



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 93 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Карпов С.А., Потапенко И.Ф.

Решение сеточным методом
пространственно
неоднородного
кинетического уравнения
для электронов в
квазинейтральном режиме

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Решение сеточным методом пространственно неоднородного кинетического уравнения для электронов в квазинейтральном режиме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 93. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2018-93](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-93)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-93>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

С.А. Карпов, И.Ф. Потапенко

Решение сеточным методом пространственно
неоднородного кинетического уравнения для
электронов в квазинейтральном режиме

Москва
2018

С.А. Карпов, И.Ф. Потапенко

Решение сеточным методом пространственно неоднородного кинетического уравнения для электронов в квазинейтральном режиме

Предложен алгоритм численного решения кинетического уравнения Власова-Ландау для плазмы в 1D2V геометрии. Нелинейный интеграл столкновений рассчитывается с помощью полностью консервативных разностных схем. Самосогласованное электрическое поле вычисляется из условия электронейтральности на каждом шаге по времени. Представлены результаты расчетов релаксации начального температурного профиля в полупространстве.

Ключевые слова: кулоновские столкновения, уравнение Ландау - Фоккера - Планка, полностью консервативные разностные схемы, квазинейтральный предел

S.A. Karpov, I.F. Potapenko

Space nonuniform electron kinetic equation solution by finite difference method in quasi neutral regime

Algorithm for the numerical solution of the Vlasov-Landau kinetic equation in 1D2V geometry is suggested. The nonlinear collision operator is computed on the base of the completely conservative difference scheme. Self consistent electrical field is computed from the condition of quasi neutrality at each time step. The numerical results for the initial temperature profile relaxation in the semi-space are presented.

Key words: Coulomb collisions, Landau - Fokker - Planck equation, completely conservative difference schemes, quasineutral limit

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Грант № 17-51-52007а и № 18-32-00406.

Оглавление

Введение	3
Уравнение Власова-Ландау с электрон-ионным интегралом столкновений ..	5
Алгоритм решения 1D2V кинетического уравнения	9
Релаксация начального температурного профиля в полупространстве	14
Заключение	18
Библиографический список	19

Введение

К настоящему времени накоплен целый ряд экспериментальных данных, подтверждающих представления о нелокальном характере теплопереноса в термоядерной плазме и свидетельствующих о невозможности описания теплового переноса в рамках гидродинамических моделей, приводящих, например, к значительной переоценке потока энергии [1] - [3].

Создание и развитие многомерных кинетических кодов представляет не только самостоятельный научный интерес, но и, учитывая стремительный прогресс в суперкомпьютерных технологиях, является необходимым условием полноценного гидро-кинетического численного моделирования сложных крупномасштабных явлений в физике плазмы. Однако и более простые, меньшей размерности, модели являются весьма полезными, поскольку могут служить реперными точками для более сложных кодов.

Общий вид кинетического уравнения Власова-Ландау для функции распределения $f_\alpha(r, v, t)$, $\alpha = e, i$, зависящей от пространственной координаты \mathbf{r} , скорости \mathbf{v} и времени $t \geq 0$, имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{\beta} \hat{J}[f_\alpha, f_\beta],$$

где m_α - масса частиц α -ого сорта, \mathbf{F}_α - сила, действующая на частицы сорта α . В правой части уравнения стоит оператор (интеграл) столкновений Ландау [4]. В данной работе в кинетическом уравнении мы будем учитывать только самосогласованное электрическое поле E , тогда в уравнении $F = Z_\alpha e E$, где $Z_\alpha e$ - заряд ионов.

В настоящее время есть множество кодов для численного решения неоднородного кинетического уравнения как методом прямого дискретного моделирования, спектральными методами, так и методами конечных разностей (см., например, работу [5] и ссылки в ней). Поскольку существует класс важных задач, когда существенно лишь одно направление по пространству, а в моментном пространстве функция распределения обладает азимутальной симметрией, то размерность модели понижается: 1D в геометрическом и 2D скоростном пространствах, соответственно. В связи с этим использование детерминистических подходов выглядит вполне естественным.

Одномерное пространственно неоднородное уравнение, включающее оператор столкновений для электронов и тяжелых ионов, численно решалось во многих работах (см., например, работу [6] и ссылки в ней). В работе [7] был разработан алгоритм решения подобного уравнения, однако сила (электрическое поле) была внешней, не самосогласованной. Кроме того, численное решение находилось с помощью явной разностной схемы. Такой алгоритм прост

в реализации, однако он обладает существенными ограничениями, присущими явным схемам, которые в случае наличия столкновительного оператора оказываются особенно жесткими.

В данной работе представлен оптимизированный ресурсосберегающий (по времени) алгоритм численного решения кинетического уравнения для плазмы с учетом столкновений в 1D2V геометрии. Приведено уравнение Власова-Ландау и операторы, входящие в него, дана постановка задачи. Далее приводится оптимизированный численный явно-неявный алгоритм. Вкратце он основан на следующих этапах. Уравнение расщепляется по физическим процессам, как это часто делается, на два блока: перенос в пространстве (власовская часть) и столкновения в пространстве скоростей (оператор столкновения Ландау). Нелинейный оператор кулоновских столкновений аппроксимируется с помощью полностью консервативной неявной конечно-разностной схемы, которая решается прогонкой и итерируется на временном шаге. Для аппроксимации власовской части кинетического уравнения использована явная схема, построенная с помощью метода конечных объемов. Расчет самосогласованного электрического поля производится, исходя из условия электронейтральности на каждом шаге по времени. Нахождение значения электрического поля основано на асимптотически-корректной схеме для одномерного уравнения Власова.

Далее, в качестве иллюстративного примера рассмотрена граничная задача релаксации начального температурного профиля $T(x)$ в полупространстве $0 \leq x < \infty$. При этом начальный профиль температур имеет различную степень крутизны градиента. Представлены результаты численного моделирования релаксации температуры электронов с характерным масштабом неоднородности $L_T = (d \ln T_e / dx)^{-1}$, таким что $\delta_T = \lambda_{ei} / L_T \sim 0.01$, для различных зарядов ионов Z . Здесь Z - зарядовое число, λ_{ei} - длина свободного пробега, L_T - характерный размер задачи. Результаты кинетических расчетов хорошо согласуются с данными, полученными из классической теории переноса [8, 9], при $Z \simeq 1$ и отличаются при $Z \geq 10$, что соответствует критерию применимости классической теории $\delta_T \ll 0.06 / \sqrt{Z}$, приведенному в работах [10, 11]. Кроме того, результаты численного кинетического моделирования точнее описывают вклад горячих электронов в перенос тепла. При пространственной релаксации температуры $T(x)$ локальное распределение Максвелла не всегда, в зависимости от степени крутизны градиента температуры, успевает установиться в сверхтепловой области $v \gg v_{th}$. Предполагается, что эти хвостовые электроны вносят дополнительный вклад в нагрев плазмы, обеспечивают так называемый предпрогрев при распространении тепла в плазме. Этому вопросу было уделено специальное внимание при численных расчетах.

Уравнение Власова-Ландау с электрон-ионным интегралом столкновений

Рассмотрим плазму без магнитного поля. В качестве выделенного направления принимается направление электрического поля E - выделенное направление вдоль оси Ox . Тогда функция распределения f_α частиц сорта α зависит от времени t , пространственной координаты x , модуля скорости $v = |\mathbf{v}|$ и косинуса угла $\mu = \cos \vartheta$ ($-1 \leq \mu \leq 1$) между вектором скорости и осью Ox .

Для анализа столкновительных процессов введем важные параметры: $v_{T_0} = (kT_0/m_e)^{1/2}$ - тепловая скорость электронов при температуре T_0 , ν_0 - характерная частота столкновений и $\lambda_0 = v_{T_0}/\nu_0$ - соответствующая длина свободного пробега электронов. Эти параметры дают нам возможность масштабирования время, пространство и скорость

$$\tilde{t} = t\nu_0, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\lambda_0}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_{T_0}}.$$

Тогда безразмерные величины электрического поля, плотности числа частиц, тока и функции распределения частиц сорта α заданы следующим образом

$$e\tilde{E}_x = \frac{eE_x}{m_e\nu_{T_0}\nu_0}, \quad \tilde{n}_\alpha = \frac{n_\alpha}{n_0}, \quad \tilde{j}_\alpha = \frac{j_\alpha}{e\nu_{T_0}n_0}, \quad \tilde{f}_\alpha = \frac{2\pi\nu_{T_0}^3 f_\alpha}{n_0},$$

где n_0 - начальная плотность электронов, Z_α и m_α - заряд и масса частиц сорта α , обезразмеренные на заряд и массу электрона (e и m_e).

