



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 85 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Боровин Г.К., Захваткин М.В.,
Степаньянц В.А., Усовик И.В.**

Статистическая модель
распределения космических
объектов в пространстве
орбитальных параметров

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Статистическая модель распределения космических объектов в пространстве орбитальных параметров / Г.К.Боровин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 85. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2018-85](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-85)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-85>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Г.К. Боровин, М.В. Захваткин, В.А. Степаньянц,
И.В. Усовик

Статистическая модель
распределения космических объектов
в пространстве орбитальных параметров

Москва — 2018

Боровин Г.К., Захваткин М.В., Степаньянц В.А., Усовик И.В.

Статистическая модель распределения космических объектов в пространстве орбитальных параметров

Предложена статистическая модель заполнения космического пространства объектами техногенного происхождения. Модель опирается на каталог орбит космических объектов (КО), построенный на базе отечественных и иностранных источников. Для построения этой модели множество каталогизированных КО объединяются в группы по признаку близости в пространстве четырех орбитальных параметров, характеризующих большую полуось, эксцентриситет и положение плоскости орбит КО, составляющих группу. Распределение КО в каждой группе определяется математическим ожиданием и ковариационной матрицей разброса орбитальных параметров группы.

Ключевые слова: космический объект, малоразмерная фракция, модель распределения космического мусора

Gennady Konstantinovich Borovin, Mikhail Vitalievich Zakhvatkin, Victor Arkadievich Stepanyants, Igor Vyacheslavovich Usovik

Statistical model of space objects distribution in space of orbital parameters

A statistical model of space debris is proposed. The model is based on the catalog of orbits of space objects, constructed using domestic and foreign sources. To build this model, the cataloged objects are clustering using criterion of closeness in a 4d space of orbital parameters characterizing the semimajor axis, eccentricity and position of the plane of the satellite orbits composing a cluster. The distribution of objects in each cluster is determined by the mathematical expectation and the covariance matrix of the spread of the orbital parameters of the cluster.

Key words: space object, orbital parameters, model of space debris distribution

Оглавление

Введение	3
1. Описание параметров статистической модели распределения КО	5
2. Алгоритм распределения КО по группам.....	7
3. Определение параметров статистической модели высокоорбитальных КО ..	13
Заключение.....	16
Библиографический список.....	16

Введение

Статистическая модель распределения космических объектов предназначена для описания параметров заполнения околоземного космического пространства космическими объектами, в том числе определения их концентрации, а также характеристик направления и скорости их движения.

На Рис. 1 схематически представлена классификация КО, использованная для построения модели космического мусора в области высоких орбит.

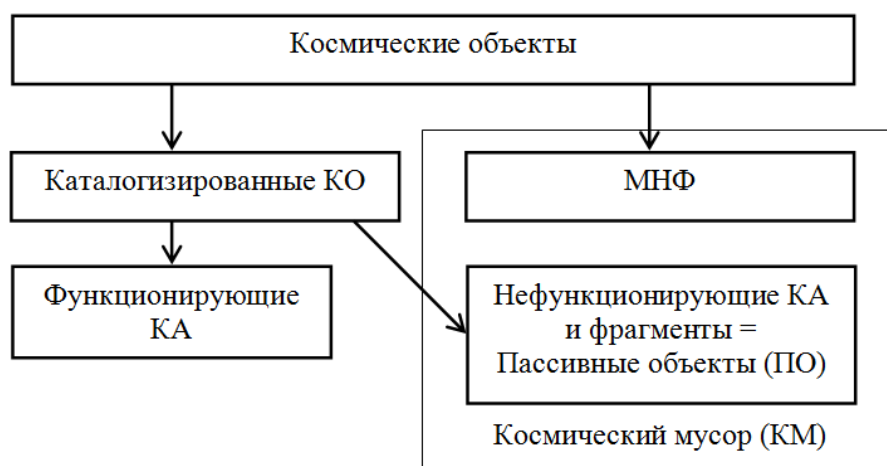


Рис. 1. Классификация КО

Рассматриваются два основных типа космических объектов:

- каталогизированные КО — обнаруженные, занесенные в каталог и регулярно наблюдаемые космические объекты, сведения о которых и их орбитальные данные периодически дополняются и обновляются;
- малоразмерная ненаблюдаемая фракция (МНФ) — объекты, размером менее 10 см.

