



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Данилов А.В., Кротов А.Н.,
Трифонов О.В.**

Общий подход к решению
обратной задачи кинематики
для манипулятора
последовательной
структуры с помощью
конечного поворота и
смещения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Данилов А.В., Кротов А.Н., Трифонов О.В. Общий подход к решению обратной задачи кинематики для манипулятора последовательной структуры с помощью конечного поворота и смещения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 81. 15 с. doi:[10.20948/prepr-2018-81](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-81)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-81>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В.

**Общий подход к решению
обратной задачи кинематики
для манипулятора последовательной структуры
с помощью конечного поворота и смещения**

Москва — 2018

Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В.

Общий подход к решению обратной задачи кинематики для манипулятора последовательной структуры с помощью конечного поворота и смещения.

Разработан новый подход решения обратной задачи кинематики для манипуляторов последовательной структуры с произвольным количеством звеньев, связанных кинематическими парами пятого класса. Сформулированы теоремы о конечном угле поворота и смещении для каждой степени подвижности манипулятора, позволяющие оптимально использовать каждую степень подвижности при движении схвата к заданным параметрам положения и ориентации при решении обратной задачи кинематики.

Ключевые слова: манипулятор, кинематические пары, обратная задача кинематики, конечный угол поворота, конечное смещение.

Danilov Alexander Vladimirovich, Kropotov Alexander Nikolaevich, Trifonov Oleg Vsevolodovich

General approach to solving the inverse problem of kinematics for a manipulator of a sequential structure by means of a finite rotation and displacement.

A new approach to solving the inverse problem of kinematics for manipulators of a sequential structure with an arbitrary number of links connected by kinematic pairs of the fifth class is developed. Theorems on the finite angle of rotation and displacement for each degree of mobility of the manipulator are formulated, which make it possible to optimally use each degree of mobility when the gripper moves to specified position and orientation parameters when solving the inverse kinematics problem.

Key words: manipulator, kinematic pairs, inverse kinematics problem, final angle of rotation, finite displacement.

1 Введение

Для управления движением конечного звена манипулятора (схвата) необходимо с определенным интервалом времени решать прямую и обратную задачи кинематики. В отличие от прямой задачи, основные проблемы при этом связаны с решением обратной. Актуальность решения обратной задачи кинематики (ОЗК) особенно возрастает при управлении манипуляторами с избыточным количеством звеньев в режиме малых временных интервалов. В настоящее время разработано множество методов, способных решить ОЗК для указанных манипуляторов, для которых получение аналитических решений не представляется возможным либо достаточно затруднительно. Рассмотрим некоторые из них.

Метод обратных преобразований [1] упрощает получение решения ОЗК, но не решает проблему однозначности решения. Метод штрафных функций, использующий решения задач нелинейного программирования [2], и методы, основанные на свойствах нейросетей [3], требуют слишком много времени на вычисления, что затрудняет их использование в режиме реального времени. Бикватернионное решение кинематической задачи управления, сводящее решение к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений кинестатики, не всегда может иметь решение [4]. Метод интервалов [5] для решения ОЗК предназначен для простых кинематических схем манипуляторов. Методы Sequential Monte Carlo Method (SMCM) [6], Style-based Inverse Kinematics [7] и Mesh-based Inverse Kinematics [8] требуют предварительного обучения модели, что недопустимо в условиях непредсказуемости условий применения манипулятора. Метод трех базовых функций, изложенный в [9], позволяет разложить алгоритмы рабочих движений манипулятора и решать широкий класс задач управления положением и ориентацией схвата на основе формализма операторов расширения векторной алгебры. Близким методом к рассматриваемому является метод ФАБРИК [10], основанный на построении пересечений осевых линий звеньев на принципе неизменности их длин, поэтому он принципиально не может решать ОЗК для манипуляторов, имеющих в качестве степеней подвижности призмы.

Наиболее близким методом к представленному в статье является метод, предложенный в статье [11]. Автором предложена пошаговая модель движения выбранной ограниченной части сочленений, необходимая для реализации определенного движения манипулятора исходя из назначения звеньев. Шаг движения выбирается дроблением угла поворота сочленения на заданное число. При этом на каждом шаге приходится всегда решать прямую задачу кинематики (ПЗК) для отслеживания положения схвата от заданного и корректировать алгоритм. В статье также не рассматривается сочленение в виде призмы.

