально», между элементами на одном уровне. В общем случае граф может быть ориентированным, т.е. связи могут быть асимметричными. Кроме того, граф является взвешенным: все его ребра имеют целочисленные весовые коэффициенты.

Каждый актер в системе принадлежит определенной страте — от этого зависит размер коррупционных сделок, которые ему будут предлагать внешние агенты, а также склонность к кооперации. Стратификация отражает естественное для бюрократических иерархий разделение акторов на уровни по объему властных полномочий, авторитету и престижу.

Основным параметром, определяющим поведение элементов иерархии в рассматриваемой модели, является введенная ранее коррупционная толерантность, т.е. вероятность, с которой актер вступит в коррупционную сделку. Значение толерантности i -го актора будем обозначать как τ_i .

Как и в аналитической модели, будем считать, что на каждой итерации случайно выбранный актер получает предложение о сделке на сумму D от внешнего агента. При этом D является дискретной случайной величиной с равномерным распределением в диапазоне от $[(1-\gamma)D_0h^{S-s}]$ до $[(1+\gamma)D_0h^{S-s}]$. Здесь $[\cdot]$ означает целую часть, $0 \leq \gamma < 1$ — вещественный коэффициент, задающий масштаб вариации цен, D_0 — базовая цена сделки, $h > 1$ — вещественный параметр, характеризующий скорость увеличения цены по мере приближения к вершине иерархии, S — общее количество страт, а s — номер страты, которой принадлежит выбранный актер.

Если актер заключил сделку, он сразу присваивает себе одну единицу от объявленной цены. После этого он делает выбор между оппортунистическим или кооперативным поведением, т.е. принимает решение, присвоит ли он себе еще одну денежную единицу или будет пытаться присоединить к сделке другого актора. Будем считать, что этот выбор зависит лишь от того, к какой страте принадлежит актер: вероятность выбора кооперативной стратегии принята равной $(s-\varepsilon)/S$, где s — номер страты актора, принимающего решение, $\varepsilon \geq 0$ — вещественный параметр, определяющий некоторую

неустрашимую «жадность». Из этого соотношения следует, что акторы из высших страт с большей вероятностью оставляют большую часть сделки себе, в то время как акторы низших страт, напротив, вынуждены искать партнеров внутри иерархии. Разумеется, можно предложить и другие, более сложные, функциональные зависимости этой вероятности от параметров модели.

Выбор актора, присоединяемого к сделке, осуществляется случайным образом на основе текущих значений толерантности и весовых коэффициентов ребер: вероятность того, что i -й актор заключит соглашение с j -м, равна

$$\frac{w_{ij} \tau_j}{\sum_{k=1}^K w_{ik} \tau_k}. \quad (9)$$

Здесь K — количество элементов в иерархии, w_{ij} — элементы матрицы смежности, которые равны весу ребра (v_i, v_j) , для несмежных вершин $w_{ij} = 0$. После этого j -й актор присваивает себе одну из оставшихся денежных единиц и получает право распоряжаться дальнейшим продвижением сделки по тем же самым правилам.

Продвижение сделки продолжается до тех пор, пока вся сумма не будет распределена, причем актор, однажды участвовавший в сделке, не может быть повторно присоединен к ней. Не исключена ситуация, когда некоторый актор, выбрав кооперативную стратегию, не сможет никого присоединить к сделке, поскольку все связанные с ним элементы уже участвовали в ней. В таком случае будем считать, что все оставшиеся денежные единицы присваивает себе элемент, инициировавший сделку.

Весовые коэффициенты ребер, которые соединяют участвовавших в сделке акторов, увеличиваются на единицу. Такой механизм «поощрения» приводит к укреплению связей между элементами, которые участвовали в одной сделке, и формированию в иерархии устойчивых сообществ коррупционеров. Этот эффект объясняется тем, что в (9) начинают доминировать слагаемые с наибольшими w_{ij} , так что акторы будут с большей вероятностью присоединять к сделке тех, кто раньше чаще участвовал с ними в одних и тех же сделках. В аналитической модели точные выражения для распределения весовых коэффициентов на каждом шаге удается получить лишь для графов с простейшими регулярными топологиями [18], которые нельзя считать адекватными реальному устройству бюрократических иерархий.