В этих безразмерных единицах кинетическое уравнение Больцмана можно записать в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \frac{Z_\alpha E_x}{m_\alpha} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mu f_\alpha) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) f_\alpha) \right\} = I[f_\alpha]. \quad (1)$$

Число частиц и энергия в наших единицах имеют вид

$$n_\alpha(x, t) = \int_0^\infty dv v^2 \int_{-1}^1 d\mu f_\alpha(x, v, \mu, t), \quad \langle \varepsilon_\alpha(x, t) \rangle = \frac{m_\beta}{2} \int_0^\infty dv v^4 \int_{-1}^1 d\mu f_\alpha(x, v, \mu, t).$$

В правой части уравнения (1) стоит оператор (интеграл) кулоновских столкновений Ландау [4]. В расчетах в данной работе используется другая форма записи этого уравнения, а именно в форме нелинейного уравнения

Фоккера - Планка [12]. В этом уравнении коэффициенты уравнения выражаются через интегралы (моменты) от функции распределения. Мы используем следующее упрощение в уравнении Фоккера- Планка: коэффициенты в операторе столкновений, зависят от функции распределения через изотропные потенциалы Розенблюта, т.е. не зависят от угла. Это обстоятельство, строго говоря, должно вносить в результаты некоторое слабое ускорение релаксационных процессов.

Для того чтобы получить выполнение разностных аналогов законов сохранения числа частиц и энергии в дискретном случае, при аппроксимации конечно-разностным методом используем дважды дивергентную форму записи оператора столкновений [13, 5]

$$I[f_\alpha] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} W(f_\alpha, v) \right] + \frac{C(f_\alpha, v)}{v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mu} \right] \quad (2)$$

при следующих граничных условиях для функции распределения:

$$f_\alpha \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0, \quad f_\alpha|_{v=0} - \text{ограничена.}$$

В интеграле столкновений (2) нелинейный оператор $W(f_\alpha, v)$ имеет симметричную форму

$$W(f_\alpha, v) = m_\alpha \zeta_\alpha \sum_\beta \kappa_{\alpha\beta} \int_0^v \left\{ \frac{1}{m_\beta} F_\beta(y) [p_\alpha(y, \mu) - p_\alpha(v, \mu)] - \frac{1}{m_\alpha} P_\beta(y) [f_\alpha(y, \mu) - f_\alpha(v, \mu)] \right\} y^2 dy,$$

где $\zeta_\alpha = \varsigma Z_\alpha^2 / m_\alpha^2$, $\varsigma = 4\pi n_0 e^4 \Lambda_{ee} / (m_e^2 v_{T_0}^3 \nu_0)$, $\kappa_{\alpha\beta} = 1/2 Z_\beta^2 \Lambda_{\alpha\beta} / \Lambda_{ee}$, $\Lambda_{\alpha\beta}$ - кулоновский логарифм, а коэффициент при угловом операторе рассеяния есть сумма моментов функции распределения

$$C(f_\alpha, v) = \frac{\zeta_\alpha}{2v} \sum_\beta \kappa_{\alpha\beta} [N_\beta(v) - R_\beta(v)/v^2 + vP_\beta(v)].$$

Здесь

$$F_\alpha(v) = \int_{-1}^1 f_\alpha(v, \mu) d\mu, \quad p_\alpha(v, \mu) = \int_v^\infty f_\alpha(y, \mu) y dy,$$

и

$$P_\alpha(v) = \int_{-1}^1 p_\alpha(v, \mu) d\mu, \quad N_\alpha(v) = \int_0^v F_\alpha(y) y^2 dy, \quad R_\alpha(v) = \int_0^v P_\alpha(y) y^2 dy.$$

Для вычисления электрического поля вместо уравнения Пуассона воспользуемся уравнением Ампера (которое должно выполняться в начальный момент времени)

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{j_x}{a^2}, \quad (3)$$

где параметр $a = \nu_0/\omega_{pe} \ll 1$ - отношение характерной частоты столкновений к электронной плазменной частоте ω_{pe} , и суммарный ток равен

$$j_x = \sum_{\alpha} j_{\alpha}(x, t) = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} \int_0^{\infty} dv v^3 \int_{-1}^1 d\mu \mu f_{\alpha}(x, v, \mu, t).$$

Для построения асимптотически-корректной схемы расчета самосогласованного электрического поля (следуя работе [6]) умножим уравнение (1) на $v_x = v\mu$ и проинтегрируем обе части уравнения по всему пространству скоростей, просуммировав затем по всем сортам частиц α , получим

$$\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) - \eta E_x = J(x, t), \quad (4)$$

где введены следующие обозначения

$$P(x, t) = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} \int_0^{\infty} dv v^4 \int_{-1}^1 d\mu \mu^2 f_{\alpha}(x, v, \mu, t),$$

$$J(x, t) = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} \int_0^{\infty} dv v^3 \int_{-1}^1 d\mu \mu I[f_{\alpha}], \quad \eta = \sum_{\alpha} \frac{Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}(x, t)}{m_{\alpha}}.$$

Продифференцировав уравнение Ампера (3) по времени, из (4) получим уравнение для поля

$$a^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \eta E_x = \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) - J(x, t). \quad (5)$$

Тогда систему уравнений (1), (3) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} + \frac{Z_{\alpha} E_x}{m_{\alpha}} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mu f_{\alpha}) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) f_{\alpha}) \right\} = I[f_{\alpha}], \quad (6)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \eta E_x = \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) - J(x, t).$$

Следует заметить, что параметр a связан с параметром неидеальности плазмы, или с числом частиц в дебаевской сфере. Он практически всегда

мал $a \ll 1$. Тогда условие применимости концепции квазинейтральности определяется в пределе как

$$\text{при } a \rightarrow 0 \Rightarrow j_x \rightarrow 0.$$

В этом предельном случае система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \frac{Z_\alpha E_x}{m_\alpha} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mu f_\alpha) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) f_\alpha) \right\} &= I[f_\alpha], \\ E_x &= \frac{1}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial x} P(x, t) - J(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Важно отметить, что как для системы (6), так и для системы (7), в начальный момент времени электрическое поле $E_x(x, t = 0)$ должно удовлетворять уравнению Пуассона, а при численном решении обязательно выполнение разностного аналога уравнения неразрывности на каждом шаге по времени.

Начальные функции распределения $f_\alpha^{(0)}(x, v, \mu)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty dv v^2 f_\alpha^{(0)}(x, v, \mu) = n_\alpha^{(0)}(x)$$

и определяются заданными начальными профилями плотности $n_\alpha^{(0)}(x)$ и температуры $T_\alpha^{(0)}(x)$, например, с помощью максвелловского распределения

$$f_\alpha(x, v) = \frac{n_\alpha^{(0)}(x)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m_\alpha}{T_\alpha^{(0)}(x)} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha^{(0)}(x)} \right).$$

В последующие моменты времени температура $T_\alpha(x, t)$ и тепловой поток $Q_\alpha(x, t)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} T_\alpha(x, t) &= \frac{m_\alpha}{3} \int_0^\infty dv v^4 \int_{-1}^1 d\mu f_\alpha(x, v, \mu, t), \\ Q_\alpha(x, t) &= \frac{m_\alpha}{2} \int_0^\infty dv v^5 \int_{-1}^1 d\mu \mu f_\alpha(x, v, \mu, t). \end{aligned}$$

Для постановки граничных условий воспользуемся моделями зеркального и диффузионного отражения. При зеркальном отражении на границе области X_0 компонента скорости частицы перпендикулярная границе меняет знак, а касательные проекции скорости остаются неизменными, таким образом, в одномерном случае

$$f_\alpha^{(1)}(X_0, v, \mu, t) = f_\alpha(X_0, v, -\mu, t),$$

что соответствует равному нулю потоку частиц на границе

$$\int_{-1}^1 d\mu \mu f_\alpha(x, v, \mu, t) = 0.$$

При диффузионном отражении распределение частиц на границе может быть максвелловским с заданной температурой T_1 . При этом поток частиц также должен быть равен нулю, поэтому, например, на левой границе для функции распределения отраженных частиц имеем

$$f_\alpha^{(2)}(X_0, v, \mu > 0, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m_\alpha}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_1}\right),$$

где

$$\sigma = -\left(\frac{2\pi m}{kT_1}\right)^{1/2} \int_0^\infty dv \int_{\mu < 0} d\mu v^3 \mu f(X_0, v, \mu, t).$$

В итоге можно ввести коэффициент аккомодации $0 \leq \theta \leq 1$ и комбинированное граничное условие на левой границе

$$f_\alpha(X_0, v, \mu, t) = (1 - \theta) f_\alpha^{(1)}(X_0, v, -\mu, t) + \theta f_\alpha^{(2)}(X_0, v, \mu, t).$$

Граничное условие на правой границе определяется аналогичным образом.