Предлагаемый метод использует также пошаговое движение в сочленениях по назначенному порядку. Но, в отличие от вышеуказанного

метода, в предлагаемом методе вычисляются максимальные значения шага для каждого сочленения согласно сформулированным и приведенным ниже теоремам о конечных угле поворота и смещении. Вычисленный таким образом шаг соответствует параметрам критерия максимального приближения схвата к заданному положению и ориентации для каждого сочленения. Решения ПЗК для корректировки алгоритма не требуется. Пошаговое движение в сочленениях заканчивается при достижении совпадения текущего положения и ориентации схвата с заданным согласно заданной точности. При этом суммируемые значения величин шагов по каждой степени подвижности в процессе пошагового движения определяют обобщенные координаты нового положения манипулятора и являются решением ОЗК. Даниловым А.В. докладывались материалы метода на XV молодежной научно-технической конференции «Взгляд в будущее - 2017» в ОАО «ЦКБ МТ «РУБИН» [12].

Основой метода являются сформулированные ниже теоремы для определения *конечных углов поворота и конечных смещений* с помощью вспомогательных векторов по каждой степени подвижности. Совместное применение в алгоритме указанных теорем дают возможность решить ОЗК согласно параметрам **критерия максимального приближения схвата по положению и ориентации по каждой степени подвижности.**

2 Постановка задачи и принятые положения

Для указанного манипулятора по положению и ориентации схвата использовать в качестве критерия приближения схвата к заданному положению и ориентации схвата следующие параметры:

- для положения характерной точки схвата — R ,
- для ориентации относительно продольной оси схвата — α_1 ,
- для ориентации относительно поперечной оси схвата — α_2 ,

где R — расстояние от текущей характерной точки схвата до заданной целевой, α_1 — величина угла между текущей продольной осью схвата и заданной, α_2 — величина угла между текущей поперечной осью схвата и заданной.

Требуется создать такой алгоритм решения ОЗК, чтобы указанные параметры на каждом шаге для каждой степени подвижности достигали минимальных значений и удовлетворяли критерию максимального приближения схвата к заданным параметрам положения и ориентации. А достижение указанных параметров заданной точности $|R| < \varepsilon_{зад}$, $|\alpha_1| < \varepsilon_{зад}$, $|\alpha_2| < \varepsilon_{зад}$ соответствовало решению ОЗК.

Для решения поставленной задачи приняты следующие положения:

- для соответствия физическим критериям принято использовать естественные движения звеньев манипулятора в соответствии с видом сочленения и с учетом конструктивных ограничений,

- для создания равных возможностей участия в решении ОЗК каждой степени подвижности введены вспомогательные векторы,
- для определения максимального угла поворота звена относительно шарнира при решении задачи по положению сформулирована теорема 1 о *конечном угле поворота*,
- для определения максимального смещения звена относительно призмы при решении задачи по положению сформулирована теорема 2 о *конечном смещении*,
- для определения максимального угла поворота звена относительно шарнира при решении задачи ориентации относительно одной оси сформулирована теорема 3 о *конечном угле поворота*,
- разработана математическая модель манипулятора.

3 Объект исследования и его математическая модель

В прямоугольной декартовой системе координат $x_0y_0z_0$ нулевого звена в качестве объекта для исследования выберем восьмистепенной манипулятор, кинематическая схема которого представлена на рис. 1. Размеры звеньев выбраны произвольно, и каждое звено имеет длину, равную одному метру.