После того как распределение ренты закончено, принципал может применить санкции. Для этого на каждой T -й итерации проводится процедура аудита: случайным образом выбирается q акторов; каждый из них, кто участвовал хотя бы в одной коррупционной сделке, изгоняется из системы и заменяется новым. Этот новый актор имеет заданное или случайное значение

толерантности, а весовые коэффициенты всех ребер, инцидентных соответствующей вершине графа, становятся равными единице (т.е. все налаженные ранее каналы продвижения сделок разрываются). Топология связей при этом никак не меняется. Как и в аналитической модели, возможен сговор между коррупционером и аудитором, вероятность которого равна $e^{-W \lfloor n/T \rfloor / A}$, где W — законное вознаграждение аудитора, A — выявленный этим аудитором коррупционный доход, n — номер текущей итерации. Строгость санкций, т.е. величина q , определяется зависимостью

$$q = q_{\min} + U(c_{n-L}),$$

где U — неубывающая ступенчатая функция с единичными скачками в точках $i / (g + 1)$, $i = 0, 1, \dots, g$, $g = q_{\max} - q_{\min}$, c — уровень коррупции в системе, $L > 0$ — положительный целочисленный параметр. Под уровнем коррупции, как и прежде, мы понимаем долю коррупционеров от общего числа акторов в системе. При $n < L$ будем считать, что $q = 0$. Такая зависимость реализует механизм обратной связи: чем более коррумпированна система, тем более строгие санкции применяются в попытке снизить уровень коррупции. При этом мы считаем, что истинный уровень коррупции не наблюдаем в текущий момент времени и становится известен лишь с некоторым опозданием в L итераций.

После того как стратегия санкций выбрана, легальное вознаграждение аудиторов может быть выражено через общий бюджет антикоррупционной кампании B следующим образом:

$$W = \frac{B}{q_{\max} \lfloor N / T \rfloor},$$

где N — общее количество итераций, в течение которых изучается система.

Всюду далее, если не оговорено обратное, будем рассматривать следующие значения параметров: $D_0 = 5$, $h = 2$, $\varepsilon = 0.8$, $\gamma = 0.2$, $T = 7$, $L = 500$, $q_{\min} = 0$, $q_{\max} = 4$. Эволюцию систему будем рассматривать на протяжении 10000 итераций и усреднять по 60 независимым экспериментам. В качестве адекватной модели неформальных связей внутри бюрократической иерархии были выбраны DWS графы [19].

Эволюция уровня коррупции в модели развивается следующим образом. В начале, когда строгость санкций равна нулю, уровень коррупции быстро увеличивается. По прошествии L отсчетов принципал начинает фиксировать увеличение c и соразмерно ужесточает санкции, поэтому через некоторое время уровень коррупции достигает локального максимума и начинает снижаться; это снижение, в свою очередь, через L отсчетов приведет уже к ослаблению санкций (хотя q уже не будет равно нулю, как при $n < L$), что вызовет рост уровня коррупции. Чередование этих режимов со временем

становится все менее заметным, устанавливаясь на некотором равновесном уровне. Установившееся значение уровня коррупции для стратегии с обратной связью зависит от множества параметров. Как и следовало ожидать, наибольшее влияние оказывает выбор q_{\min} , q_{\max} и T . При увеличении первых двух установившийся уровень коррупции монотонно убывает, а при увеличении T — напротив, монотонно возрастает. Эти зависимости нелинейны: отклик системы на изменение параметров сокращается с их увеличением, и их влияние становится все менее заметным. Установившийся уровень коррупции также линейно растет при увеличении значений D_0 и h . Параметры γ и ε очень слабо влияют на финальный уровень коррупции (наблюдавшиеся изменения не превосходили 5%). Значение L никак не влияет на установившийся уровень коррупции, но определяет скорость достижения этого уровня: чем меньше запаздывание, тем быстрее происходит установление.

Впрочем, такие затухающие колебания наблюдаются не всегда: если q_{\max} слишком мало или T слишком велико, то уровень коррупции снижается монотонно (после начального роста). Кроме того, динамика зависит также от выбранного значения B . На рис. 4 показаны несколько зависимостей уровня коррупции от времени при разных B . Хорошо видно, что при небольшом бюджете, когда вероятность сговора аудиторов и коррупционеров высока, c растет монотонно, устанавливаясь на некотором равновесном значении. Режим с затухающими колебаниями, описанный выше, начинает наблюдаться лишь при увеличении B .

