



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Пеньков В.И., Овчинников М.Ю.,
Ролдугин Д.С.

Трехосная ориентация
спутника в орбитальных
осях посредством
магнитного момента.
Управление по вектору
конечного поворота

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Трехосная ориентация спутника в орбитальных осях посредством магнитного момента. Управление по вектору конечного поворота // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 7. 21 с. doi:[10.20948/prepr-2018-7](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-7)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-7>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

В.И. Пеньков, М.Ю. Овчинников, Д.С. Ролдугин

**Трехосная ориентация спутника
в орбитальных осях посредством
магнитного момента.**

Управление по вектору конечного поворота

Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С.

Трехосная ориентация спутника в орбитальных осях посредством магнитного момента. Управление по вектору конечного поворота

Рассматривается спутник, оснащенный магнитной системой ориентации. Предложены два алгоритма управления с использованием вектора конечного поворота. Проведен подбор параметров управления для варианта больших робастных управляющих воздействий и малых, реалистичных моментов. Проведено численное моделирование, показывающее потенциал предложенного управления.

Ключевые слова: магнитная система ориентации, вектор конечного поворота

Vladimir Penkov, Mikhail Ovchinnikov, Dmitry Roldugin

Magnetic attitude control in orbital frame. Vector of finite rotation control method

Attitude motion of a satellite equipped with an active magnetic attitude control system is considered. Two control approaches using the finite rotation vector are proposed. Control parameters are adjusted for big robust control authority and small but realistic control values. Numerical simulation is carried out to demonstrate the control capabilities.

Key words: magnetic attitude control system, vector of finite rotation

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-71-20117.

Содержание

Введение	3
1. Уравнения движения.....	4
2. Управление магнитным моментом спутника	6
3. О нахождении параметров закона управления	8
4. Примеры переходных процессов.....	9
Сферически-симметричный спутник	9
Осесимметричный спутник.....	13
Гравитационно устойчивый спутник	17
Заключение.....	19
Литература	20

Введение

Попытки отказаться от маховиков и возложить на магнитную систему непрерывное управление ориентацией упирались в отсутствие алгоритма управления токами в катушках. Основная трудность построения закона управления кроется в неполной локальной (мгновенной) управляемости, то есть с помощью магнитного момента, создаваемого катушками, можно получить механический момент, действующий на спутник, однако его компонента вдоль силовой линии магнитного поля Земли всегда равна нулю.

Уже предложены алгоритмы управления (например, в [1–3]), теоретически обеспечивающие трехосную ориентацию как в абсолютной, так и в орбитальной системах координат. В [4, 5] описан успешный, по утверждению авторов, летный эксперимент с подобным управлением. Эксперимент представляется не вполне чистым, поскольку на спутнике имелся маховик и к результату надо относиться с осторожностью.

В данной работе рассматриваются два алгоритма управления с использованием вектора конечного поворота. В первом подходе управляющий момент токовых катушек максимально приближен к вектору конечного поворота, во втором подходе к вектору поворота приближен вектор углового ускорения. Основной причиной привлечения вектора конечного поворота является попытка разработки «робастного» управления, опирающегося на естественные представления и позволяющего по возможности полно использовать потенциал токовых катушек. Численное моделирование показывает, что при отсутствии ограничений на величину магнитного момента управление по вектору конечного поворота при подходящем подборе параметров переводит спутник из произвольно взятого положения в заданное за доли оборота по орбите. Несмотря на то что магнитные моменты при этом принимают нереально большие значения, факт существования подобных управлений представляет интерес.

В случае малых величин управляющих моментов (малость проистекает от алгоритмов управления, а не из технических возможностей) исследование такого управления также представляет значительный интерес. Численное моделирование показывает, что проблема быстродействия при этом находит приемлемое решение. Основной недостаток алгоритмов с малыми моментами – скорее, не низкое быстродействие, а невысокая точность системы ориентации. Малый восстанавливающий момент влечет за собой повышенную реакцию на внешние возмущения. Нетривиальным также является нахождение приемлемых значений параметров управления. При выполнении работы использовались два способа: первый – подбор параметров посредством массовых численных

экспериментов, второй – оптимизация параметров по быстрдействию на основе линейных дифференциальных уравнений движения. Последнее также требует значительного объема вычислений с привлечением теории Флоке.

Ниже приводится описание двух вариантов управления положением спутника с использованием вектора конечного поворота и результаты численного моделирования. Отметим, что при отсутствии нормировки вектора поворота соответствующее управление из других соображений получено авторами в [1]. Моделирование проводилось для трех вариантов геометрии масс: сферически-симметричного спутника, гравитационно неустойчивого осесимметричного спутника и спутника с гравитационной устойчивостью. Вычисления проводились в системе СИ.

1. Уравнения движения

Рассмотрим спутник, представляющий собой твердое тело с гипотетическими токовыми катушками, посредством которых можно создавать любой магнитный момент. Центр масс спутника движется по круговой орбите вокруг Земли. Для написания уравнений движения спутника относительно центра масс введем две правые прямоугольные системы координат.

$Ox_1x_2x_3$ – связанная со спутником система координат. Её оси суть главные центральные оси инерции спутника, точка O совпадает с его центром масс.

$OX_1X_2X_3$ – орбитальная система координат. Ось OX_3 направлена по радиус-вектору точки O относительно центра масс Земли, ось OX_1 совпадает с трансверсалью, ось OX_2 – с нормалью к плоскости орбиты.

Положение связанной со спутником системы координат относительно орбитальной определим с помощью углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Матрицу перехода \mathbf{A} с элементами a_{ij} определим соотношениями

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_2c_3 + s_1s_2s_3, & a_{12} &= c_1s_3, & a_{13} &= -s_2c_3 + s_1c_2s_3, \\ a_{21} &= -c_2s_3 + s_1s_2c_3, & a_{22} &= c_1c_3, & a_{23} &= s_2s_3 + s_1c_2c_3, \\ a_{31} &= c_1s_2, & a_{32} &= -s_1, & a_{33} &= c_1c_2, \\ s_i &= \sin \alpha_i, & c_i &= \cos \alpha_i, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{1}$$

Связь систем координат дается матричным соотношением

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \mathbf{X}_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где \mathbf{X}_j , \mathbf{x}_i – орты орбитального и связанного со спутником трехгранников.