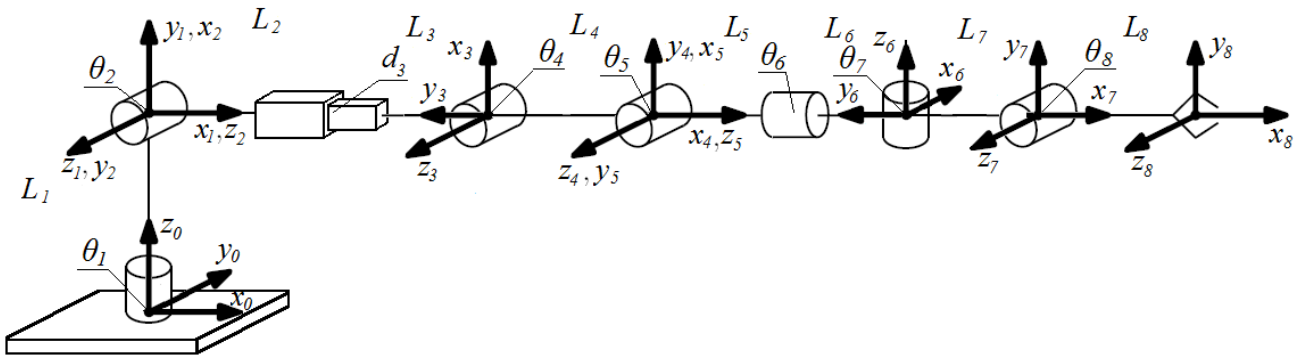


Рис. 1. Восьмистепенной манипулятор

Таблица 1

Параметры Денавита—Хартенберга

Звено, i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	L_1	θ_1
2	0	$\pi/2$	0	$\pi/2+\theta_2$
3	0	$-\pi/2$	L_2+d_3	0
4	L_4	0	0	$\theta_4-\pi/2$
5	0	$\pi/2$	0	$\pi/2+\theta_5$
6	0	$-\pi/2$	L_5+L_6	$\theta_6-\pi/2$
7	L_7	$\pi/2$	0	$\theta_7-\pi/2$
8	L_8	0	0	θ_8

Системы координат, связанные со звеньями манипулятора, построены по классическому построению согласно правилам Денавита—Хартенберга (Д-Х). Параметры Д-Х представлены в таблице 1.

Начальное положение схвата манипулятора, показанного на рис. 1, задано в неподвижной прямоугольной декартовой системе координат $x_0y_0z_0$ нулевого звена однородной матрицей преобразования координат T_{N0} [1].

$$T_{N0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

4 Представление манипулятора с помощью векторов

В прямоугольной декартовой системе координат $x_0y_0z_0$ нулевого звена построим манипулятор, показанный на рис. 1, с помощью векторов. Для определения звеньев манипулятора введем векторы \vec{M}_i , направленные вдоль каждого звена и равные по модулю длинам звеньев. Для определения ориентации осей кинематических пар введем векторы \vec{e}_i , направленные вдоль осей шарниров или осей призм в зависимости от вида кинематической пары. Построенный таким образом манипулятор показан на рис. 2. Нижний индекс $i=1, \dots, n$, где n — количество звеньев манипулятора.

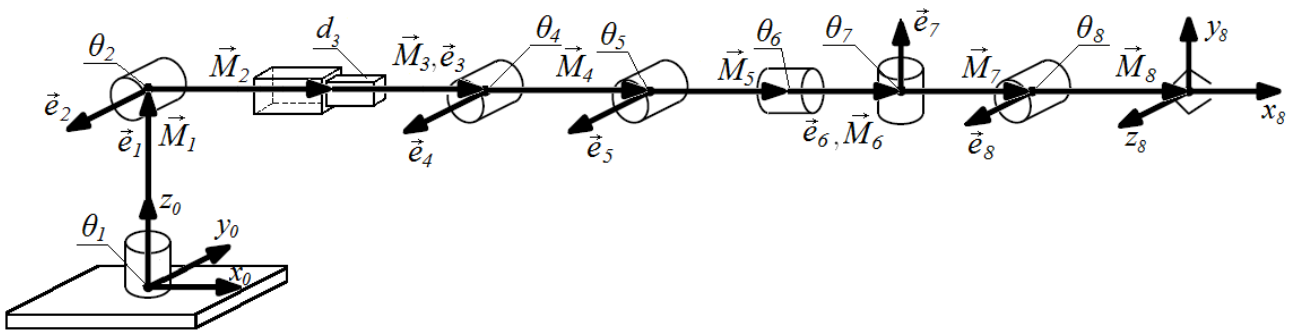


Рис. 2. Манипулятор, построенный с помощью векторов

Исходные данные для манипулятора, изображенного на рис. 2, приведены в таблице 2.

В таблице 2 q — обобщенные координаты манипулятора, имеющие значения углов θ для шарниров и значение смещения d для призм.

Таблица 2

Исходные данные

Звено №	1	2	3	4	5	6	7	8
\vec{M}	\vec{M}_1	\vec{M}_2	\vec{M}_3	\vec{M}_4	\vec{M}_5	\vec{M}_6	\vec{M}_7	\vec{M}_8
x	0	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	0	0	0	0
z	1	0	0	0	0	0	0	0
\vec{e}	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3	\vec{e}_4	\vec{e}_5	\vec{e}_6	\vec{e}_7	\vec{e}_8
x	0	0	1	0	0	1	0	0
y	0	-1	0	-1	-1	0	0	-1
z	1	0	0	0	0	0	1	0
q	θ	0	0	-	0	0	0	0
	d	-	-	1	-	-	-	-

Следует отметить, что у манипуляторов с произвольной ориентацией осей сочленений по отношению друг к другу обобщенные координаты углов определяются между плоскостями, проходящими через ось сочленения и примыкающие к ней звенья.