Алгоритм решения 1D2V кинетического уравнения

Перейдем к описанию дискретной модели. Рассмотрим расчетную область размера L по координате x , в пространстве скоростей введем максимальное значение модуля скорости V_{max} , так что $f|_{v \rightarrow \infty} = f(V_{max}) = 0$, и введем пространственно-временную сетку $\omega = \omega_x \times \omega_v \times \omega_\mu \times \omega_t$, где

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{x_l = x_{l-1} + h_l^x, \quad l = 2, \dots, N_x, \quad x_1 = 0, \quad x_{N_x} = L\}, \\ \omega_v &= \{v_i = v_{i-1} + h_i^v, \quad i = 2, \dots, N_v, \quad v_0 = 0, \quad v_{N_v} = V_{max}\}, \\ \omega_\mu &= \{\mu_k = \mu_{k-1} + h_k^\mu, \quad k = 2, \dots, N_\mu, \quad \mu_1 = -1, \quad \mu_{N_\mu} = 1\}, \\ \omega_t &= \{t^{n+1} = t^n + \tau, \quad n = 0, 1, \dots, \quad t^0 = 0\}. \end{aligned}$$

Также введем дополнительные обозначения для определения границ ячеек пространственной сетки $\omega_v \times \omega_\mu$

$$\begin{aligned} v_{i+1/2} &= 0.5(v_i + v_{i+1}), \quad \bar{h}_i^v = 0.5(h_i^v + h_{i+1}^v), \quad 1 \leq i \leq N_v - 1, \\ \mu_{k+1/2} &= 0.5(\mu_k + \mu_{k+1}), \quad \bar{h}_k^\mu = 0.5(h_k^\mu + h_{k+1}^\mu), \quad 2 \leq k \leq N_\mu - 1, \\ v_{1/2} &= 0, \quad \mu_{1/2} = -1, \quad \mu_{N_\mu+1/2} = 1, \quad \bar{h}_1^\mu = 0.5h_2^\mu, \quad \bar{h}_{N_\mu}^\mu = 0.5h_{N_\mu}^\mu, \end{aligned} \quad (8)$$

где для удобства сквозного счета введены фиктивные точки. Аналогичные обозначения вводятся и на сетке ω_x . Значения функции распределения с n -го шага по времени будем обозначать $f_{i,k,l}^{\alpha,n}$, тогда, используя метод конечных объемов, получим конечно-разностный аналог кинетического уравнения (1) в виде

$$\frac{f_{i,k,l}^{\alpha,n+1} - f_{i,k,l}^{\alpha,n}}{\tau} + v_i \hat{D}_x f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} + \left[\frac{\hat{D}_v f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{v_i^2} + \frac{\hat{D}_\mu f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{v_i} \right] = \hat{I} f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}, \quad (9)$$

где сеточные индексы пробегуют значения $1 \leq i < N_v, 1 \leq k \leq N_\mu, 1 \leq l \leq N_x$, и для операторов в левой части введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \hat{D}_v f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} &= \frac{v_{i+1/2}^2 \Phi_{i+1/2,k,l}^v - v_{i-1/2}^2 \Phi_{i-1/2,k,l}^v}{\hbar_i^v}, \\ \hat{D}_\mu f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} &= \frac{(1 - \mu_{k+1/2}^2) \Phi_{i,k+1/2,l}^\mu - (1 - \mu_{k-1/2}^2) \Phi_{i,k-1/2,l}^\mu}{\hbar_k^\mu}, \\ \hat{D}_x f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} &= \frac{\Phi_{i,k,l+1/2}^x - \Phi_{i,k,l-1/2}^x}{\hbar_l^x}, \end{aligned}$$

потоки через границы ячеек расчетной сетки определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1/2,k,l}^v &= \chi_1^L f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} + \chi_1^R f_{i+1,k,l}^{\alpha,n+1/2}, \\ \Phi_{i,k+1/2,l}^\mu &= \chi_2^L f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} + \chi_2^R f_{i,k+1,l}^{\alpha,n+1/2}, \\ \Phi_{i,k,l+1/2}^x &= \chi_3^L f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} + \chi_3^R f_{i,k,l+1}^{\alpha,n+1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \chi_p^L &= \frac{\chi_p + |\chi_p|}{2}, \quad \chi_p^R = \frac{\chi_p - |\chi_p|}{2}, \quad p = 1, 2, 3, \\ \chi_1 &= \mu_k \gamma_l, \quad \chi_2 = \gamma_l, \quad \chi_3 = \mu_k, \quad \gamma_l = \frac{Z_\alpha E_x^{n+1}}{m_\alpha}. \end{aligned}$$

Оператор в правой части уравнения (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{I} f_{i,k,l}^\alpha &= \frac{\zeta_\alpha}{v_i^2} \left[\frac{U_{i+1/2,k,l}^\alpha - U_{i-1/2,k,l}^\alpha}{\hbar_i^v} + C_{i,k,l}^\alpha \frac{V_{i,k+1/2,l}^\alpha - V_{i,k-1/2,l}^\alpha}{\hbar_k^\mu} \right], \\ U_{i+1/2,k,l}^\alpha &= H_{i+1,k,l}^\alpha f_{i+1,k,l}^\alpha - G_{i,k,l}^\alpha f_{i,k,l}^\alpha, \quad U_{1/2,k,l}^\alpha = 0, \quad f_{N_v,k,l}^\alpha = 0, \\ V_{i,k+1/2,l}^\alpha &= (1 - \mu_{k+1/2}^2) \frac{f_{i,k+1,l}^\alpha - f_{i,k,l}^\alpha}{\hbar_{k+1}^\mu}, \quad V_{i,1/2,l}^\alpha = V_{i,N_\mu+1/2,l}^\alpha = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
H_{i,k,l}^\alpha &= \frac{1}{v_{i-1/2} h_i^v} \sum_\beta \kappa_{\alpha\beta} \left(R_{i-1,k,l}^\beta + \frac{m_\alpha h_i^v}{m_\beta} v_i N_{i-1,k,l}^\beta \right), \quad i \geq 2, \\
G_{i,k,l}^\alpha &= \frac{1}{v_{i+1/2} h_{i+1}^v} \sum_\beta \kappa_{\alpha\beta} \left(R_{i,k,l}^\beta - \frac{m_\alpha h_{i+1}^v}{m_\beta} v_i N_{i,k,l}^\beta \right), \quad i \geq 1, \\
C_{i,k,l}^\alpha &= \frac{1}{2v_i} \sum_\beta \kappa_{\alpha\beta} \left(N_{i,k,l}^\beta - \frac{1}{v_i^2} R_{i,k,l}^\beta + v_{i+1/2} P_{i,k,l}^\beta - \frac{1}{2} F_{i,k,l}^\beta v_i^2 h_{i+1}^v \right), \\
R_{i,k,l}^\beta &= \sum_{j=1}^i P_{j,k,l}^\beta v_j^2 \hbar_j^v, \quad N_{i,k,l}^\beta = \sum_{j=1}^i F_{j,k,l}^\beta v_j^2 \hbar_j^v, \\
P_{i,k,l}^\beta &= \frac{h_{i+1}^v}{2} F_{i,k,l}^\beta v_i + \sum_{j=i+1}^{N_v-1} F_{j,k,l}^\beta v_j \hbar_j^v, \quad F_{i,k,l}^\beta = \sum_{k=1}^{N_\mu} f_{i,k,l}^\beta \hbar_k^\mu.
\end{aligned}$$

Граничные условия по скорости v и углу μ для уравнения (9) определяются из условия выполнения разностного аналога закона сохранения числа частиц. Поскольку все операторы в (9) записаны в дивергентной форме, то для выполнения разностного аналога закона сохранения числа частиц в каждой точке пространственной сетки ω_x достаточно выбрать $V_{max} > 10$, так чтобы

$$\Phi_{N_v+1/2,k,l}^v \sim f_{N_v+1/2,k,l}^{\alpha,n+1/2} \rightarrow 0.$$

Дополнительных ограничений на потоки в других граничных точках не требуется по построению координатной сетки (см. обозначения (8)).

