



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колмычков В.В., Мажорова О.С.

Исследование конвективных
структур в
небуссинесковской жидкости
вблизи порога устойчивости.
Часть первая — анализ
упрощенных моделей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть первая — анализ упрощенных моделей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 64. 31 с. doi:[10.20948/prepr-2018-64](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-64)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-64>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

В.В. Колмычков, О.С. Мажорова

**Исследование конвективных структур
в небуссинесковской жидкости вблизи порога
устойчивости. Часть первая — анализ
упрощенных моделей**

Москва — 2018

Колмычков В.В., Мажорова О.С.

Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть первая — анализ упрощенных моделей

Работа посвящена исследованию процесса возникновения и развития неустойчивости Рэлея–Бенара в горизонтальном, несимметричном по вертикали слое жидкости. Нарушение симметрии обусловлено внутренним подогревом или зависимостью коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры и вертикальной координаты. В первой части работы на основе амплитудных уравнений и методом разложения по малому параметру изучается влияние числа Прандтля на процесс формирования устойчивых конвективных структур. Полученные результаты используются во второй части работы для анализа результатов численного моделирования конвективной неустойчивости в асимметричном по вертикали слое вязкой несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: Конвекция Рэлея–Бенара, небуссинесковская жидкость, конвективная неустойчивость, амплитудные уравнения, метод разложения по малому параметру, устойчивые планформы, валы, шестиугольные ячейки, число Прандтля.

Viatcheslav Victorovich Kolmychkov, Olga Semenovna Mazhorova

Investigation of convective structures near the stability threshold in non-Boussinesq fluid. Part one — analysis of simple models

The paper investigates stable convective structures in vertically asymmetric horizontal fluid layer. The asymmetry is caused by internal heat generation, variable thermal diffusion and variable kinematic viscosity (temperature and vertical coordinate dependence is considered). The first part of the paper provides analysis of Prandtl number effect on the planform selection in scope of amplitude equations and perturbation method. The second part of the paper deals with a comparison of theoretical data to results of 3D numerical simulation of convective instability in finite layer of non-Boussinesq fluid.

Key words: Rayleigh–Bénard convection, convective stability, non-Boussinesq fluid, amplitude equations, perturbation method, rolls, hexagons, Prandtl number

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00436).

1. Введение

Проблема прогнозирования структуры конвективного течения в жидкости с неоднородными по пространству термодинамическими параметрами (небуссинесковская жидкость) является ключевой проблемой нелинейной теории устойчивости. Современный уровень развития этой теории не позволяет дать чёткого ответа на многие важные вопросы, связанные с поведением вторичных течений. Поэтому численное моделирование процессов возникновения и развития конвекции является одним из основных способов исследования указанной проблемы. Однако прямое численное моделирование гидродинамической неустойчивости представляет собой сложную самостоятельную задачу. Трудности здесь связаны не только с необходимостью разработки надёжных методов решения трёхмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, но и с анализом достоверности результатов математического моделирования, например, с определением устойчивости полученной в вычислительном эксперименте формы движения. Выводы об устойчивости наблюдаемых в расчётах форм движения должны сопоставляться, там где это возможно, с результатами теоретических исследований, дополняя и уточняя друг друга. Данная работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена систематизации сведений, полученных на основе амплитудных уравнений и методом разложения по малому параметру [1],[2]. Во второй части описываются результаты прямого численного моделирования конвективной неустойчивости в небуссинесковской жидкости.

2. Постановка задачи

Расширим приближение Обербека–Буссинеска [3] на случай зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры и вертикальной координаты. Уравнения термогравитационной конвекции ньютоновской жидкости в безразмерной форме запишем следующим образом:

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \operatorname{div}[\tau] + \frac{\operatorname{Ra}}{\operatorname{Pr}} T \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\tau = \nu(\operatorname{grad} \mathbf{V} + \operatorname{grad}^T \mathbf{V}),$$

$$\tau_{nm} = \nu(\partial V_r / \partial s + \partial V_s / \partial r), \quad r, s = x, y, z,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0,$$

$$\operatorname{Pr} [\partial_t T + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T] = \operatorname{div}(\chi \operatorname{grad} T) + q. \quad (2)$$

Здесь $\partial_\xi \equiv \partial/\partial\xi$, t – время, x, y, z – декартовы координаты, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, $p(t, x, y, z)$ – давление, τ_{ij} – тензор вязких напряжений, $T(t, x, y, z)$ – температура, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$. Безразмерная температура вводится по формуле $T = (T^d - T_{top}^d)/\delta T^d$, T^d – размерная температура, $\delta T^d = T_{bot}^d - T_{top}^d$ – разность температур на верхней и нижней границах в отсутствие движения. Коэффициенты кинематической вязкости ν^d и температуропроводности χ^d нормируем на их значения на верхней границе: $\nu_0^d = \nu^d(1, T_{top}^d)$ и $\chi_0^d = \chi^d(1, T_{top}^d)$; безразмерные значения коэффициентов $\nu(z, T) = \nu^d(z, T^d)/\nu_0^d$ и $\chi = \chi^d(z, T^d)/\chi_0^d$. В качестве масштаба измерения длины выбран вертикальный размер области H , масштаб времени – $t_\nu = H^2/\nu_0^d$, давления – $\rho_0 \nu_0^d \chi_0^d / H^2$.

В уравнения (1)-(2) входят следующие безразмерные параметры: число Рэлея $Ra = \alpha g \delta T^d H^3 / (\nu_0^d \chi_0^d)$, где α – коэффициент теплового расширения, g – модуль ускорения свободного падения; число Прандтля $Pr = \nu_0^d / \chi_0^d$ и мощность внутренних источников тепла $q = Qt_\nu / \delta T^d$, Q – размерная мощность источников тепла.

Задача решается в прямоугольной области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, 1]$. Конкретный вид граничных условий для скорости и температуры приводится ниже, для каждого из рассматриваемых вариантов набора параметров ν, χ, q .

В начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в состоянии покоя и имеет соответствующее равновесное распределение температуры.

3. Амплитудные уравнения

Рассмотрим систему уравнений (1)-(2) в бесконечном горизонтальном слое, и формально запишем её в виде:

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} = F_j(\mathbf{S}), j \in \{1, 2, 3, 4\}, \mathbf{S} = \{V_x, V_y, V_z, T\}. \quad (3)$$

Пусть система уравнений (3) имеет стационарное решение \mathbf{S}^0 . Линеаризуем (3) в окрестности \mathbf{S}^0 . У полученной системы линейных уравнений существуют частные решения, так называемые “нормальные моды” [3, 4, 5]:

$$\exp[\lambda_{\mathbf{k}} t] \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) \mathbf{h}(\mathbf{k}, \lambda_{\mathbf{k}}, z).$$

Здесь $\lambda_{\mathbf{k}}$ – коэффициент затухания, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ – двумерный волновой вектор, $\mathbf{r} = (x, y)$, α – сдвиг фазы, функция $\mathbf{h}(\mathbf{k}, \lambda_{\mathbf{k}}, z)$ определяет вертикальную структуру течения и зависит от краевых условий на горизонтальных границах. Для удобства перепишем $\sin(\mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$ в виде:

$$\sin(\mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = A \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}] + A^* \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}], \quad i^2 = -1. \quad (4)$$

В силу линейности задачи её решением является также произвольная линейная комбинация частных решений (4):

$$\sum_{\mathbf{k} \in P} A_{\mathbf{k}} \exp[\lambda_{\mathbf{k}} t] \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}] h(\mathbf{k}, \lambda_{\mathbf{k}}, z), \quad A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}}^*, \quad \lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{-\mathbf{k}}^*, \quad \mathbf{k}, -\mathbf{k} \in P, \quad (5)$$

где множество P содержит произвольное число волновых векторов \mathbf{k} .

Пространственно–периодическая структура такого решения определяется функцией двух переменных (x, y) , так называемой “функцией планформы”. В процессе эволюции течения в планформе не могут появиться слагаемые с новыми волновыми векторами. Если же одна из амплитуд затухает ($\lambda_{\mathbf{k}} < 0$), с течением времени она станет достаточно малой, и это можно интерпретировать как изменение планформы на более простую.

Отдельно рассмотрим роль знака амплитудных коэффициентов. Очевидно, что в линейной задаче наборы амплитуд $A_{\mathbf{k}}$ и $-A_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in P$, могут быть использованы при построении линейной комбинации частных решений. Получающиеся при этом течения будут отличаться лишь знаком величины отклонения от S^0 . Пусть линеаризация происходит в окрестности неподвижного состояния $V_0=0$, тогда смена знака амплитудных коэффициентов приводит к изменению направления вектора скорости. В частности, это означает, что сразу два вектора \mathbf{V} и $-\mathbf{V}$, с соответствующими им полями температур, удовлетворяют уравнению переноса импульса. (Легко убедиться, что для линеаризованного уравнения переноса импульса это действительно так). Таким образом, на этапе рассмотрения линеаризованной задачи, решение обладает свойством “вертикальной симметрии”, что, вообще говоря, не справедливо для нелинейной системы уравнений.