5 Вспомогательные векторы

Для решения задачи ОЗК в процессе итерационного пошагового движения звеньев манипулятора вводятся для каждой степени подвижности следующие вспомогательные векторы: вектор \vec{S}_i , соединяющий каждое i -е сочленение звена с характерной точкой N_i схвата, и вектор \vec{K}_i , соединяющий каждое i -е сочленение звена с целевой точкой C . Целевая точка C определяется заданным вектором перемещения схвата \vec{R}_0 от точки N перед решением ОЗК. В процессе пошагового движения N_i и \vec{R}_i являются текущими значениями положения характерной точки схвата и заданного вектора перемещения схвата. При этом всегда выполняется равенство $\vec{K}_i = \vec{S}_i + \vec{R}_i$ для каждой степени подвижности манипулятора в процессе итераций. На рис. 3 показаны вспомогательные векторы \vec{K}_i и \vec{S}_i , текущий целевой вектор \vec{R}_i для i -го сочленения манипулятора, целевая точка C и текущее положение характерной точки схвата N_i .

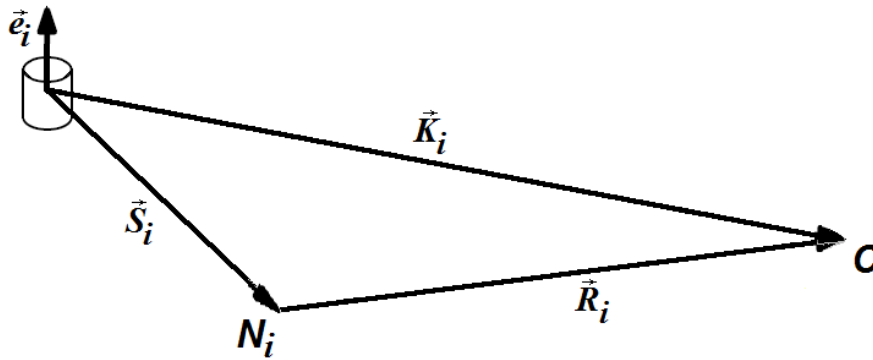


Рис. 3. Вспомогательные векторы для i -го сочленения

С помощью вспомогательных векторов удалось сформировать условия и определить максимальные углы поворота или смещения звеньев манипулятора согласно критерию максимального приближения схвата к заданным параметрам его положения и ориентации для каждой степени подвижности манипулятора.

6 Теоремы о конечных углах и смещениях

Для определения максимальных углов поворота и максимальных смещений звеньев манипулятора по каждой степени подвижности для осуществления пошагового решения ОЗК сформулированы и доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для любых некопланарных и неколлинеарных векторов \vec{e} , \vec{S} и \vec{K} при выполнении условия $\vec{K} = \vec{S} + \vec{R}$ для заданного ненулевого вектора \vec{R} справедливо следующее утверждение: поворот вектора \vec{S} вокруг вектора \vec{e} в сторону направления вектора \vec{K} уменьшает длину вектора \vec{R} , и при достижении условия компланарности векторов \vec{e} , \vec{S} и \vec{K} длина вектора \vec{R} принимает минимальное значение. Угол $\Delta\theta$ при таком повороте называется *углом конечного поворота*.

Доказательство

Рассмотрим i -е звено манипулятора с кинематической парой пятого класса в виде шарнира при отсутствии ограничений на поворот. Для удобства опустим индекс i . На рис. 4 для указанного звена показаны вспомогательные векторы \vec{K} и \vec{S} , целевой вектор \vec{R} и вектор оси шарнира \vec{e} , удовлетворяющие условию теоремы, а также характерная точка схвата N и целевая точка C .