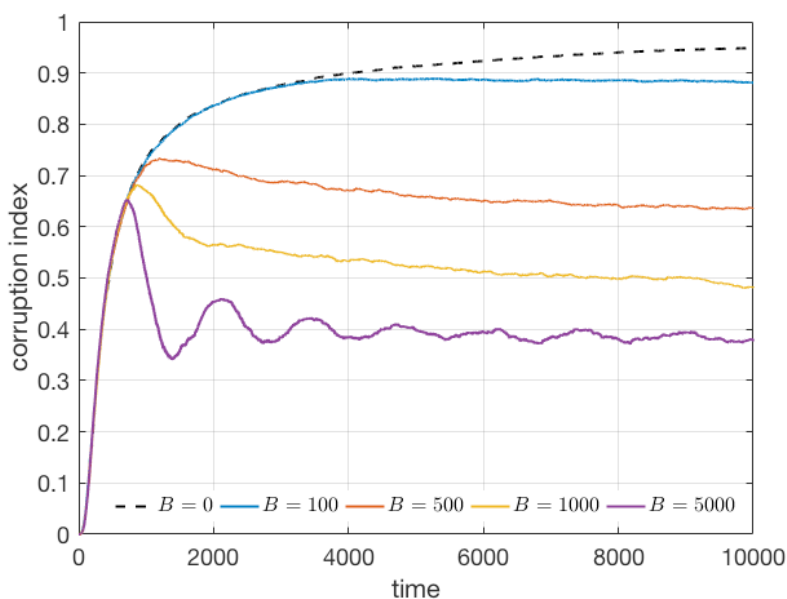


Рис. 4. Динамика уровня коррупции при различных значениях B

Интересно сравнить установившийся уровень коррупции в вычислительном эксперименте с величиной (6), предсказываемой аналитической моделью. Для удобства ограничимся рассмотрением случая $B = +\infty$ (т.е. $p \equiv 1$), когда сговор между аудиторами и коррупционерами невозможен. Значения параметров имитационной модели выбраны следующим образом: $K = 136$, $D_0 = 5$, $h = 1$, $\varepsilon = 0$, $\gamma = 0$. При таком выборе все сделки имеют одну и ту же цену, хотя стратификация все же имеет некоторое значение, поскольку от нее по-прежнему зависит выбор между кооперативной и эгоистичной стратегиями поведения. Для более корректного сравнения будем считать, что строгость санкций постоянна, $q = 3$. Коррупционная толерантность акторов также фиксированна и равна 0.5. Подстановка в (6) дает достаточно высокое значение установившегося уровня коррупции $c_* = 0.8437$. Вычислительный эксперимент, однако, показывает вдвое меньшее значение — 0.42. Если же положить $h = 2$, $\varepsilon = 0.8$, $\gamma = 0.2$ и считать, что значения толерантности распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$, то разница становится еще более заметной — в эксперименте уровень коррупции устанавливается на значении 0.237.

Можно указать несколько причин столь существенного изменения уровня коррупции. В аналитической модели акторы участвуют в коррупционных сделках наудачу, никак не учитывая топологию связей внутри системы. Кроме того, все коррупционеры равноправны, т.к. получают одинаковые доли от участия в сделке. В имитационной же модели за счет стратификации акторы в верхних стратах с большей вероятностью накапливают значительные коррупционные доходы (поскольку они чаще выбирают эгоистичную стратегию поведения). Механизм поощрения связей также вызывает перераспределение потоков ренты от коррупционных сделок в пользу тех акторов, кто в прошлом уже активно участвовал в них. Это нарушение однородности приводит к тому, что общее количество коррупционеров уменьшается по сравнению с предсказанием аналитической модели.

Еще одна причина отличия результатов имитационной модели заключается в том, что в ней существует связь между значениями толерантности (если считать, что они могут принимать различные значения) и механизмом санкций. Санкции в рассматриваемой модели можно рассматривать как своеобразный «естественный отбор»: под их действием с наибольшей вероятностью систему покидают акторы с высокой коррупционной толерантностью, поэтому эффективное значение толерантности начинает снижаться, что, в свою очередь, приводит к уменьшению уровня коррупции. На рис. 5 (слева) хорошо видна эта деформация распределения акторов по значениям толерантности при $B = +\infty$; в качестве начального распределения было выбрано равномерное на единичном отрезке. Соотношение (6) не учитывает этот механизм изменения толерантности, что также приводит к расхождению между результатами эксперимента и аналитическими построениями.