Пусть решение нелинейной системы уравнений (1)-(2) также является периодическим в плоскости (x, y) , и его планформу в плоскости (x, y) можно представить в виде [1],[2],[3]:

$$\sum_{\mathbf{k} \in P} A_{\mathbf{k}}(t) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}]. \quad (6)$$

Предположим также, что амплитуды $A_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют эволюционным уравнениям вида:

$$\frac{\partial A_{\mathbf{k}}}{\partial t} = f_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}); \quad \mathbf{A} = \{\dots, A_{\mathbf{k}'}, \dots\}, \quad \mathbf{k}, \mathbf{k}' \in P,$$

где $f_{\mathbf{k}}$ – достаточно гладкие функции. Очевидно, что в отсутствие возмущений ($A_{\mathbf{k}}=0, \mathbf{k} \in P$) система должна оставаться в состоянии покоя, т.е. $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})=0$. Разло-

жим $f_{\mathbf{k}}$ в окрестности нуля в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial A_{\mathbf{k}'}} \Big|_0 A_{\mathbf{k}'} + \frac{1}{2!} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \frac{\partial^2 f_{\mathbf{k}}}{\partial A_{\mathbf{k}'} \partial A_{\mathbf{k}''}} \Big|_0 A_{\mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}''} + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \frac{\partial^3 f_{\mathbf{k}}}{\partial A_{\mathbf{k}'} \partial A_{\mathbf{k}''} \partial A_{\mathbf{k}'''}} \Big|_0 A_{\mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}''} A_{\mathbf{k}'''} + \dots, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''' \in P. \end{aligned} \quad (7)$$

Ограничиваясь в разложении (7) конечным числом членов, можно построить приближённую систему уравнений для амплитуд и использовать её для моделирования эволюции течений с планформами, содержащими различное число волновых векторов. При этом естественно потребовать, чтобы решения амплитудной задачи, так же как и решения исходной задачи (1)-(2), были инвариантны относительно сдвига на произвольный вектор, поворотов вокруг вертикальной оси и зеркального отражения относительно любой вертикальной плоскости [2]. Для систем, описываемых конечным числом волновых векторов $\mathbf{k} \in \mathbf{P}$, имеет смысл рассматривать только преобразования, относительно которых множество \mathbf{P} инвариантно. Таким образом, допустимые симметрии зависят от выбора формирующих планформу волновых векторов. Например, поворот волнового вектора, вообще говоря, выводит его из множества \mathbf{P} , и об инвариантности планформы относительно поворотов можно говорить лишь при специальном выборе векторов \mathbf{k} , образующих множество \mathbf{P} и углов поворота. Зеркальная симметрия требует согласования плоскости отражения и множества волновых векторов. Вместе с тем, относительно сдвигов инвариантен любой набор волновых векторов. Соображения симметрии будут использоваться в дальнейшем при выводе амплитудных уравнений.

3.1. Количество членов в разложении

Рассмотрим сначала простейший случай, когда система уравнений (7) содержит только одно уравнение для действительной амплитуды A . Тогда в линейном приближении её поведение вблизи нулевого стационарного состояния описывается уравнением

$$\dot{A} = \sigma A, \quad \sigma \neq 0. \quad (8)$$

Здесь σ является управляющим параметром. При $\sigma < 0$ состояние покоя $A = A_0 = 0$ устойчиво, при $\sigma > 0$ – неустойчиво и уравнение (8) описывает бесконечный рост или убывание амплитуды возмущения. Значение $\sigma = 0$ определяет порог устойчивости состояния покоя. Рисунки 1 и 2 иллюстрируют поведение ам-

плитуды возмущений стационарного состояния при различных значениях управляющего параметра σ . Стрелки показывают направление изменения $A(t)$ с ростом t .

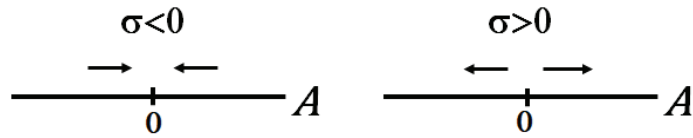


Рис. 1. Фазовые портреты решений уравнения $\dot{A} = \sigma A$.

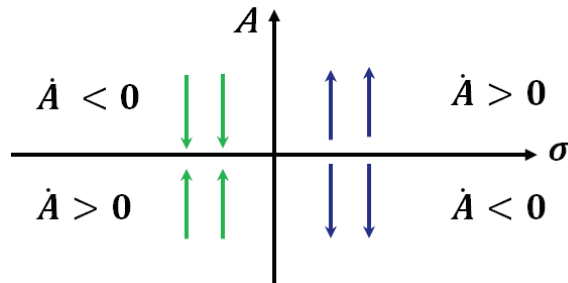


Рис. 2. Зависимость устойчивости стационарного состояния уравнения $\dot{A} = \sigma A$ от управляющего параметра.

Остановить бесконечный рост решения при $\sigma > 0$ можно, добавив в уравнение (8) члены, содержащие степенную нелинейность. Потребуем, чтобы у получившегося уравнения ни при каких значениях σ не было бесконечно возрастающих по модулю решений и чтобы при $\sigma > 0$ оно обладало по крайней мере одной устойчивой, отличной от нуля неподвижной точкой. Этим требованиям удаётся удовлетворить, если правую часть модельного амплитудного уравнения выбрать в виде многочлена третьей степени:

$$\dot{A} = \mathcal{P}(A) = \sigma A - \beta A^2 + \gamma A^3. \quad (9)$$

У многочлена $\mathcal{P}(A)$ должен быть действительный корень при $\sigma > 0$ и отрицательный коэффициент при старшей степени. Тогда стационарное состояние уравнения (9), отвечающее максимальному корню многочлена, будет притягивать точки, которые лежат на фазовой прямой правее этого корня; минимальный корень будет служить точкой притяжения для состояний, которые лежат левее его, и при любом σ решение будет ограничено.

Проанализируем теперь возможные стационарные решения уравнения (9). Пусть сначала $\beta = 0$, т.е.

$$\dot{A} = \sigma A + \gamma A^3, \quad \gamma < 0. \quad (10)$$

В этом случае при $\sigma < 0$ уравнение (10) имеет только нулевое стационарное решение и оно устойчиво. При $\sigma > 0$ у многочлена в правой части уравнения есть три корня. Это $A_0=0$, $A_1=\sqrt{-\frac{\sigma}{\gamma}}$ и $A_2=-\sqrt{-\frac{\sigma}{\gamma}}$. Состояние покоя A_0 неустойчиво, неподвижные точки A_1 и A_2 устойчивы. Фазовые портреты решений уравнения (10) приведены на рис. 3. Устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметра σ иллюстрирует также рис. 4.

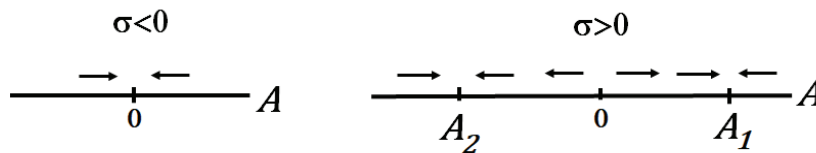


Рис. 3. Фазовые портреты решений уравнения $\dot{A} = \sigma A + \gamma A^3$.

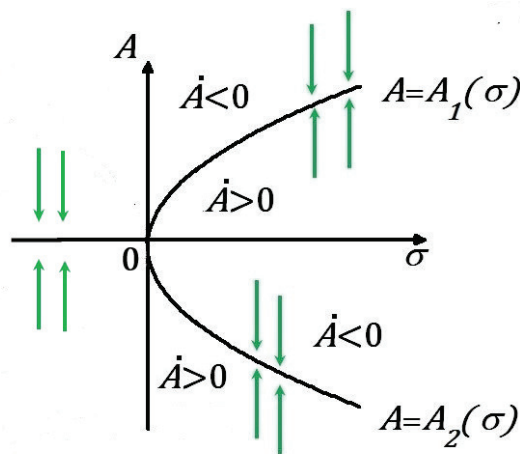


Рис. 4. Стационарные состояния уравнения $\dot{A} = \sigma A + \gamma A^3$ в зависимости от управляющего параметра σ . Стрелками показаны области возрастания и убывания амплитуды.

Пусть теперь в уравнении (9) $\beta < 0$ (случай $\beta > 0$ рассматривается аналогично). Тогда при $\sigma < \bar{\sigma} = \frac{\beta^2}{4\gamma} < 0$ это уравнение имеет единственное стационарное решение $A_0 = 0$. В области $\sigma \in (\bar{\sigma}, 0) \cup (0, \infty)$ существуют три неподвижные

точки: $A_0 = 0$, $A_1 = \frac{\beta}{2\gamma} + \sqrt{-\frac{\sigma}{\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma^2}}$ и $A_2 = \frac{\beta}{2\gamma} - \sqrt{-\frac{\sigma}{\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma^2}}$; при $\sigma = \bar{\sigma}$ – две: $A_0 = 0$ и $A_1 = A_2 = \frac{\beta}{2\gamma}$, при $\sigma = 0$ – тоже две: $A_0 = A_2 = 0$ и A_1 .

В области $\sigma < \bar{\sigma}$ единственный стационар $A_0 = 0$ устойчив. При $\bar{\sigma} < \sigma < 0$ состояние покоя сохраняет свою устойчивость, вместе с тем появляется ещё одно устойчивое состояние – $A_1(\sigma)$, стационар $A_2(\sigma)$ неустойчив. В области $\sigma > 0$ устойчивы неподвижные точки $A_1(\sigma)$ и $A_2(\sigma)$, а состояние покоя – неустойчиво. Фазовые портреты решений уравнения (9) и устойчивость стационарных состояний в зависимости от управляющего параметра представлены на рис. 5 и рис. 6.

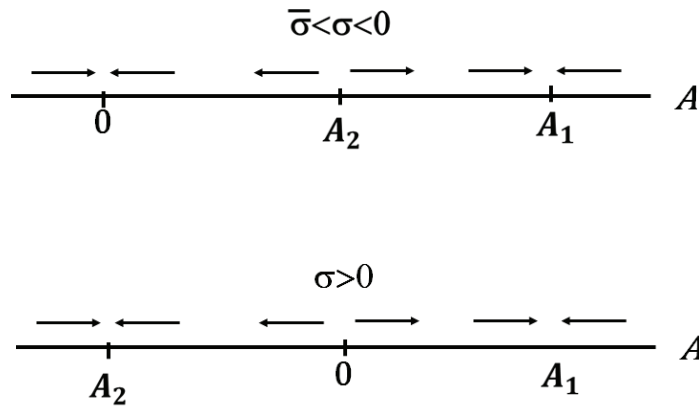


Рис. 5. Фазовые портреты решений уравнения $\dot{A} = \sigma A - \beta A^2 + \gamma A^3$.