Граничные условия на пространственной сетке ω_x ставятся в зависимости от конкретной задачи. Так, например, в случае периодических граничных условий

$$\Phi_{i,k,1/2}^x = \Phi_{i,k,N_x-1/2}^x, \quad \Phi_{i,k,N_x+1/2}^x = \Phi_{i,k,3/2}^x.$$

В случае зеркального или диффузионного отражения вводятся дополнительные фиктивные узлы $l = 0$ и $l = N_x + 1$. Тогда для зеркального отражения на границе

$$f_{i,k,0}^{\alpha,n+1/2} = f_{i,N_\mu-k+1,2}^{\alpha,n+1/2}, \quad f_{i,k,N_x+1}^{\alpha,n+1/2} = f_{i,N_\mu-k+1,N_x-1}^{\alpha,n+1/2},$$

а при диффузионном отражении с температурой T_1 на границе

$$f_{i,k,0}^{\alpha,n+1/2} = A \exp\left(-\frac{v_i^2}{2T_1}\right), \quad f_{i,k,N_x+1}^{\alpha,n+1/2} = B \exp\left(-\frac{v_i^2}{2T_1}\right),$$

где

$$A = -\frac{\sum_{i=1}^{N_v} v_i^3 \sum_{k=1}^{N_\mu} \chi_3^R f_{i,k,1}^{\alpha,n+1/2}}{\sum_{i=1}^{N_v} v_i^3 \sum_{k=1}^{N_\mu} \chi_3^L \exp(-v_i^2/2T_1)}, \quad B = -\frac{\sum_{i=1}^{N_v} v_i^3 \sum_{k=1}^{N_\mu} \chi_3^L f_{i,k,N_x}^{\alpha,n+1/2}}{\sum_{i=1}^{N_v} v_i^3 \sum_{k=1}^{N_\mu} \chi_3^R \exp(-v_i^2/2T_1)}.$$

Для оптимизации вычислений, решение конечно-разностного уравнения (9) удобно разделить на два этапа

$$\begin{aligned} \frac{f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} - f_{i,k,l}^{\alpha,n}}{\tau} &= \hat{I} f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}, \\ \frac{f_{i,k,l}^{\alpha,n+1} - f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{\tau} + v_i \hat{D}_x f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} + \left[\frac{\hat{D}_v f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{v_i^2} + \frac{\hat{D}_\mu f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{v_i} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Первый этап состоит в вычислении сеточной функции распределения $f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}$ на полуцелом шаге по времени с помощью полностью консервативной неявной конечно-разностной схемы для нелинейного кинетического уравнения Ландау-Фоккера-Планка. Для нахождения решения системы нелинейных разностных уравнений строится итерационная процедура, а на каждой итерации трехточечная система сеточных уравнений решается методом прогонки. На втором этапе для нахождения решения левой части конечно-разностного уравнения (9) применяется простая явная схема.

Полный алгоритм вычисления значений функции распределения на $n+1$ шаге по времени состоит из четырех шагов, которые записываются в следующей последовательности

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} - f_{i,k,l}^{\alpha,n}}{\tau} &= \hat{I} f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} \quad \Rightarrow f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}, \\ 2. \quad \frac{f_{i,k,l}^{\alpha,*} - f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{\tau} &= -v_i \hat{D}_x f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2} \equiv \frac{\delta_x f_{i,k,l}^{\alpha,*}}{\tau}, \\ 3. \quad &\text{вычисление электрического поля } E_{xl}^{n+1}, \\ 4. \quad \frac{f_{i,k,l}^{\alpha,n+1} - f_{i,k,l}^{\alpha,*}}{\tau} &= - \left[\frac{\hat{D}_v f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{v_i^2} + \frac{\hat{D}_\mu f_{i,k,l}^{\alpha,n+1/2}}{v_i} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для вычисления значений самосогласованного электрического поля E_{xl}^{n+1} необходимо воспользоваться конечно-разностным аналогом уравнения для поля

системы (6), который, используя введенные обозначения, можно преобразовать к виду

$$E_{xl}^{n+1} = \frac{1}{a^2/\tau^2 + \eta_l} \left\{ \frac{a^2}{\tau^2} E_{xl}^n - \frac{j_{xl}^{n+1/2}}{\tau} - \sum_{\beta} Z_{\beta} \delta P_{\beta} \right\}, \quad (12)$$

где

$$\delta P_{\beta} = \sum_{i=1}^{N_v-1} \hbar_i^v v_i^3 \sum_{k=1}^{N_{\mu}} \hbar_k^{\mu} \mu_k \delta_x f_{i,k,l}^{\beta}, \quad \eta_l = \sum_{\beta} \frac{Z_{\beta}^2 n_l^{\beta}}{m_{\beta}},$$

а сеточные значения тока и плотности числа частиц рассчитываются по формулам

$$j_{xl}^n = \sum_{\beta} j_{xl}^{\beta n} = \sum_{\beta} Z_{\beta} \sum_{i=1}^{N_v-1} \hbar_i^v v_i^3 \sum_{k=1}^{N_{\mu}} \hbar_k^{\mu} \mu_k f_{i,k,l}^{\beta}, \quad n_l^{\beta} = \sum_{i=1}^{N_v-1} \hbar_i^v v_i^2 \sum_{k=1}^{N_{\mu}} \hbar_k^{\mu} f_{i,k,l}^{\beta}.$$

При этом, значения электрического поля $\{E_{xl}^0\}_{l=1}^{N_x}$ в начальный момент времени должны удовлетворять уравнению Пуассона, а на каждом шаге по времени для каждой компоненты плазмы сеточные значения плотности и электрического тока должны удовлетворять уравнению неразрывности. Из формул для нахождения поля видно, что различные значения параметра a , например, при изменении (формально) со временем в интервале $1 < a \leq 0$, приводят к асимптотически корректной схеме.

Таким образом, приведенный алгоритм имеет первый порядок аппроксимации, сохраняет число частиц и энергию системы. В отличие от полностью явной схемы, когда шаг по времени τ , согласно условию Куранта, должен удовлетворять неравенству

$$\tau \leq \min_{i,k,l} \left\{ \frac{h_l^x}{V_{max}}, \frac{h_i^v h_k^{\mu}}{|\gamma_l|}, h_i^{v3} h_k^{\mu 2} \right\},$$

внедрение в алгоритм неявной схемы для уравнения Ландау - Фоккера - Планка, дает возможность существенно смягчить ограничение на шаг по времени

$$\tau \leq \min \left\{ \min_{i,k,l} \left(\frac{h_l^x}{V_{max}}, \frac{h_i^v h_k^{\mu}}{|\gamma_l|} \right), \left[\sum_{\beta} \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} Z_{\alpha}^2 \kappa_{\alpha\beta} \max_{i,k,l} \left(f_{i,k,l}^{\beta,n} \right) \right]^{-1} \right\},$$

тем самым значительно ускоряя вычислительный процесс (до 20 раз для одних и тех же параметров сетки) и позволяя повысить точность вычислений, за счет уменьшения шагов сетки по скорости h_i^v и углу h_k^{μ} .

Релаксация начального температурного профиля в полупространстве

Для валидации изложенного алгоритма рассмотрим задачу о релаксации начального профиля температуры (см. рис. 1) с характерным масштабам неоднородности $L_T = (d \ln T_e / dx)^{-1}$, таким что $\delta_T = \lambda_{ei} / L_T \sim 0.01$, в плазме с электронной плотностью $n_e = 5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Выбор именно такого начального градиента температуры позволяет сравнить результаты кинетического моделирования с данными, полученными из классической теории переноса [8, 9], а также сопоставить их с количественной оценкой применимости классической теории $\delta_T \ll 0.06 / \sqrt{Z}$, приведенной в работах [10, 11]. Для этого проведем два расчета: с зарядом ионов $Z = 1$, когда критерий применимости классической теории можно считать выполненным, и $Z = 10$, когда критерий не выполняется.