Часть из КО, принадлежащих МНФ, фиксируются средствами наблюдения, однако организовать регулярный процесс привязки измерений, а также построения и поддержания орбиты невозможно из-за большого количества КО, ограниченной возможности наблюдения и неопределенности модели движения.

Множество каталогизированных КО, в свою очередь, делится на две части:

- функционирующие космические аппараты (КА), управляемые с Земли, способные маневрировать и проводить коррекции орбитальных параметров;
- космический мусор (КМ) – космические объекты искусственного происхождения (включая фрагменты или части таких объектов), которые закончили свое активное функционирование (далее — пассивные объекты (ПО)).

Функционирующие КА не входят в состав КМ, однако они являются его источником, поскольку КМ образуется при запусках, прекращении активного

существования и разрушения КА. Поэтому исходные данные, необходимые для построения модели КМ, должны содержать сведения и о функционирующих КА. Модель движения функционирующих КА существенно отличается от пассивного полета КА, вышедших из строя, и их фрагментов. Как правило, они обеспечивают поддержание заданных значений одного или нескольких параметров орбиты путем периодически проводящихся коррекций траектории КА. Выявление стратегии проводящихся маневров и подготовка исходных данных для отдельно рассматриваемого КА представляет собой сложную задачу, требующую длительного наблюдения за его движением. На данном этапе исследования такая задача была поставлена и решена только для КО, образующих нефункционирующую составляющую каталога ПО и малоразмерную ненаблюдаемую фракцию КМ. Для геосинхронных объектов данные о стратегии маневрирования периодически публикуются в отчетах Европейского космического агентства (см., например, [1]). Исходными данными для построения модели распределения ПО являются начальные векторы состояния, полученные из каталога ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на заданный момент времени – т.н. «срез каталога». Орбитальные данные каталогизированных КО постоянно обновляются. При подготовке данного препринта использовался срез каталога на 07 сентября 2016 года.

Чтобы получить возможность исследования эволюции КМ с течением времени, по полученным из базы данных орбитальным параметрам КО было выполнено прогнозирование на 15 лет вперед на начало каждого года, с 1 января 2017 до 1 января 2031 включительно.

В качестве метода интегрирования уравнений движения КО был использован многошаговый девятистадийный предиктор-корректор [2]. Уравнения движения КО учитывали следующие возмущения [3,4]:

- влияние нецентральности поля тяготения Земли до гармоника 16x16,
- гравитационное влияние Луны, Солнца,
- давление солнечного излучения,
- атмосферное торможение (на участках ниже 1.5 тыс. км над поверхностью Земли).

Как известно из [5], распределение МНФ в околоземном космическом пространстве (ОКП) тесно связано с распределением каталогизированных КО. Поэтому в качестве исходных данных разработана модель статистического распределения орбитальных параметров каталогизированных КО, которая может использоваться наряду с результатами непосредственных наблюдений МНФ и другими доступными данными. Эта модель представляет собой плотность распределения вероятности наличия КО в заданной точке пространства орбитальных параметров.

1 Описание параметров статистической модели распределения КО

Для построения статистической модели множество каталогизированных КО объединяются в группы по признаку близости в пространстве параметров \mathbf{q} . Число m таких групп выбирается в зависимости от необходимой степени детализации модели и возможностей вычислительной техники. Статистическая модель представляет собой набор точек локализации КО, которые описываются средними элементами множества КО (центр локализации) и ковариационной матрицей разбросов относительно этого центра.

В качестве орбитальных параметров \mathbf{q} , характеризующих распределение КО группы, используется вектор орбитального момента $\mathbf{c}\{c_x, c_y, c_z\}$ и большая полуось a орбиты КО, образующие, в совокупности, вектор $\mathbf{q}\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Расчет компонент вектора орбитальных параметров \mathbf{q} по заданному вектору состояния КО $\mathbf{X}\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\} = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$ осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= c_x = yv_x - zv_y, \\ q_2 &= c_y = zv_x - xv_z, \\ q_3 &= c_z = xv_y - yv_x, \\ q_4 &= \frac{\mu}{2\frac{\mu}{r} - v^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{Q}\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m\}$ — множество орбитальных элементов каталога КО, уже разделенных на m групп:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \cup \mathbf{Q}_2 \dots \cup \mathbf{Q}_m,$$

где $\mathbf{Q}_k\{\mathbf{q}_k^1, \dots, \mathbf{q}_k^{m_k}\}$ — набор орбитальных элементов в k -й группе. В каждой группе определяются векторы средних орбитальных параметров

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \mathbf{q}_k^i,$$

где \mathbf{q}_k^i — орбитальные параметры i -го КО в группе \mathbf{Q}_k . Если распределение по группам выполнено эффективно (то есть орбиты КО близки друг к другу по заданной норме (см. (1)), то наиболее плотно область КО каждой группы \mathbf{Q}_k заполнена вблизи вектора средних орбитальных параметров $\hat{\mathbf{q}}_k$. Число

объектов группы Q_k уменьшается по мере удаления от центра их локализации, за который принимается точка $\hat{\mathbf{q}}_k$.