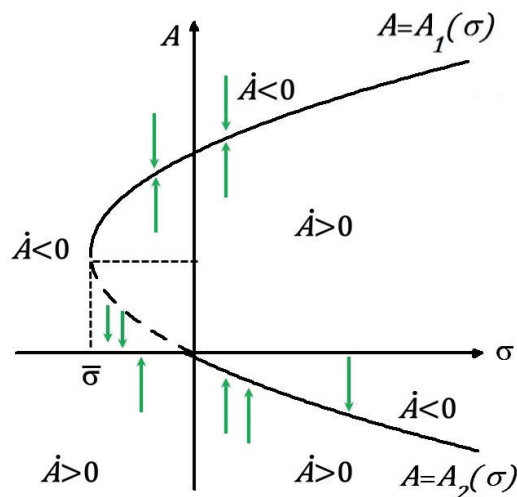


Рис. 6. Стационарные состояния уравнения $\dot{A} = \sigma A - \beta A^2 + \gamma A^3$, $\beta < 0$ в зависимости от управляющего параметра σ . Стрелками показаны области возрастания и убывания амплитуды.

Покажем, что модельное амплитудное уравнение (9) позволяет качественно описать важнейшие черты процесса развития конвективной неустойчивости Рэлея–Бенара: существование управляющего параметра σ – аналога числа Рэлея, критическое значение которого определяет устойчивость неподвижного состояния, наличие мягкого и жёсткого режимов возбуждения конвекции, возможность движения с конечной амплитудой при значениях управляющего параметра ниже линейного порога устойчивости [1],[3]. В самом деле, в линейном приближении стационарное решение уравнения (9) устойчиво при значениях управляющего параметра меньше критического $\sigma_{cr} = 0$. Мягкий режим возбуждения, т.е. переход от состояния покоя к устойчивому стационарному движению под действием бесконечно малых возмущений, реализуется в амплитудном уравнении при значениях $\sigma > 0$ (например, переход из состояния покоя в стационарное состояние A_1 или A_2 в уравнении (10)). Жёсткий режим возбуждения имеет место при $\beta \neq 0$ в области $\bar{\sigma} < \sigma < 0$. Здесь обмен устойчивостью между состоянием покоя A_0 и стационарным состоянием A_1 происходит под действием возмущения с амплитудой $A > A_2$, и движение с конечной амплитудой существует при значениях управляющего параметра σ , меньших критического.

Используем полученные результаты для изучения устойчивых стационарных решений амплитудных уравнений, отвечающих планформам с различным числом волновых векторов.

3.2. Бифуркация валов с одним волновым вектором

Пусть планформа течения описывается единственным волновым вектором \mathbf{k}_1 . Тогда представление (6) содержит только два слагаемых:

$$\phi(x, y) = A_1 \exp[i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}] + A_1^* \exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}].$$

Это планформа течения, которое представляет собой систему параллельных валов, оси которых лежат в плоскости (x, y) и ортогональны вектору \mathbf{k}_1 [1].

Запишем амплитудное уравнение для A_1 , ограничившись в разложении (7) членами до третьего порядка включительно.

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \mathcal{G}(\xi_{mn}, A_1, A_1^*), \quad 0 < m+n \leq 3, \\ \mathcal{G}(\xi_{mn}, A_1, A_1^*) &= \xi_{10} A_1 + \xi_{01} A_1^* + \xi_{20} A_1^2 + \xi_{11} A_1 A_1^* + \xi_{02} A_1^{*2} + \\ &+ \xi_{30} A_1^3 + \xi_{21} A_1^2 A_1^* + \xi_{12} A_1 A_1^{*2} + \xi_{03} A_1^{*3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Упростим уравнение (11), используя соображения симметрии. Выясним сначала, каким условиям должен удовлетворять многочлен $\mathcal{G}(\xi_{mn}, A_1, A_1^*)$, чтобы ре-

шение амплитудного уравнения (11) было инвариантно относительно любых сдвигов. Пусть коэффициенты некоторой планформы $\phi_0(\mathbf{r})$ являются решением уравнения (11), тогда и коэффициенты планформы $\phi_1 = \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ должны быть решениями этого уравнения.

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \tilde{A}_1 \exp[i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}] + \tilde{A}_1^* \exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}], \\ \tilde{A}_1 &= A_1 \exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_0].\end{aligned}\quad (12)$$

Непосредственной подстановкой \tilde{A}_1 в (11) нетрудно убедиться, что амплитуда (12) удовлетворяет уравнению (11) при любых значениях \mathbf{r}_0 , если результат подстановки пропорционален $\exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_0]$, т.е. $\xi_{01} = \xi_{20} = \xi_{11} = \xi_{02} = \xi_{30} = \xi_{12} = \xi_{03} = 0$. Таким образом,

$$\dot{A}_1 = \mathcal{G}(\xi_{mn}, A_1, A_1^*) = \xi_{10} A_1 + \xi_{21} A_1^2 A_1^*. \quad (13)$$

Покажем теперь, что коэффициенты уравнения (13) – действительные. Для этого воспользуемся инвариантностью задачи относительно поворотов на угол π . В результате такого преобразования \mathbf{r} переходит в $-\mathbf{r}$, а решение $(V_x(t, \mathbf{r}, z), V_y(t, \mathbf{r}, z), V_z(t, \mathbf{r}, z))$ в $(-V_x(t, -\mathbf{r}, z), -V_y(t, -\mathbf{r}, z), V_z(t, -\mathbf{r}, z))$. Замена \mathbf{r} на $-\mathbf{r}$ означает замену A_1 на A_1^* в уравнении (11), т.е. амплитуда A_1^* , помимо уравнения, сопряжённого с (11),

$$\dot{A}_1^* = \mathcal{G}(\xi_{mn}^*, A_1^*, A_1),$$

должна, в силу симметрии, удовлетворять ещё и уравнению

$$\dot{A}_1^* = \mathcal{G}(\xi_{mn}, A_1^*, A_1).$$

Откуда следует, что ξ_{mn} – действительные.

Обозначим $\sigma = \xi_{10}$, $\gamma = \xi_{21}$ и перепишем уравнение (13) в виде:

$$\dot{A}_1 = \sigma A_1 + \gamma A_1^2 A_1^*. \quad (14)$$

Пусть $A_1 = B_1 \exp(i\omega)$, где B_1, ω – действительные. Тогда

$$\dot{A}_1 = \dot{B}_1 \exp(i\omega) + i\omega B_1 \exp(i\omega) = \sigma B_1 \exp(i\omega) + \gamma B_1^3 \exp(i\omega).$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= 0, \\ \dot{B}_1 &= \sigma B_1 + \gamma B_1^3.\end{aligned}\quad (15)$$

Как было показано в п.3.1, уравнение (15) описывает мягкий режим возбуждения конвекции. Здесь также необходимо отметить, что если A_1 является решением, то $-A_1$ также является решением. Это соответствует замене \mathbf{V} на $-\mathbf{V}$ в исходной задаче, т.е. течение в форме двумерных валов обладает свойством вертикальной симметрии.

3.3. Бифуркация валов с двумя волновыми векторами

Рассмотрим нелинейное взаимодействие двух валов с различными волновыми векторами. Функция планформы в этом случае имеет вид:

$$\phi = A_1 \exp[i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}] + A_2 \exp[i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}] + A_1^* \exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}] + A_2^* \exp[-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}]. \quad (16)$$

Коэффициенты планформы, как и раньше, удовлетворяют амплитудным уравнениям (7), в которых сохранены лишь члены до третьего порядка включительно. Обозначим эти многочлены \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 и запишем амплитудные уравнения в виде:

$$\dot{A}_1 = \mathcal{G}_1(A_1, A_1^*, A_2, A_2^*), \quad \dot{A}_2 = \mathcal{G}_2(A_1, A_1^*, A_2, A_2^*). \quad (17)$$

Инвариантность планформы относительно сдвига на произвольный вектор \mathbf{r}_0 означает, что уравнениям (17), вместе с A_1, A_2 , удовлетворяют также

$$\tilde{A}_1 = A_1 \exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_0], \quad \tilde{A}_2 = A_2 \exp[-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_0].$$

Это условие будет выполнено, если результат подстановки \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 в \mathcal{G}_1 содержит только члены, пропорциональные $\exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_0]$, а многочлен $\mathcal{G}_2(\tilde{A}_1, \tilde{A}_1^*, \tilde{A}_2, \tilde{A}_2^*)$ – только члены, пропорциональные $\exp[-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_0]$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \sigma_1 A_1 + A_1(\zeta_1 A_1 A_1^* + \gamma_1 A_2 A_2^*), \\ \dot{A}_2 &= \sigma_2 A_2 + A_2(\zeta_2 A_2 A_2^* + \gamma_2 A_1 A_1^*). \end{aligned} \quad (18)$$

Все коэффициенты в уравнениях (18) – действительные, что, как и в случае одного волнового вектора, является следствием симметрии планформы (16) относительно поворота на угол π .