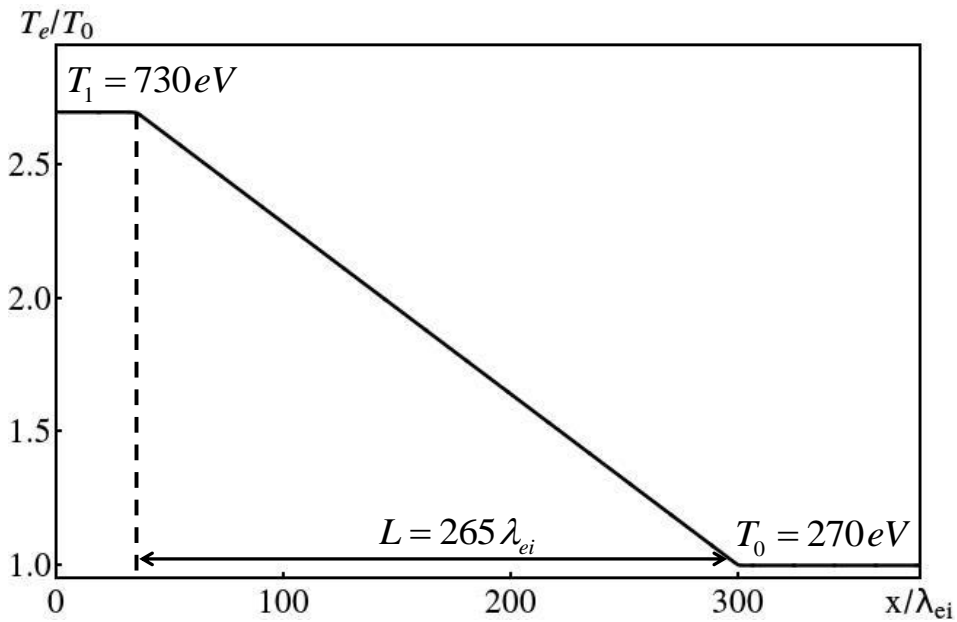


Рис. 1. Начальный профиль электронной температуры.

Напомним кратко, основные положения классической теории электронного теплопереноса. Для достаточно плавных градиентов температуры, когда характерный масштаб неоднородности $L_T \gg \lambda_{ei}$, в задаче присутствует малый параметр $\delta_T = \lambda_{ei} / L_T$. В случае одномерной задачи с азимутальной симметрией в пространстве скоростей, электронную функцию распределения

можно представить в виде

$$f_e(x, v, \mu, t) = F_m(v, T_e(x, t)) + \delta f, \quad \delta f = \sum_{l \geq 0} f_l(x, v, t) P_l(\mu),$$

где $F_m(v, T_e(x, t))$ - локальное максвелловское распределение с температурой $T_e(x, t)$. Тогда из кинетического уравнения (1), выделяя слагаемые одного порядка малости по параметру δ_T , получим бесконечную систему уравнений для функций $f_l(x, v, t), l \geq 0$, первые два уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{E}{3v^2} \frac{\partial v^2 f_1}{\partial v} &= I_{ee} [f_0, F_m], \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial F_m}{\partial x} - E \frac{\partial F_m}{\partial v} &= -\frac{f_1}{v^3} + I_{ee} [f_1, F_m]. \end{aligned} \quad (13)$$

В рамках классической теории переноса $f_e^{SH} = F_m + \mu f_1^{SH}$, где $|f_1^{SH}| \sim \delta_T \ll F_m$, причем, если изменение электронной температуры происходит на масштабах времени много больших τ_{ei} , то предполагается, что электронная функция распределения мгновенно подстраивается под это изменение и производными по времени в уравнениях системы (13) можно пренебречь. Тогда из второго уравнения системы (13) для заданного профиля электронной температуры $T_e(x)$, используя условие $j_e = 0$, можно получить выражения для электрического поля

$$E(x) = -\frac{5}{2} \frac{Z + 1.15}{Z + 2.12} \frac{dT_e}{dx} \quad (14)$$

и анизотропной поправки для максвелловской функции распределения

$$f_1^{SH}(x, v) = \sqrt{\frac{2}{9\pi}} \frac{Z + 0.24}{Z + 4.2} v^4 \left(4 - \frac{v^2}{2T_e} \right) F_m(v, T_e(x)) \frac{d \ln T_e}{dx}. \quad (15)$$

Для электронного теплового потока в таком случае получим

$$q_e(x) = \frac{1}{3} \int_0^\infty dv v^5 f_1 = -\frac{128}{3\pi} \frac{Z + 0.24}{Z + 4.2} T_e^{5/2} \frac{dT_e}{dx}. \quad (16)$$

Таким образом, решив уравнение теплопроводности с тепловым потоком, заданным по формуле (16), получим профиль электронной температуры, из которого по формулам (14) - (16) можно вычислить электрическое поле E , электронный тепловой поток q_e и функцию распределения f_e^{SH} .

Перейдем к сравнению результатов численного кинетического моделирования с классической теорией переноса. На рис. 2 представлена эволюция профилей электрического поля (рис. 2.a), электронной температуры (рис. 2.b) и

электронного теплового потока (рис. 2.f) со временем в плазме с начальным профилем температуры, изображенным на рис. 1, и зарядом ионов $Z = 1$. Сравнение кинетических профилей теплового потока со спитцеровскими профилями (SH), рассчитанными по формуле (16), в моменты времени $10\tau_{ei}$, $30\tau_{ei}$ и $50\tau_{ei}$ представлено на рис. 2.c - 2.e соответственно. Эти рисунки показывают, что кинетический расчет при $Z = 1$ хорошо согласуется с классической теорией переноса при $t \geq 10\tau_{ei}$, когда происходит установление профиля кинетического теплового потока, т.е. максимум профиля теплового потока перестает расти и начинает медленно уменьшаться, смещаясь влево (см. 2.f). Эволюция тех же профилей и аналогичное сравнение для плазмы с зарядом ионов $Z = 10$ представлено на рис. 3. В этом случае максимальное отличие профиля кинетического теплового потока от спитцеровского при $t \geq 30\tau_{ei}$ составляет примерно 1.5-2 раза непосредственно в области, где градиент температуры отличен от нуля, кроме того кинетический тепловой поток возникает и в области "перед градиентом" (см. рис. 3.e при $x \geq 350\lambda_{ei}$), где спитцеровский тепловой поток по определению равен нулю. Последнее отличие носит качественный характер и связано с наличием быстрых электронов, которые обеспечивают предпрогрев плазмы в области "перед градиентом" температуры.

Чтобы сравнить вклад быстрых и медленных электронов в перенос энергии в кинетическом расчете с классической спитцеровской теорией, рассмотрим такие характеристики, как дифференциальный тепловой поток $q_v = v^5 f_1$ и дифференциальный электрический ток $j_v = v^3 f_1$. Они полностью определяются первой анизотропной поправкой $f_1(x, v)$, которая пропорциональна малому параметру δ_T и в рамках классической теории переноса задается формулой (15). Сравнение зависимости кинетического (синяя кривая) и спитцеровского (черная кривая) дифференциального теплового потока q_v от скорости v в момент времени $t = 50\tau_{ei}$ в точках $x = 100\lambda_{ei}$, $200\lambda_{ei}$, $300\lambda_{ei}$ для $Z = 1$ (слева) и $Z = 10$ (справа) представлено на рис. 4. Вклад в тепловой поток дают две группы частиц: быстрые (со скоростью $v \geq 4v_{T_0}$) и медленные ($v \sim 2 - 3v_{T_0}$). При этом распределение частиц по скоростям должно быть таково, чтобы вклады обеих групп в дифференциальный электрический ток j_v компенсировали друг друга (см. рис. 5) и обеспечивали выполнение условия электронейтральности плазмы: $j_e = \int j_v dv = 0$, до тех пор, пока можно пренебречь движением ионов. Возвращаясь к рис. 4 отметим, что при $Z = 1$ вклад быстрых и медленных частиц в кинетический дифференциальный тепловой поток q_v хорошо согласуется со спитцеровской теорией. При $Z = 10$ в области $100\lambda_{ei} \leq x < 250\lambda_{ei}$ вклад быстрых электронов меньше, чем предсказывает спитцеровская теория, поэтому полный электронный тепловой поток оказывается меньше спитцеровского. При $x \geq 300\lambda_{ei}$ вклад в тепловой поток от быстрых частиц в кинетическом расчете оказывается сопоставим и даже превосходит спитцеровский, при этом вклад в перенос