Предполагается, что плотность заполнения 4-мерного пространства выбранных элементов в каждой группе Q_k , ($k=1, \dots, m$) распределена по нормальному закону с центром распределения $\hat{\mathbf{q}}_k$. Апостериорная оценка ковариационной матрицы \mathbf{C}_k разброса орбитальных параметров \mathbf{q} в группе Q_k определяется по формуле

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{M} \left[\Delta \mathbf{q}_k, \Delta \mathbf{q}_k^T \right] = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \left[(\mathbf{q}_k^i - \hat{\mathbf{q}}_k) (\mathbf{q}_k^i - \hat{\mathbf{q}}_k)^T \right],$$

где символ $\mathbf{M} [\]$ используется для обозначения математического ожидания случайной величины, заключенной в квадратные скобки. В результате будут сформированы m векторов для центров локализации $\hat{\mathbf{q}}_1, \dots, \hat{\mathbf{q}}_m$ и m соответствующих им ковариационных матриц разброса параметров $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_m$. В совокупности эти величины составляют набор параметров модели, используя который можно определить плотность вероятности обнаружения КО в заданной точке \mathbf{q} пространства параметров.

В соответствии со сделанными предположениями плотность вероятности присутствия объекта из группы Q_k в окрестности точки $\hat{\mathbf{q}}_k$ пространства орбитальных параметров определяется по формуле нормального многомерного закона распределения

$$p_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4 |\mathbf{C}_k|}} \exp \left[-\frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}_k (\mathbf{C}_k)^{-1} \Delta \mathbf{q}_k^T \right],$$

где $\Delta \mathbf{q}_k = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}_k$. В окрестности точки \mathbf{q} , ограниченной объемом пространства параметров $dQ = dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3 \cdot dq_4$, математическое ожидание числа $n_{\mathbf{q}}^k$ объектов из группы Q_k выражается формулой

$$\mathbf{M} \left[n_{\mathbf{q}}^k \right] = \mathbf{M} \left[n_k \right] p_k(\mathbf{q}) dQ,$$

где n_k — математическое ожидание общего числа точек в k -й группе. Это число не зависит от числа объектов других групп, находящихся в окрестности dQ точки \mathbf{q} , поэтому плотность вероятности обнаружения в этой точке пространства КО одной из групп множества КО Q определяется формулой

$$p(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^m p_k(\Delta \mathbf{q}_k).$$

В этом разделе был описан способ получения оценки математического ожидания и ковариационных матриц разброса точек локализации при условии, что распределение КО по группам уже проведено. Алгоритм распределения КО по группам приводится ниже.

2 Алгоритм распределения КО по группам

Входной информацией для алгоритма служит набор орбитальных параметров каталогизированных объектов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$, которые необходимо распределить по группам. Алгоритм распределяет КО на непересекающиеся группы, определяет положение центров локализации по признаку близости объектов группы к центрам их локализации. Результатом работы алгоритма является набор m центров локализации КО $\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_m$ и соответствующий набор ковариационных матриц разброса параметров $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m$ относительно этих центров. В общих чертах схему работы алгоритма можно описать следующим образом:

1. выполняется начальный просмотр всех орбитальных элементов КО, в ходе которого осуществляется начальное разделение КО на $M \gg m$ групп, образующих расширенное (избыточное) множество;
2. из расширенного множества выделяются подмножество m групп, содержащих наибольшее число КО, и формируются их начальные центры локализации (средние орбитальные элементы и ковариационные матрицы разброса);
3. выполняется итерационный цикл; на каждой итерации осуществляется перепривязка КО к группам по критерию наибольшей близости орбитальных элементов КО к одному из ранее выбранных центров локализации и формирование новых центров локализации.