Для дальнейшего упрощения уравнений (18) воспользуемся свойством зеркальной симметрии относительно вертикальной плоскости. При произвольном расположении векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 множество $\mathbf{P} = \{\pm \mathbf{k}_1, \pm \mathbf{k}_2\}$ инвариантно относительно зеркальной симметрии, если плоскость симметрии делит угол между векторами пополам. Тогда \mathbf{k}_1 переходит в \mathbf{k}_2 , $\mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}_1$ и $A_1 \rightarrow A_2$, $A_2 \rightarrow A_1$. Это значит, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Пусть $A_1 = B_1 \exp(i\omega_1)$, $A_2 = B_2 \exp(i\omega_2)$, где $B_1, B_2, \omega_1, \omega_2$ – действительные. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \dot{B}_1 \exp(i\omega_1) + i\dot{\omega}_1 B_1 \exp(i\omega_1) = \sigma B_1 \exp(i\omega_1) + \zeta B_1^3 \exp(i\omega_1) + \gamma B_1 B_2^2 \exp(i\omega_1), \\ \dot{A}_2 &= \dot{B}_2 \exp(i\omega_2) + i\dot{\omega}_2 B_2 \exp(i\omega_2) = \sigma B_2 \exp(i\omega_2) + \zeta B_2^3 \exp(i\omega_2) + \gamma B_2 B_1^2 \exp(i\omega_2).\end{aligned}$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0,$$

$$\dot{B}_1 = B_1(\sigma + \zeta B_1^2 + \gamma B_2^2), \quad (19)$$

$$\dot{B}_2 = B_2(\sigma + \zeta B_2^2 + \gamma B_1^2). \quad (20)$$

Рассмотрим вещественную скалярную функцию $V = -\frac{1}{2} [\sigma(B_1^2 + B_2^2) + \frac{1}{2}\zeta(B_1^4 + B_2^4) + \gamma B_1^2 B_2^2]$, $V(\mathbf{0})=0$, производная которой по времени в силу решения (19)-(20) неположительна:

$$\frac{\partial V}{\partial B_n} = -\dot{B}_n, \quad n = 1, 2, \quad (21)$$

$$\dot{V} = \sum_{n=1}^2 \frac{\partial V}{\partial B_n} \dot{B}_n = -\sum_n \dot{B}_n^2 \leq 0. \quad (22)$$

Если $\sigma < 0$, то найдется такая проколота окрестность нуля, в которой функция V положительна. Тогда, по теореме Ляпунова, нулевое решение системы уравнений (19)-(20) устойчиво. Если $\sigma > 0$, в любой малой окрестности нуля найдется вектор $\tilde{\mathbf{B}}$, для которого монотонно неубывающая на решениях системы уравнений (19)-(20) функция $\tilde{V} = -V$ положительна, следовательно, решение $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ неустойчиво. (При $\sigma = 0$ нулевое решение будет устойчиво, если $\zeta \leq 0, \gamma \leq 0$, и неустойчиво в остальных случаях).

Пусть \mathbf{B}^0 – ненулевое стационарное решение. Если \mathbf{B}^0 устойчиво, то функция V имеет в точке \mathbf{B}^0 локальный минимум. (Это утверждение легко доказать от противного). Необходимым условием локального минимума является неотрицательность квадратичной формы: $Q(B_1, B_2) = \sum_{m,n} \frac{\partial^2 V}{\partial B_m \partial B_n} \Big|_{\mathbf{B}^0} (B_m - B_m^0)(B_n - B_n^0)$. Используя критерий Сильвестра, получим необходимое условие устойчивости стационарного решения \mathbf{B}^0 :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial B_1^2} \geq 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial B_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial B_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial B_1 \partial B_2} \right)^2 \geq 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial B_2^2} \geq 0. \quad (24)$$

Если функция V имеет в точке \mathbf{B}^0 строгий локальный минимум, то, аналогично теореме Ляпунова, можно доказать устойчивость стационарного решения \mathbf{B}^0 . Достаточным условием строгого локального минимума является положительная определённость квадратичной формы $Q(B_1, B_2)$, т.е.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial B_1^2} > 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial B_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial B_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial B_1 \partial B_2} \right)^2 > 0 \quad (26)$$

Вычислим производные, входящие в (23)-(26). Для этого воспользуемся равенствами:

$$\frac{\partial V}{\partial B_n} = 2 \frac{\partial V}{\partial B_n^2} B_n, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial B_n^2} = 2 \frac{\partial}{\partial B_n} \left(\frac{\partial V}{\partial B_n^2} B_n \right) = 2 \frac{\partial V}{\partial B_n^2} + 4 \frac{\partial^2 V}{\partial (B_n^2)^2} B_n^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial B_n \partial B_m} = 2 \frac{\partial}{\partial B_n} \left(\frac{\partial V}{\partial B_m^2} B_m \right) = 4 \frac{\partial^2 V}{\partial B_n^2 \partial B_m^2} B_m B_n, \quad n \neq m,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial B_n^2 \partial B_n^2} = -\frac{1}{2} \zeta; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial B_1^2 \partial B_2^2} = -\frac{1}{2} \gamma.$$

Таким образом, в точке \mathbf{B}^0 :

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial B_1^2} \right|_{\mathbf{B}^0} = -(\sigma + \zeta B_1^{02} + \gamma B_2^{02}) - 2\zeta B_1^{02}, \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial B_2^2} \right|_{\mathbf{B}^0} = -(\sigma + \zeta B_2^{02} + \gamma B_1^{02}) - 2\zeta B_2^{02}, \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial B_1 \partial B_2} \right|_{\mathbf{B}^0} = -2\gamma B_1^0 B_2^0. \quad (30)$$

Предположим, что вектор \mathbf{B}^0 имеет только одну отличную от нуля компоненту: $B_1^0 \neq 0, B_2^0 = 0$. Тогда, из (19) следует, что $\sigma + \zeta B_1^{02} = 0$. Используя (28)-(29), выпишем достаточные условия устойчивости этого стационара:

$$\sigma + 3\zeta B_1^{02} = 2\zeta B_1^{02} < 0 \iff \zeta < 0, \quad \sigma = -\zeta B_1^{02} > 0, \quad (31)$$

$$\sigma + \gamma B_1^{02} = (\gamma - \zeta) B_1^{02} < 0 \iff \gamma < \zeta. \quad (32)$$

Выполнение условия (26) на решении с $B_2^0 = 0$ сразу следует из равенства нулю смешанной производной в (30). Таким образом, достаточным условием устойчивости стационарного состояния с планформой, содержащей один вал, является

выполнение неравенств $\gamma < \zeta < 0 < \sigma$, а необходимым $\gamma \leq \zeta \leq 0 \leq \sigma$. Поскольку в этих условиях $\sigma \geq 0$, то течение в форме одного вала будет устойчиво только в надкритической области.

Пусть теперь обе координаты стационарной точки \mathbf{V}^0 отличны от нуля, т.е. $B_1 B_2 \neq 0$. На стационаре $\frac{\partial V}{\partial B_n} = 0$, поэтому из (27) следует, что $\frac{\partial V}{\partial B_n^2} = 0$ и условие (25) сводится к $-2\zeta B_n^{02} > 0$, откуда $\zeta < 0$.

Выпишем условие (26):

$$\left(2\zeta B_1^{02}\right) \left(2\zeta B_2^{02}\right) - \left(2\gamma B_1^0 B_2^0\right)^2 > 0 \iff |\zeta| > |\gamma|.$$

Складывая уравнения (19), (20) на стационаре, получим: $2\sigma + (\zeta + \gamma)(B_1^{02} + B_2^{02}) = 0$. Из $\zeta^2 > \gamma^2$ и $\zeta < 0$ следует, что $\zeta + \gamma < 0$, а $\sigma > 0$. Таким образом, необходимым условием устойчивости течения в форме двух валов является $|\gamma| \leq |\zeta|$, $\zeta \leq 0 \leq \sigma$, достаточным $|\gamma| < |\zeta|$, $\zeta < 0 < \sigma$. Течение устойчиво только в надкритической области.

Проведённый анализ устойчивости стационарных решений амплитудных уравнений для планформ, содержащих два волновых вектора, показал:

- 1) при $\sigma < 0$ устойчивым является только нулевое решение
- 2) при $\sigma > 0$ нулевое решение теряет свою устойчивость, ненулевые стационарные режимы устойчивы только при $\zeta \leq 0$
- 3) при $\gamma < \zeta \leq 0$ устойчивыми являются только планформы, состоящие из одного волнового вектора, соответствующие движению в форме валов
- 4) при $|\gamma| < |\zeta|$ устойчивы только планформы, состоящие из двух волновых векторов, соответствующие конвективному движению в форме квадратов
- 5) при $\gamma = 0$ задача распадается на два независимых уравнения и возможны валы и квадраты.

Отметим также, что уравнения (17) инвариантны относительно замены \mathbf{A} на $-\mathbf{A}$, поэтому течение с планформой, представляющей собой суперпозицию двух систем валов, вертикально симметрично.

3.4. Бифуркация валов с тремя волновыми векторами

Функция планформы, сформированная суперпозицией валов с тремя волновыми векторами, имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi = & A_1 \exp[i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}] + A_2 \exp[i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}] + A_3 \exp[i\mathbf{k}_3 \mathbf{r}] + \\ & + A_1^* \exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}] + A_2^* \exp[-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}] + A_3^* \exp[-i\mathbf{k}_3 \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (33)$$

Амплитуды A_n , $n = 1, 2, 3$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{A}_n = \mathcal{G}_n(\mathbf{A}, \mathbf{A}^*), \quad \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3),$$

где \mathcal{G}_n – многочлен третьей степени с действительными, как было показано выше, коэффициентами. Снова потребуем инвариантности решения относительно сдвига на произвольный вектор \mathbf{r}_0 . Для рассмотренных ранее планформ это требование означало, что многочлены в правых частях амплитудных уравнений не содержат квадратичных членов. В случае взаимодействия трёх валов это не обязательно. Предположим, что в \mathcal{G}_1 входит член $A_2^* A_3^*$. В результате сдвига он превратится в $\tilde{A}_2^* \tilde{A}_3^* = A_2^* A_3^* \exp[i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{r}_0]$ и уравнение для A_1 будет инвариантно относительно замены $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ при $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1$, т.е. если волновые вектора образуют резонансную триаду: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$.