Уравнения движения спутника относительно центра масс под действием гравитационного, магнитного и возмущающего моментов запишем в виде

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_{grav}^1 + M_{mag}^1 + M_{dist}^1,$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_{grav}^2 + M_{mag}^2 + M_{dist}^1,$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_{grav}^3 + M_{mag}^3 + M_{dist}^3,$$

$$\dot{a}_{11} = ra_{21} - qa_{31} - \omega_0 a_{13}, \quad \dot{a}_{21} = pa_{31} - ra_{11} - \omega_0 a_{23}, \quad \dot{a}_{31} = qa_{21} - pa_{21} - \omega_0 a_{33},$$

$$\dot{a}_{12} = ra_{22} - qa_{32}, \quad \dot{a}_{22} = pa_{32} - ra_{12}, \quad \dot{a}_{32} = qa_{12} - pa_{22}, \quad \dot{a}_{13} = ra_{23} - qa_{33} + \omega_0 a_{13},$$

$$\dot{a}_{23} = pa_{33} - ra_{13} + \omega_0 a_{21}, \quad \dot{a}_{33} = qa_{23} - pa_{23} + \omega_0 a_{31},$$

где A , B , C – моменты инерции спутника относительно связанных осей; M_{grav}^j , M_{mag}^j , M_{dist}^j – компоненты гравитационного, магнитного и возмущающего моментов ($j=1,2,3$); p , q , r – проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси связанной системы координат; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите; точкой обозначено дифференцирование по времени t . Моменты задаются в проекциях на оси связанной системы координат, причем

$$M_{grav}^1 = 3\omega_0^2(C - B)a_{23}a_{33}, \quad M_{grav}^2 = 3\omega_0^2(A - C)a_{13}a_{33}, \quad M_{grav}^3 = 3\omega_0^2(B - A)a_{13}a_{23},$$

$$\mathbf{M}_{mag} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

\mathbf{I} – магнитный момент спутника, \mathbf{B} – индукция магнитного поля Земли.

В предположении, что магнитное поле Земли аппроксимируется полем диполя, помещенного в центр Земли и направленного вдоль ее оси вращения, справедливы [6] следующие выражения для проекций вектора \mathbf{B} на оси орбитальной системы координат:

$$B_{X_1} = B_m \sin i \cos u, \quad B_{X_2} = B_m \cos i, \quad B_{X_3} = -2B_m \sin i \sin u, \quad (3)$$

$B_m = \mu_e / r_0^3$, $\mu_e = \mu_0 \mu_m / 4\pi$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ кг·м·А⁻²·с⁻² – магнитная постоянная, r_0 – расстояние между центрами масс Земли и спутника, i – наклонение орбиты к плоскости экватора, u – аргумент широты. Все величины задаются в системе СИ.

2. Управление магнитным моментом спутника

Как известно, твердое тело с одной неподвижной точкой можно перевести из произвольного положения в заданное одним поворотом на угол φ вокруг оси с направляющими косинусами [7]

$$p_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \varphi}, p_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \varphi}, p_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \varphi}, \quad (4)$$

причем

$$\cos \varphi = (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)/2. \quad (5)$$

Под заданным положением спутника будем понимать положение, при котором оси связанной системы координат совпадают с орбитальными (трехосная ориентация). Применение формул (4) в исследовании динамики спутника осложняется тем, что вблизи требуемой ориентации $a_{11} \approx a_{22} \approx a_{33} \approx 1$, $a_{12} \approx a_{21}, a_{13} \approx a_{31}, a_{23} \approx a_{32}$, $\cos \varphi \approx 1, \sin \varphi \approx 0$, и формулы (4)-(5) становятся малоприменимыми. Для устранения коллизии ось поворота в дальнейшем определим вектором $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, где

$$p_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, p_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, p_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2}.$$

Для конструирования закона управления магнитным моментом спутника сначала рассмотрим два варианта управления при полной управляемости.

Вариант А. Предположим, что к спутнику приложены демпфирующий

$$\mathbf{M}_1 = -k_1 \boldsymbol{\omega} \quad (6)$$

и позиционный

$$\mathbf{M}_2 = k_2 \mathbf{p}, \quad (7)$$

моменты, последний направлен по вектору конечного поворота.

Полный механический момент, приложенный к спутнику,

$$\mathbf{M}_{\text{ful}} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2. \quad (8)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – относительная угловая скорость, причем она задается через орты связанной и орбитальной систем как $\boldsymbol{\omega} = (p\mathbf{x}_1 + q\mathbf{x}_2 + r\mathbf{x}_3) - \omega_0 \mathbf{X}_2$, $k_1 > 0, k_2 > 0$ – коэффициенты, определяющие качество управления. Закон управления (8) для краткости будем называть ПДП (пропорциональным дифференциально-позиционным) управлением¹.

Вариант Б. Предположим, что к спутнику приложены тот же демпфирующий момент (6) и управляющий момент, при котором теперь по вектору конечного поворота направлен вектор углового ускорения

¹ В зарубежной литературе такое управление принято называть ляпуновским, так как при его построении обычно используется функция Ляпунова.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = k_2 \mathbf{p}. \quad (9)$$

Из уравнений вида (1) с учетом (7) нетрудно получить

$$\varepsilon_1 = \dot{p} = (M_{grav}^1 + M_{gir}^1 + M_2^1) / A = k_2 p_1,$$

$$\varepsilon_2 = \dot{q} = (M_{grav}^2 + M_{gir}^2 + M_2^2) / B = k_2 p_2,$$

$$\varepsilon_3 = \dot{r} = (M_{grav}^3 + M_{gir}^3 + M_2^3) / C = k_2 p_3,$$

откуда проекции управляющего момента \mathbf{M}_2 на связанные оси будут

$$M_2^1 = Ak_2 p_1 - M_{grav}^1 - M_{gir}^1,$$

$$M_2^2 = Bk_2 p_2 - M_{grav}^2 - M_{gir}^2,$$

$$M_2^3 = Ck_2 p_3 - M_{grav}^3 - M_{gir}^3.$$

Предполагается, что все величины, стоящие справа, можно вычислить на борту. Полный момент по-прежнему

$$\mathbf{M}_{ful} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.$$

Для управления спутником посредством магнитного момента вычтем из \mathbf{M}_{ful} составляющую, коллинеарную вектору \mathbf{B} магнитной индукции поля Земли,

$$\mathbf{M}_{mag} = \mathbf{M}_{ful} - (\mathbf{M}_{ful} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b},$$

где единичный вектор в направлении индукции геомагнитного поля

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

Из (2) находится магнитный момент \mathbf{I} спутника, посредством которого реализуется момент \mathbf{M}_{mag} ,

$$\mathbf{I} = \mathbf{B} \times \mathbf{M}_{mag} / B^2.$$

Первый вариант (7) выбора управляющего момента представляется более естественным, нежели (9). Но, как известно, направление приложенного момента и направление вызываемого этим моментом вращения, в особенности для тел, не обладающих сферической симметрией, обычно не совпадают. Второй вариант, в связи с этим, предлагает некоторую альтернативу.

Рассматривался также ряд модификаций управлений А и Б – управления с вычетом гравитационного и/или гироскопического моментов, с вычетом членов в динамических уравнениях Эйлера, проистекающих от замены абсолютных угловых скоростей относительными, варианты с отключением управления в случае близости вектора поворота и вектора индукции \mathbf{B} . Кроме демпфирования по угловой скорости (6), использовалось демпфирование по кинетическому моменту

$$\mathbf{M}_1 = -k_1 (A\boldsymbol{\omega}_1 + B\boldsymbol{\omega}_2 + C\boldsymbol{\omega}_3).$$

Сразу отметим, что применение модифицированных управлений не дало существенных преимуществ.