Построение расширенного множества групп, обеспечивающих начальное разделение КО, осуществляется с учетом направления единичного вектора \mathbf{e}_n нормали к плоскости орбиты, эксцентриситета e и радиуса перицентра r_π . Диапазон изменения эксцентриситета (от 0 до 1) разбивается на заданное число m_e равных отрезков значениями

$$e_k = \frac{k}{m_e}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m_e$$

(например, для $m_e = 10$ диапазон изменения эксцентриситета разбивается на интервалы $0 \leq e < 0.1$, $0.1 \leq e < 0.2$, ..., $0.9 \leq e < 1$). Диапазон изменения высоты перицентра начинается со 150 км и разбивается на неравные части с использованием логарифмической шкалы

$$h_{\pi}^k = \alpha^k \cdot 150 \text{ км}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m_r.$$

Например, при $a=2$ получим набор граничных значений 150, 300, 600, 1200, 2400, 4800, 9600, 19200, 38400 км.

Пространство орбитальных параметров разбивается на множество подпространств по направлению единичного вектора нормали \mathbf{e}_n к плоскости орбиты. Все направления вектора \mathbf{e}_n разделяются на шесть подмножеств, как показано на Рис. 2 в зависимости от того, какую грань куба направлений пересекает линия $\lambda \mathbf{e}_n$, $\lambda > 0$. Каждое ребро куба разделено на m равных частей.

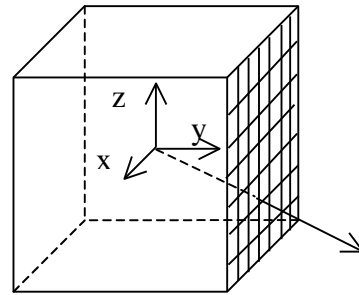


Рис. 2. Разбиение пространства параметров по направлению нормали к плоскости орбиты

Соответственно, каждая грань куба разделена на m^2 квадратов. В пределах одной грани проводится деление множества плоскостей орбит КО на подмножества в зависимости от квадрата, через который проходит вектор \mathbf{e}_n .

Ниже приводится детализация алгоритма распределения КО по группам.

Входная информация:

- $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ Массив, содержащий набор орбитальных параметров КО $\mathbf{q}_i \{q_1^i, q_2^i, q_3^i, q_4^i\} = \{c^i, a^i\}$, $i = 1, \dots, n$, где $\bar{c} = \bar{r} \times \bar{v}$ – вектор орбитального момента, a – большая полуось орбиты
- m Число центров локализации КО после их распределения по группам
- m_1 Число значений эксцентриситета при формировании начального распределения КО
- m_2 Число значений радиуса перицентра
- m_3 Число, на которое делится ребро куба направлений

Выходная информация:

- $\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_m$ Орбитальные элементы центров локализации КО
- $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m$ Ковариационные матрицы разброса КО относительно центров локализации

Описание алгоритма

1. Вычисляется общее число групп начального распределения КО

$$m_0 = 6 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (m_3)^2$$

Учитывая ограниченный набор фактических данных, содержащихся в современных каталогах (и возможности вычислительной техники), предполагается, что $m_1 \leq 12$, $m_2 \leq 12$, $m_3 \leq 12$. Таким образом, общее число групп $m_0 \leq 124416$.

2. Формируется массив $N^{loc} \{n_1, \dots, n_{m_0}\}$, состоящий из m_0 целых чисел для подсчета числа объектов в каждой группе локализации (loc) КО. Устанавливаются равными нулю их начальные значения:

$$n_i^{loc} = 0, i = 1, 2, \dots, m_0.$$

3. Формируется массив N^q , состоящий из n целых чисел. Элементы этого массива соответствуют элементам орбиты КО и содержат номера центров локализации, к которым привязывается КО на данной стадии работы алгоритма. Устанавливаются равными нулю начальные значения элементов массива

$$n_k^q = 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

4. В цикле по переменной k , $k = 1, 2, \dots, n$ проводится просмотр орбитальных элементов КО и первоначальное разделение их на расширенное множество групп. Для этого:

4.1. выбираются очередные орбитальные элементы \mathbf{q}_k ,

4.2. вычисляются эксцентриситет, радиус перицентра и единичный вектор нормали, соответствующие вектору орбитальных параметров \mathbf{q}_k :

- эксцентриситет $e_k = \sqrt{1 - \frac{c_k^2}{\mu a_k}}$,

где $\mu = 398600.4415 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравитационная постоянная Земли;

- радиус перицентра $(r_\pi)_k = a_k(1 - e_k)$, $(h_\pi)_k = a_k(1 - e_k) - r_e$;