Рассмотрим зеркальную симметрию относительно вертикальной плоскости, проходящей через вектор \mathbf{k}_3 . Множество $\mathbf{P} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ инвариантно относительно такой симметрии, если угол между векторами \mathbf{k}_3 и \mathbf{k}_1 равен углу между векторами \mathbf{k}_3 и \mathbf{k}_2 , при этом вектор \mathbf{k}_3 остаётся на месте. Поскольку $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}_1$, система амплитудных уравнений должна выдерживать замену $A_1 \rightarrow A_2$, $A_2 \rightarrow A_1$, $A_3 \rightarrow A_3$. Зеркальную симметрию можно рассматривать относительно плоскости, проходящей через любой из векторов \mathbf{k}_n . Следовательно, углы между векторами в резонансной тройке равны 120° , а система амплитудных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \sigma A_1 + \xi A_2^* A_3^* + A_1[\zeta |A_1|^2 + \gamma(|A_2|^2 + |A_3|^2)], \\ \dot{A}_2 &= \sigma A_2 + \xi A_1^* A_3^* + A_2[\zeta |A_2|^2 + \gamma(|A_1|^2 + |A_3|^2)], \\ \dot{A}_3 &= \sigma A_3 + \xi A_1^* A_2^* + A_3[\zeta |A_3|^2 + \gamma(|A_1|^2 + |A_2|^2)]. \end{aligned} \quad (34)$$

Воспользуемся тригонометрической формой записи комплексных чисел:

$$A_n = B_n \exp(i\omega_n), \quad n = 1, 2, 3. \quad (35)$$

И пусть:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \quad (36)$$

Подставляя (35)-(36) в уравнения (34), получим:

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 + iB_1\dot{\omega}_1 &= \sigma B_1 + \xi B_2 B_3 \exp(-i\omega) + B_1[\zeta B_1^2 + \gamma(B_2^2 + B_3^2)], \\ \dot{B}_2 + iB_2\dot{\omega}_1 &= \sigma B_2 + \xi B_1 B_3 \exp(-i\omega) + B_2[\zeta B_2^2 + \gamma(B_1^2 + B_3^2)], \\ \dot{B}_3 + iB_3\dot{\omega}_1 &= \sigma B_3 + \xi B_1 B_2 \exp(-i\omega) + B_3[\zeta B_3^2 + \gamma(B_1^2 + B_2^2)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Разделим в уравнениях (37) вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned}\dot{B}_1 &= \sigma B_1 + \xi B_2 B_3 \cos(\omega) + B_1[\zeta B_1^2 + \gamma(B_2^2 + B_3^2)], \\ \dot{B}_2 &= \sigma B_2 + \xi B_1 B_3 \cos(\omega) + B_2[\zeta B_2^2 + \gamma(B_1^2 + B_3^2)], \\ \dot{B}_3 &= \sigma B_3 + \xi B_1 B_2 \cos(\omega) + B_3[\zeta B_3^2 + \gamma(B_1^2 + B_2^2)].\end{aligned}\quad (38)$$

$$\dot{\omega}_1 = -\xi \frac{B_2 B_3}{B_1} \sin(\omega); \quad \dot{\omega}_2 = -\xi \frac{B_1 B_3}{B_2} \sin(\omega); \quad \dot{\omega}_3 = -\xi \frac{B_1 B_2}{B_3} \sin(\omega). \quad (39)$$

Складывая (39), получим:

$$\dot{\omega} = -\xi \left(\frac{B_2 B_3}{B_1} + \frac{B_1 B_3}{B_2} + \frac{B_1 B_2}{B_3} \right) \sin(\omega).$$

Это уравнение имеет (с точностью до периода) два стационарных решения: $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. Их устойчивость зависит от знака ξ . Если $\xi > 0$, то устойчиво $\omega = 0$, если $\xi < 0$, устойчиво $\omega = \pi$. Это значит, что на устойчивом решении выполняется $\xi \cos(\omega) = |\xi|$. Рассмотрим стационарные решения системы уравнений (38).

1) $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Неподвижное состояние, устойчиво в подкритической области.

2) $B_1 = B_2 = 0$. Планформа состоит из одного вала с амплитудой $B_3 = \sqrt{-\sigma/\zeta}$, ее устойчивость разобрана в п.3.2. Течение в форме валов существует только в надкритической области, развивается в результате мягкого возбуждения конвекции и обладает свойством вертикальной симметрии.

3) Одна из амплитуд равна нулю. Такая система уравнений была рассмотрена в п.3.3. Течение имеет форму валов или квадратов, существует только в надкритической области, развивается в результате мягкого возбуждения конвекции и обладает свойством вертикальной симметрии.

4) Все B_n отличны от нуля. Рассмотрим лишь самый простой случай, когда амплитуды равны и система уравнений сводится к одному уравнению:

$$\dot{B}_1 = \sigma B_1 + |\xi| B_1^2 + (\zeta + 2\gamma) B_1^3. \quad (40)$$

Свойства уравнения (40) подробно разобраны в п.3.1, где показано, что при $\xi \neq 0$ существует устойчивая подкритическая конвекция, которая возникает под влиянием возмущений с конечной амплитудой (жёсткий режим возбуждения). Поскольку квадратичный член присутствует в амплитудном уравнении только в случае, когда планформа сформирована триадой резонансных векторов, то подкритическая конвекция должна иметь форму правильных шестиугольников. Кроме того, при $\xi \neq 0$ амплитудное уравнение (40) не выдерживает замены B_1 на $-B_1$, т.е. соответствующее течение не обладает свойством вертикальной симметрии. Это

позволяет предположить, что существование подкритической конвекции в форме шестиугольных ячеек связано с асимметрией физических условий, в которых происходит движение. Нарушение симметрии может быть вызвано зависимостью физических свойств жидкости от температуры и вертикальной координаты, наличием внутренних источников тепла и целым рядом других факторов.

4. Метод малого параметра

4.1. Разложение по малому параметру и амплитудные уравнения

Рассмотренный выше метод амплитудных уравнений позволяет выявить качественные особенности в поведении течений с различными планформами. Для исследования конкретной задачи в заданном диапазоне параметров необходимо уметь определять значения коэффициентов в разложении (7), воспользуемся для этого методом разложение решения по степеням малого параметра [6].

Представим стационарное решение системы (1)-(2) и число Рэлея в виде рядов относительно некоторого малого параметра ϵ [3, 5]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(1)}\epsilon + \mathbf{V}^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (41)$$

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}\epsilon + T^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (42)$$

$$p = p^{(0)} + p^{(1)}\epsilon + p^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (43)$$

$$\text{Ra} = \text{Ra}^{(0)} + \text{Ra}^{(1)}\epsilon + \text{Ra}^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (44)$$

Подставляя разложения (41)-(44) в (1)-(2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим уравнения последовательных приближений, из которых определяются значения коэффициентов в разложении (41)-(44). В итоге уравнение (44) превращается в уравнение для величины ϵ , которая, как видно из (41), характеризует амплитуду конвективного движения.

В п.3.1 для амплитуды стационарного движения было получено уравнение (9) и условия на коэффициенты σ , β , γ , обеспечивающие устойчивость ненулевого стационарного состояния:

$$\sigma - \beta A + \gamma A^2 = 0, \quad \gamma < 0. \quad (45)$$

Вместе с тем, амплитуда установившегося течения удовлетворяет уравнению (44).

Запишем его с точностью до членов второго порядка малости:

$$\text{Ra}^{(0)} - \text{Ra} + \text{Ra}^{(1)}\epsilon + \text{Ra}^{(2)}\epsilon^2 = 0. \quad (46)$$

Пусть $A = a\epsilon$. Естественно предположить, что A и ϵ одновременно удовлетворяют уравнениям (45) и (46). Если это так, то $\sigma = b(\text{Ra}^{(0)} - \text{Ra})$, $\beta = -ba\text{Ra}^{(1)}$, $\gamma = ba^2\text{Ra}^{(2)}$, где a и b – константы, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Из п.3.1 известно, что $\sigma = b(\text{Ra}^{(0)} - \text{Ra})$ имеет смысл надкритичности, т.е. должно расти с увеличением значения числа Рэ-ля, а значит $b < 0$. Поскольку стационарные течения устойчивы только при $\gamma < 0$, то $\text{Ra}^{(2)} > 0$.

Анализ амплитудных уравнений также показал, что если $\beta = 0$ ($\text{Ra}^{(1)} = 0$) то уравнение (45) описывает мягкий режим возбуждения конвекции при $\sigma > 0$ ($\text{Ra} > \text{Ra}^{(0)}$), а течение имеет форму валов или квадратов (п.3.2, п.3.3).

Если $\beta \neq 0$ ($\text{Ra}^{(1)} \neq 0$), то уравнение (45) допускает нетривиальные решения при значениях $\sigma < 0$ ($\text{Ra} < \text{Ra}^{(0)}$). Планформа соответствующего движения состоит из шестиугольников (п.3.4). Минимальное значение σ , при котором такое движение существует, $\sigma_{min} = \frac{\beta^2}{4\gamma}$. Амплитуда этого движения $A_{min} = \frac{\beta}{2\gamma}$. Соответствующие значения Ra_{min} и ϵ_{min} равны

$$\text{Ra}_{min} = \text{Ra}^{(0)} - \frac{(\text{Ra}^{(1)})^2}{4\text{Ra}^{(2)}}, \quad (47)$$

$$\epsilon = -\frac{\text{Ra}^{(1)}}{2\text{Ra}^{(2)}}. \quad (48)$$

В устойчивом движении $\text{Ra}^{(2)} > 0$, поэтому направление циркуляции в подкритической шестиугольной ячейке определяется знаком $\text{Ra}^{(1)}$ ([7], [8], [9], [10]). Таким образом, структура установившегося течения вблизи порога устойчивости определяется значением коэффициента $\text{Ra}^{(1)}$.