3. О нахождении параметров закона управления

Для нахождения параметров k_1 , k_2 использовались два способа. Первый способ – подбор параметров посредством численных решений уравнений движения при различных значениях k_1 , k_2 и начальных условиях. Этим способом определялись значения k_1 , k_2 в случаях нереально больших магнитных моментов, показывающих принципиальную возможность трехосной ориентации за короткий промежуток времени (менее витка по орбите). Подбором также удается в некоторых случаях скорректировать найденные с помощью теории Флоке [8] оптимальные по быстродействию значения k_1 , k_2 , поскольку эти значения, оптимальные в линейном приближении, не являются таковыми при нелинейном подходе. Также предварительную информацию о влиянии k_1 , k_2 на качество управления можно получить, применяя (8) (полная управляемость). Второй способ поиска параметров – их оптимизация по быстродействию на основе линеаризованных в окрестности требуемого положения дифференциальных уравнений. Для варианта управления А система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 & A\alpha_1'' + k_1(1-b_1^2)\alpha_1' - k_1b_1b_2\alpha_2' + (A-B+C-k_1b_1b_3)\alpha_3' + \\
 & (k_2(1-b_1^2) + 4(B-C))\alpha_1 - k_2b_1b_2\alpha_2 - k_2b_1b_3\alpha_3 = 0, \\
 & B\alpha_2'' - k_1b_1b_2\alpha_1' + k_1(1-b_2^2)\alpha_2' + (A-B+C-k_1b_1b_3)\alpha_3' - \\
 & k_2b_1b_2\alpha_1 + (3(A-C) + k_2(1-b_2^2))\alpha_2 - k_2b_2b_3\alpha_3 = 0, \\
 & C\alpha_3'' - (A-B+C+k_1b_1b_3)\alpha_1' - k_1b_2b_3\alpha_2' + k_1(1-b_3^2)\alpha_3' - k_2b_1b_3\alpha_1 - \\
 & k_2b_2b_3\alpha_3 + (k_2(1-b_3^2) + B-A)\alpha_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Для управления Б имеем

$$\begin{aligned}
 & A\alpha_1'' + (k_1(1-b_1^2) + (B-A)b_1b_3)\alpha_1' + ((B-A)b_2b_3 - k_1b_1b_2)\alpha_2' + \\
 & ((B-A)b_3^2 - C - k_1b_1b_3)\alpha_3' + (k_2A(1-b_1^2) + 4(B-C)b_1^2)\alpha_1 + \\
 & + (4(B-C) - k_2A)b_1b_2\alpha_2 + (4(B-C) - k_2A)b_1b_2\alpha_3 = 0, \\
 & B\alpha_2'' - b_1b_2k_1\alpha_1' + (1-b_2^2)k_1\alpha_2' - b_2b_3k_1\alpha_3' + (3(A-C) - k_2B)b_1b_2\alpha_1 + \\
 & (k_2B(1-b_2^2) + 3(A-C)b_2^2)\alpha_2 + (3(A-C) - k_2B)b_2b_3\alpha_1 = 0, \\
 & C\alpha_3'' + ((C-B)b_1^2 + A - k_1b_1b_3)\alpha_1' + ((C-B)b_1^2 - k_1b_2b_3)\alpha_2' + \\
 & ((C-B)b_1b_3 + k_1(1-b_3^2))\alpha_3' + \\
 & (B-A-k_2C)(b_1b_3\alpha_1 + b_2b_3\alpha_2) + (k_2C(1-b_3^2) + (B-A)b_3^2)\alpha_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по аргументу широты $u = \omega_0 t$ (безразмерному времени), b_1, b_2, b_3 – проекции единичного вектора геомагнитной индукции на оси орбитальной системы. Для прямого диполя (3) это

$$b_1 = \sin i \cos u / b, \quad b_2 = \cos i / b, \quad b_3 = -2 \sin i \sin u / b, \\ b = \sqrt{\sin^2 i + \cos^2 i + 3 \sin^2 i \sin^2 u}.$$

Легко видеть, что коэффициенты систем (10) и (11) периодические с периодом 2π . По известной процедуре [8] при заданных числовых значениях A, B, C, k_1, k_2 для каждой из этих систем численным интегрированием от 0 до 2π строится матрица фундаментальных решений, вычисляется ее значение в конце периода и находятся корни соответствующего характеристического уравнения. Скорость затухания или возрастания амплитуд решений системы определяется наибольшим по модулю корнем. Для затухания (асимптотической устойчивости) наибольший модуль должен быть меньше единицы. Оптимизация выполнялась прогонкой значений k_1, k_2 с построением линий уровня.

Ниже приведены примеры переходных процессов для спутника в виде сферически симметричного тела, кругового гравитационно неустойчивого цилиндра и гравитационно устойчивого тела для некоторых значений k_1, k_2 , найденных как подбором, так и с применением теории Флоке.

4. Примеры переходных процессов

Примем следующие постоянные параметры для всех числовых экспериментов: наклонение орбиты 60° , начальное значение аргумента широты 60° , орбитальная скорость 10^{-3} с^{-1} .

Сферически-симметричный спутник

Для сферически-симметричных тел управления А и Б совпадают. Отметим лишь формальное различие в значениях и размерностях коэффициентов k_2 управлений А и Б (см. (7) и (9)). Примем следующие параметры аппарата:

- моменты инерции $300 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, параметры управления $k_1=5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $k_2=7000 \text{ Н}\cdot\text{м}$,²
- компоненты начальной относительной угловой скорости $(1, 2, 3)\cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$,
- начальные углы ориентации $75^\circ, 100^\circ, -150^\circ$.

² Далее размерности параметров управления для краткости опускаем.

На рис. 1 приведены результаты моделирования динамики спутника под действием робастного управления при нереально больших управляющих моментах.

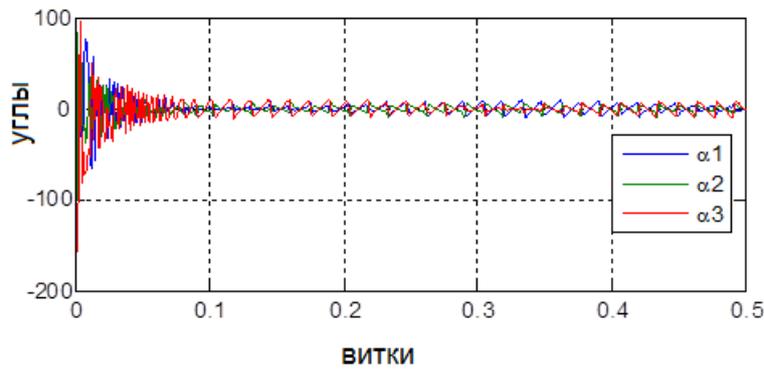


Рис. 1а. Робастное управление

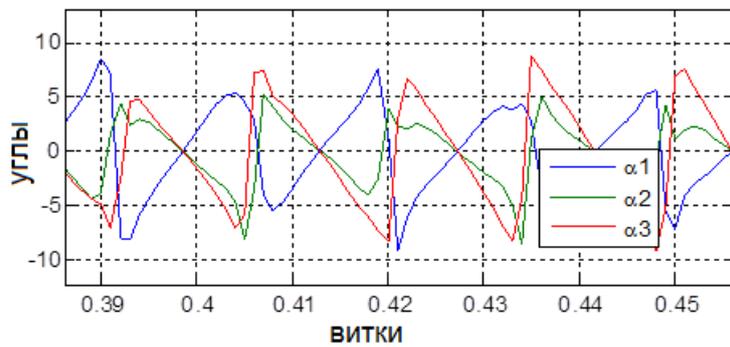


Рис. 1б. Фрагмент предыдущего графика

Увеличение k_2 в 3 раза приводит к уменьшению в 3 раза амплитуды установившихся колебаний (рис. 2).