- единичный вектор нормали к плоскости орбиты $(\mathbf{e}_n)_k = \frac{\mathbf{c}_k}{c_k}$;

4.3. определяется номер группы в диапазоне эксцентриситетов $n_1^k = \text{int}(m_1 e_k)$ (e_k изменяется в диапазоне $[0-1]$, поэтому $n_1^k < m_1$),

4.4. по заданному значению m_2 определяется основание логарифмической шкалы α в соответствии с Таблицей 1, определяется номер группы в диапазоне радиусов перицентра $n_2^k = \text{int} \left(\lg_{\alpha} \frac{h_{\pi}^k}{150 \text{ km}} \right)$,

Таблица 1.

m_2	α	m_2	α	m_2	α
2	17	6	3	10	2.1
3	7	7	2.7	11	2.0
4	5	8	2.4	12	1.9
5	4	9	2.2		

4.5. определяется номер грани n_g в кубе направлений, устанавливаются координаты $\bar{u} \{u_x, u_y\}$ проекции нормали на поверхность выбранной грани (для этого выбирается максимальная по абсолютной величине компонента вектора $\bar{e}_n^k \{e_{nx}^k, e_{ny}^k, e_{nz}^k\}$); номер грани устанавливается в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2.

Условие	Выбранный номер	Координаты внутри грани
$ e_{nx}^k > e_{ny}^k , e_{nx}^k > e_{nz}^k , e_{nx}^k > 0$	0	$u_x^k = e_{ny}^k, u_y^k = e_{nz}^k$
$ e_{ny}^k > e_{nx}^k , e_{ny}^k > e_{nz}^k , e_{ny}^k > 0$	1	$u_x^k = e_{nx}^k, u_y^k = e_{nz}^k$
$ e_{nz}^k > e_{nx}^k , e_{nz}^k > e_{ny}^k , e_{nz}^k > 0$	2	$u_x^k = e_{nx}^k, u_y^k = e_{ny}^k$
$ e_{nx}^k > e_{ny}^k , e_{nx}^k > e_{nz}^k , e_{nx}^k < 0$	3	$u_x^k = e_{ny}^k, u_y^k = e_{nz}^k$
$ e_{ny}^k > e_{nx}^k , e_{ny}^k > e_{nz}^k , e_{ny}^k < 0$	4	$u_x^k = e_{nx}^k, u_y^k = e_{nz}^k$
$ e_{nz}^k > e_{nx}^k , e_{nz}^k > e_{ny}^k , e_{nz}^k < 0$	5	$u_x^k = e_{nx}^k, u_y^k = e_{ny}^k$

4.6. определяются целочисленные координаты проекции нормали на поверхность грани: $n_x^k = \text{int} \left(m_3 (u_x^k + 1) / 2 \right)$, $n_y^k = \text{int} \left(m_3 (u_y^k + 1) / 2 \right)$,

4.7. вычисляется номер группы, в которую попадает рассматриваемый k -й КО $n_k = n_y^k + (m_3)n_x^k + (6m_3)n_g^k + (6m_3m_2)n_2^k + (6m_3m_2m_1)n_1^k$,

4.8. устанавливается привязка текущего (k -го) КО к области локализации n_k . Для этого k -му элементу массива N^q присваивается значение $n_k : n_k^q = n_k$,

4.9. увеличивается на единицу значение элемента массива N^{loc} , соответствующее данной группе $n_{n_k}^{loc} = n_{n_k}^{loc} + 1$,

4.10. если $k < m_0$, то $k = k + 1$, продолжение цикла, переход к п. 4.1.

5. Осуществляется просмотр массива N^{loc} и формирование нового массива N^{pac} , состоящего из пар [число КО, попавших в группу, — номер группы]. При этом исключаются группы, в которые не попало ни одного КО. Для этого:

5.1. устанавливается начальное значение счетчика ненулевых элементов массива N^{pac} : $j = 0$,

5.2. выполняется цикл по параметру i , $i = 1, 2, \dots, m_0$,

5.3. если $n_i^{loc} > 0$, то $n_{j+1}^{pac} = n_i^{loc}$, $n_{j+2}^{pac} = i$, $j = j + 2$,

5.4. если $i < m_0$, то $i = i + 1$, продолжение цикла, переход к п. 5.3.

6. Одним из известных методов (например, методом Шелла [6]) осуществляется сортировка массива пар N^{pac} по убыванию ключевого параметра (нечетные индексы).