Связь между коэффициентами амплитудного уравнения, коэффициентами в методе последовательных приближений и свойствами течения отражена в таблице 1.

Особый интерес представляет зависимость формы движения от значения числа Прандтля, поэтому отдельно рассмотрим задачу конвективной устойчивости жидкости в приближении бесконечно малого Прандтля.

4.2. Приближение бесконечно малого Прандтля

Следуя [11], представим температуру в виде: $T = T^{(0)}(z) + \text{Pr}\bar{T}^{(1)}$, где $T^{(0)}$ – стационарный профиль температуры, формирующийся в отсутствие конвектив-

Таблица 1. Условия на коэффициенты амплитудных уравнений и коэффициенты разложения по малому параметру.

Амплитудные уравнения	Разложение по малому параметру	Свойства
σ	$Ra - Ra^{(0)}$	Величина надкритичности
$\gamma < 0$	$Ra^{(2)} > 0$	Существование устойчивого стационара
$\sigma > 0, \beta = 0$	$Ra > Ra^{(0)}, Ra^{(1)} = 0$	Мягкий режим возбуждения. Валы.
$\sigma > 0, \beta \neq 0$	$Ra > Ra^{(0)}, Ra^{(1)} \neq 0$	Мягкий режим возбуждения. Шестиугольные ячейки.
$\sigma_{min} < \sigma < 0,$ $\sigma_{min} = \frac{\beta^2}{4\gamma}$	$Ra_{min} < Ra < Ra^{(0)},$ $Ra_{min} = Ra^{(0)} - \frac{(Ra^{(1)})^2}{4Ra^{(2)}}$	Жесткий режим возбуждения. Шестиугольные ячейки.
$A_{min} = \frac{\beta}{2\gamma}$	$\epsilon_{min} = -\frac{Ra^{(1)}}{2Ra^{(2)}}$	Минимальная амплитуда подкритического движения. Направление циркуляции определяется знаками β или $Ra^{(1)}$

ного движения, и не зависящий от значения числа Прандтля:

$$div(\chi grad T^{(0)}) + q = 0.$$

Введем давление $\nabla \tilde{p} = \nabla p - Gr T^{(0)} \mathbf{e}_z$ и запишем уравнения (1) в новых переменных:

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \tilde{p} + div[\tau] + Ra \bar{T}^{(1)} \mathbf{e}_z, \quad (49)$$

$$div \mathbf{V} = (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0,$$

$$Pr \partial_t \bar{T}^{(1)} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(T^{(0)} + Pr \bar{T}^{(1)}) = div(\chi grad \bar{T}^{(1)}). \quad (50)$$

В уравнении (50), можно пренебречь производной по времени $Pr \partial_t \bar{T}^{(1)}$ и конвективными членами $(\mathbf{V} \cdot \nabla) Pr \bar{T}^{(1)}$ по сравнению с членом $(\mathbf{V} \cdot \nabla) T^{(0)}$. Также можно считать коэффициенты $\nu(z, T)$, $\chi(z, T)$ зависящими только от z :

$$\nu(z, T) = \nu(z, T^{(0)} + Pr \bar{T}^{(1)}) \approx \nu(z, T^{(0)}) = \bar{\nu}(z),$$

$$\chi(z, T) = \chi(z, T^{(0)} + \text{Pr}\bar{T}^{(1)}) \approx \chi(z, T^{(0)}) = \bar{\chi}(z).$$

Обозначим $\bar{T}^{(1)} = \bar{T} - T^{(0)}$, $\nabla\bar{p} = \nabla\tilde{p} - \text{Ra}T^{(0)}\mathbf{e}_z$, тогда система уравнений (49)-(50) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla\bar{p} + \text{div}[\bar{\tau}] + \text{Ra}\bar{T}\mathbf{e}_z, \\ \bar{\tau}_{ij} &= \bar{\nu}(\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i), \\ \text{div} \mathbf{V} &= (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0, \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla) T^{(0)} &= \text{div}(\bar{\chi} \text{grad} \bar{T}) + \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (51)$$

Система (51) не зависит от значения числа Прандтля и имеет такие же краевые условия, как исходная система уравнений (1)-(2). Зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры при бесконечно малых значениях числа Прандтля превращается в зависимость от вертикальной координаты. Этот результат очевиден с физической точки зрения: при малых значениях Прандтля движение жидкости слабо влияет на распределение температуры, поэтому на стационаре $T(x, y, z) \approx T_0(z)$, следовательно, $\nu(T) \approx \nu(T_0(z)) = \bar{\nu}(z)$, $\chi(T) \approx \chi(T_0(z)) = \bar{\chi}(z)$. Решения системы уравнений (51) будем искать методом последовательных приближений.

4.3. Уравнения последовательных приближений

Рассмотрим более подробно процедуру получения уравнений последовательных приближений для задачи (1)-(2). Поскольку коэффициенты вязкости и теплопроводности, вообще говоря, зависят от вертикальной координаты и от температуры, используя разложение (42), представим их в виде ряда:

$$\nu(z, T) = \nu^{(0)} + \nu^{(1)}\epsilon + \nu^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (52)$$

$$\chi(z, T) = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}\epsilon + \chi^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (53)$$

Здесь $\nu^{(0)} = \nu(z, T^{(0)})$, $\nu^{(1)} = \partial_T \nu(z, T)|_{T^{(0)}} T^{(1)}$, $\nu^{(2)} = \partial_T \nu|_{T^{(0)}} T^{(2)} + \partial_{TT}^2 \nu|_{T^{(0)}} (T^{(1)})^2 / 2$ и т.д. Аналогично получают коэффициенты $\chi^{(n)}$ в разложении (53).

Подставляя (41)-(44), (52)-(53) в (1)-(2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим уравнения последовательных приближений. Нулевое приближение совпадает с уравнениями, определяющими стационарное неподвижное состояние системы:

$$\begin{aligned} \nabla p^{(0)} &= \frac{\text{Ra}^{(0)}}{\text{Pr}} T^{(0)} \mathbf{e}_z, \\ \text{div}[\chi^{(0)} \text{grad} T^{(0)}] &= -\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (54)$$

Из (54) определяются температура $T^{(0)}=T^{(0)}(z)$ (с соответствующими краевыми условиями) и градиент давления $\nabla p^{(0)}$, причем $T^{(0)}$ не зависит от значения числа Прандтля. Для членов первого порядка малости получается следующая линейная система уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nu^{(0)} \operatorname{grad} \mathbf{V}^{(1)} + \nu^{(0)} \operatorname{grad}^T \mathbf{V}^{(1)}) + \left(\frac{\operatorname{Ra}^{(0)}}{\operatorname{Pr}} T^{(1)} + \frac{\operatorname{Ra}^{(1)}}{\operatorname{Pr}} T^{(0)} \right) \mathbf{e}_z - \nabla p^{(1)} = 0, \quad (55) \\ \operatorname{div} \mathbf{V}^{(1)} = 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\chi^{(0)} \operatorname{grad} T^{(1)} + \chi^{(1)} \operatorname{grad} T^{(0)}) - \operatorname{Pr}(\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(0)} = 0. \quad (56)$$

Очевидно, что в уравнении (55) часть подъемной силы, определяемая $T^{(0)}$, может быть представлена в виде градиента и включена в давление $p^{(1)}$. Новое давление обозначим $\tilde{p}^{(1)}$. Введем:

$$\bar{T}^{(1)} = T^{(1)}/\operatorname{Pr}, \quad \bar{\chi}^{(1)} = \chi^{(1)}/\operatorname{Pr} = \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} T^{(1)}/\operatorname{Pr} = \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} \bar{T}^{(1)}, \quad (57)$$

и запишем (55)-(56) в виде, не зависящем от значения числа Прандтля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nu^{(0)} \operatorname{grad} \mathbf{V}^{(1)} + \nu^{(0)} \operatorname{grad}^T \mathbf{V}^{(1)}) + \operatorname{Ra}^{(0)} \bar{T}^{(1)} \mathbf{e}_z - \nabla \tilde{p}^{(1)} = 0, \quad (58) \\ \operatorname{div}(\chi^{(0)} \operatorname{grad} \bar{T}^{(1)} + \bar{\chi}^{(1)} \operatorname{grad} T^{(0)}) - (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (58) совпадают с уравнениями для нормальных мод линейной теории устойчивости [4]. Таким образом, минимальное значение $\operatorname{Ra}^{(0)}$ имеет смысл критического значения числа Релея: $\operatorname{Ra}^{(0)}_{\min} = \operatorname{Ra}_{cr}$, определяет порог устойчивости задачи к бесконечно малым возмущениям и не зависит от значения числа Прандтля.

Перепишем (55)-(56) в операторной форме:

$$\mathbf{L} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{\nu} \mathbf{f} \\ \mathbf{L}^{\mathcal{T}} \mathbf{f} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ T \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$\mathbf{L}^{\nu} \mathbf{f} = \operatorname{div}(\nu^{(0)} \operatorname{grad} \mathbf{V} + \nu^{(0)} \operatorname{grad}^T \mathbf{V}) + \frac{\operatorname{Ra}^{(0)}}{\operatorname{Pr}} T \mathbf{e}_z - \nabla p,$$

$$\mathbf{L}^{\mathcal{T}} \mathbf{f} = \operatorname{div}(\chi^{(0)} \operatorname{grad} T + T \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} \operatorname{grad} T^{(0)}) - \operatorname{Pr}(\mathbf{V} \cdot \nabla) T^{(0)}.$$

Поскольку на множестве решений (55)-(56) выполняется условие: $\mathbf{L}^{\nu} \mathbf{f} = 0$, для градиента давления справедливо выражение: $\nabla p = \operatorname{div}(\nu^{(0)} \operatorname{grad} \mathbf{V} + \nu^{(0)} \operatorname{grad}^T \mathbf{V}) + \frac{\operatorname{Ra}^{(0)}}{\operatorname{Pr}} T \mathbf{e}_z$, т.е. ∇p является линейной функцией \mathbf{f} . Таким образом, на множестве решений задачи (55)-(56) оператор \mathbf{L} является линейным.