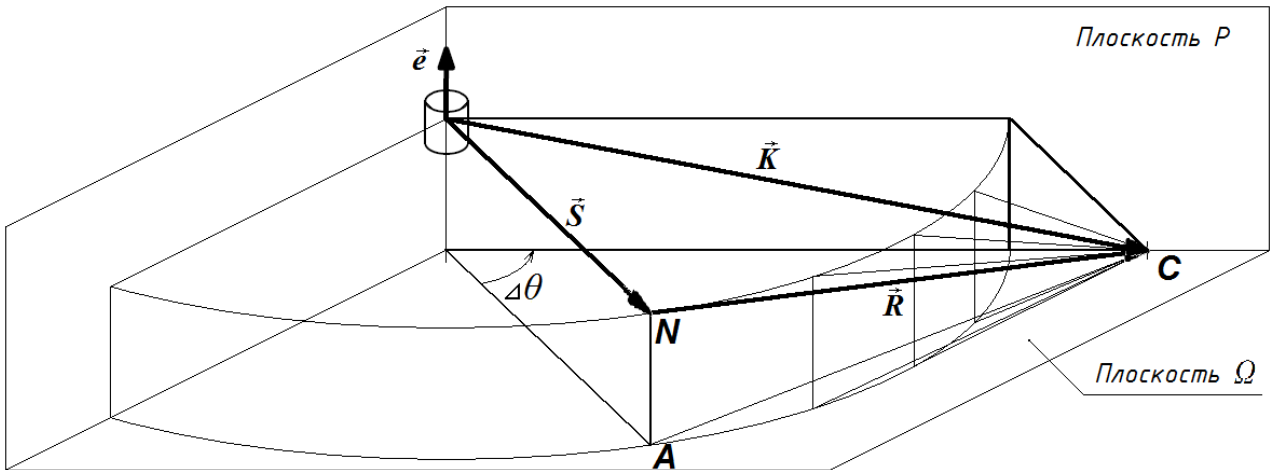


Рис. 4. Схема определения угла конечного поворота $\Delta\theta$ для положения

Плоскость Ω перпендикулярна вектору \vec{e} и проходит через целевую точку C . Плоскость P проходит через вектор \vec{e} и целевую точку C . Точка A является ортогональной проекцией точки N на плоскость Ω . Линия пересечения плоскостей Ω и P проходит через центр окружности, описанной точкой A , и целевую точку C , лежащие в плоскости Ω . Рассмотрим трансформацию прямоугольного треугольника NAC в процессе поворота вспомогательного вектора \vec{S} относительно вектора \vec{e} в сторону направления вектора \vec{K} . Катет NA в процессе поворота остается неизменным, а катет AC уменьшается, и при достижении вектором \vec{S} плоскости P его длина становится наименьшей согласно теореме о расстоянии до окружности от точки на прямой, проходящей через центр окружности. Длина целевого вектора \vec{R} , являющегося гипотенузой этого треугольника для минимального катета, также принимает минимальное значение, что и требовалось доказать. Угол $\Delta\theta$, при повороте на который вектор \vec{R} принимает минимальное значение, называется *углом конечного поворота*. Минимальное значение величины вектора \vec{R} соответствует критерию максимального приближения схвата к целевой точке по положению для каждого шага и степени подвижности манипулятора в виде шарнира.

Теорема 2. Для любых ненулевых векторов \vec{e} , \vec{S} и \vec{K} при выполнении условий $\vec{K} = \vec{S} + \vec{R}$ для заданного ненулевого вектора \vec{R} , не принадлежащего плоскости e , справедливо следующее утверждение: смещение вектора \vec{S} параллельно самому себе по направлению вектора \vec{e} или противоположно ему в сторону плоскости e , проходящей через точку конца вектора \vec{K} и перпендикулярной вектору \vec{e} , уменьшает длину вектора \vec{R} , и при совпадении вектора \vec{R} с указанной плоскостью длина вектора \vec{R} принимает минимальное значение. Такое смещение Δd называется *конечным смещением*.

Доказательство

Рассмотрим i -ое звено манипулятора с кинематической парой пятого класса в виде призмы при отсутствии ограничений на смещение. Для удобства опустим индекс i . На рис. 5 для указанного звена показаны вспомогательные

векторы \vec{K} и \vec{S} , целевой вектор \vec{R} и вектор оси призмы \vec{e} , удовлетворяющие условию теоремы, а также характерная точка схвата N и целевая точка C .