энергии дают электроны со скоростью $v \geq 5 v_{T_0}$, которых в рамках классической теории переноса просто не существует. Здесь следует заметить, что в классической спитцеровской теории теплопереноса $f_e^{SH} = F_m + \mu f_1^{SH}$, где $f_1^{SH} \sim \delta_T$, а следующие поправки по параметру δ_T не учитываются. В то же время в работе [14] показано, что, если в системе (13) учесть следующие по параметру δ_T уравнения, то для максвелловской функции распределения F_m возникает поправка $f_0 \sim Z \delta_T^2$, что подтверждают результаты кинетического моделирования. Так на рис. 6 представлено сравнение изотропной части электронной функции распределения F_0 , полученной из кинетического расчета (синяя кривая), с максвелловской функцией распределения (черная кривая) в точках $x = 100\lambda_{ei}$ (слева) и $300\lambda_{ei}$ (справа) в момент времени $t = 50\tau_{ei}$ для $Z = 10$. Из рисунка видно, что при $x = 100\lambda_{ei}$ изотропная часть электронной функции распределения является максвелловской, но при $x = 300\lambda_{ei}$, в интересующей нас области "перед градиентом температуры", возникает отличие F_0 от максвелловского распределения, которое пропорционально δ_T^2 . Причем оно проявляется именно для быстрых частиц со скоростью $v \geq 5 v_{T_0}$, вклад которых в дифференциальный тепловой поток q_v , отражен в результатах кинетического моделирования и не учитывается в спитцеровской теории переноса, где изотропная часть функции распределения считается максвелловской. Кроме того, сравнивая вклад быстрых частиц (с $v \geq 5 v_{T_0}$) в q_v в точке $x = 300\lambda_{ei}$ для $Z = 1$ и $Z = 10$, из рис. 4 можно видеть, что он увеличивается с ростом Z , что согласуется с аналитическими результатами, полученными в работе [14].

Таким образом, из сравнения результатов численного кинетического моделирования с классической теорией переноса можно сделать вывод, что для выбранного начального градиента температуры ($\delta_T = 0.01$) кинетическое моделирование хорошо согласуется с классической теорией при $Z = 1$, когда выполняется критерий применимости $\delta_T \ll 0.06/\sqrt{Z}$, а при $Z = 10$, когда критерий не выполняется, наблюдается отличие в профилях теплового потока и в структуре электронной функции распределения. В частности, в спитцеровской теории неверно учитывается вклад в перенос тепла горячих электронов, для более точного описания которых требуется учесть следующие поправки по параметру δ_T для электронной функции распределения, т.е. провести полноценное кинетическое моделирование задачи.

Заключение

В данной работе представлен оптимизированный ресурсосберегающий алгоритм численного решения кинетического уравнения для плазмы с учетом столкновений в 1D2V геометрии.

Существенные особенности этого алгоритма следующие. На каждом временном шаге кинетическое уравнение расщепляется на составляющие его оператор переноса и оператор столкновений, которые последовательно численно решаются. На третьем этапе вычисляется самосогласованное электрическое поле. Нелинейный двумерный оператор кулоновских столкновений аппроксимируется с помощью полностью консервативной неявной конечно-разностной схемы второго порядка, которая решается прогонкой и итерациями на каждом временном шаге. Для аппроксимации власовской части кинетического уравнения применяется явная схема первого порядка точности, для построения которой используется метод конечных объемов. Расчет самосогласованного электрического производится исходя из условия электронейтральности плазмы, на основе асимптотически-корректной схемы для одномерного уравнения Власова. Приведенный алгоритм имеет первый порядок аппроксимации, определяемый точностью аппроксимации власовской части. Он сохраняет число частиц и энергию системы. В отличие от полностью явной схемы для кинетического уравнения, внедрение в алгоритм неявной схемы только для уравнения Ландау (Фоккера - Планка) дает возможность существенно смягчить ограничение на шаг по времени τ , тем самым значительно ускоряя вычислительный процесс (до 20 раз для одних и тех же параметров сетки). Это также дает возможность повысить точность вычислений, за счет дополнительного уменьшения шагов пространственной сетки по скорости и углу.

Для иллюстрации алгоритма представлены результаты численного кинетического моделирования релаксации начального профиля температуры электронов с характерным масштабом неоднородности $L_T = (d \ln T_e / dx)^{-1}$, таким что $\delta_T = \lambda_{ei} / L_T \sim 0.01$, для различных зарядов ионов Z . Результаты кинетических расчетов хорошо согласуются с классической теорией переноса при $Z \simeq 1$, когда выполняется критерий применимости классической теории $\delta_T \ll 0.06 / \sqrt{Z}$, то есть при достаточно гладких условиях. Интересна область значений $Z \geq 10$, когда критерий применимости нелокальной теории не выполняется. В этой области, как и ожидалось, наблюдается отличие в профилях теплового потока и в структуре электронной функции распределения. В частности, в спитцеровской теории, которая рассматривает слабые отклонения от локального равновесия, неверно учитывается вклад в перенос тепла электронов, содержащихся в хвостовой части функции распределения. Более точное описание сверхтепловых частиц и их энергетический вклад необходимы при моделировании переноса тепла в плазме при отклонениях от локаль-

ного максвелловского распределения. Величина предподогрева в значительной степени влияет на температуру нагрева, температуру и сжатие мишени в задачах связанных с лазерным термоядерным синтезом.

Библиографический список

- [1] De Groot J.S., Estabrook K.G., Glenzer S.H., Kruer W.L., Matte J.P. Nonlocal electron heat transport in laser driven hohlraums // Bull. Am. Phys. Soc., 1993, v.42, p. 1997.
- [2] Kruer W.L. Electron-energy transport in laser-produced plasmas // Comments Plasma Phys., 1979, v. 5, p. 69.
- [3] Delettrez J. Thermal electron transport in direct-drive laser fusion // Can. J. Phys., 1986, v. 64, p. 932.
- [4] Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия, ЖЭТФ, 1937, № 7, 203.
- [5] Potapenko I.F., Bobylev A.V., Mossberg E. Deterministic and stochastic methods for nonlinear Landau–Fokker–Planck kinetic equations with applications to plasma physics, Transp. Theory Stat. Phys. 37, 113–170, 2008.
- [6] Guisset S., Brull S., Dubroca B., d’Humières E., Karpov S. and Potapenko I. Asymptotic-Preserving Scheme for the M1-Maxwell System in the Quasi-Neutral Regime, Communications in Computational Physics, 19(2), pp. 301–328, 2016.
- [7] Басс Л.П., Долголева Г.В., Потапенко И.Ф. Численный расчет переноса тепла электронами в столкновительной плазме методом конечных разностей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. 86. 22 с. [http : //keldysh.ru/papers/2015/prep2015_86.pdf](http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_86.pdf)
- [8] Spitzer L., Harm R. Transport phenomena in a completely ionized gas. Phys. Rev., 89, 977, 1953.
- [9] Брагинский С. И. Явление переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. ЖЭТФ, 33, 459, 1957.
- [10] Bychenkov V. Yu., Rozmus W., Tikhonchuk V. T., Brantov A. V. Nonlocal electron transport in a plasma. Phys. Rev. Lett., 75, 4405, 1995.

- [11] Брантов А. В., Быченков В. Ю., Тихончук В. Т., Розмус В. Нелокальная электронная гидродинамика плазмы. *ЖЭТФ*, 110, 1301, 1996
- [12] Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force, *Phys.Rev.*, 1957, v. 107, p. 1.
- [13] Потапенко И.Ф. "Энциклопедия низкотемпературной плазмы" . Раздел XX. Модели кинетической теории. Моделирование слабостолкновительной плазмы на основе нелинейного кинетического уравнения Ландау-Фоккера-Планка, глава 5, стр.52-72, 2009.
- [14] Rozmus W., Chapman T., Brantov A., Winjum B. J., Berger R. L., Brunner S., Bychenkov V. Yu., Tableman A., Tzoufras M., and Glenzer S. Resonance between heat-carrying electrons and Langmuir waves in inertial confinement fusion plasmas, *Physics of Plasmas* 23, 012707, 2016.