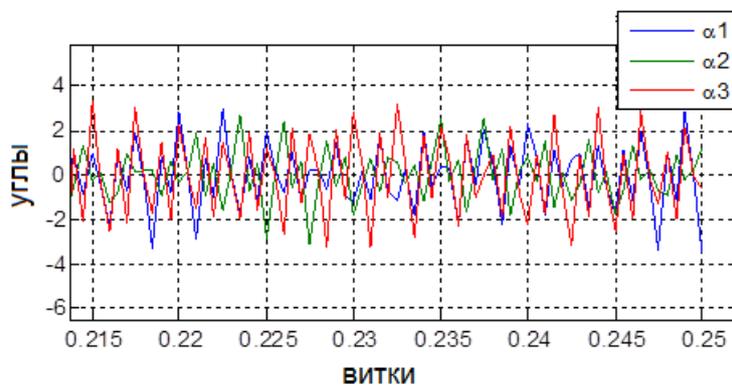


Рис. 2. Влияние k_2 на амплитуду установившихся колебаний

Рассмотрим теперь действие более реалистичных по величине управляющих воздействий. Оптимальные значения параметров k_1 и k_2 закона управления сферически симметричным спутником определялись построением линий уровня наибольшего модуля характеристических чисел матрицы монодромии для систем (10) и (11).

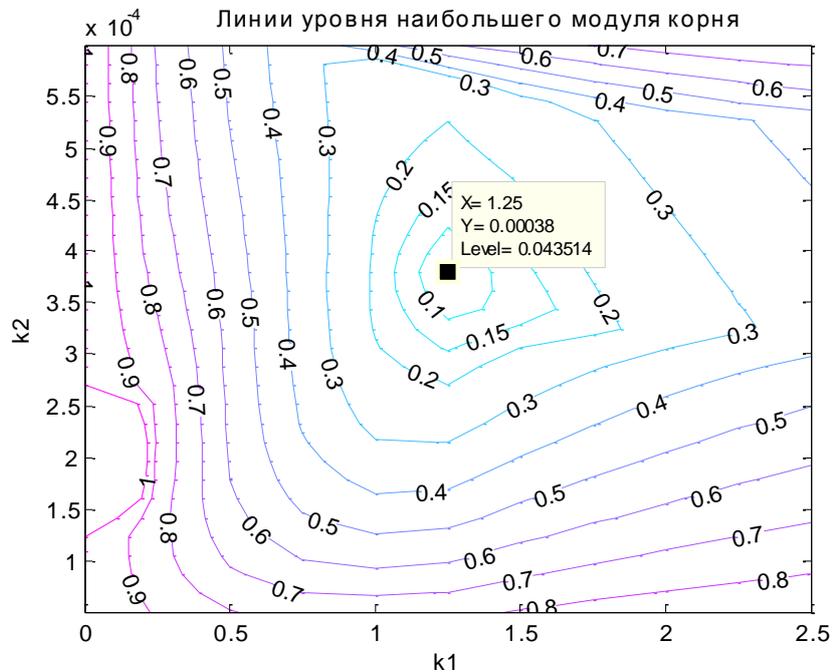


Рис. 3. Определение оптимальных параметров управления

При оптимальных по быстродействию $k_1=1.25$, $k_2=3.8 \cdot 10^{-4}$ больший модуль характеристических показателей ρ_k ($k=1, \dots, 6$) принимает наименьшее значение 0.0435. Переходные процессы при тех же начальных условиях без возмущающего момента и с возмущающим моментом приведены ниже.

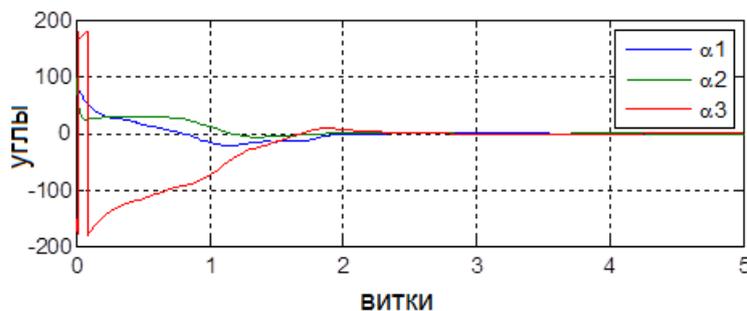


Рис. 4а. Переходные процессы без возмущающего момента

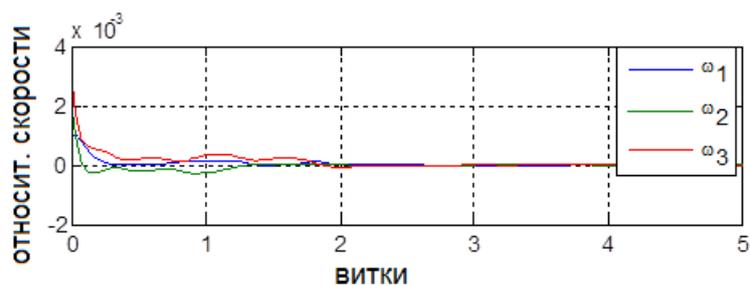


Рис. 46. Переходные процессы без возмущающего момента

Управляющий момент оказывается на уровне $1\text{-}2 \cdot 10^{-4}$ Н·м. Ниже показано влияние постоянного возмущающего момента $\mathbf{M}_{dist} = (1,1,1) \cdot 10^{-5}$ Н·м на переходный процесс. Параметры закона управления прежние.