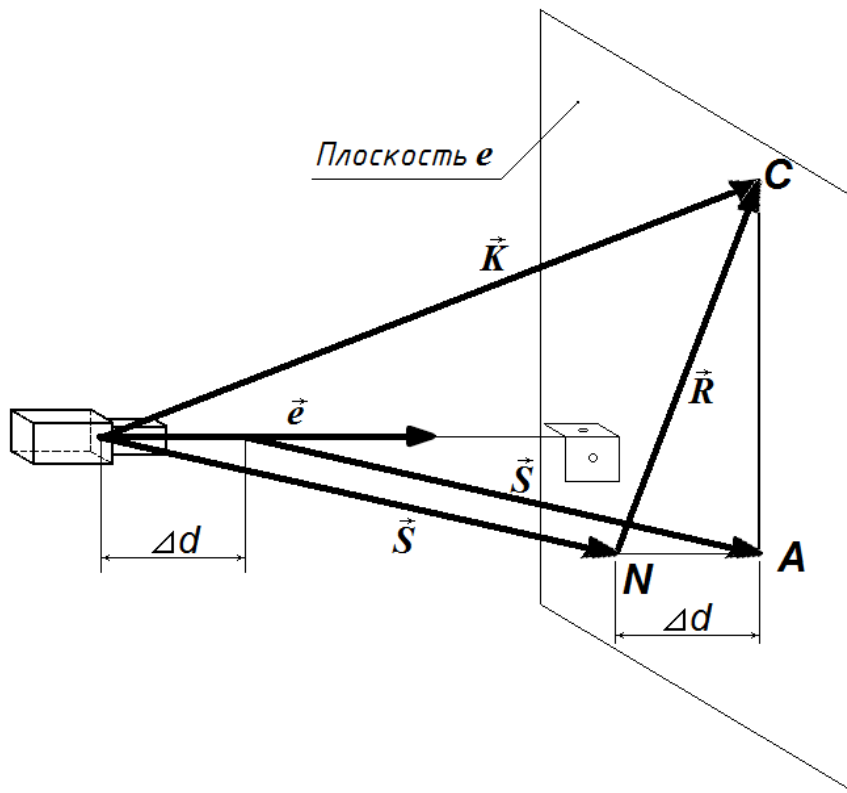


Рис. 5. Конечное смещение вдоль призмы звена

Направление смещения по призме звена определяется вектором \vec{e} , а величина конечного смещения определяется проекцией вектора \vec{R} на это направление и на рис. 5 обозначена через Δd . Таким образом, при смещении происходит изменение длины звена и следовательно вектора \vec{M} на величину Δd . Рассмотрим прямоугольный треугольник NAC . При завершении смещения вспомогательного вектора \vec{S} вдоль вектора \vec{e} , параллельно самому себе до совпадения его конца с плоскостью e в точке A катет NA , равный Δd , будет равным нулю. Гипотенуза NC , равная величине целевого вектора \vec{R} , переходит при этом в катет AC . Таким образом, из семейства гипотенуз, получающихся в процессе смещения, предельная величина гипотенузы — катет будет иметь наикратчайшую длину. Отсюда следует вывод: длина целевого вектора \vec{R} в результате смещения на величину Δd принимает минимальное значение, что и требовалось доказать. Такое смещение Δd называется *конечным смещением*. Минимальное значение величины вектора \vec{R} соответствует критерию максимального приближения схвата к целевой точке по положению для каждого шага и степени подвижности манипулятора в виде призмы.

Теорема 3. Для любых некопланарных и неколлинеарных векторов \vec{e} , \vec{e}_n и \vec{E}_y , поворот вектора \vec{e}_n в сторону вектора \vec{E}_y относительно вектора \vec{e} приводит к

уменьшению угла между векторами \vec{e}_n и \vec{E}_y , и при достижении условия компланарности векторов \vec{e} , \vec{e}_n и \vec{E}_y , указанный угол принимает минимальное значение. Угол $\Delta\theta$ при таком повороте называется *углом конечного поворота*.

Доказательство

Векторы \vec{e} , \vec{e}_n и \vec{E}_y , удовлетворяющие условию теоремы, показаны на рис. 6.