Далее перейдем к рассмотрению формы стационарного течения вблизи порога устойчивости отдельно для случаев переменной вязкости, переменной теплопроводности и при наличии внутреннего нагрева.

4.4. Зависимость вязкости от вертикальной координаты

Рассмотрим случай зависимости вязкости жидкости от вертикальной координаты z , подробно описанный в [12]. Здесь $\chi = const$, $q=0$. Вертикальный градиент температуры обеспечивают краевые условия первого рода, после обезразмеривания имеющие вид: $T|_{z=0}=1$, $T|_{z=1}=0$. Очевидно, что для стационарного распределения температуры справедливо: $\partial_z T^{(0)} = -1$. Тогда (55)-(56) превращаются в:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nu(z)(\operatorname{grad}\mathbf{V}^{(1)} + \operatorname{grad}^T\mathbf{V}^{(1)})) + \frac{\operatorname{Ra}^{(0)}}{\operatorname{Pr}}T^{(1)}\mathbf{e}_z - \nabla\tilde{p}^{(1)} &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{V}^{(1)} &= 0, \\ \Delta T^{(1)} + \operatorname{Pr}\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{e}_z &= 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Введем скалярное произведение на множестве функций \mathbf{f} :

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \operatorname{Pr}^2(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) + \operatorname{Ra}^{(0)}(T_1, T_2), \quad (61)$$

$$(T_1, T_2) = \int_{\Omega} T_1 T_2 d\Omega,$$

$$(\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2) = \int_{\Omega} ((\mathbf{V}_x^1, \mathbf{V}_x^2) + (\mathbf{V}_y^1, \mathbf{V}_y^2) + (\mathbf{V}_z^1, \mathbf{V}_z^2)) d\Omega.$$

Оператор \mathbf{L} самосопряжен в смысле скалярного произведения (61):

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) &= -\operatorname{Pr}^2 [(\nu(z)\operatorname{grad}\mathbf{V}_1, \operatorname{grad}\mathbf{V}_2) + (\nu(z)\operatorname{grad}^T\mathbf{V}_1, \operatorname{grad}^T\mathbf{V}_2)] + \\ &+ (\tilde{p}^{(1)}, \operatorname{div}\mathbf{V}_1) - \operatorname{Ra}^{(0)}(\operatorname{grad} T_1, \operatorname{grad} T_2) + \\ &+ \operatorname{Ra}^{(0)}\operatorname{Pr}(T_1\mathbf{e}_z, \mathbf{V}_2) + \operatorname{Ra}^{(0)}\operatorname{Pr}(\mathbf{V}_1\mathbf{e}_z, T_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{L}\mathbf{f}_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla)\mathbf{V}^{(1)} &= -\nabla\tilde{p}^{(2)} + \operatorname{div}\left(\nu(z)\left(\operatorname{grad}\mathbf{V}^{(2)} + \operatorname{grad}^T\mathbf{V}^{(2)}\right)\right) + \\ &+ \frac{\operatorname{Ra}^{(0)}}{\operatorname{Pr}}T^{(2)}\mathbf{e}_z + \frac{\operatorname{Ra}^{(1)}}{\operatorname{Pr}}T^{(1)}\mathbf{e}_z, \\ \operatorname{div}\mathbf{V}^{(2)} &= 0, \\ \operatorname{Pr}\left((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla)T^{(1)} - \mathbf{V}^{(2)}\mathbf{e}_z\right) &= \Delta T^{(2)}. \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь в $\tilde{p}^{(2)}$ включена потенциальная часть подъемной силы, которая определяется $\frac{\operatorname{Ra}^{(2)}}{\operatorname{Pr}}T^{(0)}\mathbf{e}_z$. Перепишем (62) в операторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\nu}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla)\mathbf{V}^{(1)} - \frac{\operatorname{Ra}^{(1)}}{\operatorname{Pr}}T^{(1)}\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= \operatorname{Pr}(\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla)T^{(1)}. \end{aligned} \quad (63)$$

Задача (63) имеет решение, если ее правая часть ортогональна ядру сопряженного оператора ([13]), т.е. когда:

$$(\mathbf{L}\mathbf{f}^{(2)}, \tilde{\mathbf{f}}) = \text{Pr}^2 \left((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \tilde{\mathbf{V}} \right) - \text{Ra}^{(1)} \text{Pr} \left(T^{(1)} \mathbf{e}_z, \tilde{\mathbf{V}} \right) + \\ + \text{Ra}^{(0)} \text{Pr} \left((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}, \tilde{T} \right) = 0.$$

Поскольку оператор \mathbf{L} самосопряженный, выберем $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^{(1)}$, $\tilde{T} = T^{(1)}$. Известно, что конвективные члены не вносят вклад в баланс кинетической и тепловой энергии:

$$\left((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)} \right) = 0, \\ \left((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}, T^{(1)} \right) = 0.$$

Следовательно, требование ортогональности превращается в:

$$\text{Ra}^{(1)} (T^{(1)} \mathbf{e}_z, \mathbf{V}^{(1)}) = 0.$$

Покажем, что $(T^{(1)} \mathbf{e}_z, \mathbf{V}^{(1)}) > 0$, при $\mathbf{V}^{(1)} \neq 0$. Рассмотрим скалярное произведение уравнения (60) на $\mathbf{V}^{(1)}$:

$$\frac{\text{Ra}^{(0)}}{\text{Pr}} (T^{(1)} \mathbf{e}_z, \mathbf{V}^{(1)}) = (\nu(z) \text{grad} \mathbf{V}^{(1)}, \text{grad} \mathbf{V}^{(1)}) + (\nu(z) \text{grad}^T \mathbf{V}^{(1)}, \text{grad}^T \mathbf{V}^{(1)}) > 0.$$

В [5] показано, что справедливо и более общее утверждение:

$$\text{Pr} \left((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \tilde{\mathbf{V}} \right) + \text{Ra}^{(0)} \left((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}, \tilde{T} \right) = 0.$$

Таким образом, если вязкость зависит только от z , то $\text{Ra}^{(1)} = 0$ и не зависит от числа Прандтля. Как было показано выше, равенство нулю коэффициента $\text{Ra}^{(1)}$ означает, что течение может иметь только форму валов или квадратов.

4.5. Зависимость вязкости от температуры

Рассмотрим теперь случай, когда вязкость зависит от температуры $\nu = \nu(T)$. Здесь $\chi = 1$ и внутренний нагрев отсутствует, $q = 0$. Температура удовлетворяет краевым условиям первого рода, обезразмеривание выбирается так, чтобы $\partial_z T^{(0)} = -1$. Подобная задача для больших значений числа Прандтля была рассмотрена в [5].

Запишем $\nu(T)$ в виде:

$$\nu(T) = \nu(T^{(0)} + \epsilon T^{(1)}) = \nu(T^{(0)}) + \epsilon \left. \frac{\partial \nu}{\partial T} \right|_{T^{(0)}} T^{(1)} = \nu^{(0)}(z) + \epsilon \nu'(z) T^{(1)}. \quad (64)$$

Поскольку в линейный оператор (59) входит только $\nu^{(0)}(z)$, то в случае $\nu = \nu(T)$ оператор \mathbf{L} такой же, как для $\nu = \nu(z) = \nu^{(0)}(z)$, и является самосопряжённым (см п.4.4). В уравнениях второго приближения, по сравнению с задачей (63), добавляется еще один член в правой части:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\mathcal{V}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)} - \frac{Ra^{(1)}}{Pr} T^{(1)} \mathbf{e}_z - \\ &\quad - \text{div}(\nu'(z) T^{(1)} (\text{grad} \mathbf{V}^{(1)} + \text{grad}^T \mathbf{V}^{(1)})), \\ \text{div} \mathbf{V}^{(2)} &= 0, \\ \mathbf{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= Pr (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}. \end{aligned} \quad (65)$$

Задача (65) имеет решение, если ее правая часть ортогональна ядру самосопряженного оператора \mathbf{L} . Как и в предыдущем пункте, в силу самосопряженности, выберем $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^{(1)}$, $\tilde{T} = T^{(1)}$. Тогда $((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)}) = 0$, $((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}, T^{(1)}) = 0$ и требование ортогональности превращается в

$$\frac{Ra^{(1)}}{Pr} (T^{(1)} \mathbf{e}_z, \mathbf{V}^{(1)}) = (\nu' T^{(1)} \text{grad} \mathbf{V}^{(1)}, \text{grad} \mathbf{V}^{(1)}) + (\nu' T^{(1)} \text{grad}^T \mathbf{V}^{(1)}, \text{grad}^T \mathbf{V}^{(1)}).$$

Таким образом, вообще говоря, $Ra^{(1)} \neq 0$, и течение должно иметь форму ячеек. Направление движения в ячейках зависит от знака $Ra^{(1)}$, который определяется знаком ν' .

Поскольку $T^{(1)} \sim Pr$ (см. (57)), а $V^{(1)}$, ν' от значения числа Прандтля не зависят, то при $Pr \approx 0$, $Ra^{(1)} \approx 0$, т.е. если ячейки и существуют, то в узком диапазоне значений числа Рэлея.