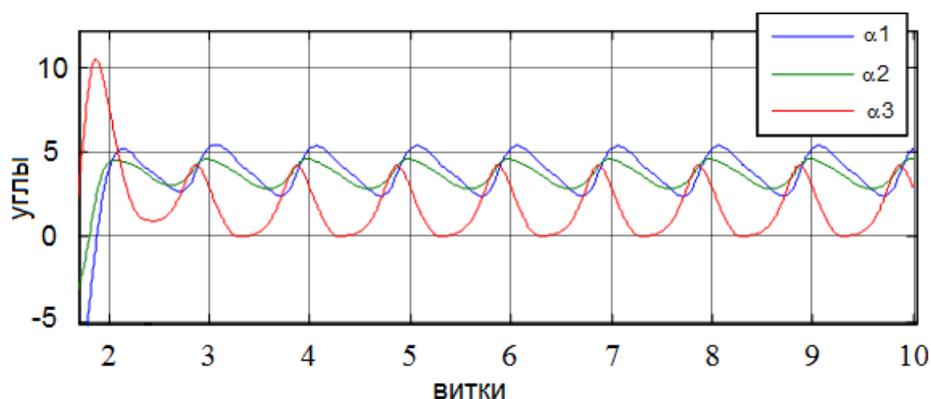


Рис. 5а. Переходные процессы при наличии возмущающего момента

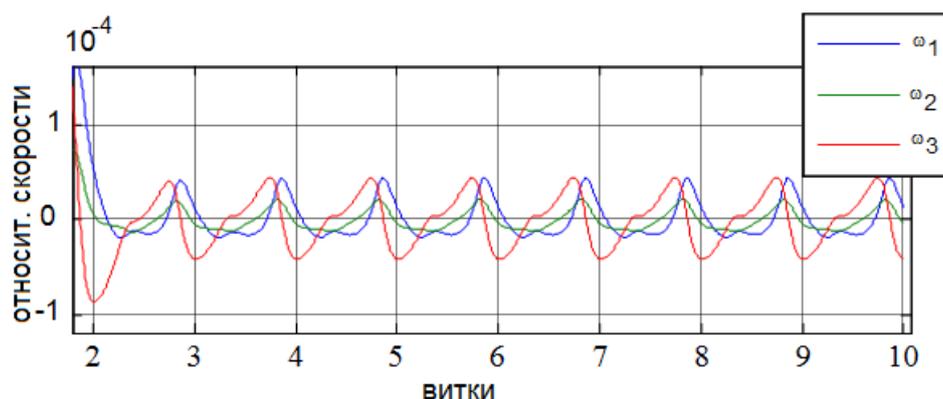


Рис. 5б. Переходные процессы при наличии возмущающего момента

Для справки, момент на уровне 10^{-5} Н·м создает прямое солнечное давление на площадку 1 м^2 при удалении центра давления от центра масс 2.5 м . Такой момент, как видно из рис. 5а, приводит к отклонению спутника от требуемого положения на 5 градусов. При этом катушка с сердечником массой

3 кг, что реально для спутника с моментами инерции порядка $300 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, способна создать управляющий момент величиной до $10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$. Таким образом, потенциал магнитной системы с рассмотренными законами управления с точки зрения компенсации возмущающего момента используется неэффективно.

Осесимметричный спутник

Будем теперь считать, что моменты инерции спутника составляют 300 и $100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, при этом первый и третий моменты равны ($A=C$). Положим компоненты начальной относительной скорости $(1,2,3)\cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, начальные углы ориентации $80^\circ, 100^\circ, -150^\circ$. Подобрать параметры управления А, приводящего спутник в ориентированное положение в пределах одного витка, не удалось. Управление Б, как видно из следующих графиков, обеспечивает нужную ориентацию при больших величинах управления.

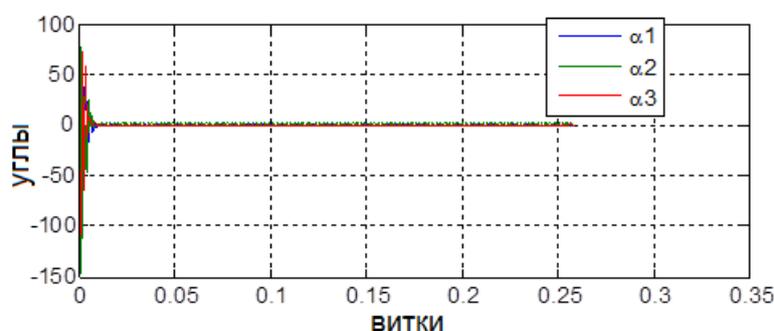


Рис.6а. Робастное управление

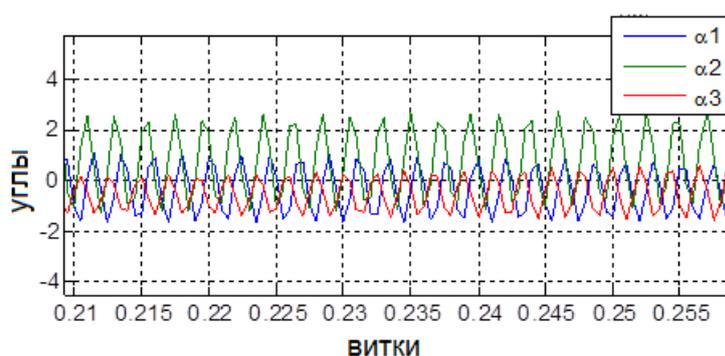


Рис.6б. Фрагмент предыдущего графика

При малых управляющих моментах оптимальные значения параметров k_1 и k_2 для управлений типа А и Б определялись построением линий уровня наибольшего модуля характеристических показателей для систем (10) и (11).

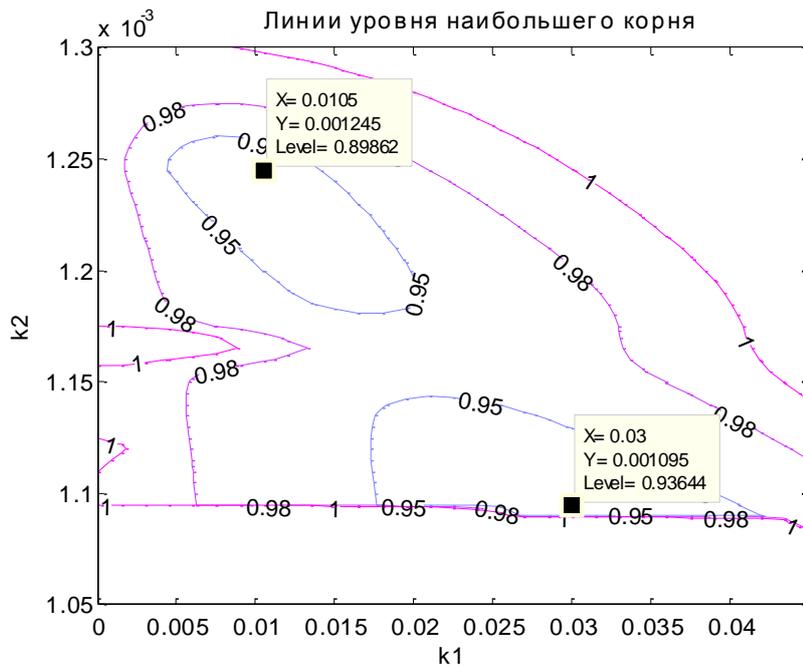


Рис. 7. Линии уровня при управлении А

Обнаружены две локально оптимальные по быстрдействию пары параметров управления:

- $k_1=0.0105$, $k_2=0.001245$, $\min \max |\rho_k| = 0.89862$,
- $k_1=0.03$, $k_2=0.00115$, $\min \max |\rho_k| = 0.938$.