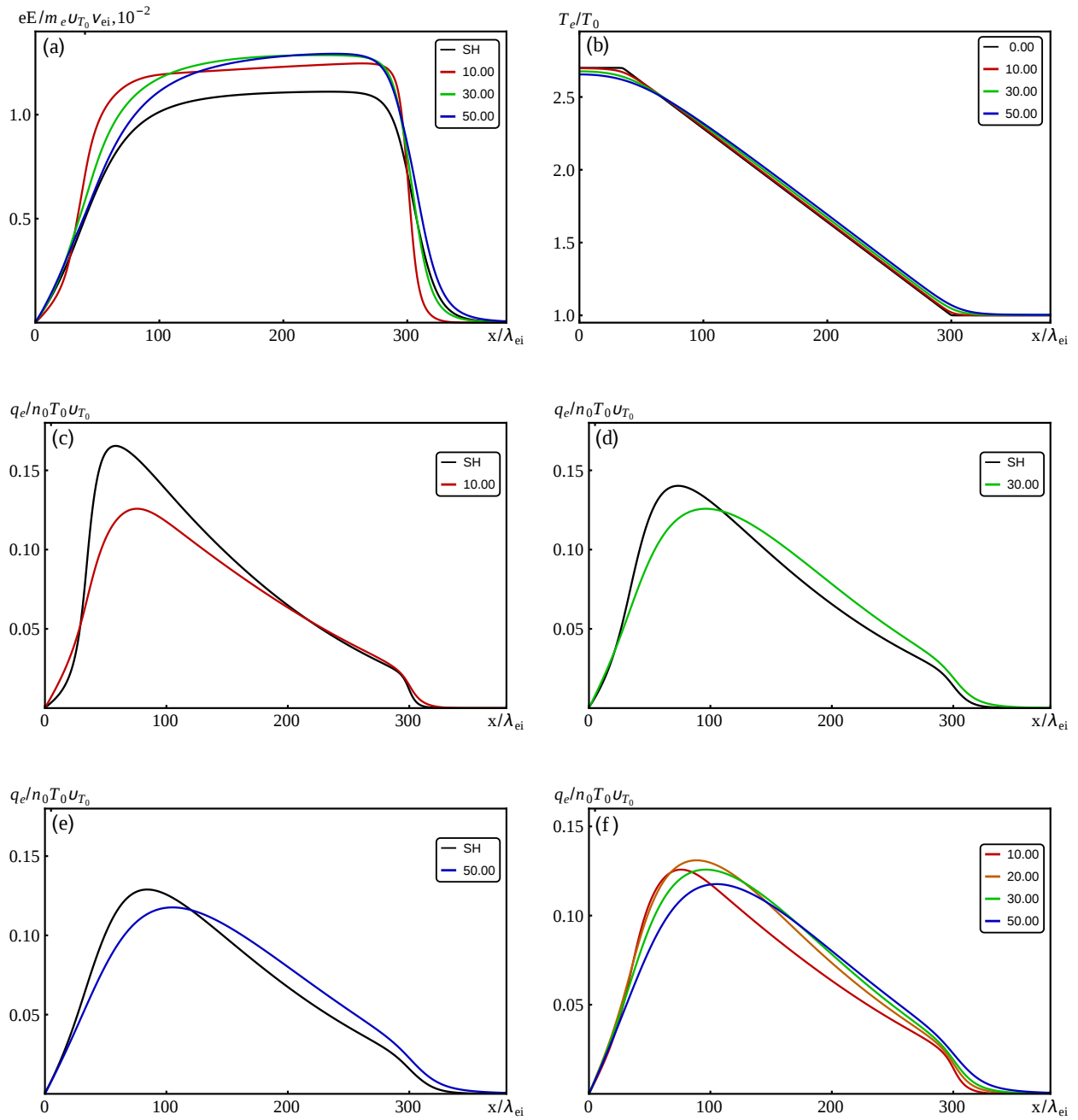


Рис. 2. Эволюция со временем профилей электрического поля E , электронной температуры T_e и теплового потока q_e в плазме с зарядом ионов $Z = 1$ в сравнении с результатами классической теории переноса (SH).

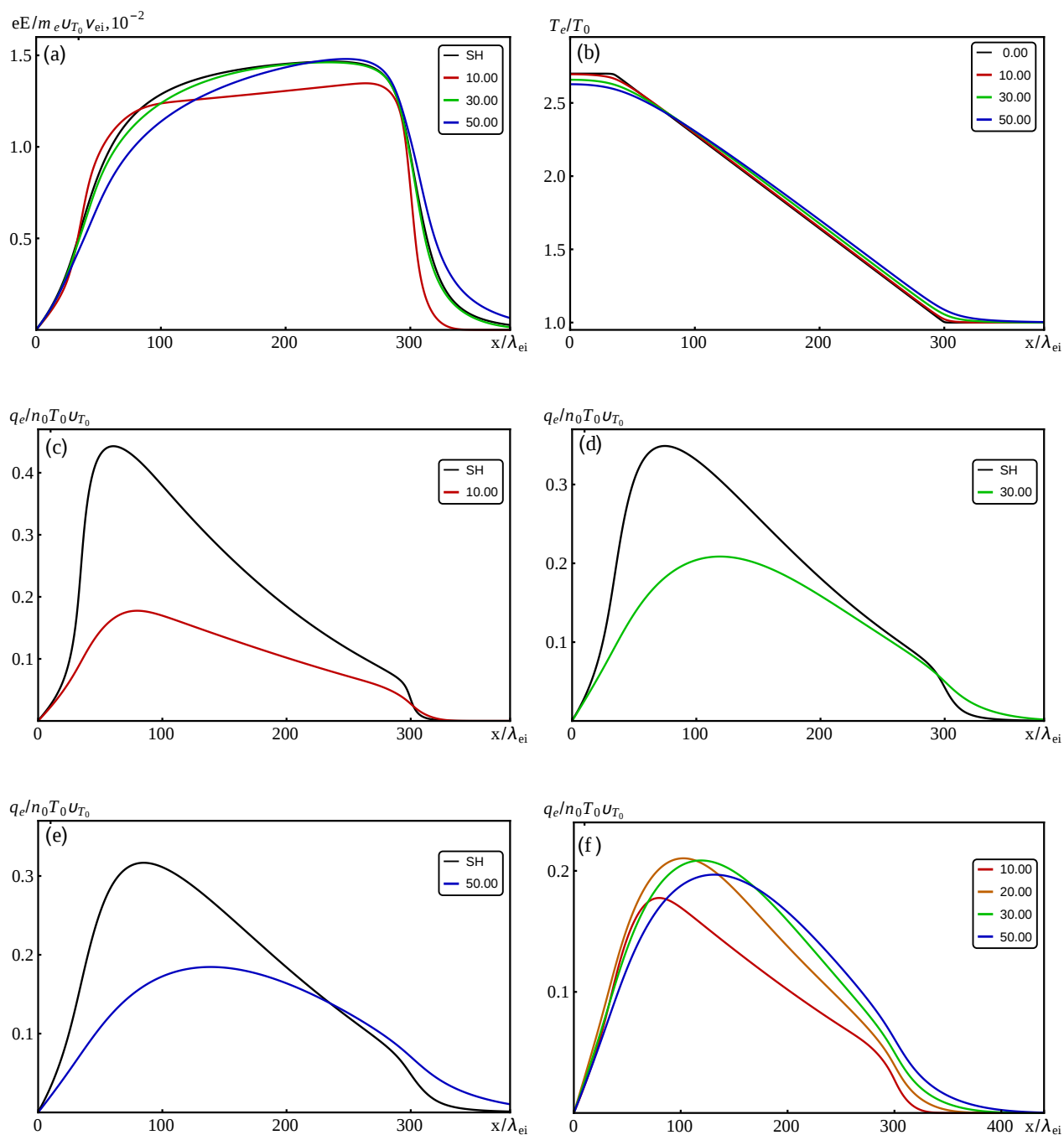


Рис. 3. Эволюция со временем профилей электрического поля E , электронной температуры T_e и теплового потока q_e в плазме с зарядом ионов $Z = 10$ в сравнении с результатами классической теории переноса (SH).