7. Формируется массив N^{max} из целых чисел для хранения номеров групп. Из массива N^{pac} , полученного в результате сортировки, выбираются первые m номера групп, в которые попало максимальное число КО, и пересылаются в массив N^{max} : $n_i^{max} = n_{2i}^{pac}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Значение m выбирается таким образом, чтобы количество КО было не менее 8. Это требование обеспечивает достаточную избыточность выборки: двойное превышение числа КО по сравнению с четырьмя орбитальными параметрами.

8. В цикле по переменной k , $k = 1, 2, \dots, n$ проводится **второй** просмотр орбитальных элементов КО для формирования начальных значений математического ожидания и ковариационной матрицы разброса параметров относительно центров локализации. Для этого:

8.1. формируется массив $S \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ для накопления сумм векторов q_i ; устанавливаются нулевые значения для всех s_i ,

8.2. формируется массивы $S^q \{S_1^q, S_2^q, \dots, S_m^q\}$ для накопления сумм матриц $S_i^q = q_i (q_i)^T$ и $C^q \{C_1^q, C_2^q, \dots, C_m^q\}$ для накопления сумм матриц C_i^q (устанавливаются нулевые значения для всех матриц),

8.3. формируется массив N^{num} из m целых чисел для подсчета числа объектов в каждом из центров локализации; все элементы этого массива устанавливаются равными нулю: $n_j^{num} = 0$, $j = 1, \dots, m$,

8.4. из массива N^q выбирается очередной элемент n_k^q (это номер центра локализации, к которому привязан k -й КО; если номер n_k^q совпал с элементом массива N^{max} под номером n_k^{max} , то к суммам из массивов S и S^2 добавляются очередные слагаемые, а счетчик числа КО увеличивается на 1:

$$\mathbf{s}_{n_k^{\max}} = \mathbf{s}_{n_k^{\max}} + \mathbf{q}_k, S_{n_k^{\max}}^2 = S_{n_k^{\max}}^2 + \mathbf{q}_k (\mathbf{q}_k)^T, n_k^{\max} = n_k^{\max} + 1.$$

8.5. если $k < n$, то $k = k + 1$, продолжение цикла, переход к п. 8.4.

9. В цикле по переменной $i, i = 1, 2, \dots, m$ проводится вычисление математических ожиданий центров локализации и ковариационных матриц разброса орбитальных элементов по накопленным значениям векторов \mathbf{s}_i и матриц S_i^2

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{\mathbf{s}_i}{n_i^{\max}}, \mathbf{C}_i = \frac{1}{n_i^{\max}} \left[S_i^2 - \frac{\mathbf{s}_i (\mathbf{s}_i)^T}{n_i^{\max}} \right].$$

10. В цикле по переменной $k, k = 1, 2, \dots, n$ проводится просмотр орбитальных параметров КО для привязки их к новым центрам локализации.

Для этого:

10.1. признак изменения привязки устанавливается равным 0,

10.2. выбирается очередной вектор \mathbf{q}_k ,

10.3. в цикле по переменной $i, i = 1, 2, \dots, m$ определяется его расстояние до каждого из сформированных к настоящему этапу работы алгоритма центров локализации

$$d_{ki} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4 |C_i|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{q}_k - \hat{\mathbf{q}}_i)^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{q}_k - \hat{\mathbf{q}}_i) \right], \quad 1)$$

определяется номер индекса i , соответствующего максимальному значению d_{ki} : $i_{\max} = \text{index}(\max(d_{k,i}, i = 1, \dots, m))$ — номер центра локализации, которому принадлежит данный (k -й) КО,

10.4. если $k < n$, то $k = k + 1$, продолжение цикла, переход к п. 10.1.

11. В цикле по переменной $k, k = 1, 2, \dots, n$ проводится второй просмотр орбитальных элементов КО для формирования математических ожиданий и ковариационных матриц разброса параметров относительно центров локализации. Для этого:

11.1. массивам векторов S , матриц S^2 и N^{num} присваиваются нулевые значения

$$\left\{ \mathbf{s}_i = 0, \quad |S_i|^2 = 0, \quad n_i = 0 \right\}, i = 1, \dots, m,$$

11.2. из массива N^q выбирается очередной элемент n_k^q — номер центра локализации, к которому привязан k КО; к суммам из массивов S и S^2 добавляются очередные слагаемые, а счетчик числа КО увеличивается на 1:

$$\left\{ \mathbf{s}_{n_k^{\max}} = \mathbf{s}_{n_k^{\max}} + \mathbf{q}_k, \quad S_{n_k^{\max}}^2 = S_{n_k^{\max}}^2 + \mathbf{q}_k (\mathbf{q}_k)^T, \quad n_k^{\text{num}} = n_k^{\text{num}} + 1 \right\}, i = 1, \dots, m.$$

12. Если $k < n$, то $k = k + 1$, продолжение цикла, переход к п. 11.2.