Переходные процессы для обоих оптимумов приведены ниже. При моделировании начальные данные соответствовали окрестности требуемой ориентации. Так, компоненты начальной скорости были приняты равными $(1, 2, 3) \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, начальные углы ориентации $2^\circ, 4^\circ, -3^\circ$. Выбор малых значений начальных углов и скоростей объясняется малостью области захвата, при выходе из которой управление не способно привести спутник в ориентированное положение. Действие гравитационного момента превалирует над действием управления, и спутник попадает в гравитационно устойчивое положение равновесия.

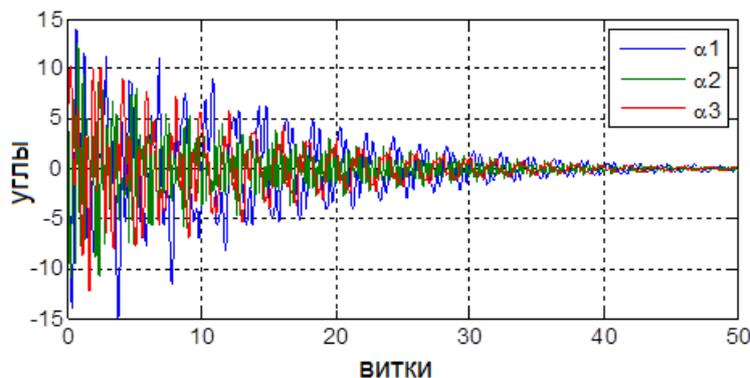


Рис. 8а. Ориентация без возмущающего момента (первый оптимум)

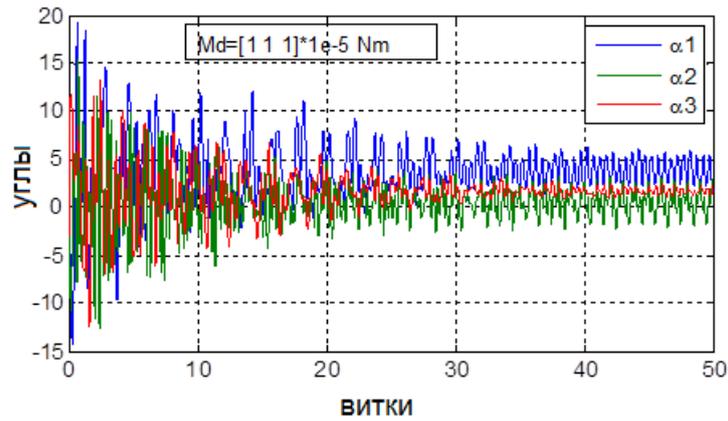


Рис. 8б. Ориентация при наличии постоянного возмущающего момента на уровне 10^{-5} Н·м (первый оптимум)

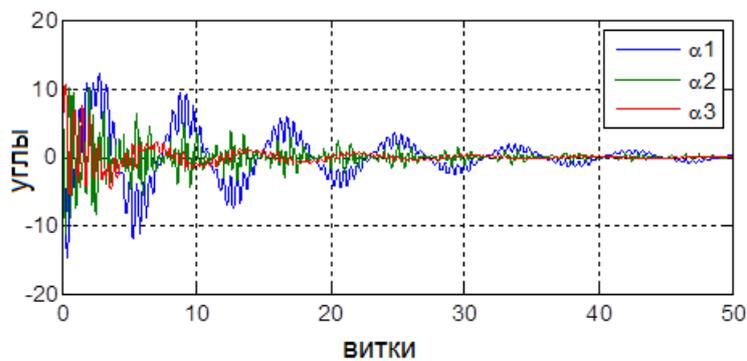


Рис. 9а. Ориентация без возмущающего момента (второй оптимум)

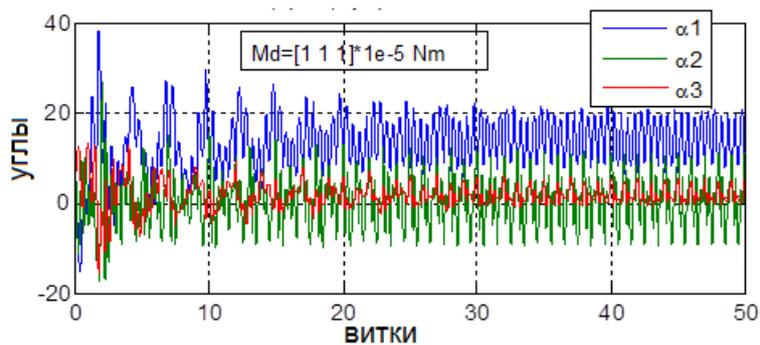


Рис. 9б. Ориентация при наличии постоянного возмущающего момента на уровне 10^{-5} Н·м (второй оптимум)

Линии уровня наибольшего характеристического числа матрицы монодромии для управления Б приведены на рис. 10.

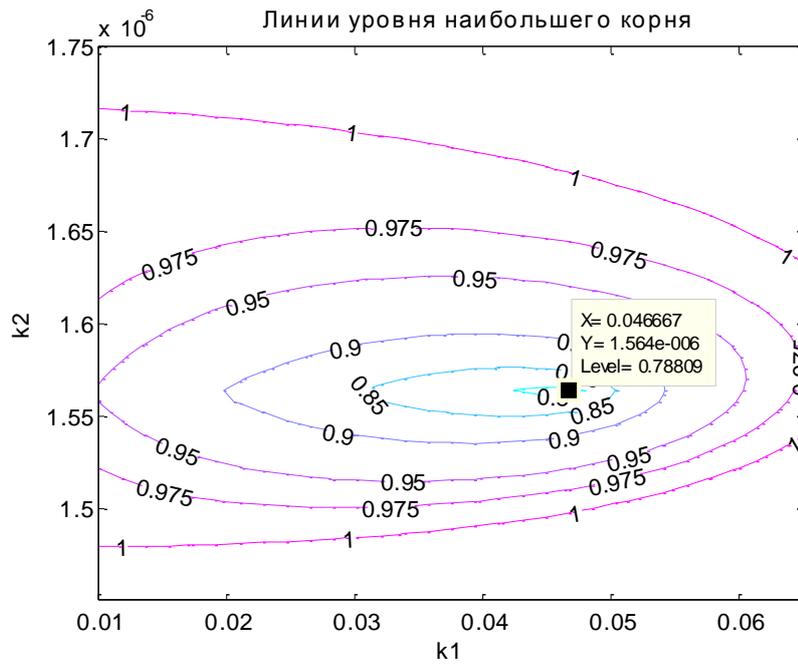


Рис. 10. Линии уровня при управлении Б

При оптимальных по быстродействию $k_1=0.046667$, $k_2=1.564 \cdot 10^{-6}$ большой модуль корней характеристического уравнения принимает наименьшее значение $\min \max |\rho_k| = 0.78809$. Переходные процессы при прежних начальных условиях без возмущающего момента и с возмущающим моментом приведены ниже.