Рассмотрим теперь эту задачу в приближении бесконечно малого значения числа Прандтля и сравним полученные результаты. Искомые величины должны удовлетворять системе уравнений (51), где $\bar{\nu} = \bar{\nu}(z)$, $\bar{\chi} = 1$. Для решения задачи (51) воспользуемся методом последовательных приближений. Легко убедиться, что при таких параметрах, линейный оператор \mathbf{L} уравнений первого приближения для задачи (51) совпадает с линейным оператором полной задачи для вязкости, зависящей от вертикальной координаты (60), записанным при $Pr = 1$, т.е. является

самосопряженным. Выпишем уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{\nu}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)} - \text{Ra}^{(1)} T^{(1)} \mathbf{e}_z, \\ \text{div} \mathbf{V}^{(2)} &= 0, \\ \mathbf{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= 0.\end{aligned}\tag{66}$$

По сравнению с задачей для $\nu = \nu(z)$ (см. систему уравнений (63)), здесь правая часть в уравнении для температуры равна нулю. Применяя рассуждения, приведенные в п.4.4, можно показать, что $\text{Ra}^{(1)} = 0$. Т.е. для малых значений числа Прандтля жидкость с вязкостью, зависящей от температуры, ведет себя как жидкость с вязкостью, зависящей от вертикальной координаты. Устойчивой формой течения при этом являются двумерные валы.

4.6. Теплопроводность, зависящая от вертикальной координаты, и внутренние источники тепла

Для стационарного профиля температуры при $\chi = \chi(z)$ и/или для $q \neq 0$ справедливо:

$$\text{div}(\chi(z) \text{grad} T^{(0)}) + q = 0 \Rightarrow \chi(z) \partial_z T^{(0)} + qz = \text{const}.\tag{67}$$

Выпишем уравнения 2-го приближения:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{\nu}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)} - \frac{\text{Ra}^{(1)}}{\text{Pr}} T^{(1)} \mathbf{e}_z, \\ \text{div} \mathbf{V}^{(2)} &= 0, \\ \mathbf{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= \text{Pr}(\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}.\end{aligned}\tag{68}$$

Задача (68) имеет такую же форму записи, как и задача (63) для вязкости, зависящей от вертикальной координаты. Однако, поскольку $\partial_z T^{(0)} \neq \text{const}$ - линейный оператор (55)-(56) уже не самосопряженный, и мы не можем утверждать, что $\text{Ra}^{(1)} = 0$. Рассмотрим условие разрешимости (68), используя обычное скалярное произведение:

$$\text{Ra}^{(1)}(T^{(1)} \mathbf{e}_z, \tilde{\mathbf{V}}^{(1)}) = \text{Pr}((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \tilde{\mathbf{V}}^{(1)}) + \text{Pr}^2((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}, \tilde{T}^{(1)}).$$

Учитывая, что $\mathbf{V}^{(1)}$ и $\bar{T}^{(1)} = T^{(1)}/\text{Pr}$ не зависят от Pr , получим:

$$\text{Ra}^{(1)} = (c_1 + c_2 \text{Pr}^3)/c_3,$$

где $c_1 = ((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \tilde{\mathbf{V}}^{(1)})$, $c_2 = ((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \bar{T}^{(1)}, \tilde{\bar{T}}^{(1)})$, $c_3 = (\bar{T}^{(1)} \mathbf{e}_z, \tilde{\mathbf{V}}^{(1)})$ не зависят от Pr .

Отсюда видно, что при малых значениях Pr , $\text{Ra}^{(1)}$ определяется в большей степени конвективными членами в уравнении для скорости, при больших – для температуры, c_1 и c_2 соответственно. Если $c_1 \approx 0$, то при малых значениях Прандтля устойчивой формой течения будут двумерные валы, а при больших – ячейки, тип которых определяется знаком c_2 . Если c_1 и c_2 имеют разные знаки, то существует критическое значение числа Pr , в некоторой окрестности которого $\text{Ra}^{(1)} \approx 0$ и течение имеет форму валов, слева и справа от этой точки существуют ячейки противоположных типов.

4.7. Зависимость температуропроводности от температуры

Пусть коэффициент температуропроводности зависит от температуры, $\chi = \chi(T)$. Выпишем разложение (53) до членов второго порядка малости:

$$\chi(T) = \chi^{(0)} + \epsilon \chi^{(1)} + \epsilon^2 \chi^{(2)} = \chi^{(0)}(z) + \epsilon \check{\chi}^{(1)}(z) T^{(1)} + \epsilon^2 \check{\chi}^{(1)}(z) T^{(2)} + \epsilon^2 \check{\chi}^{(2)}(z) T^{(1)2}.$$

Здесь $\check{\chi}^{(1)} = \partial_T \chi|_{T^{(0)}}$, $\check{\chi}^{(2)} = \partial_{TT}^2 \chi|_{T^{(0)}}$.

В этих обозначениях уравнения второго приближения имеют вид:

$$\mathbf{L}^{\mathcal{V}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) = (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)} - \frac{\text{Ra}^{(1)}}{\text{Pr}} T^{(1)} \mathbf{e}_z,$$

$$\nabla \mathbf{V}^{(2)} = 0,$$

$$\mathbf{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) = \text{Pr} (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)} - \text{div}(\check{\chi}^{(1)} T^{(1)} \text{grad} T^{(1)} + \check{\chi}^{(2)} T^{(1)2} \text{grad} T^{(0)}).$$

Аналогично предыдущему пункту, условие разрешимости запишем для неизвестных, не зависящих от значения числа Прандтля:

$$\text{Ra}^{(1)} (\bar{T}^{(1)} \mathbf{e}_z, \tilde{\mathbf{V}}^{(1)}) = ((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \tilde{\mathbf{V}}^{(1)}) + \text{Pr}^3 ((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \bar{T}^{(1)}, \tilde{\bar{T}}^{(1)}) +$$

$$+ \text{Pr}^3 (\check{\chi}^{(1)} \bar{T}^{(1)} \text{grad} \bar{T}^{(1)}, \text{grad} \tilde{\bar{T}}^{(1)}) + \text{Pr}^3 (\check{\chi}^{(2)} \bar{T}^{(1)2} \text{grad} \bar{T}^{(0)}, \text{grad} \tilde{\bar{T}}^{(1)}).$$

Условие разрешимости имеет такой же вид, как и в случае $\chi = \chi(z)$, т.е. могут иметь место такие же сценарии обмена устойчивостью, однако константа c_2 дополнительно зависит от первой и второй производных χ от температуры. Из работы [8] известно, что устойчивым решением задачи являются шестиугольники, направление движения в которых определяется знаком $\chi^{(1)}$. С другой стороны, приведенный анализ показывает, что при малых значениях числа Прандтля

область устойчивости шестиугольников может быть настолько малой, что в расчетах и эксперименте предпочтительной формой течения будут двумерные валы.

5. Заключение

Данный препринт является первой частью исследования устойчивости стационарных форм движения небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Выводы об устойчивости различных планформ были сделаны на основе анализа упрощенных моделей: амплитудных уравнений и метода разложения по малому параметру. Выявлены общие закономерности процесса обмена устойчивостью между шестиугольными ячейками и валами при различных значениях числа Прандтля. Показано, что для всех рассмотренных типов небуссинесковской жидкости, кроме жидкости с вязкостью, зависящей от вертикальной координаты, структура движения и направление циркуляции в шестиугольных ячейках зависят от значения числа Прандтля. Полученные данные о структуре течения приведены в сводной таблице:

Вид несимметрии	Малый Pr	Большой Pr
$\nu(z)$	валы	валы
$\nu(T)$	валы	ячейки
$q \neq 0$	валы/ячейки	ячейки другого типа
$\chi(z)$	валы/ячейки	ячейки другого типа
$\chi(T)$	валы/ячейки	ячейки другого типа

Вторая часть работы будет посвящена сравнению результатов анализа упрощенных моделей конвекции с результатами прямого численного моделирования процесса конвективной неустойчивости небуссинесковской жидкости в ограниченной области.

Список литературы

1. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. М.: Эдиториал УРСС, 1999. Р. 248.
2. Colinet P., Legros J.C., Velarde M.G. Nonlinear dynamics of surface tension-driven instabilities. Wiley-VCH, 2001.

3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 стр.
4. Lord Rayleigh. On convection currents in a horisontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. // *Phil. Mag.* 1916. Vol. ser. 6, 32(192). Pp. 529–546.
5. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection // *J. Fluid Mech.* 1965. Vol. 23, no. 1. Pp. 129–144.
6. Gor'kov L.P. Stationary convection in a plane liquid layer near critical heat transfer poin // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 1958. Vol. 6. P. 311.
7. Palm E. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection // *J. Fluid Mech.* 1960. Vol. 8, no. 2. Pp. 183–192.
8. Busse F.H. The stability of finite amplitude cellular convection and it's relation to an extremum principle // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30, no. 4. Pp. 625–649.
9. Krishnamurti R. Finite amplitude convection with changing mean temperature. Part 1. Theory // *J. Fluid Mech.* 1968. Vol. 33, no. 3. Pp. 445–455.
10. Krishnamurti R. Finite amplitude convection with changing mean temperature. Part 2. An experimental test of the theory // *J. Fluid Mech.* 1968. Vol. 33, no. 3. Pp. 457–463.
11. Thual O. Zero-Prandtl-number convection // *Journal of Fluid Mechanics.* 1992. Vol. 240. Pp. 229–258.
12. Palm E. Nonlinear Thermal Convection // *Annual Review of Fluid Mechanics.* 1975. Vol. 7. Pp. 39–61.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	3
3. Амплитудные уравнения	4
3.1. Количество членов в разложении	6
3.2. Бифуркация валов с одним волновым вектором	10
3.3. Бифуркация валов с двумя волновыми векторами	12
3.4. Бифуркация валов с тремя волновыми векторами	15
4. Метод малого параметра	18
4.1. Разложение по малому параметру и амплитудные уравнения	18
4.2. Приближение бесконечно малого Прандтля	19
4.3. Уравнения последовательных приближений	21
4.4. Зависимость вязкости от вертикальной координаты	23
4.5. Зависимость вязкости от температуры	24
4.6. Теплопроводность, зависящая от вертикальной координаты, и внутренние источники тепла	26
4.7. Зависимость температуропроводности от температуры	27
5. Заключение	28
Список литературы	28