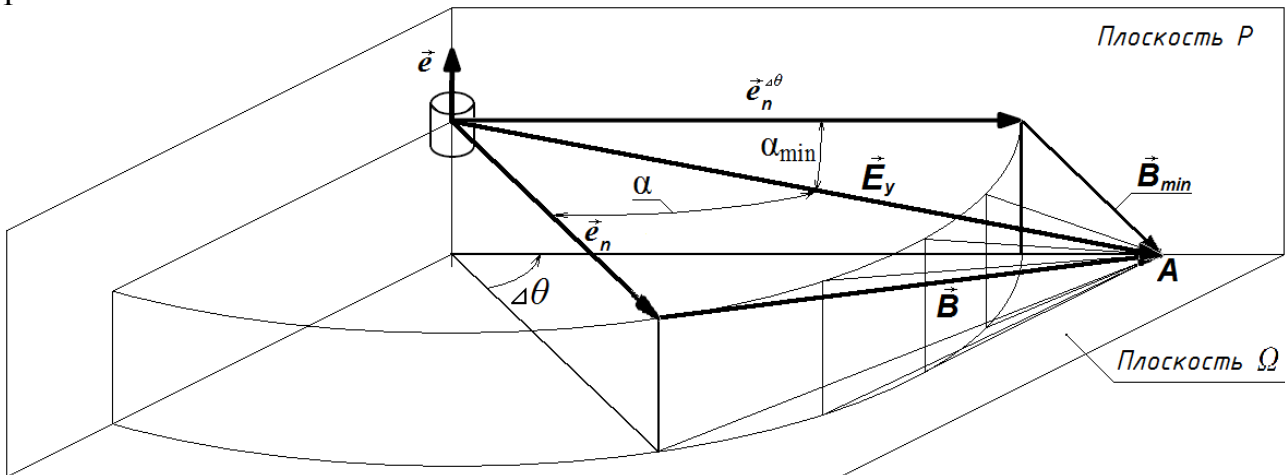


Рис. 6. Схема определения угла конечного поворота $\Delta\theta$ для ориентации

Рассмотрим треугольник, составленный из векторов \vec{e}_n , \vec{E}_y и \vec{B} . Угол между векторами \vec{e}_n и \vec{E}_y равен α . При повороте вектора \vec{e}_n в сторону \vec{E}_y относительно вектора \vec{e} на угол $\Delta\theta$ сторона треугольника \vec{B} примет положение \vec{B}_{min} согласно теореме 1. При этом угол α примет значение α_{min} , как угол, противолежащий стороне \vec{B}_{min} , что и требовалось доказать. Угол $\Delta\theta$ при таком повороте называется *углом конечного поворота*. Минимальное значение величины угла между векторами \vec{e}_n и \vec{E}_y соответствует критерию максимального приближения схвата к целевой точке по ориентации для каждого шага и степени подвижности манипулятора в виде шарнира.

Вышеизложенное относится и к другой паре векторов \vec{M}_n и \vec{E}_x , определяющих ориентацию схвата для продольной оси. Третья пара векторов определяется как дополнение к правой тройке.

7 Некоторые замечания и предложения

1. Назовем новый метод решения ОЗК, основанный на теоремах о *конечном угле поворота и смещении*, методом «**конечного поворота и смещения**».

2. Так как кинематические пары в виде призмы не изменяют ориентацию, то для ориентации задействованы только кинематические пары в виде шарниров.

3. Требование в теореме 3 о неколлинеарности векторов \vec{e} , \vec{e}_n и \vec{E}_y представляется очевидным, так как на плоскости e проекция коллинеарного вектора \vec{e}_n или \vec{E}_y к вектору \vec{e} вырождается в точку и понятие угла между проекциями векторов на плоскости e теряет смысл. В таком случае можно говорить о невозможности сближения векторов \vec{e}_n и \vec{E}_y относительно вектора \vec{e} для данного шарнира и по алгоритму метода сближения векторов \vec{e}_n и \vec{E}_y переходить к следующему шарниру.

4. Требование в теореме 3 о некомпланарности векторов \vec{e} , \vec{e}_n и \vec{E}_y также представляется очевидным, так как компланарность указанных векторов соответствует углу конечного поворота $\Delta\theta$, равному нулю. Это соответствует исчерпанной возможности сближения векторов \vec{e}_n и \vec{E}_y относительно \vec{e} , и итерационный шаг по их сближению переходит в следующем шарниру.

Пункты 3 и 4 имеют такую же интерпретацию в теореме 1 для решения задачи по положению.

5. Итерационным шагом в методе является поворот на максимальный конечный угол или на максимальное конечное смещение звена в зависимости от вида кинематической пары. Как доказано в теоремах, это всегда максимально возможное движение схвата к заданной позиции схвата. Если у кинематической пары исчерпана возможность приблизить схват, то звено по условиям, изложенным в теоремах, не участвует в итерационном шаге и передает эту возможность очередному звену. По окончании номеров звеньев передача осуществляется первому звену и т. д. до выхода из итерационного процесса по заданной точности. Если для всех степеней подвижности достигнуты нулевые значения приращений конечных углов или смещений, а задача ОЗК не решена, то это говорит о том, что заданные параметры положения и ориентации схвата недостижимы для данного манипулятора.

6. Рассмотренный случай коллинеарности векторов в теоремах 1 и 3 может выполняться для всех сочленений манипулятора при решении ОЗК, и это возможно только для конфигурации манипулятора, когда все звенья вытянуты в линию, а целевой вектор \vec{R} коллинеарен этой линии и направлен в противоположную сторону. Выход из этого положения предусмотрен заданием малых величин обобщенных координат в соответствии с конструктивными возможностями сочленений манипулятора. Задаются малые величины в виде одномерного массива $\mu(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \dots, \delta\theta_n)$ в порядке номеров звеньев, удовлетворяющих условию

$$|\delta\theta_i| > \varepsilon_{зад}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{зад}$ — заданная точность решения ОЗК.