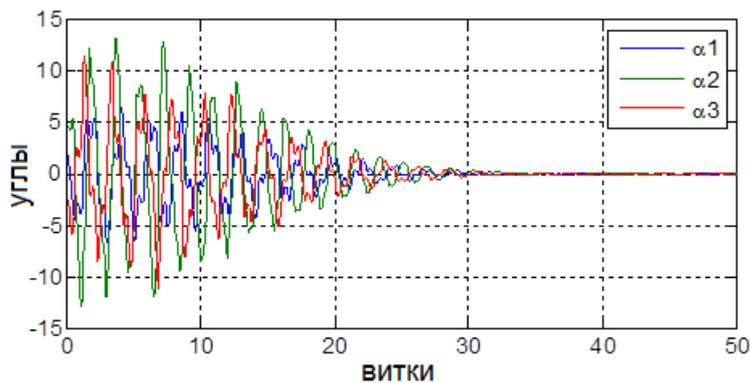


Рис. 11а. Переходные процессы без возмущающего момента

Возмущающий момент на уровне 10^{-5} Н·м выводит спутник из области захвата. На Рис. 11б приведен переходный процесс с уменьшенным в 4 раза возмущающим моментом.

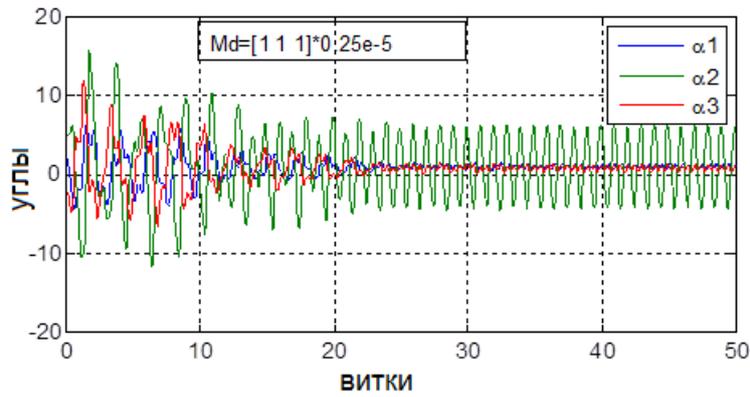


Рис. 11б. Ориентация при наличии возмущающего момента

Гравитационно устойчивый спутник

Робастное управление ввиду тривиальности ситуации не рассматривалось. Рассмотрим случай малых управляющих моментов для спутника с моментами инерции 70, 100, 40 кг·м². На рис. 12 представлены линии уровня наибольшего характеристического числа матрицы монодромии для управления А.

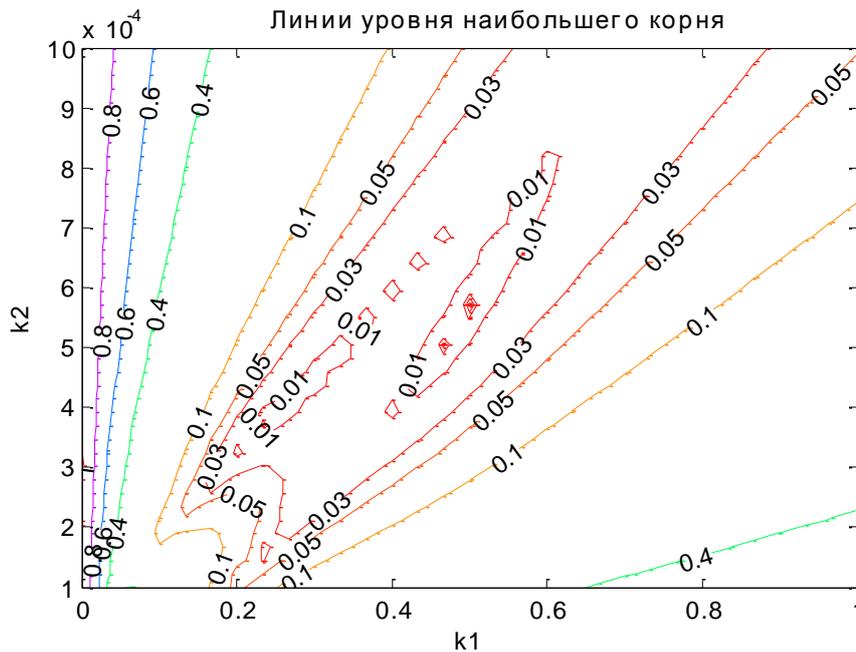


Рис. 12. Устойчивость требуемой ориентации при управлении А

Как видно из рис. 12, существует несколько оптимальных значений. Наименьшим оказалось значение $\min \max |\rho_k| = 0.00128$ при $k_1 = 0.49333$, $k_2 = 0.00056$. Примеры переходных процессов приведены на рис. 13 (пример без возмущений не представляет большого интереса и не приведен). При этом начальная угловая скорость была принята равной $(1, 2, 3) \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, углы 80° , 100° , -150° .

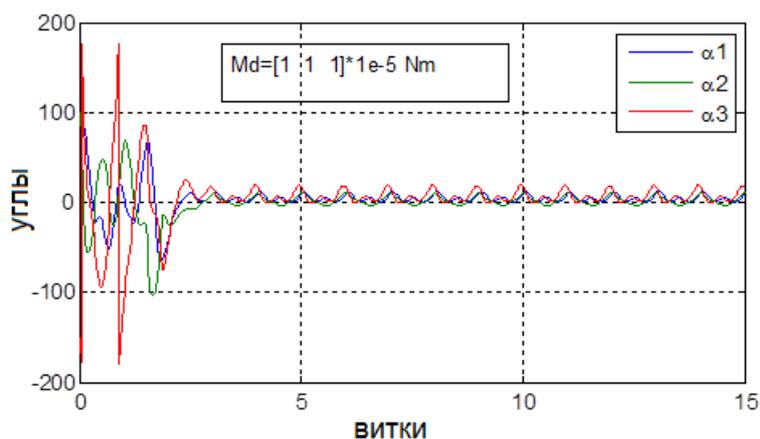


Рис. 13а. Стабилизация спутника с возмущающим моментом

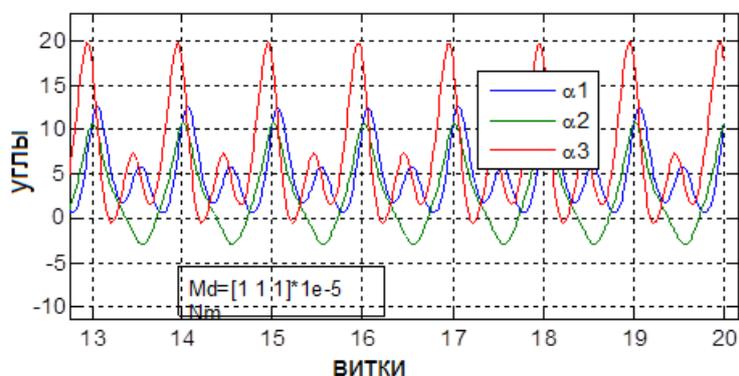


Рис. 13б. Фрагмент предыдущего графика

Присутствие на гравитационно устойчивом спутнике магнитной системы управления ставит вопрос о возможном увеличении восстанавливающего момента и уменьшения отклика системы на возмущающий момент. На рис. 14 показано отклонение спутника от требуемой ориентации под действием постоянного возмущающего момента и восстанавливающего гравитационного.