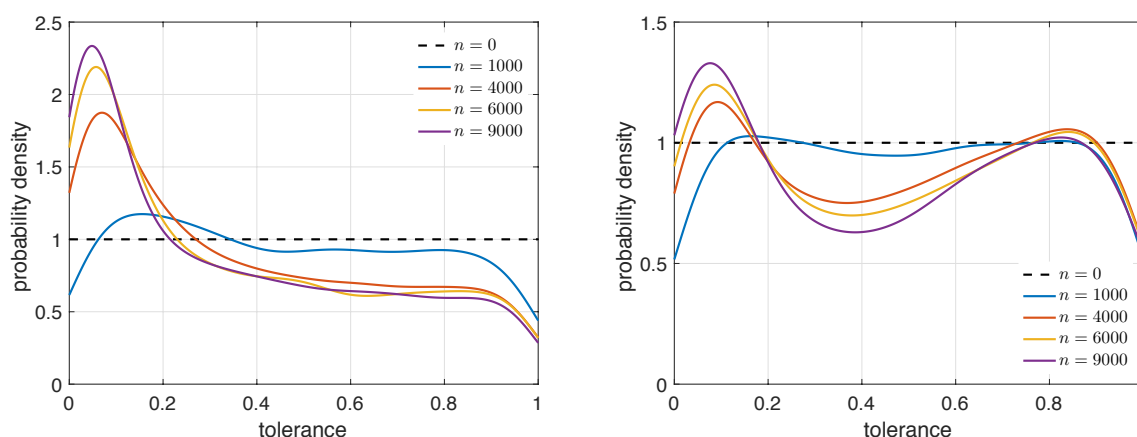


Рис. 5. Эволюция плотностей распределения значений толерантности: $B = +\infty$ (слева) и $B = 1000$ (справа)

Изменение распределения толерантности становится еще более интересным при конечных B , когда становится возможным сговор аудиторов с коррупционерами. Для акторов с высокой толерантностью вероятность «выживания» теперь увеличится, поскольку они успеют накопить большой коррупционный доход, позволяющий им подкупить аудитора. В результате сильнее всего санкции скажутся на акторах с промежуточными значениями толерантности: с одной стороны, они недостаточно богаты, чтобы вовлечь аудиторов в сговор, но все же достаточно часто участвуют в коррупционных сделках, чтобы быть изгнанными из иерархии. Таким образом, исходное равномерное распределение в этом случае станет бимодальным (см. справа на рис. 5). Дрейф вероятности в сторону больших значений толерантности становится более заметным при уменьшении B , но лишь до определенного предела, поскольку при слишком маленьких бюджетах санкции фактически перестают действовать и акторы вообще не покидают систему.

Еще одним важным преимуществом имитационной модели является возможность описания процесса формирования, эволюции и гибели устойчивых сообществ коррупционеров (т.е. таких групп акторов, которые с высокой вероятностью участвуют в одних и тех же коррупционных сделках), которое недоступно для аналитической модели. Для выделения этих сообществ использовался алгоритм поиска компонент связности в модифицированном графе иерархии, из которого были исключены все ребра, вес которых не превосходил определенного порогового значения. Серия вычислительных экспериментов позволила выявить характерные сценарии эволюции этих сообществ и изучить их чувствительность по отношению к санкциям. Подробное изложение результатов, связанных с кластеризацией в представленной модели, можно найти в [20].

Заключение

Предложенная аналитическая модель коррупции описывает эволюцию бюрократических иерархий с помощью нескольких рандомизированных механизмов: механизма заключения сделок с внешними агентами и механизма санкций, оставляющего возможность сговора между коррупционерами и аудиторами. Полученное решение подтверждает интуитивные представления об институциональной коррупции: если задано ограничение на суммарный бюджет антикоррупционной кампании, то существует оптимальный набор параметров, позволяющих достигнуть наименьшего уровня коррупции. Наиболее интересное наблюдение заключается в том, что при определенных условиях очевидное на первый взгляд решение — проводить аудит как можно чаще — может привести лишь к увеличению коррупции. В то же время необходимо отметить, что в реальных бюрократических иерархиях этот эффект вряд ли наблюдаем, поскольку для этого требуется, чтобы аудиту подвергалась существенная часть акторов системы, а это трудно выполнимая задача в повседневной практике.