Далее выполняется следующая итерация определения центров локализации и ковариационной матрицы разбросов КО относительно центров локализации. Затем выполняется переход к п. 10. Процесс продолжается, пока признак изменения привязки имеет значение 1.

3 Определение параметров статистической модели высокоорбитальных КО

К высокоорбитальным КО относятся три группы объектов: геостационарные (ГСО), высокоэллиптические (ВЭО) и средневысокие объекты (СВО). Принадлежность объекта одной из трех рассматриваемых групп — ГСО, ВЭО или СВО — определяется в соответствии с Таблицей 3.

Таблица 3.

	Эксцентриситет	Период (минуты)
ГСО	< 0.2	1100-2060
ВЭО	> 0.2	> 225
СВО	< 0.2	225-1100

Для определения параметров статистической модели геостационарных КО из множества орбит каталога были выбраны орбиты, удовлетворяющие условиям, представленным в таблице 3 (1-я строка). Обработка данных была проведена в соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем разделе. Для иллюстрации работы алгоритма в таблице 4 представлена информация, отражающая процесс сходимости. Слева (нечетные столбцы) указан номер итерации. Справа (четные столбцы) указано число точек, для которых на текущей итерации изменилась привязка к центру локализации. Из таблицы видно, как постепенно число точек, изменивших привязку, уменьшается. Всего для решения задачи потребовалось 23 итерации.

Таблица 4. Пример сходимости итерационного процесса формирования центров локализации

№ итерации	Число точек	№ итерации	Число точек	№ итерации	Число точек	№ итерации	Число точек
1	2084	7	24	13	15	19	5
2	136	8	22	14	14	20	4

3	88	9	16	15	12	21	1
4	68	10	14	16	9	22	1
5	35	11	17	17	11	23	0
6	20	12	13	18	10		

Результаты работы алгоритма – параметры центров локализации и корни из диагональных элементов ковариационных матриц разброса параметров КО относительно этих центров – представлены в таблице 5. В этой таблице каждому центру локализации соответствует пара строк, в первой из которых содержатся:

- номер центра локализации (1-й столбец),
- количество КО, ассоциированных с центром локализации при построении модели,
- 4 параметра центра локализации – компоненты вектора орбитального момента и большая полуось (столбцы 3-6); во второй строке каждой пары содержатся корни из диагональных элементов ковариационной матрицы разбросов (столбцы 3-6), дающие представление о величине разброса соответствующего параметра: чем больше значения диагональных элементов, тем больше разброс соответствующего параметра.

Всего для данной выборки каталогизированных объектов после обработки образовалось 28 центров локализации. Отметим, что второму центру локализации соответствуют значительно меньшие оценки разбросов, как по вектору орбитального момента, так и по полуоси. Это объясняется тем, что этот центр сформировался по части функционирующих геостационарных КА, удерживающих постоянную ориентацию плоскости орбиты и ее полуось, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Таблица 5.

1	2	3	4	5	6
№ центра локализации	Количество КО	$q_1 = c_x$	$q_2 = c_y$	$q_3 = c_z$	$q_4 = a$
1	349	12.261	-12.466	128.392	42.310
		3.348	7.703	1.119	0.322
2	314	0.207	0.022	129.643	42.166
		0.063	0.049	0.001	0.001
3	235	7.984	-32.072	125.516	42.323
		4.260	2.152	0.350	0.315
4	240	-9.071	-30.763	125.764	42.332
		4.357	2.670	0.405	0.404
5	189	-13.224	-14.009	127.820	42.035
		3.774	4.573	0.904	0.380
6	81	-6.462	-5.645	127.546	41.097
		3.611	2.187	1.752	1.009
7	63	-15.721	-19.867	125.683	41.428
		2.798	4.439	0.898	0.841
8	30	-15.769	-30.977	126.781	43.483
		2.670	4.216	0.763	0.541