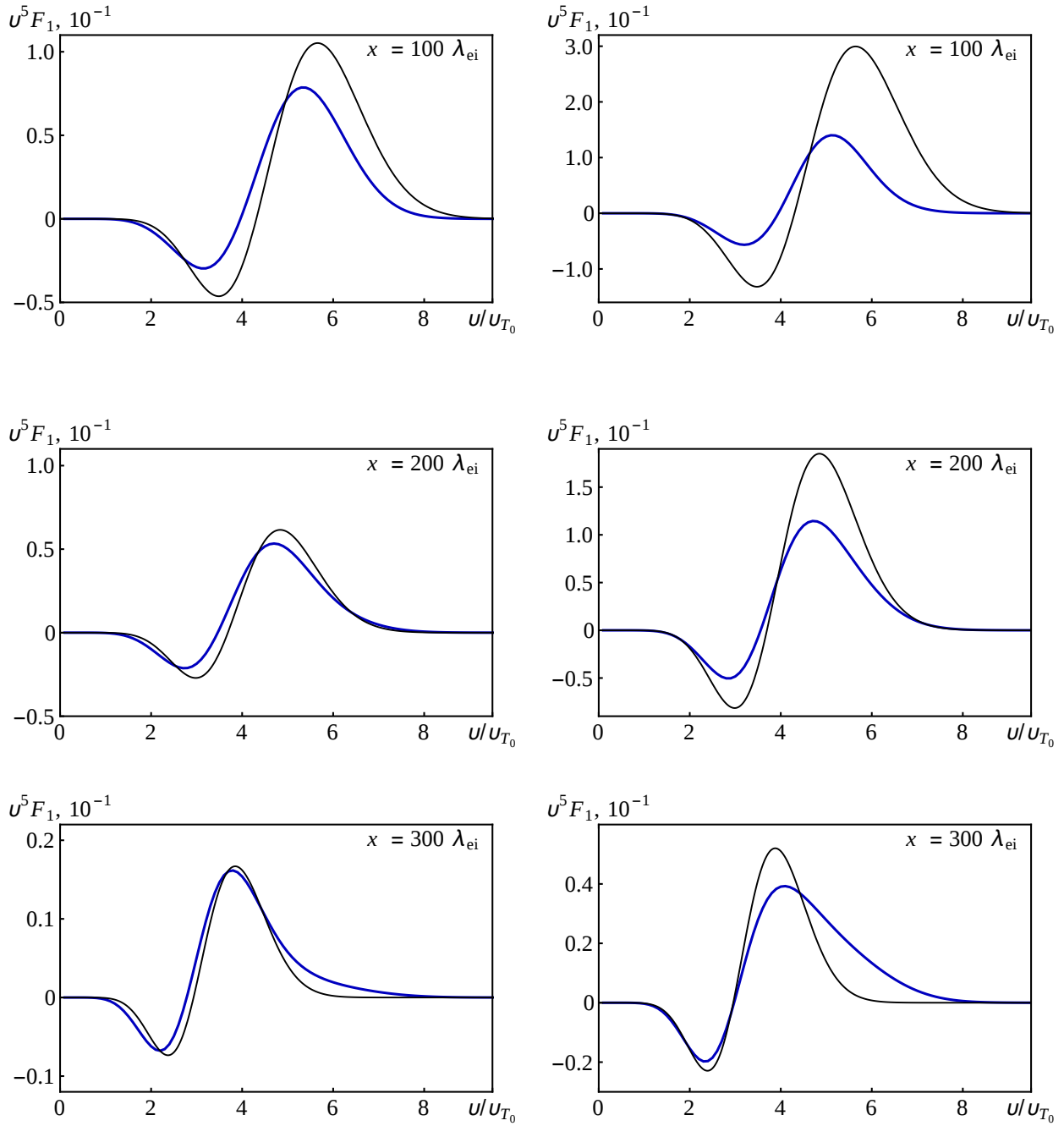


Рис. 4. Сравнение зависимости кинетического (синяя кривая) и спитцеровского (черная кривая) дифференциального теплового потока $q_v = v^5 f_1$ от скорости v в момент времени $t = 50\tau_{ei}$ в точках $x = 100\lambda_{ei}, 200\lambda_{ei}, 300\lambda_{ei}$ для $Z = 1$ (слева) и $Z = 10$ (справа).

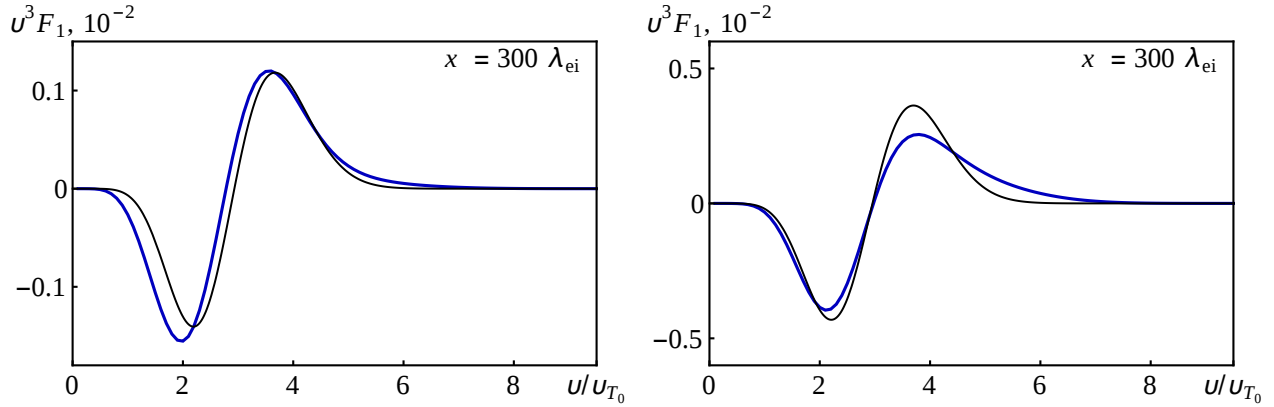


Рис. 5. Сравнение зависимости кинетического (синяя кривая) и спитцеровского (черная кривая) дифференциального тока $j_v = v^3 f_1$ от скорости v в точке $x = 300\lambda_{ei}$ в момент времени $t = 50\tau_{ei}$ для $Z = 1$ (слева) и $Z = 10$ (справа).

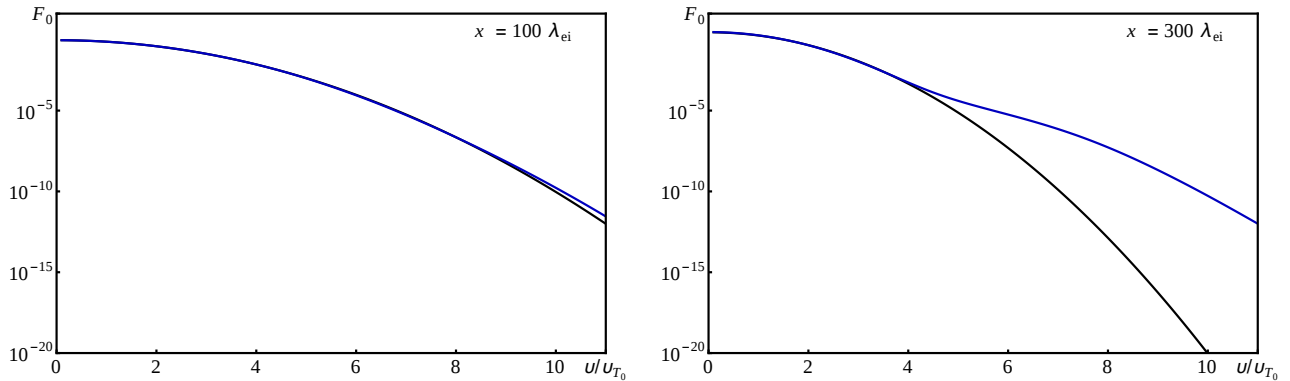


Рис. 6. Зависимость изотропной части электронной функции распределения F_0 от скорости v (синяя кривая) в сравнении с максвелловской функцией распределения (черная кривая) в точках $x = 100\lambda_{ei}$ (слева) и $300\lambda_{ei}$ (справа) в момент времени $t = 50\tau_{ei}$ для $Z = 10$.