7. Для того чтобы при управлении манипулятором не выйти из зоны досягаемости, можно применить следующий алгоритм. Постоянно определять

границы досягаемости манипулятора при управлении точкой N схвата, в частности, по вектору скорости $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)^T$.

$$\vec{R} = \int \vec{V} dt, \text{ тогда } \vec{K} = \vec{S} + \vec{R}. \quad (3)$$

$$\text{Если } |\vec{K}| > |r|, \text{ то корректируем } \vec{K} = \frac{|r|}{|\vec{K}|} \cdot \vec{K} \text{ и } \vec{R} = \vec{K} - \vec{S}, \quad (4)$$

где: $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)^T$ — заданный вектор скорости, пропорциональный отклонению рукоятки управления манипулятором, r — расстояние от начала неподвижной системы координат нулевого звена до границы зоны досягаемости.

8 Заключение

Найден новый подход к поиску решения ОЗК на основе введения вспомогательных векторов, делающих метод индифферентным по отношению к количеству звеньев манипулятора последовательной структуры с кинематическими парами пятого класса.

Сформулированы теоремы о *конечном угле поворота и конечном смещении*, на основе которых определены условия для нахождения максимальных углов поворота и смещений по каждой степени подвижности манипулятора для решения ОЗК по заданным параметрам положения и ориентации конечного звена (схвата) для указанного семейства манипуляторов.

Список литературы

1. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами: Учебник для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. - 480с.
2. Дыда А.А., Оськин Д.А. Решение обратной задачи кинематики для манипуляционного робота методом штрафных функций // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 11-4. – С. 673-677.
3. Дыда А.А., Оськин Д.А., Константинова Е.А. Нейросетевое моделирование задачи обратной кинематики для манипуляционного робота // *Современные наукоемкие технологии*. – 2015. – № 12 (часть 2) – С. 254-257. <https://www.toptechnologies.ru/ru/article/view?id=35248>
4. Челноков Ю.Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов. *Изв. РАН. Механика твердого тела* 2012 №5 С. 30-42.
5. Castellet A., Thomas F. Using interval methods for solving inverse kinematic problems. *Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Computational Methods in Mechanisms (NATOASI)*. Vol. 2. 1997, 16-28 June, Varna, Bulgaria. Varna, 1997, pp. 135-145.
6. Courty N., Arnaud E. Inverse Kinematics Using Sequential Monte Carlo Methods. *Proc. of the 5th International Conference on Articulated Motion and Deformable Objects (AMDO2008)*. 2008, 9-11 July, Port d'Andratx, Mallorca, Spain. Port d'Andratx, 2008, pp. 1-10. DOI: 10.1007/978-3-540-70517-81
7. Grochow K., Martin S.L., Hertzmann A., Popovic Z. Style-based inverse kinematics. *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proc. of ACM SIGGRAPH 2004*, 2004, vol. 23, iss. 3, pp. 522-531. DOI: 10.1145/1015706.1015755
8. Sumner R.W., Zwicker M., Gotsman C., Popovic J. Mesh-based inverse kinematics. *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2005*, 2005, vol. 24, iss. 3, pp. 488-495. DOI: 10.1145/1073204.1073218
9. Беклемишев Н.Д., Платонов А.К., Соколов С.М., Трифионов О.В. Алгоритмы управления движением схвата манипулятора. // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2017, № 47. doi:10.20948/prepr-2017-47. URL:http://keldysh.ru/papers/2017/prep2017_47.pdf (дата обращения: 20.02.2018).
10. Aristidou A., Lasenby J. FABRIK: A fast, iterative solver for the Inverse Kinematics problem. *Graphical Models*, 2011, vol. 73, iss. 5, pp. 243-260. DOI: 0.1016/j.gmod.2011.05.003
11. Каргинов Л.А. Иерархический подход к решению обратной задачи кинематики // *Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2016. № 03. С. 37–63.

12. Данилов А.В. Общее решение обратной задачи кинематики для манипулятора с любым количеством звеньев, соединенных кинематическими парами пятого класса. Сборник докладов XV молодежной научно-технической конференции «Взгляд в будущее - 2017» С. 226 - 233.

Оглавление

1 Введение	3
2 Постановка задачи и принятые положения	4
3 Объект исследования и его математическая модель	5
4 Представление манипулятора с помощью векторов	6
5 Вспомогательные векторы	7
6 Теоремы о конечных углах и смещениях	8
7 Некоторые замечания и предложения	11
8 Заключение	13
Список литературы.....	14