1 № центра локализации	2 Количество КО	3 $q_1 = c_x$	4 $q_2 = c_y$	5 $q_3 = c_z$	6 $q_4 = a$
9	64	-5.264	-5.424	127.045	41.022
		4.709	6.528	3.165	2.014
10	0	12.840	-23.206	124.118	40.420
		5.967	4.666	1.716	0.947
11	39	-10.128	-17.827	126.385	42.149
		10.855	7.961	1.901	0.194
12	83	1.877	-0.401	129.680	42.209
		1.814	0.742	0.236	0.151
13	36	-11.707	-40.743	124.527	44.218
		6.955	6.177	3.779	2.278
14	33	8.165	-7.903	125.090	40.018
		5.791	8.236	3.386	2.222
15	24	13.312	-4.888	130.073	43.301
		6.329	3.746	3.111	1.565
16	15	1.454	0.529	128.038	41.171
		0.702	0.307	1.216	0.802
17	47	6.406	-2.673	124.281	39.930
		5.956	6.213	3.687	2.408
18	52	-16.104	-24.853	126.334	42.248
		0.582	1.239	0.201	0.221
19	12	-15.773	-18.655	127.807	44.060
		9.180	10.024	5.652	3.200
20	29	8.673	-31.266	125.657	42.344
		3.493	3.702	1.228	0.504
21	24	-0.684	-0.886	128.667	42.037
		3.558	5.380	2.464	1.259
22	24	16.906	-18.726	121.979	40.522
		11.037	13.824	4.926	3.068
23	13	-29.839	-33.730	122.116	43.836
		12.541	5.905	6.783	3.028
24	8	6.104	-4.392	126.582	40.491
		3.510	4.846	3.193	1.969
25	16	30.107	-9.387	121.360	42.098
		12.152	27.318	4.199	0.696
26	8	-14.417	-29.441	126.131	42.831
		3.307	3.920	0.913	1.201
27	21	-14.023	-17.689	125.802	42.194
		7.893	9.288	1.754	1.078
28	6	16.590	-13.680	126.214	41.919
		1.844	5.665	0.635	0.399

Наглядное представление о расположении плоскостей КО дает Рис. 3. На нем красным цветом изображено расположение точек нормали (прямое восхождение и склонение в СК ЕМЕ2000) к плоскостям КО. Кружками синего цвета разного диаметра показано расположение нормалей к плоскостям точек локализации. Кружки большего диаметра соответствуют точкам локализации,

представляющим группу, содержащую большее число КО (см. столбец 2 таблицы 5). На Рис. 4 видно, что нормали к плоскостям ГСО образуют характерное кольцо, что отражает хорошо известное явление прецессии плоскости пассивных КО на ГСО под действием гравитации Луны и Солнца.

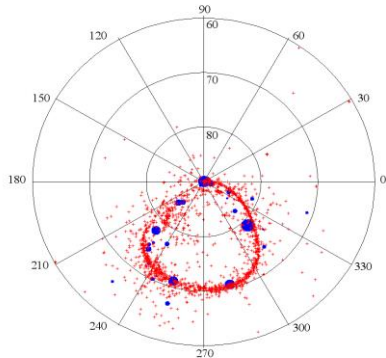


Рис. 3. Положения центров локализации и каталогизированных объектов в пространстве параметров нормали к плоскости орбиты

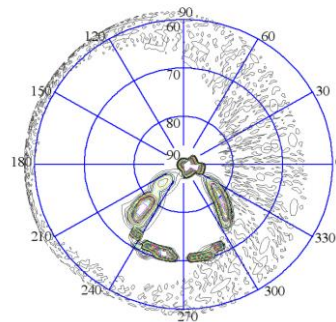


Рис. 4) Линии уровня плотности вероятности нахождения КО в окрестности нормали к плоскости орбиты, рассчитанные по центрам локализации

Заключение

Разработана статистическая модель распределения орбитальных параметров объектов техногенного происхождения в ОКП. Алгоритм формирования параметров модели разработан на основе информации о каталогизированных КО. Математическая модель и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса.

Библиографический список

- [1] Classification of geosynchronous objects, ESA, 28 March, 2015, Issue 17.
- [2] Степаньянц В.А., Львов Д.В. Эффективный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений движения // Математическое моделирование. — 2000 — т. 12 — № 3 — С. 9–14.
- [3] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г.Н. Дубошин. — Наука, 1976. — С. 864.
- [4] Montenbruck O., Gill E. Satellite orbits: models, methods, applications. ISBN 9783540672807 — Springer — 2000 — С. 370.
- [5] Назаренко А.И. Моделирование космического мусора. ISSN 2075-6836, Москва, 2013.
- [6] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир. 1978, с. 105.