Наряду с аналитическими построениями также была предложена имитационная модель, позволяющая более реалистично и подробно описать процессы продвижения коррупционных сделок внутри иерархии и механизм аудита. Оказалось, что аналитическая модель существенно завышает значение установившегося уровня коррупции, поскольку не учитывает эффекты, связанные с неоднородностью системы, и, что более важно, сложную связь между коррупционной толерантностью акторов и применением санкций. Наказание за участие в коррупционных сделках приводит к «естественному отбору», устраняя из системы акторов с определенными характеристиками. Если вероятность сговора между коррупционерами и аудиторами пренебрежимо мала, то под влиянием санкций всегда происходит смещение в сторону меньших значений толерантности (т.е. в системе остаются акторы, которые реже соглашаются на участие в коррупционных сделках). В противном случае «наименее приспособленными» оказываются акторы со средними значениями толерантности: они недостаточно богаты и влиятельны, чтобы подкупить аудиторов, но в то же время слишком часто участвовали в коррупционных сделках, чтобы избежать наказания.

Рассматриваемые модели были созданы для описания некоторых особенностей институциональной коррупции, однако намеченные здесь подходы могут оказаться полезными и при изучении других процессов коллективного поведения.

Библиографический список

- [1] Friedrich C. J. The pathology of politics: violence, betrayal, corruption, secrecy, and propaganda. New York: Harper & Row, 1972.
- [2] Political corruption: concepts & contexts / Ed. by M. Jonston, A. J. Heidenheimer. New Brunswick: Transaction Publisher, 2007.
- [3] Нисневич Ю. А. Коррупция: инструментальная концептуализация // Социологические исследования. 2016. Т. 5, No. 5. С. 61-68.
- [4] Быстрова А. С., Сильвестрос М. В. Феномен коррупции: некоторые исследовательские подходы // Журнал социологии и социальной антропологии. 2000. Т. 3, No 1. С. 83-101.
- [5] Роуз-Аккерман С. Коррупция и государство. Причины, следствия, реформы. М.: Логос, 2003. 356 с.
- [6] Левин М. И., Цирик М. Л. Математические модели коррупции // Экономика и математические методы. 1998. Т. 34, No 4. С. 34-55.
- [7] Выборнов Р. А. Модели и методы управления организационными структурами с коррупционным поведением участников. М.: ИПУ РАН, 2006. 110 с.
- [8] Михайлов А. П. Моделирование системы «власть—общество». М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 144 с.
- [9] Михайлов А. П., Ланкин Д. Ф. Моделирование оптимальных стратегий ограничения коррупции // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, No 12. С. 115-124.
- [10] Михайлов А. П., Горбатиков Е. А. Анализ антикоррупционных стратегий в модифицированной модели «власть—общество» // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, No. 5. С. 47-68.
- [11] Rinaldi S., Feichtinger G., Wirl F. Corruption dynamics in democratic societies // Complexity. 1998. Vol. 3, no. 5. P. 53-64.
- [12] Wirl F. Socio-economic typologies of bureaucratic corruption and implications // Journal of Evolutionary Economics. 1998. Vol. 8, no. 2. P. 199-220.
- [13] Петров А. П., Степанцов М. Е. Моделирование трехуровневой системы «власть—общество» на основе клеточных автоматов // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, No. 3. С. 119-132.
- [14] Johnson N. L., Kotz S. Urn models and their application. New-York: John Wiley & Sons, 1997. 402 p.
- [15] Mahmoud H. M. Polya urn models. London: CRC Press, 2009. 290 p.
- [16] Johnson N. L., Kemp A. W., Kotz S. Univariate discrete distributions. New-York: John Wiley & Sons, 2005. 646 p.
- [17] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: МЦНМО, 2007. 968 с.
- [18] Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Аналитическая модель коррупционного поведения // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. No 44. 15 с.

- [19] Dodds P. S., Watts D. J., Sabel C. F. Information exchange and the robustness of organizational networks // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2003. Vol. 100, no. 21. P. 12516-12521.
- [20] Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Влияние структуры иерархии на коррупционное поведение ее элементов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. No 144. 24 с.