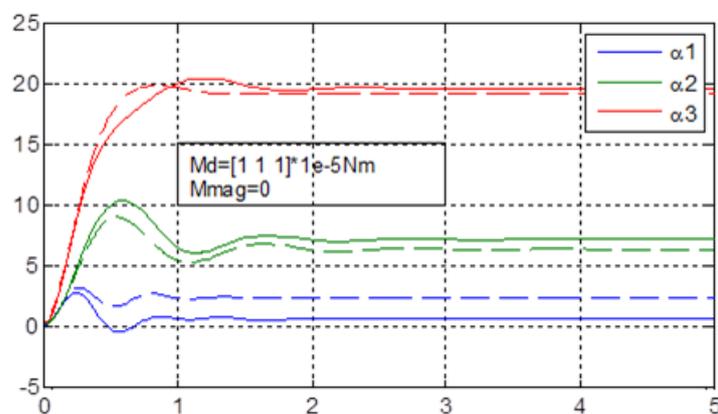


Рис. 14. Отклик гравитационной системы без магнитного управления

Штриховыми линиями показаны решения линейных дифференциальных уравнений. Как видно из рисунков, магнитная система управления не привела к увеличению грубости.

Устойчивость линейных уравнений (11) в зависимости от параметров управления может быть оценена по рис. 15.

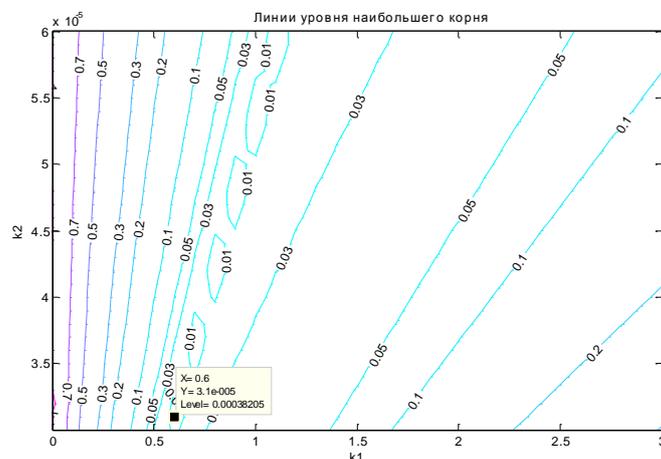


Рис. 15. Фрагмент линий уровня

Как видно из рисунка, здесь имеется несколько минимальных значений. Наименьшим оказалось значение $\min \max |\rho_k| = 0.000382$ при $k_1 = 0.6$, $k_2 = 3.1 \cdot 10^{-5}$. Пример моделирования приведен ниже. Начальные данные сохранены.

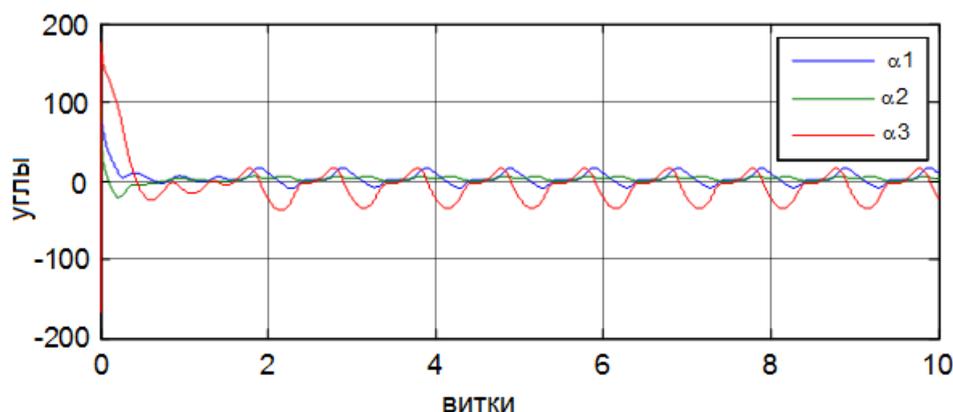


Рис. 16. Стабилизация с учетом возмущающего момента

Как видно из рис. 16, потенциал магнитной системы с точки зрения компенсации возмущающего момента по-прежнему используется неэффективно.

Заключение

Показано, что робастное пропорционально-дифференциально-позиционное управление с применением вектора конечного поворота

практически нечувствительно к возмущающим моментам и приводит спутник в ориентированное положение за доли одного витка. Это является подтверждением ожидаемых предположений о такой возможности. Нереально большие моменты в приведенных примерах такого управления не означают практической неприменимости подобных управлений.

Управление ПДП с малыми управляющими моментами, базирующееся на теории Флоке и пригодное для протяженных во времени управлений в течение единиц и десятков витков, не привело к качественно новым результатам. По быстродействию управление приемлемо. Основной недостаток – малая “грубость” управления по отношению к возмущающим моментам. Кроме того, приведение спутника в гравитационно неустойчивое ориентированное положение происходит только в пределах области притяжения, на размер которой, как показало предварительное исследование, влияет степень гравитационной неустойчивости.

Исследование ПДП управления необходимо продолжить с акцентом на робастное управление. ПДП управление с малыми моментами представляется менее перспективным с точки зрения повышения “грубости” системы. Реакция на возмущение здесь носит интегральный характер, происходит в течение нескольких витков, следовательно, с большим запаздыванием.

Литература

1. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronautica*. 2015. V. 110. pp. 279–286.
2. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // *Acta Astronautica*. 2015. V. 107. pp. 87–96.
3. Wang P., Shtessel Y., Wang Y. -q. Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory*. Morgantown, West Virginia, 1998. pp. 500–504.
4. Guelman M. et al. The Gurwin-Techsat Microsatellite: Six Years Successful Operation in Space // *4S Symposium: Small Satellites, Systems and Services*. La Rochelle. V. 571. p. 62.
5. Guelman M. et al. Design and testing of magnetic controllers for Satellite stabilization // *Acta Astronautica*. 2005. V. 56, № 1–2. pp. 231–239.
6. Ovchinnikov M.Y. et al. Geomagnetic field models for satellite angular motion studies // *Acta Astronautica*. 2018. V. 144. pp. 171–180.
7. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва: Наука, 1973. 832 с.
8. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.